UNIVERSIDAD AUTONÓMA DE SANTO DOMINGO
(UASD)

CENTRO UNIVERSITARIO REGIONAL DE SANTIAGO

(CURSA)

EL SIGUIENTE MATERIAL ESTÁ TOMADO DE:

“APUNTES DE LA CÁTEDRA DE LA ASIGNATURA ALGEBRA SUPERIOR (MAT-230), PARA LOS ESTUDIANTES DE GRADO DE LA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SANTO DOMINGO, UASD” DEL PROFESOR **TOMÁS NAVARRO**.

Y

“CURSO DE ÁLGEBRA SUPERIOR” DE LOS PROFESORES **TULIO MATEO DUVAL** Y **ROSA DE PEÑA OLIVARES**

ADAPTADO Y COMPLEMENTADO POR GENARO VIÑAS PARA LA ASIGNATURA:

ALGEBRA SUPERIOR (MAT-230)

CONTIENE:

UNIDAD 1: **ESPACIO VECTORIAL. VECTORES DE R^n**

UNIDAD 2: **TEORIA GENARAL DE LOS POLINOMIOS**

UNIDAD 3: **TEORÍA DE ECUACIONES POLINÓMICAS**

UNIDAD 4: **MATRICES**

UNIDAD 5: **SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (SEL)**

UNIDAD 6: **MATRICES INVERTIBLES**

UNIDAD 7: **DETERMINANTES**

Alfabeto Griego

Mayúsculas	Minúsculas	Nombre
Α	α	Alfa
Β	β	Beta
Γ	γ	Gama
Δ	δ	Delta
Ε	ε	Epsilón
Ζ	ζ	Zita
Η	η	Ita
Θ	θ	Thita
Ι	ι	Iota
Κ	κ	Kapa
Λ	λ	Lamda
Μ	μ	Mi
Ν	ν	Ni
Ξ	ξ	Xi
Ο	ο	Omicrón
Π	π	Pi
Ρ	ρ	Ro
Σ	σ	Sigma
Τ	τ	Tau
Υ	υ	Ípsilon
Φ	ϕ	Fi
Χ	χ	Khi
Ψ	ψ	Psi
Ω	ω	Omega

UNIDAD I: ESPACIO VECTORIAL

1. Conjuntos Numéricos:

1.1. Números Naturales $\mathbb{N}$:

Los **números naturales** son los números que se usan para contar los elementos de un conjunto. Reciben ese nombre porque son los primeros que surgen en las distintas civilizaciones y que utilizó el ser humano para contar objetos, ya que las tareas de contar y de ordenar son las más elementales que se pueden realizar en el tratamiento de las cantidades. El conjunto de los números naturales se representa por $\mathbb{N}$ y corresponde a $\mathbb{N}=\{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

Históricamente el cero no se consideraba número natural porque no tenía una representación *natural*: cero dedos, cero vacas, etc. podrían considerarse puros constructos mentales. Por eso ha existido una controversia acerca de la inclusión del cero dentro de este conjunto. De ahí que no exista acuerdo en la literatura y coexistan definiciones contradictorias de los números naturales. De hecho, algunos matemáticos (especialmente los de la Teoría de Números) prefieren no reconocer el cero como un número natural; otros, especialmente los de Teoría de conjuntos, Lógica e Informática, sostienen la postura opuesta.

1.1.1. Propiedades de los Números Naturales:

1. Es un conjunto ordenado; es decir, entre sus elementos podemos establecer la relación de orden “menor que”, “mayor que” o “igual a” (<, > =).

2. A todo número natural siempre le sigue otro número natural.

3. El conjunto de los números naturales es infinito, es decir, no hay un último número natural.

4. Entre dos números naturales consecutivos no existe ningún otro número natural.

5. las operaciones internas en el conjunto de los números naturales son la suma y la multiplicación, ya que siempre que se sume o se multipliquen dos números naturales el resultado es otro número natural.

1.2. Números Enteros $\mathbb{Z}$:

El conjunto de los **números enteros** es una extensión de los números naturales que surgió por la necesidad de plantear cualquier tipo de sustracción (resta). Con los números naturales no podemos efectuar restas donde el minuendo es menor que el sustraendo, (por ejemplo 5 – 9). Los números enteros resuelven este problema y con ellos podemos efectuar cualquier resta.

El conjunto de los números enteros se representa por $\mathbb{Z}$ y corresponde a

$$\mathbb{Z} = \begin{cases} \mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \\ 0 \\ \mathbb{Z}^- \end{cases}$$

El conjunto de los números enteros están formado por los enteros positivos $\mathbb{Z}^+$ que son los mismos naturales, el cero y los enteros negativos $\mathbb{Z}^-$.

1.2.1. Propiedades de los Números Enteros:

Los números enteros poseen las mismas propiedades de los naturales y además de la suma y la multiplicación, la resta es una operación interna en este conjunto.

1.3. Números Racionales $\mathbb{Q}$:

Al dividir un número entero entre otro entero el resultado no siempre es un entero (por ejemplo $3 \div 5 = 0.6 = \frac{3}{5}$). Por esta razón hubo la necesidad de extender el conjunto $\mathbb{Z}$ de forma que se pudieran realizar todo tipo de divisiones (donde el divisor es diferente de cero). Este nuevo conjunto es el de los números racionales que se representa por $\mathbb{Q}$ y se define como: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \text{ tal que } p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$. Es decir, un número es racional si se puede expresar como el cociente indicado de dos números enteros, o sea en forma de fracción.

$$\mathbb{Q} \begin{cases} Enteros \ (\mathbb{Z}) \\ Fracciones \\ Decimales \ periódicos \end{cases}$$

1.3.1. Propiedades de los Números Racionales:

1. Es un conjunto ordenado e infinito.

2. Es un conjunto denso, esto significa que entre dos números racionales cualesquiera siempre podemos encontrar infinitos números racionales.

3. Las operaciones internas en el conjunto de los números racionales son la suma, la resta y la multiplicación. La división es interna si no tomamos en cuenta el cero, ya que la división entre cero no está definida.

1.4. Números Irracionales $\mathbb{Q}'$:

Hay otros números que no pueden expresarse como el cociente de dos enteros, es decir, no son racionales. Estos forman el conjunto de los **Números Irracionales**. A este conjunto pertenecen las raíces inexactas ($\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{3}$, etc.), los decimales infinitos NO periódicos y algunos números trascendentes como π, e, etc.

1.5. Números Reales $\mathbb{R}$:

La unión de los números racionales y los irracionales da origen a otro conjunto numérico, los reales, es decir: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

1.5.1. Propiedades de los Números Reales:

1. Es un conjunto ordenado e infinito.

2. Es un conjunto denso, esto significa que entre dos números reales cualesquiera siempre podemos encontrar infinitos números reales.

3. Las operaciones internas en el conjunto de los números reales son la suma, la resta y la multiplicación. La división es interna si no tomamos en cuenta el cero, ya que la división entre cero no está definida.

1.6. <u>Propiedades de las Operaciones con Números Reales</u>:

Las operaciones con números reales cumplen las siguientes propiedades: (en cada caso a, b y c son números reales)

1**. Ley uniforme, de cerradura o clausurativa (operación interna):** esta propiedad se cumple para las operaciones que dado dos números reales el resultado de la operación también es un número real. $a+b \in \mathbb{R}$, $a-b \in \mathbb{R}$, $a.b \in \mathbb{R}$ y $a \div b = \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$, siendo $b \neq 0$. Esto significa que la suma, la resta, la multiplicación y la división (si el divisor no es cero) son operaciones internas en los reales.

2. Conmutativa: esta propiedad se cumple para las operaciones donde no importa el orden en que se efectúan. Por ejemplo, en la suma y la multiplicación, no importa el orden en que se realice la operación el resultado no cambia. Esto es: $a+b=b+a$ y $a.b=b.a$. Por eso la suma y la multiplicación cumplen la propiedad conmutativa. La resta y la división no cumplen esta propiedad.

3. **Asociativa:** esta propiedad se cumple para las operaciones donde no importa la forma en que se asocien dos a dos los números que se operan. En la suma y la multiplicación, no importa la forma como se asocien dos a dos los sumandos o los factores, el resultado no cambia. Esto es: $(a+b)+c=a+(b+c)$ y $(a.b).c=a.(b.c)$. Por eso la suma y la multiplicación cumplen la propiedad asociativa. La resta y la división no.

4. **Identidad o elemento neutro**: todo número real que se sume con cero o se multiplique por uno (1) da como resultado el mismo número. Esto es: $a+0=0+a=a$ y $a.(1)=(1).a=a$. Por eso el cero es la identidad o elemento neutro para la suma y el uno para la multiplicación.

5. **Simétrico o inverso:**

a) **Inverso aditivo u opuesto:** siempre que se suma un número real con su opuesto el resultado es el elemento neutro de la suma (cero); es decir, $a+(-a)=-a+a=0$

b) **Inverso multiplicativo o recíproco**: siempre que se multiplica un número real, diferente de cero, por su recíproco el resultado es el elemento neutro de la multiplicación (1); es decir, $a.\frac{1}{a}=\frac{a}{a}=1$ siendo a $\neq$ 0.

6. **Distributiva**:

a) **De la multiplicación respecto a la suma y la resta:** la multiplicación distribuye a la suma y a la resta. Esto es

$a.(b\pm c)=a.b\pm a.c$ distributiva por la derecha y

$(b\pm c).a=b.a\pm c.a$ distributiva por la izquierda.

b) **De la división respecto a la suma y la resta:** la división distribuye a la suma y a la resta, pero sólo por la izquierda. Esto es

$(b\pm c)\div a=b\div a\pm c\div a$ o $\frac{b\pm c}{a}=\frac{b}{a}\pm\frac{c}{a}$.

c) **De la potenciación con respecto a la multiplicación y la división:** la potenciación distribuye a la multiplicación y a la división. Esto es

$(ab)^n=a^n b^n$ y $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$, $b\neq 0$.

d) **De la radicación con respecto a la multiplicación y la división:** la radicación distribuye a la multiplicación y a la división. Esto es

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} \quad \text{y} \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Nota: Es importante tomar en cuenta que la potenciación y radicación no distribuyen a la suma y la resta por lo que

$$(a \pm b)^n \neq a^n \pm b^n \quad \text{y} \quad \sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$$

1.7. <u>Números Complejos</u> $\mathbb{C}$:

Los números reales no resultaron ser suficientes para resolver todos los problemas que se presentaban en el mundo matemático. Por ejemplo, si queremos resolver la ecuación $x^2 + 1 = 0$ vemos que $x^2 = -1$, lo que implica que $x = \pm\sqrt{-1}$. Como ya sabemos, $\sqrt[n]{a} = b \Rightarrow b^n = a$, entonces cuál número real elevado al cuadrado da –1. Ese número no existe en los reales ya que ningún número real elevado al cuadrado da como resultado un número negativo, por lo tanto este tipo de ecuaciones nunca se podrían resolver en los números reales.

Debido a esta dificultad no se podía encontrar la raíz de índice par a un número negativo. Es decir, con los números reales no se puede encontrar $\sqrt{-25}$, $\sqrt[4]{-16}$, $\sqrt[6]{-64}$.

Para poder resolver este problema se crea un nuevo símbolo $i = \sqrt{-1}$ llamado unidad imaginaria, el cual satisface que $i^2 = -1$. Esto permite calcular la raíz de índice par a un número negativo, ya que por ejemplo, $\sqrt{-25} = \sqrt{(-1)(25)} = \sqrt{(25)}\sqrt{(-1)} = \pm 5i$.

A partir de la unidad imaginaria también se crean expresiones de la forma $a + bi$ en donde "a" y "b" son números reales y se da origen a un nuevo conjunto numérico denominado Números Complejos.

En la expresión $a + bi$, a es la parte real y bi la parte imaginaria.

Los números complejos constituyen una ampliación de los números reales. Todo número real puede escribirse como $a+0i$ y todo imaginario como $0+bi$.

El siguiente esquema relaciona todos los conjuntos numéricos:

$$\mathbb{C}\ \text{Complejos}\begin{cases}\mathbb{R}\quad \text{Reales}\begin{cases}\mathbb{Q}\quad \text{Racionales}\begin{cases}\mathbb{Z}\ \text{Enteros}\begin{cases}\mathbb{N}\ \ \text{Naturales}\\ \text{Cero}\\ \mathbb{Z}^{-}\ \ \text{Enteros negativos}\end{cases}\\ \text{Fraccionarios}\\ \text{Decimales periódicos}\end{cases}\\ \mathbb{Q}'\ \ \text{Irracionales}\end{cases}\\ \text{Imaginarios}\end{cases}$$

2. <u>Campo o Cuerpo Numérico</u>:

Definición:

Un conjunto no vacío K en el que se han definido dos operaciones binarias $\oplus$ y $\odot$ es un **cuerpo o campo numérico** si se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\forall a,b \in K;\ (a \oplus b) \in K$; es decir, la operación $\oplus$ es interna o cerrada en K.

2. $\forall a,b,c \in K;\ (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$; es decir, la operación $\oplus$ es asociativa.

3. $\forall a,b \in K;\ a \oplus b = b \oplus a$; es decir, la operación $\oplus$ es conmutativa.

4. $\exists e \in K$ tal que $\forall a \in K,\ a \oplus e = e \oplus a = a$; es decir, existe el elemento neutro de $\oplus$ en K

5. $\forall a \in K,\ \exists -a \in K;$ tal que $a \oplus (-a) = -a \oplus a = e$; es decir, existe el elemento simétrico de $\oplus$ en K.

6. $\forall a,b \in K;\ (a \odot b) \in K$; es decir, la operación $\odot$ es interna o cerrada en K.

7. $\forall a,b,c \in K;\ (a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$; es decir, la operación $\odot$ es asociativa.

8. $\forall a,b \in K;\ a \odot b = b \odot a$; es decir, la operación $\odot$ es conmutativa.

9. $\exists e' \in K$ tal que $\forall a \in K,\ a \odot e' = e' \odot a = a$; es decir, existe el elemento neutro de $\odot$en K.

10. $\forall a \in K, a \neq e, \exists a^{-1} \in K;$ tal que $a \odot a^{-1} = a^{-1} \oplus a = e'$; es decir, existe el elemento simétrico de $\odot$ para todos los elementos diferentes del elemento neutro de $\oplus$ en K.

11. $\forall a,b,c \in K;\ a \odot (b \oplus c) = a \odot b \oplus a \odot c$; es decir, la operación $\odot$ es distributiva con respecto a la operación $\oplus$.

Si se cumplen todas las propiedades, la estructura $(K,\oplus,\odot)$ se denomina campo o cuerpo numérico y los elementos de K son llamados escalares o simplemente números.

Ejemplo:

Si $K = \mathbb{Q}$ (el conjunto de los números racionales) **y** $\oplus, \odot$ las operaciones usuales de suma y multiplicación en $\mathbb{Q}$, entonces $(\mathbb{Q},+,.)$ forman un campo numérico, ya que se cumplen las propiedades requeridas:

1. $\forall a,b \in \mathbb{Q};\ (a+b) \in \mathbb{Q}$. La suma es interna o cerrada en $\mathbb{Q}$.

2. $\forall a,b,c \in \mathbb{Q};\ (a+b)+c = a+(b+c)$. . La suma es asociativa en $\mathbb{Q}$.

3. $\forall a,b \in \mathbb{Q};\ a+b = b+a$. La suma es conmutativa en $\mathbb{Q}$.

4. $\exists 0 \in \mathbb{Q}$ tal que $\forall a \in \mathbb{Q},\ a \oplus 0 = 0 \oplus a = a$. Existe el elemento neutro para la suma en $\mathbb{Q}$ que es el cero.

5. $\forall a \in \mathbb{Q}; \exists -a \in \mathbb{Q}$ tal que $a+(-a) = -a+a = 0$. Existe el elemento simétrico (opuesto o inverso aditivo) para la suma en $\mathbb{Q}$.

6. $\forall a,b \in \mathbb{Q};\ a.b \in \mathbb{Q}$. La multiplicación es interna o cerrada en $\mathbb{Q}$.

7. $\forall a,b,c \in \mathbb{Q};\ (a.b).c = a.(b.c)$. La multiplicación es asociativa en $\mathbb{Q}$.

8. $\forall a,b \in \mathbb{Q};\ a.b = b.a$; La multiplicación es conmutativa en $\mathbb{Q}$.

9. $\exists 1 \in \mathbb{Q}$ tal que $\forall a \in \mathbb{Q},\ a.(1) = 1.a = a$. Existe el elemento neutro (1) para la multiplicación en $\mathbb{Q}$.

10. $\forall a \in \mathbb{Q}; a \neq 0\ \exists\ a^{-1} = \dfrac{1}{a} \in \mathbb{Q}$ tal que $a.\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{a}.a = 1$. Existe el elemento simétrico (recíproco o inverso multiplicativo) para la multiplicación en $\mathbb{Q}$.

11. $\forall a,b,c \in \mathbb{Q};\ a.(b+c)=a.b+a.c$. La multiplicación es distributiva con respecto a la suma en $\mathbb{Q}$.

En conclusión, el conjunto de los números racionales con las operaciones de suma y multiplicación $(\mathbb{Q},+,.)$ forman un campo numérico.

Además de $(\mathbb{Q},+,\cdot)$, las estructuras $(\mathbb{R},+,\cdot)$ y $(\mathbb{C},+,\cdot)$ constituyen cuerpos o campos numéricos.

EJERCICIOS PROPUESTOS

I- Indique a cuál o cuáles conjuntos pertenece cada número marcando con una X.

Número/ Conjunto	**N**	**Z**	**Q**	Q'	**R**
18					
-52					
$\sqrt{7}$					
$\sqrt{-9}$					
$\frac{3}{4}$					
-0.87					
$-\frac{7}{2}$					
1.01232323…					
π					
3.14					
$\sqrt[3]{-27}$					
$\sqrt[4]{-16}$					
$\sqrt{100}$					
$\boldsymbol{e}$					
$\left(\sqrt{5}\right)^2$					

II. Clasifique en verdaderas o falsas las siguientes proposiciones

1. ______ Todo número entero es racional

2. ______ $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$

3. ______Todo número entero es natural

4. ______ $\boldsymbol{N} \cup \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Q}$

5. ______ Hay números racionales y reales a la vez

6. ______ $\boldsymbol{Q} \cup \boldsymbol{Q}' = \boldsymbol{R}$

7. ______ Hay números racionales e irracionales a la vez

8. ______ $\boldsymbol{Z} \cap \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Z}$

9.______ $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^2 = \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2$

10.______ $\sqrt{14} = \sqrt{2}\sqrt{7}$

11. ______ $\sqrt{13} = \sqrt{9} + \sqrt{4}$

12. ______ $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$

13. ______ $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+\boldsymbol{a}$ ejemplifica la propiedad asociativa de la suma

3. <u>Espacio Vectorial</u>:

Definición:

Un conjunto no vacío $\boldsymbol{V}$ junto con dos operaciones $\oplus$ y $\odot$, suma vectorial y multiplicación por escalar respectivamente, forman un **espacio vectorial** sobre un **campo numérico *K*** si se satisfacen las siguientes propiedades:

1. $\forall u, v \in V;\ u \oplus v \in V$; es decir, que la operación $\oplus$ es interna en ***V***.

2. $\forall u, v \in V;\ u \oplus v = v \oplus u$; es decir, que la operación $\oplus$ sea conmutativa.

3. $\forall u, v, w \in V,\ \ (u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$; es decir, que la operación $\oplus$ sea asociativa.

4. $\exists e \in V$ tal que $\forall u \in V,\ \ u \oplus e = e \oplus u = u$; es decir, que exista la identidad de $\oplus$ en ***V***.

5. $\forall u \in V, \exists -u \in V$ tal que , $u \oplus -u = -u \oplus u = e$; es decir, que exista el elemento simétrico de $\oplus$ en ***V***.

6. $\forall u \in V \ \wedge\ \forall h \in K,\ h \odot u \in V$; es decir, al operar un elemento de ***K*** con un elemento de ***V*** el resultado es un elemento de ***V***.

7. $\forall u \in V \ \wedge\ \forall h, k \in K,\ (h.k) \odot u = h \odot (k \odot u)$; es decir, que la operación $\odot$ de dos elementos de ***K*** por un elemento de ***V*** es asociativa.

8. $\forall u,v \in V \ \wedge \ \forall h \in K,\ h \odot (u \oplus v) = h \odot u \oplus h \odot v$; es decir, la operación $\odot$ es distributiva con respecto a $\oplus$.

9. $\forall u \in V \ \wedge \ \forall h,k \in K,\ (h+k) \odot u = h \odot u \oplus k \odot u$; es decir, la operación $\odot$ es distributiva con respecto a la suma de escalares.

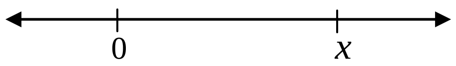
10. $\exists e' \in K$ tal que $\forall u \in V,\ e' \odot u = u \odot e' = u$; es decir, existe el elemento neutro para la operación $\odot$ de un elemento de *V* por uno de *K*.

Si se cumplen todas las propiedades la estructura $(V, \oplus, \odot, K)$ constituye un ***Espacio Vectorial*** y los elementos de ***V*** son llamados **vectores**.

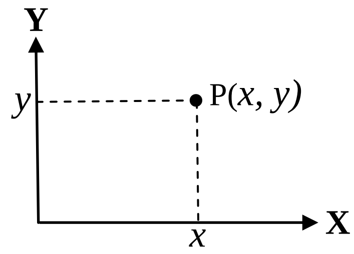
4. Vectores en $\mathbb{R}^n$:

4.1. Definición de puntos en el espacio n-dimensional:

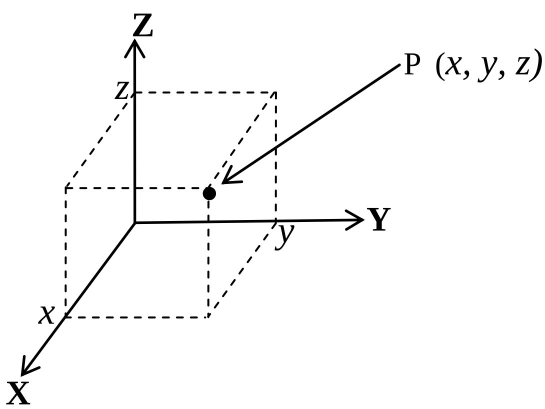
Para representar un punto en una recta, cuando se ha seleccionado la unidad de longitud, podemos utilizar un número real ***x***.



Para representar un punto en el plano podemos utilizar un par de números (*x*, *y*). El conjunto de todos esto puntos constituye el plano XY**.**



Para representar un punto en el espacio podemos utilizar una terna de números (*x*, *y*, *z*). El conjunto de todos esto puntos constituye el espacio XYZ.



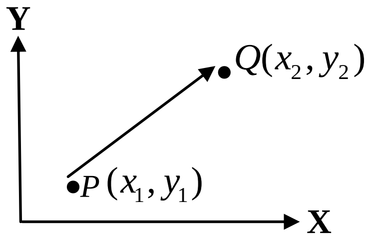
Para los espacios donde ***n*** es mayor que 3 ya no podemos tener una representación gráfica. Cada punto se define a partir de una n-upla ordenada de números reales $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$.

4.2. Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$:

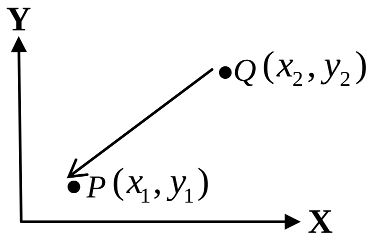
4.2.1. Segmento de recta dirigido:

Sean P y Q dos puntos del plano, entonces al segmento de recta que va desde P hasta Q se le denomina **segmento de recta dirigido** de P a Q y de denota por $\overrightarrow{PQ}$, siendo P el punto inicial y Q el punto final.

Es importante destacar que los segmentos de recta dirigidos $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QP}$ son diferentes ya que tienen sentido opuesto.



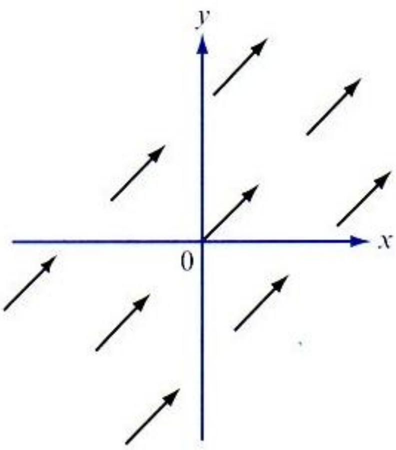
Segmento de recta dirigido $\overrightarrow{PQ}$



Segmento de recta dirigido $\overrightarrow{QP}$

Si dos segmentos de recta dirigidos $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{RS}$ tienen la misma magnitud, dirección y sentido se dice que son **equivalentes** sin importar en donde se localicen respecto al origen.

Los segmentos de rectas dirigidos de la gráfica de la derecha son equivalentes porque tienen la misma magnitud, dirección y sentido.



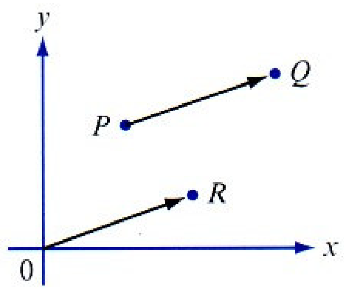
4.2.2. Definición de vector:

Desde el punto de vista geométrico, al conjunto de todos los segmentos de rectas dirigidos equivalentes se le llama **vector** y a cualquiera de ellos se le denomina una **representación del vector**.

Si P y Q son dos puntos del plano tales que $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ entonces el segmento de recta dirigido de P a Q define el vector $\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

Si P y Q son dos puntos del espacio tales que $P=(x_1,y_1,z_1)$ y $Q=(x_2,y_2,z_2)$ entonces el segmento de recta dirigido de P a Q define el vector $\overrightarrow{PQ}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

Dado el segmento de recta dirigido $\overrightarrow{PQ}$ podemos tener un segmento equivalente $\overrightarrow{0R}$ con punto inicial en el origen. Entonces si $R=(x,y)$, $\overrightarrow{0R}=(x-0,y-0)=(x,y)$ y la representación del vector se puede hacer mediante un par ordenado (x,y) de números reales.



A estos vectores, que tienen su origen en el sistema de coordenadas, son a los que en Física se les denomina vectores aplicados en el origen. Aquí estudiaremos este tipo de vectores por la significación algebraica que tienen.

De esta forma identificaremos a todo par ordenado (x,y) de números reales como un vector en el plano y al conjunto de todos ellos lo denominaremos $\mathbb{R}^2$. Es decir, $\mathbb{R} \text{ x } \mathbb{R}=\mathbb{R}^2=\{(x,y)\,/\,x,y\in\mathbb{R}\}$.

De igual forma identificaremos a toda terna ordenada (x,y,z) de números reales como un vector en el espacio y al conjunto de todos ellos lo denominaremos $\mathbb{R}^3$. Es decir, $\mathbb{R} \text{ x } \mathbb{R} \text{ x } \mathbb{R}=\mathbb{R}^3=\{(x,y,z)\,/\,x,y,z\in\mathbb{R}\}$.

4.3. <u>Vectores en $\mathbb{R}^n$</u>:

Esta idea que hemos analizado para $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ la podemos generalizar para espacios de ***n*** dimensiones.

Un vector en $\mathbb{R}^n$ es una ***n-upla*** ordenada $\left(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n\right)$ de números reales. Es decir, $\mathbb{R} \text{ x } \mathbb{R} \text{ x ... x } \mathbb{R}=\mathbb{R}^n=\left\{\left(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n\right)/\,x_1,x_2,x_3,\dots,x_n\in\mathbb{R}\right\}$. A los números $x_1,x_2,x_3,\dots,x_n$ se les llama componentes del vector.

Cuando $n>3$ se pierde toda intuición geométrica y los razonamientos deben hacerse de forma puramente algebraica, aun así es útil conservar en algunas cuestiones el lenguaje geométrico aunque esté desprovisto de toda significación concreta.

Ejemplos de vectores:

1) $v=(2,3)$ es un vector de $\mathbb{R}^2$. 2) $v=(1,0,-2)$ es un vector de $\mathbb{R}^3$.
3) $v=(1,-1,3,5)$ es un vector de $\mathbb{R}^4$. 4) $v=(2,0,1,4,3,2,1)$ es un vector de $\mathbb{R}^7$.

4.3.1. Vector Cero o Vector Nulo:

El vector que tiene todas sus componentes iguales a cero se denomina **vector cero** o **vector nulo**. Lo representaremos por 0_{R^n} para diferenciarlo del número 0.

Ejemplo: $0_{R^2}=(0,0),\quad 0_{R^3}=(0,0,0),\quad 0_{R^4}=(0,0,0,0),\quad 0_{R^n}=(0,0,0,...,0)$.

4.3.2. Vector unidad E_i:

Es el vector que una de sus componentes x_i es uno (1) y las demás son todas cero.

Ejemplos: En $\mathbb{R}^2: E_1=(1,0)\quad E_2=(0,1)$.

En $\mathbb{R}^3: E_1=(1,0,0)\quad E_2=(0,1,0)\quad E_3=(0,0,1)$.

En $\mathbb{R}^4: E_1=(1,0,0,0)\quad E_2=(0,1,0,0)\quad E_3=(0,0,1,0)\quad E_4=(0,0,0,1)$.

4.3.3. Igualdad de Vectores:

Dos vectores ***u*** y ***v*** son iguales si sus respectivas componentes son iguales. Es decir, si $u=(x_1,x_2,x_3,...,x_n)$ y $v=(y_1,y_2,y_3,...,y_n)$, entonces $u=v$ si y solo si $x_1=y_1$, $x_2=y_2$, $x_3=y_3$, ..., $x_n=y_n$.

Ejemplo: Si $u=(1,x,y+3,5)$ y $v=(z,4,-2,w)$, entonces $u=v$ si y solo si $x=4$, $y+3=-2\Rightarrow y=-5$, $z=1$ y $w=5$.

4.3.3.1. Propiedades de la Igualdad de Vectores:

Para todo $u,v,w\in R^n$ se cumple que:

$u=u$, propiedad reflexiva

Si $u=v\Rightarrow v=u$, propiedad simétrica

Si $u=v\ \wedge\ v=w\Rightarrow u=w$, propiedad transitiva

4.3.4. Vector Opuesto:

Sea $u=(x_1,x_2,x_3,\ ...,\ x_n)$ un vector de $\mathbb{R}^n$, entonces se llama vector opuesto de ***u*** que se escribe – ***u*** al vector $-u=(-x_1,-x_2,-x_3,\ ...,\ -x_n)$.

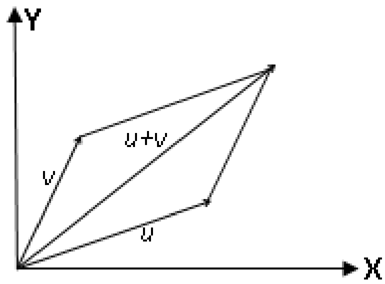
4.4. Operaciones con Vectores:

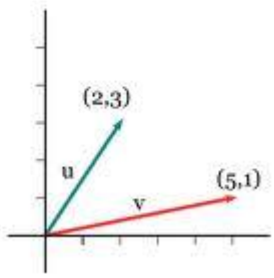
4.4.1. Suma o Adición:

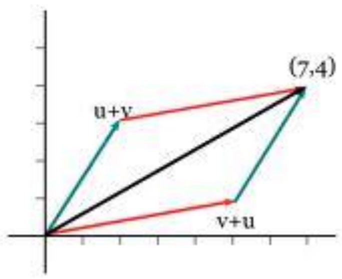
Sean $u=(x_1,x_2,x_3,\ ...,\ x_n)$ y $v=(y_1,y_2,y_3,\ ...,\ y_n)$ vectores de $\mathbb{R}^n$, entonces se define la suma de $u+v=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3,\ ...,\ x_n+y_n)$.

Ejemplo: Sean $u=(1,-3,2,0,-7)$ y $v=(3,4,-2,-3,5)$ vectores de $\mathbb{R}^5$, entonces $u+v=\left(1+3,\ -3+4,\ 2+(-2),\ 0+(-3),\ 7+5\right)=\left(4,\ 1,\ 0,-3,-2\right)$.

En $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ la suma de vectores podemos representarla gráficamente con lo que se denomina el método del paralelogramo, como se muestra en el gráfico de la derecha.







Basta con dibujar uno de los vectores sumando y a partir del punto final del mismo dibujar el otro vector con la misma magnitud, dirección y sentido. De esa manera se forma un paralelogramo y la suma es la longitud de la diagonal del mimo. La gráfica de la izquierda representa la suma de dos vectores de $\mathbb{R}^2$:

$u=(2,3)\ \ y\ \ v=(5,1)\Rightarrow u+v=(2,3)+(5,1)=(7,4).$

4.4.2. Resta o diferencia:

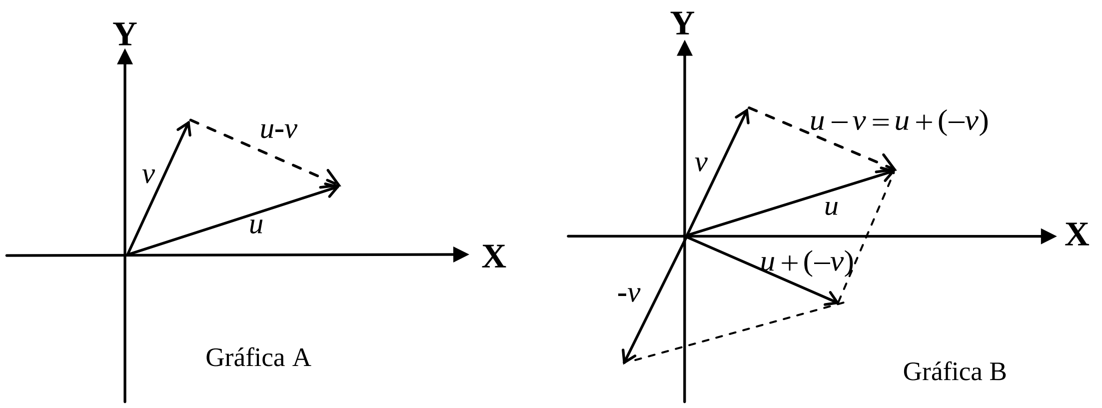
Para restar vectores se suma el vector minuendo con el opuesto del vector sustraendo. Sean $u=(x_1,x_2,x_3,\ ...,\ x_n)$ y $v=(y_1,y_2,y_3,\ ...,\ y_n)$ vectores de $\mathbb{R}^n$, entonces $u-v=u+(-v)=(x_1-y_1,x_2-y_2,x_3-y_3,\ ...,\ x_n-y_n)$.

Ejemplo: Sean $u=(4,-1,0,-5)$ y $v=(1,-2,4,-3)$ vectores de $\mathbb{R}^4$, entonces

$$u-v=u+(-v)=\left(4,-1,\,0,-5\right)+\left(-1,\,2,-4,\,3\right)$$

$$=\left(4+(-1),-1+2,\,0+(-4),\,-5+3\right)=\left(3,1,-4,-2\right).$$

Gráficamente, la resta se representa dibujando el vector diferencia desde el punto final del vector sustraendo hasta el punto final del vector minuendo como se observa en la gráfica A. La gráfica B muestra la resta como la suma del opuesto del sustraendo $u-v=u+(-v)$.



4.4.3. <u>Multiplicación de un Vector por un Escalar</u>:

Sean $u=(x_1,x_2,x_3,\,...,\,x_n)$ un vector de $\mathbb{R}^n$ y ***h*** un escalar; es decir, $h\in\mathbb{R}$ el producto de ***h.u*** es un vector de $\mathbb{R}^n$ y se define como:

$$h.u=h.(x_1,x_2,x_3,\,...,\,x_n)=(h.x_1,h.x_2,h.x_3,\,...,\,h.x_n)$$

Ejemplo: Sean $u=\left(4,-1,0,-5\right)$ un vector de $\mathbb{R}^4$ y $h=3$, entonces

$$3u=3\left(4,-1,0,-5\right)=\left(3(4),3(-1),3(0),3(-5)\right)=\left(12,-3,\,0,\,-15\right)$$

4.4.3.1. <u>Vectores Asociados</u>:

Dos vectores *u* y *v* son asociados si existe un escalar ***h*** tal que $u=h.v$ o $v=h.u$.

Ejemplo: Los vectores $u=(2,-1,3,-4)$ y $v=(6,-3,\,9,\,-12)$ son vectores asociados ya que $v=3u$ o $u=\frac{1}{3}v$.

4.5. Demostración de que $\mathbb{R}^n$ constituye un espacio vectorial:

Hasta ahora hemos venido hablando de vectores en $\mathbb{R}^n$, pero para poder llamar vectores a sus elementos hay que demostrar que $\mathbb{R}^n$ constituye un Espacio Vectorial.

A continuación demostraremos que $\mathbb{R}^n$ con la suma y el producto por escalar que hemos definido constituye un Espacio Vectorial en el Campo de los números reales. Es decir, sea $V=\mathbb{R}^n$, $K=\mathbb{R}$, la suma vectorial $\oplus$ y el producto por escalar $\odot$ son las usuales (+, .) de $\mathbb{R}^n$.

Demostración:

Sean $u=(x_1,x_2,x_3,...,x_n)$, $v=(y_1,y_2,y_3,...,y_n)$ y $w=(z_1,z_2,z_3,...,z_n)$ vectores de $\mathbb{R}^n$ y $h,k\in\mathbb{R}$, entonces probemos si se cumplen todas las propiedades necesarias para que $\mathbb{R}^n$ sea un espacio vectorial.

1) $u+v=(x_1,x_2,x_3,...,x_n)+(y_1,y_2,y_3,...,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3,...,x_n+y_n)\in\mathbb{R}^n$

La suma es interna o cerrada en $\mathbb{R}^n$.

2) $$\begin{aligned} u+v&=(x_1,x_2,x_3,...,x_n)+(y_1,y_2,y_3,...,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3,...,x_n+y_n)\\ &=(y_1+x_1,y_2+x_2,y_3+x_3,...,y_n+x_n)=v+u\end{aligned}$$

La suma de vectores en $\mathbb{R}^n$ es conmutativa.

3) $$\begin{aligned}(u+v)+w&=\left[(x_1,x_2,x_3,...,x_n)+(y_1,y_2,y_3,...,y_n)\right]+(z_1,z_2,z_3,...,z_n)\\ &=(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3,...,x_n+x_n)+(z_1,z_2,z_3,...,z_n)\\ &=\left[(x_1+y_1)+z_1,(x_2+y_2)+z_2,(x_3+y_3)+z_3,...,(x_n+y_n)+z_n\right]\\ &=\left[x_1+(y_1+z_1),x_2+(y_2+z_2),x_3+(y_3+z_3),...,x_n+(y_n+z_n)\right]\\ &=(x_1,x_2,x_3,...,x_n)+(y_1+z_1,y_2+z_2,y_3+z_3,...,y_n+z_n)\\ &=u+(v+w)\end{aligned}$$

La suma de vectores en $\mathbb{R}^n$ es asociativa.

4) $\exists\, 0_{R^n} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\forall u \in \mathbb{R}^n \;\; u + 0_{R^n} = 0_{R^n} + u = u$

$$u + 0_{R^n} = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n) + (0, 0, 0, ..., 0) = (x_1 + 0, x_2 + 0, x_3 + 0, ..., x_n + 0)$$

$$= (x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = u$$

El vector $0_{R^n} = (0,0,0,...,0) \in \mathbb{R}^n$ es la identidad o neutro para la suma en $\mathbb{R}^n$.

5) $\forall u \in \mathbb{R}^n \; \exists -u \in \mathbb{R}^n$ tal que $u + (-u) = (-u) + u = 0_{R^n}$

$$u + (-u) = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n) + (-x_1, -x_2, -x_3, ..., -x_n)$$

$$= (x_1 - x_1, x_2 - x_2, x_3 - x_3, ..., x_n - x_n) = (0,0,0,...,0) = 0_{R^n}$$

El vector $-u = (-x_1, -x_2, -x_3, ..., -x_n) \in \mathbb{R}^n$ es el opuesto o inverso aditivo de ***u***.

6). $h.u = h.(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = (hx_1, hx_2, hx_3, ..., hx_n) \in \mathbb{R}^n$. El resultado de multiplicar un escalar por un vector de $\mathbb{R}^n$ es una vector de $\mathbb{R}^n$.

7) $(h.k).u = h.(k.u)$

$$(h.k).u = (h.k).(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = [(h.k).x_1, (h.k).x_2, (h.k).x_3, ..., (h.k).x_n]$$

$$= [h.(k.x_1),\, h.(k.x_2), h.(k.x_3), ..., h.(k.x_n)]$$

$$= h.(k.x_1, k.x_2, k.x_3, ..., k.x_n)$$

$$= h.(k.u)$$

La multiplicación de dos escalares por un vector es asociativa en $\mathbb{R}^n$.

8) $h.(u + v) = h.u + h.v$

$$h.(u + v) = h.[(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) + (y_1, y_2, y_3, ..., y_n)]$$

$$= h.(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, ..., x_n + y_n)$$

$$= [h.(x_1 + y_1),\, h.(x_2 + y_2),\, h.(x_3 + y_3), ...,\, h.(x_n + y_n)]$$

$$= (h.x_1 + h.y_1,\, h.x_2 + h.y_2,\, h.x_3 + h.y_3, ...,\, h.x_n + h.y_n)$$

$$= (h.x_1,\, h.x_2,\, h.x_3, ...,\, h.x_n) + (h.y_1,\, h.y_2,\, h.y_3, ...,\, h.y_n)$$

$$= h.(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) + h.(y_1, y_2, y_3, ..., y_n)$$

$$= h.u + h.v$$

Se cumple la propiedad distributiva de la multiplicación de un escalar por la suma de vectores.

9) $(h+k).u = h.u + k.u$

$$
\begin{aligned}
(h+k).u = (h+k).u &= (h+k).\left(x_1, x_2, x_3, ..., x_n\right) \\
&= \left[(h+k).x_1, (h+k).x_2, (h+k).x_3, ..., (h+k).x_n\right] \\
&= \left(h.x_1 + k.x_1,\ h.x_2 + k.x_2, h.x_3 + k.x_3, ..., h.x_n + k.x_n\right) \\
&= \left(h.x_1, h.x_2, h.x_3, ..., h.x_n\right) + \left(k.x_1, k.x_2, k.x_3, ..., k.x_n\right) \\
&= h.\left(x_1, x_2, x_3, ..., x_n\right) + k.\left(x_1, x_2, x_3, ..., x_n\right) \\
&= h.u + k.u
\end{aligned}
$$

Se cumple la propiedad distributiva de la suma de dos escalares por un vector.

10) $1.u = u$

$$
\begin{aligned}
1.u &= 1.\left(x_1, x_2, x_3, ..., x_n\right) = \left(1.x_1, 1.x_2, 1.x_3, ..., 1.x_n\right) \\
&= .\left(x_1, x_2, x_3, ..., x_n\right) = u
\end{aligned}
$$

El uno (1) es la identidad o elemento neutro para la multiplicación por escalar.

Por tanto, como se cumplen las diez propiedades $\mathbb{R}^n$ con la suma y el producto por escalar forman un espacio vectorial en el campo de los números reales.

4.6. Producto Escalar o Producto Interno de dos Vectores en $\mathbb{R}^n$:

Sean ***u*** y ***v*** vectores de $\mathbb{R}^n$ se llama **producto escalar** de ***u*** y ***v*** al escalar que se obtiene con la sumatoria de los productos de las componentes correspondientes de los vectores ***u*** y ***v***.

Es decir, si $u = \left(x_1, x_2, x_3, ..., x_n\right)$ y $v = \left(y_1, y_2, y_3, ..., y_n\right)$ vectores de $\mathbb{R}^n$, entonces el producto escalar de ***u*** y ***v*** está dado por:

$$u.v = \left(x_1, x_2, x_3, ..., x_n\right).\left(y_1, y_2, y_3, ..., y_n\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + ... + x_n y_n .$$

Es importante destacar que el producto escalar **no** es un vector sino un número y además sólo está definido entre vectores del mismo espacio; es decir, que tengan la misma cantidad de componentes.

Ejemplos: Sean los vectores $u=(2,-1,0,3)$, $v=(1,-3,-1,2)$ y $w=(4,1,3)$, determinar:

1) $u.v=(2,-1,0,3).(1,-3,-1,2)=2(1)-1(-3)+0(-1)+3(2)=2+3+0+6=11.$

2) $u.w=(2,-1,0,3).(4,1,3)$ no está definido ya que $u\in\mathbb{R}^4$ y $w\in\mathbb{R}^3$.

4.6.1. Propiedades del Producto Escalar:

Si ***u, v*** y ***w*** son vectores de $\mathbb{R}^n$ y ***h*** un escalar, entonces:

1) $u.v=v.u$, el producto escalar es conmutativo.

2) $(u+v).w=u.w+v.w$, el producto escalar distribuye la suma vectorial.

3) $u.(hv)=h(u.v)$, el producto de un escalar y el producto escalar de dos vectores es asociativo.

4) $u.u\geq 0$ y $u.u=0$ si y solo si $u=0_{R^n}$, el producto escalar de un vector por el mismo es no negativo.

4.7. Norma, Longitud o Tamaño de un vector en $\mathbb{R}^n$:

Sea $u=\left(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n\right)$, entonces la norma, longitud o módulo de ***u***, que se escribe $\|u\|$, es el valor $\|u\|=\left\|\left(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n\right)\right\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}=\sqrt{x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}+\dots+x_n^{\ 2}}$. Esta expresión es equivalente a $\|u\|=\sqrt{u.u}$, o sea que la norma de un vector ***u*** es igual a la raíz cuadrada del producto escalar de ***u*** por él mismo.

Ejemplos:

1- Hallar la norma del vector $u=(3,4)$.

$$\|u\|=\sqrt{(3)^2+(4)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

2- Hallar la norma del vector $v=(2,-3,1)$.

$$\|v\|=\sqrt{(2)^2+(-3)^2+(1)^2}=\sqrt{4+9+1}=\sqrt{14}$$

3- Hallar el valor de "x" tal que la norma del vector $w=(3,x,4)$, sea igual a 5 unidades.

Tenemos que $\|w\|=5$ y como $\|w\|=\sqrt{(3)^2+x^2+(4)^2}=\sqrt{9+x^2+16}$

$\|w\|=\sqrt{x^2+25}$ luego tenemos que $\sqrt{x^2+25}=5$.

Elevando al cuadrado ambos lados de $\sqrt{x^2+25}=5$ obtenemos:

$$\left(\sqrt{x^2+25}\right)^2=5^2 \Rightarrow x^2+25=25 \Rightarrow x^2=25-25 \Rightarrow x=0$$

4.7.1. <u>Propiedades de la Norma</u>:

1- La norma de un vector siempre es positiva o cero; siendo cero si y sólo si el vector es nulo. Es decir, $\|u\|\geq 0 \quad \wedge \quad \|u\|=0$ si y solo si $u=0_{R^n}$

2- La norma de de la suma de dos vectores es menor o igual a la suma de las normas de los vectores sumandos. Es decir $\|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|$. Esta es la llamada desigualdad triangular.

Ejemplo: Sean $u=(2,3,1)$ y $v=(1,-2,4)$ compruebe que $\|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|$.

$\|u\|=\sqrt{(2)^2+(3)^2+(1)^2}=\sqrt{4+9+1}=\sqrt{14}$. $\|v\|=\sqrt{(1)^2+(-2)^2+(4)^2}=\sqrt{1+4+16}=\sqrt{21}$.

$$\|u+v\|=\|(2,3,1)+(1,-2,4)\|=\|(3,1,5)\|=\sqrt{(3)^2+(1)^2+(5)^2}=\sqrt{9+1+25}=\sqrt{35}.$$

Como $\sqrt{35}\approx 5.9\leq\sqrt{14}+\sqrt{21}\approx 8.3$ se concluye que $\|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|$.

3- La norma del producto de un escalar por un vector es igual al valor absoluto del escalar por la norma del vector; es decir, $\|hu\| = |h|\|u\|$

Demostración

Sea $u = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ y "***h***" un escalar tenemos que:

$$\|h.u\| = \|h.(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)\| = \|(h.x_1, h.x_2, h.x_3, ..., h.x_n)\|$$

$$= \sqrt{(h.x_1)^2 + (h.x_2)^2 + (h.x_3)^2 + ... + (h.x_n)^2}$$

$$= \sqrt{h^2.x_1^{\ 2} + h^2.x_2^{\ 2} + h^2.x_3^{\ 2} + ... + h^2.x_n^{\ 2}} = \sqrt{h^2}\sqrt{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2} + ... + x_n^{\ 2}}$$

$$= |h|\|u\|$$

4.- La norma al cuadrado de un vector es igual al producto escalar del vector por él mismo. Es decir, $\|u\|^2 = u.u$

Demostración

Sea $u = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$, entonces

$$\|u\|^2 = \left(\sqrt{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2} + ... + x_n^{\ 2}}\right)^2 = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2} + ... + x_n^{\ 2}.$$

$$u.u = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n).(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3^{\ 2} + ... + x_n^{\ 2}.$$

Por lo tanto $\|u\|^2 = u.u$

4.7.2. <u>Vector Unitario</u>:

Un vector es unitario si su norma es igual a la unidad. Es decir, si $\|u\| = 1$, entonces ***u*** es un vector unitario.

Ejemplo: Pruebe si el vector $u = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ es un vector unitario.

$$\|u\| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}} = \sqrt{1} = 1.$$

Por lo tanto ***u*** es un vector unitario.

4.7.3. Vector Unitario en la Dirección de otro Vector Dado:

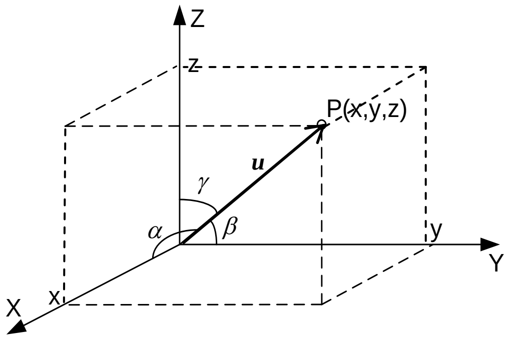
Si **u** es un vector diferente del vector nulo, entonces el vector $v=\frac{u}{\|u\|}=\frac{1}{\|u\|}u$ define el vector unitario en la dirección de **u**.

Ejemplo: Hallar el vector unitario en la dirección del vector $u=(3,-2,\ 4)$.

$$v=\frac{1}{\|u\|}u=\frac{1}{\sqrt{9+4+16}}(3,-2,4)=\frac{1}{\sqrt{29}}(3,-2,4)=\left(\frac{3}{\sqrt{29}},\frac{-2}{\sqrt{29}},\frac{4}{\sqrt{29}}\right)$$

4.8. Ángulos Directores de un Vector:

Son los ángulos que forma el vector con cada uno de los ejes del sistema de referencia. La gráfica de la derecha muestra los ángulos directores $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ del vector $u=(x,y,z)$ en $\mathbb{R}^3$



4.8.1. Cosenos Directores:

Son los cosenos de los ángulos directores de un vector dado. Para el vector mostrado en la gráfica anterior los cosenos directores son: $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$.

Para este caso los cosenos directores los podemos calcular de la siguiente manera:

$$\cos\alpha=\frac{x}{\|u\|},\ \ \cos\beta=\frac{y}{\|u\|},\ \ \cos\gamma=\frac{z}{\|u\|}.$$

Como ya vimos antes, un vector unitario en la dirección del vector **u** se obtiene $v=\frac{u}{\|u\|}=\frac{(x,y,z)}{\|u\|}=\left(\frac{x}{\|u\|},\frac{y}{\|u\|},\frac{z}{\|u\|}\right)$, por lo que las componentes del vector unitario en la dirección de **u** definen los cosenos directores de **u**.

Ejemplo: Hallar los cosenos directores del vector $u=(3,-2,4)$.

Ya en un ejemplo anterior habíamos hallado el vector unitario en la dirección de

$u=(3,-2,4)$ que es $v=\left(\frac{3}{\sqrt{29}},\frac{-2}{\sqrt{29}},\frac{4}{\sqrt{29}}\right)$, por lo tanto los cosenos directores son:

$\cos\alpha=\frac{x}{\|u\|}=\frac{3}{\sqrt{29}}$, $\cos\beta=\frac{y}{\|u\|}=\frac{-2}{\sqrt{29}}$, $\cos\gamma=\frac{z}{\|u\|}=\frac{4}{\sqrt{29}}$.

Aunque el ejemplo mostrado corresponde a un caso particular de $\mathbb{R}^3$ podemos hacer la generalización para $\mathbb{R}^n$. Entonces si $u=(x_1,x_2,x_3,...,x_n)$ tenemos que sus cosenos directores son: $\cos\alpha_1=\frac{x_1}{\|u\|}$, $\cos\alpha_2=\frac{x_2}{\|u\|}$, $\cos\alpha_3=\frac{x_3}{\|u\|}$, ... , $\cos\alpha_n=\frac{x_n}{\|u\|}$.

4.9. Ángulos entre dos Vectores:

Sean ***u*** y ***v*** dos vectores diferentes del vector nulo, entonces el ángulo φ entre ***u*** y ***v*** está definido por $\cos\varphi=\frac{u.v}{\|u\|\,\|v\|}\Rightarrow\varphi=\cos^{-1}\left(\frac{u.v}{\|u\|\,\|v\|}\right)$, $0\le\varphi\le\pi$.

A partir de la expresión $\cos\varphi=\frac{u.v}{\|u\|\,\|v\|}$ podemos despejar $u.v=\|u\|\,\|v\|\cos\varphi$ y obtener otra forma para calcular el producto escalar.

Ejemplo: Calcule el ángulo φ entre los vectores $u=(1,2,1)$ y $v=(2,3,-4)$.

$$\cos\varphi=\frac{u.v}{\|u\|\,\|v\|}=\frac{(1,2,1).(2,3,-4)}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}\sqrt{2^2+3^2+(-4)^2}}$$

$$=\frac{2+6-4}{\sqrt{1+4+1}\sqrt{4+9+16}}=\frac{4}{\sqrt{6}\sqrt{29}}=\frac{4}{\sqrt{174}}$$

$$\cos\varphi=\frac{4}{\sqrt{174}}\Rightarrow\varphi=\cos\varphi^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{174}}\right)\approx 1.263\ \textit{radianes}$$

4.9.1. Vectores Ortogonales:

Dos vectores ***u*** y ***v*** de $\mathbb{R}^n$ diferentes del vector nulo son ortogonales si su producto escalar es cero. Es decir, si $u.v=0$, entonces ***u*** y ***v*** son ortogonales.

Si $u.v=0$ significa que $\cos\varphi=\dfrac{0}{\|u\|\|v\|}=0 \Rightarrow \varphi=\cos^{-1}(0)=\dfrac{\pi}{2}=90^\circ$, por lo tanto se puede establecer relación entre ortogonalidad y perpendicularidad.

Ejemplos:

1) Pruebe si $u=(4,3,-5)$ y $v=(2,4,4)$ son ortogonales.

Para que sean ortogonales se debe cumplir que $u.v=0$.

$u.v=(4,3,-5)\,.\,(2,4,4)=8+12-20=0$ por lo tanto ***u*** y ***v*** son ortogonales.

2) Determine el valor de x tal que $u=(2,1,-3)$ y $v=(x,5,x-2)$ sean ortogonales.

$$u.v=(2,1,-3).(x,5,x-2)=0$$
$$2x+5-3(x-2)=0$$
$$2x+5-3x+6=0$$
$$-x+11=0$$
$$x=11$$

4.9.2. Vectores Paralelos:

Dos vectores ***u*** y ***v*** de $\mathbb{R}^n$ son paralelos si $|u.v|=\|u\|\,\|v\|$. Es decir, si el valor absoluto de su producto escalar es igual al producto de sus normas.

Si $|u.v|=\|u\|\,\|v\|$, entonces la expresión $\cos\varphi=\dfrac{u.v}{\|u\|\,\|v\|}=\pm1 \Rightarrow \varphi=\cos^{-1}(\pm1)$.

$\varphi=\cos^{-1}(1)=0$ o $\varphi=\cos^{-1}(-1)=\pi$. Por lo que podemos concluir que dos vectores son paralelos si el ángulo entre ellos es **0** o $\boldsymbol{\pi}$. Esto significa que están en la misma dirección.

Teorema 4.9.2.1:

Si dos vectores ***u*** y ***v*** de $\mathbb{R}^n$ son asociados; es decir, uno es múltiplo del otro, entonces son paralelos.

Demostración:

Sean ***u*** y ***v*** vectores de $\mathbb{R}^n$ tales que $v = hu$ para algún $h \in R$. Esto significa que si $u = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, entonces $v = (hx_1, hx_2, hx_3, \ldots, hx_n)$. Demostraremos ahora que bajo estas condiciones se cumple que $|u.v| = \|u\|\,\|v\|$.

Calcularemos por separado cada lado de la igualdad.

$$|u.v| = |(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n).(hx_1, hx_2, hx_3, \ldots, hx_n)|$$

$$= \left|hx_1^{\,2} + hx_2^{\,2} + hx_3^{\,2} + \ldots + hx_n^{\,2}\right| = |h|(x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + x_3^{\,2} + \ldots + x_n^{\,2}) = |h|\,\|u\|^2$$

$$\|u\|\,\|v\| = \sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + x_3^{\,2} + \ldots + x_n^{\,2}}\sqrt{(hx_1)^2 + (hx_2)^2 + (hx_3)^2 + \ldots + (hx_n)^2}$$

$$= \sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + x_3^{\,2} + \ldots + x_n^{\,2}}\sqrt{h^2\left(x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + x_3^{\,2} + \ldots + x_n^{\,2}\right)}$$

$$= |h|\left(\sqrt{x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + x_3^{\,2} + \ldots + x_n^{\,2}}\right)^2 = |h|\,\|u\|^2$$

Como $|u.v| = |h|\,\|u\| = \|u\|\,\|v\|$ se concluye que si dos vectores son asociados entonces son paralelos.

Ejemplos:

1) Sean $u = (2,-3,-1,1)$ y $v = (4,-6,-2,2)$ donde $v = 2u$, pruebe que se cumple el **Teorema 4.9.2.1**

$$|u.v| = \|u\|\|v\|$$

$$|(2,-3,-1,1)\,.\,(4,-6,-2,2)| = \|(2,-3,-1,1)\|\,\|(4,-6,-2,2)\|$$

$$|8+18+2+2| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-1)^2 + 1^2}\sqrt{4^2 + (-6)^2 + (-2)^2 + 2^2}$$

$$|30| = \sqrt{4+9+1+1}\sqrt{16+36+4+4}$$

$$30 = \sqrt{15}\sqrt{60}$$

$$30 = \sqrt{900}$$

$$30 = 30$$

2) Halle un vector paralelo a $u=(3,4,-7)$ cuya segunda componente sea igual a 12.

Tenemos que un vector ***v*** es paralelo a ***u*** si son asociados; es decir, si $v=hu$ para algún $h\in R$. Sea $v=(a,12,b)$ el vector asociado a ***u***, entonces $(a,12,b)=h(3,4,-7)$ lo que implica que $(a,12,b)=(3h,4h,-7h)$ de donde, por la igualdad de vectores, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$a=3h, \quad 12=4h, \quad b=-7h$$

Despejando ***h*** de $12=4h$ obtenemos $\dfrac{4h}{4}=\dfrac{12}{4}\Rightarrow h=3$.

Luego $a=3h=3(3)=9$ y $b=-7h=-7(3)=-21$. Entonces el vector paralelo a ***u*** es $v=(9,12,-21)$.

4.10. <u>Proyección de un Vector Sobre otro Vector</u>:

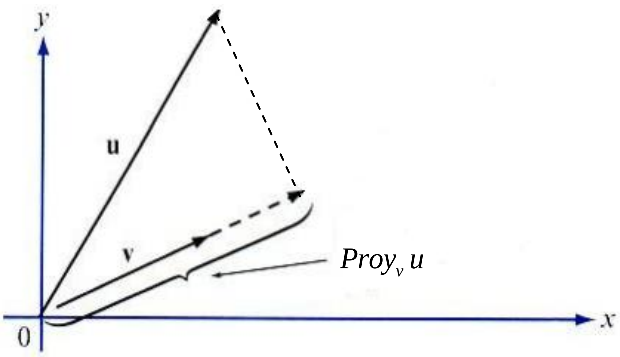
Sean ***u*** y ***v*** vectores de $\mathbb{R}^n$ diferentes de 0_{R^n}, entonces la proyección del vector ***u*** sobre el vector ***v*** denotado por $Proy_v u$, se define por $Proy_v u=\dfrac{u\,.v}{\|v\|^2}v=\dfrac{u\,.v}{v\,.v}v$.

Ejemplo: Sean los vectores $u=(1,3,-1)$ y $v=(-2,3,1)$ determine $Proy_v u$.

$$Proy_v u=\frac{u\,.v}{\|v\|^2}v=\frac{(1,3,-1).(-2,3,1)}{\left(\sqrt{(-2)^2+3^2+1^2}\right)^2}(-2,3,1)=\frac{-2+9-1}{\left(\sqrt{4+9+1}\right)^2}(-2,3,1)$$

$$=\frac{6}{\left(\sqrt{14}\right)^2}(-2,3,1)=\frac{6}{14}(-2,3,1)=\frac{3}{7}(-2,3,1)=\left(-\frac{6}{7},\frac{9}{7},\frac{3}{7}\right)$$

En $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ la proyección de un vector sobre otro se puede ver gráficamente así:



4.10.1. <u>Componente de un Vector en la Dirección de otro Vector</u>:

Al escalar que resulta de calcular $\frac{u\ .v}{\|v\|}$ se le llama la componente del vector ***u*** en la dirección del vector ***v***. $\left(\text{Comp}_v u = \frac{u.v}{\|v\|}\right)$

El valor absoluto de la componente de un vector ***u*** en la dirección de un vector ***v*** no es más que la norma del vector proyección; es decir, $\left|\frac{u\ .v}{\|v\|}\right| = \|Proy_v\, u\| = \left\|\frac{u\ .v}{\|v\|^2}v\right\|$.

Veamos: $\|Proy_v\, u\| = \left\|\frac{u\ .v}{\|v\|^2}v\right\| = \left|\frac{u\ .v}{\|v\|^2}\right|\|v\| = \frac{|u\ .v|}{\|v\|^2}\|v\| = \frac{|u\ .v|}{\|v\|} = \left|\frac{u\ .v}{\|v\|}\right|$.

Ejemplo: Ya en el ejemplo anterior calculamos $Proy_v\, u$ para $u = (1, 3, -1)$ y $v = (-2, 3, 1)$ y obtuvimos $Proy_v\, u = \left(-\frac{6}{7}, \frac{9}{7}, \frac{3}{7}\right)$, determine la componente del vector ***u*** en la dirección del vector ***v*** y compruebe que $\left|\frac{u\ .v}{\|v\|}\right| = \|Proy_v\, u\|$.

Primero calcularemos $\left|\frac{u\ .v}{\|v\|}\right| = \left|\frac{(1, 3, -1).(-2, 3, 1)}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2}}\right| = \left|\frac{-2+9-1}{\sqrt{4+9+1}}\right| = \left|\frac{6}{\sqrt{14}}\right| \approx |1.6| = 1.6$.

Ahora calculamos $\|Proy_v\, u\|$:

$$\|Proy_v\, u\| = \left\|\left(-\frac{6}{7}, \frac{9}{7}, \frac{3}{7}\right)\right\| = \sqrt{\left(-\frac{6}{7}\right)^2 + \left(\frac{9}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{36}{49} + \frac{81}{49} + \frac{9}{49}} = \sqrt{\frac{126}{49}} = \frac{3\sqrt{14}}{7} \approx 1.6$$

Por lo tanto se comprueba que $\left|\frac{u\ .v}{\|v\|}\right| = \|Proy_v\, u\|$.

Teorema 4.10.1:

Sean ***u*** y ***v*** vectores de $\mathbb{R}^n$ diferentes de 0_{R^n}, entonces ***v*** y $[u - Proy_v\, u]$ son vectores ortogonales. Es decir $\left(u - \frac{u\ .v}{\|v\|^2}v\right).v = 0$

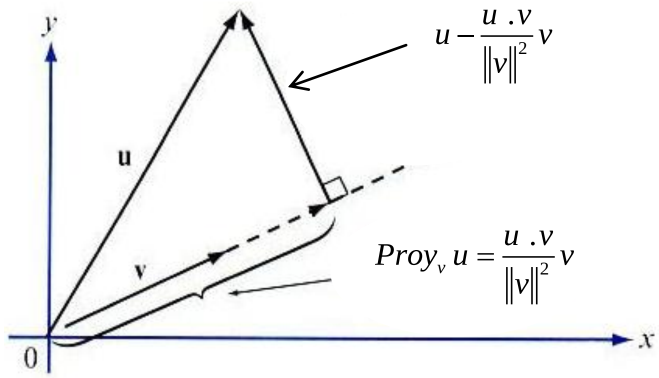
Demostración:

Al aplicar propiedades del producto escalar y de la norma obtenemos:

$$\left(u-\frac{u\ .v}{\|v\|^{2}}v\right).v=u.v-\left(\frac{u\ .v}{\|v\|^{2}}v\right).v=u.v-\left(\frac{u\ .v}{\|v\|^{2}}(v.v)\right)=u.v-\left(\frac{u\ .v}{\|v\|^{2}}\left(\|v\|^{2}\right)\right)=u.v-u\ .v=0$$

Y la prueba queda hecha.

En $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ podemos verlo gráficamente así:



Ejemplo: Sean $u=(1,\,3,-1)$ y $v=(2,-1,\,0)$, calcule:

1) $Proy_v\,u$

$$Proy_v\,u=\frac{u\ .v}{\|v\|^{2}}v=\frac{(1,\,3,-1)\ (2,-1,\,0)}{(2,-1,\,0)(2,-1,\,0)}(2,-1,\,0)=\frac{2-3+0}{4+1+0}(2,-1,\,0)$$

$$=\frac{-1}{5}(2,-1,\,0)=\left(\frac{-2}{5},\,\frac{1}{5},\,0\right)$$

2) $u-Proy_v\,u$

$$u-Proy_v\,u=(1,\,3,-1)-\left(\frac{-2}{5},\,\frac{1}{5},\,0\right)=\left(\frac{7}{5},\,\frac{14}{5},\,-1\right)$$

3) Confirme que se cumple el teorema anterior (**Teorema 4.10.1)**, comprobando que que ***v*** y $\left[u-Proy_v\,u\right]$ son vectores ortogonales.

Para esto comprobamos que $v\cdot\left[u-Proy_v\,u\right]=0$

$(2,-1,\,0)\cdot\left(\frac{7}{5},\,\frac{14}{5},\,-1\right)=\frac{14}{5}-\frac{14}{5}+0=0$. Queda comprobado.

EJERCICIOS PROPUESTOS

I- Sean ***u, v*** y ***e*** vectores de R^4 y ***h, k*** son números reales, analice cada expresión y complete.

1) Si ***u* + *e* = *u***, entonces ***e*** es _______________________________________

2) Si ***u* + *v* = (0,0,0,0),** entonces ***u*** y ***v*** son _____________________________

3) Si ***u* = *kv***, entonces ***u*** y ***v*** son _____________________________

4) Si ***u* . *v* = 0**, entonces ***u*** y ***v*** son _____________________________

5) ***k*(*u*** + ***v*) =** __________________________________

6) (***h*+*k*)*u* =** __________________________________

7) Si $\|u\| = 1$, entonces ***u*** es un vector _________________________

8) Si el ángulo φ entre ***u*** y ***v*** es ***cero*** o **π**, entonces ***u*** y ***v*** son __________________

II- Siendo ***u***, ***v***, ***w*** vectores de R^n y ***h, k*** son números reales, Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones (V, F). En caso de ser verdadera diga la propiedad que se aplica.

1) _____ $(u+v)+w = u+(v+w)$

2) _____ $u+v \in R^n$

3) _____ $h+k \in R^n$

4) _____ $u+(-v) = u$

5) _____ $h(u+v) = hu+hv$

6) _____ $(u+v)+w = w+(v+u)$

III- Dado los vectores $v_1 = (2,-5,3,0)$; $v_2 = (1,7,-4,3)$; $v_3 = (-2,2,1,-3)$; $v_4 = (2,5,1)$ y $v_5 = (2,-1,0)$ determine lo que se le pide a continuación, siempre que sea posible

1) Efectúe

a) $3v_1 + v_2 =$

b) $v_1 - 2v_2 + v_3 =$

c) $v_1 + v_4 =$

d) $v_4 \cdot v_5 =$

e) $v_2 \cdot v_5 =$

f) $\|v_3\| =$

g) $\|v_1 + (v_2 - v_3)\| =$

2) Halle el vector ***w*** de modo que:

a) $w + v_2 = v_1 - v_3$

b) $3w - v_1 = 2v_2 - 5v_3$

c) $w + 2v_1 - 3v_2 + v_3 = (0,0,0,0)$

IV- Dado los vectores $u = (2,-1,2)$ y $v = (1,4,-5)$:

1) Halle el vector ***w*** unitario con la misma dirección del vector ***u.***

2) Determine los cosenos directores y los ángulos directores del vector ***u***.

3) Halle el ángulo φ entre los vectores ***u*** y ***v***.

4) Si $w = (-3, x, 1)$, ¿cuál tiene que ser el valor de *x* para que los vectores ***w*** y ***v*** sean ortogonales?

5) Escriba un vector que sea paralelo a ***u*** y su tercera componente sea igual a 1.

6) Determine:

a) $Proy_v u$.

b) $Proy_u v$.

c) La componente de ***u*** en la dirección de ***v***.

UNIDAD 2: TEORIA GENERAL DE LOS POLINOMIOS

1. Polinomios:

1.1. Definición de Polinomio:

Un polinomio es una función $y = f(x)$ que se puede expresar en la forma:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Donde $a_n,\ a_{n-1}, a_{n-2},\ ...,\ a_2,\ a_1,\ a_0$ son constantes reales denominadas coeficientes y ***n*** es un número entero no negativo.

Ejemplos:

1) $f(x) = 3x^4 + 5x^3 - 4x^2 + x - 7$ es un polinomio en la variable *x* cuyos coeficientes son 3, 5, –4, 1 y –7.

2) $P(x) = \frac{3}{4}x^5 - \frac{1}{2}x^3 + \sqrt{3}x^2 + 3x - \frac{2}{5}$ es un polinomio en la variable *x* cuyos coeficientes son $\frac{3}{4},\ -\frac{1}{2},\ \sqrt{3},\ 3,\ -\frac{2}{5}$.

Los siguientes no son polinomios

1) $Q(x) = 2x^3 - 7x^2 + 5x^{-2} + x^{-3} - 9$ no es un polinomio ya que hay exponentes negativos.

2) $R(x) = x^{1/2} - 3x^{3/5} + 4x^{2/3} + 5$ no es un polinomio ya que hay exponentes que no son enteros

Algunos polinomios tienen nombres especiales:

Monomios: si contienen un solo término. Ejemplo: $f(x) = 6x^3$.

Binomios: si contienen dos términos. Ejemplo: $f(x) = x^2 - 5$.

Trinomios: si contienen tres términos. Ejemplo: $f(x) = x^2 + 3x + 2$.

1.2. Polinomio Ordenado:

Un polinomio se dice que está **ordenado** cuando sus términos están escritos de modo que aparecen ordenadas las potencias de la variable. Este orden puede ser creciente o ascendente, ejemplo $f(x) = 9 + 3x - 8x^2 + 2x^3 - 5x^4 + 3x^6$. Y decreciente o descendente, ejemplo $f(x) = x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 3x + 2$.

1.3. Polinomio Completo:

Es el polinomio cuyos coeficientes son todos diferentes de cero, es decir, que no tiene coeficiente nulo.

Ejemplo: $P(x) = x^5 + 5x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 11x + 4$.

1.4. Polinomio Incompleto:

Es aquel polinomio que posee por lo menos un coeficiente nulo.

Ejemplo: $P(x) = x^7 + 4x^3 - 6x^2 + 2 = x^7 + 0x^6 + 0x^5 + 0x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 0x + 2$.

1.5. Grado de un Término:

Es el exponente que afecta a la variable en cada término.

Ejemplo: $4x^3$ es un término de tercer grado, $4x$ es un término de primer grado.

1.6. Grado de un Polinomio:

Es el mayor exponente que afecta la variable en el polinomio.

Ejemplos: 1) $P(x) = x^2 + 5x^3 - 7x + 4x^6 - 11$ es un polinomio de 6to. Grado

2) $P(x) = x^5 + 5x^4 - 7x^3 + 4x^2 - 11x + 4$ es un polinomio de 5to. Grado.

1.7. Término Principal de un Polinomio:

Es el término que contiene a la potencia más alta de la variable que define el grado del polinomio y cuyo coeficiente es diferente de cero denominado **coeficiente principal**.

Ejemplos: 1) Si $P(x)=x^2+5x^3-7x+4x^6-11$ el término principal es $4x^6$ y su coeficiente principal es 4.

2) Si $P(x)=x^5+5x^4-7x^3+4x^2-11x+4$ el término principal es x^5 y su coeficiente principal es 1.

Todo polinomio de grado $"n"$ posee $"n+1"$ término, contando aquellos con coeficientes nulos si los hay.

1.8. <u>Polinomio Mónico o Normal</u>:

El polinomio Mónico o normal es aquel cuyo coeficiente principal es la unidad (1). **Ejemplo**: $P(x)=x^5+3x^4-7x^3-5x+11$.

1.9. <u>Término Independiente</u>:

El término a_0 se llama término independiente porque su valor no depende de la variable. Este término es de grado cero.

1.10. <u>Términos Semejantes</u>:

Dos términos son semejantes si tienen la misma variable elevada al mismo exponente. Ejemplo: Los términos $3x^4,\ -5x^4,\ x^4,\ \frac{2}{3}x^4$ son semejantes.

1.11. <u>Polinomio Constante</u>:

El polinomio constante es el formado solo por el término independiente. **Ejemplo** $P(x)=23$.

1.12. <u>Forma Vectorial de un Polinomio</u>:

El polinomio $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_2x^2+a_1x+a_0$ se puede expresar en forma vectorial escribiendo sus coeficientes en forma ascendente, estos es $P(x)=(a_0,\ a_1, a_2,\ ...,\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n)$.

Ejemplo: Exprese el polinomio $P(x) = x^6 + 2x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 4$ en forma vectorial.

Como $P(x) = x^6 + 0x^5 + 2x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 0x + 4 = 4 + 0x - 3x^2 - 8x^3 + 2x^4 + 0x^5 + 1x^6$, la forma vectorial de $P(x)$ es $(4, 0, -3, -8, 2, 0, 1)$.

1.13. <u>Polinomio Nulo</u>:

Es aquel cuyos coeficientes son todos iguales a cero. Se representa por $P(x) = 0$. El polinomio nulo no tiene grado.

1.14. <u>Polinomios Iguales</u>:

Dos polinomios del mismo grado son iguales si los coeficientes de los términos semejantes son iguales. Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ y $Q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + ... + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$, decimos que $P(x) = Q(x)$ si y sólo si $a_n = b_n$, $a_{n-1} = b_{n-1}$, $\ldots$, $a_2 = b_2$, $a_1 = b_1$, $a_0 = b_0$. Es decir, $a_i = b_i$ para $0 \le i \le n$.

Ejemplos: 1) Determine el valor de $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ de tal manera que hagan que los polinomios $P(x) = 4x^3 + 7x^2 - 8x + 6$ y $Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sean iguales.

Tenemos que $P(x) = Q(x)$ si y solo si $a = 4$; $b = 7$; $c = -8$ y $d = 6$.

2) Determine el valor de $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ para que los polinomios $P(x) = x^2 + 7x + 3$ y $Q(x) = A(x+3) + B(x^2 - x) + C$ sean iguales.

Desarrollando las operaciones en $Q(x)$ tenemos que:

$$Q(x) = Ax + 3A + Bx^2 - Bx + C = Bx^2 + (A - B)x + (3A + C)$$

Luego tenemos que:

$$B = 1$$
$$A - B = 7 \Rightarrow A = 7 + B = 7 + 1 = 8$$
$$3A + C = 3 \Rightarrow C = 3 - 3A = 3 - 3(8) = -21$$

La solución es: $\begin{cases} A = 8 \\ B = 1 \\ C = -21 \end{cases}$

1.15. Polinomios Opuestos:

Dos polinomios del mismo grado son opuestos si los coeficientes de los términos semejantes son opuestos. Si $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_2x^2+a_1x+a_0$ y $Q(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+...+b_2x^2+b_1x+b_0$, decimos que $P(x)$ y $Q(x)$ son opuestos si y sólo si $a_i=-b_i$ para $0\leq i\leq n$. Es decir, $P(x)=-Q(x)$.

Ejemplo: Los polinomios $P(x)=x^3+3x^2-7x-9$ y $Q(x)=-x^3-3x^2+7x+9$ son opuestos; es decir, $P(x)=-Q(x)$.

1.16. Valor Numérico de un Polinomio:

Es el valor que toma el polinomio cuando se le asigna un valor determinado a la variable y se resuelven las operaciones algebraicas indicadas.

Ejemplo: Sea $P(x)=x^4-2x^3-3x^2+5x-4$ hallar el valor numérico de $P(x)$ para $x=0,\ x=1,\ x=-1$ y $x=2$

Solución: $P(0)=(0)^4-2(0)^3-3(0)^2+5(0)-4=0-2(0)-3(0)+5(0)-4=-4$

$$P(1)=(1)^4-2(1)^3-3(1)^2+5(1)-4=1-2(1)-3(1)+5(1)-4$$
$$=1-2-3+5-4=-3$$
$$P(-1)=(-1)^4-2(-1)^3-3(-1)^2+5(-1)-4=1-2(-1)-3(1)+5(-1)-4$$
$$=1+2-3-5-4=-9$$

$$P(2)=(2)^4-2(2)^3-3(2)^2+5(2)-4=16-2(8)-3(4)+5(2)-4$$
$$=16-16-12+10-4=-6$$

1.17. Raíz o Cero de un Polinomio:

Es el valor de la variable que hace que el valor numérico del polinomio sea igual a cero. O sea $x=a$ es un cero del polinomio $P(x)$ si $P(a)=0$.

Ejemplo: Los valores $x=1,\ x=-1$ y $x=2$ son raíces o ceros del polinomio $P(x)=x^3-2x^2-x+2$ porque

$P(1) = (1)^3 - 2(1)^2 - (1) + 2 = 1 - 2(1) - 1 + 2 = 1 - 2 - 1 + 2 = 0$

$P(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 - (-1) + 2 = -1 - 2(1) + 1 + 2 = -1 - 2 + 1 + 2 = 0$

$P(2) = (2)^3 - 2(2)^2 - (2) + 2 = 8 - 2(4) - 2 + 2 = 8 - 8 - 2 + 2 = 0$

1.18. Gráfica de un Polinomio:

Para obtener la gráfica de un polinomio se debe definir un conjunto de valores de la variable y evaluar numéricamente cada uno de esos valores para obtener parejas de valores (*x*, *f(x)*). Esas parejas de valores son coordenadas que determinan la posición de puntos pertenecientes a la función en el plano cartesiano. Se dibujan los puntos y se unen con una línea curva continua. La gráfica de todas las funciones polinómicas son curvas continuas y suaves.

Entre menor sea la diferencia entre los valores tomados de la variable para hacer la evaluación, más exacta es la gráfica.

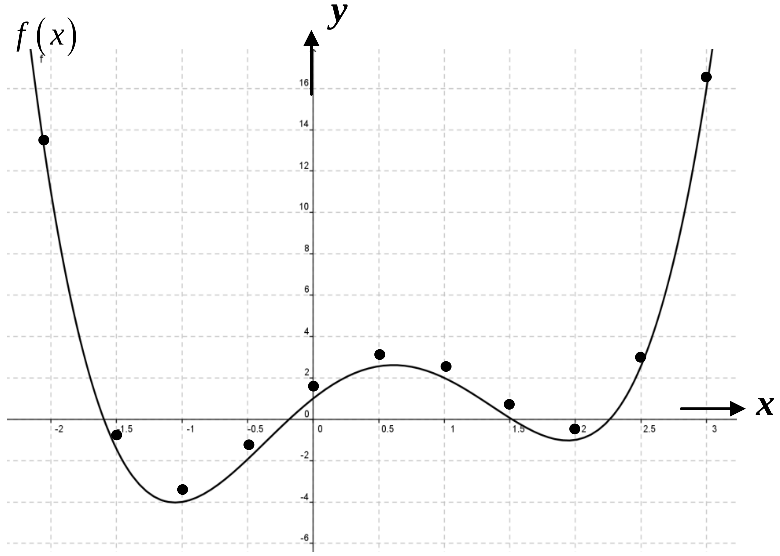
Ejemplo. Graficar la función $f(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 5x + 1$ en el intervalo de valores de -2 a 3 con diferencia de 0.5 entre los valores.

Primero se evalúa numéricamente *f(x)* para cada uno de los valores de *x* y se definen las coordenadas de cada uno de los puntos:

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$f(x)$	11	-1.4	-4	-1.9	1	2.6	2	0.1	-1	2.6	16

Estos valores han sido aproximados.

Luego de obtenidos los valores se procede a marcar los puntos y trazar la gráfica



2. Operaciones con Polinomios:

2.1. Producto de un Polinomio por un Escalar:

Sea $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ un polinomio definido sobre un campo K y $h \in K$ un escalar diferente de cero, entonces el producto del escalar ***h*** por el polinomio $P(x)$ viene dado por:

$hP(x) = ha_n x^n + ha_{n-1}x^{n-1} + ha_{n-2}x^{n-2} + ... + ha_2 x^2 + ha_1 x + ha_0$.

Ejemplo.: Sea $P(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 6x - 8$ y $h = 2$; hallar $hP(x)$.

$hP(x) = 2P(x) = 2(x^4) - 2(3x^3) + 2(4x^2) + 2(6x) - 2(8) = 2x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 12x - 16$

2.2. Polinomios Asociados:

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios definidos sobre un campo K, se dice que $Q(x)$ es un polinomio asociado a $P(x)$ si se cumple que $Q(x) = hP(x)$ siendo h un elemento no nulo $(h \neq 0)$ del campo K.

Si $h = -1$, entonces los polinomios $Q(x)$ *y* $hP(x)$ son opuestos ya que $Q(x) = (-1)P(x) = -P(x)$.

2.3. Suma de Polinomios:

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios definidos sobre un campo K, entonces la suma de $P(x) + Q(x)$ es el polinomio que resulta de sumar los términos semejantes de $P(x)$ y $Q(x)$.

Ejemplo: Hallar la suma de $P(x) = x^5 + x^2 + 4x - 7$ y $Q(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 10$.

Tenemos que

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (1+0)x^5 + (0+0)x^4 + (0+1)x^3 + (1+2)x^2 + (4+4)x + (-7+10) \\ &= x^5 + x^3 + 3x^2 + 8x + 3 \end{aligned}$$

Una manera práctica de sumar polinomios es colocarlos de modo que aparezcan en columna los coeficientes de una misma potencia de la variable y bastará con sumar algebraicamente dichos coeficientes. Para el caso anterior podemos proceder así:

$$\begin{array}{rrrrrr} x^5 & & +x^2 & +4x & -7 \\ & x^3 & +2x^2 & +4x & +10 \\ \hline x^5 & +x^3 & +3x^2 & +8x & +3 \end{array}$$

2.4. <u>Resta de Polinomios</u>:

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios definidos sobre un campo K, entonces la resta o diferencia de $P(x)-Q(x)$ es el polinomio que resulta de sumar $P(x)$ al opuesto de $Q(x)$. Esto es $P(x)-Q(x)=P(x)+\left[-Q(x)\right]$.

Ejemplo: Hallar la resta de $P(x)=x^4-5x^3+8x-1$ y $Q(x)=2x^3-7x^2+x-13$.

Tenemos que

$$\begin{aligned} P(x)-Q(x)=P(x)+\left[-Q(x)\right]&=\left(x^4-5x^3+8x-1\right)+\left[-\left(2x^3-7x^2+x-13\right)\right] \\ &=\left(x^4-5x^3+8x-1\right)+(-2x^3+7x^2-x+13) \\ &=(1+0)x^4+(-5-2)x^3+(0+7)x^2+(8-1)x+(-1+13) \\ &=x^4-7x^3+7x^2+7x+12 \end{aligned}$$

2.5. <u>El Espacio Vectorial de los Polinomios de Grado Menor o Igual que *n*</u>:

Sea P_n el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual que ***n***, vamos a demostrar que P_n con las operaciones de suma entre polinomios y multiplicación por un escalar, tal como hemos definido, constituyen un Espacio Vectorial en el campo de los números reales.

Demostración

Sean $F(x)$, $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios de grado menor o igual que ***n***, tales que

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

$$P(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n$$

$$Q(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_nx^n$$

Siendo $a_i, b_i, c_i \in R$. Y sean $h, k \in R$. Se verifica que:

1) $F(x) + P(x) = \left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n\right) + \left(b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n\right)$

$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + ... + (a_n + b_n)x^n$$

Por lo que $F(x) + P(x)$ es también un polinomio de grado menor o igual que ***n*** y se cumple la propiedad de cerradura o ley uniforme para la suma.

2) $F(x) + P(x) = \left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n\right) + \left(b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n\right)$

$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + ... + (a_n + b_n)x^n$$

$$= (b_0 + a_0) + (b_1 + a_1)x + (b_2 + a_2)x^2 + ... + (b_n + a_n)x^n$$

$$= P(x) + F(x)$$

Por lo que se cumple la propiedad conmutativa para la suma.

3) $\left[F(x) + P(x)\right] + Q(x) = \left[(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + ... + (a_n + b_n)x^n\right] +$

$$\left(c_0 + c_1x + c_2x^2 + ... + c_nx^n\right)$$

$$= \left\{\left[(a_0 + b_0) + c_0\right] + \left[(a_1 + b_1) + c_1\right]x + \left[(a_2 + b_2) + c_2\right]x^2 + ... + \left[(a_n + b_n) + c_n\right]x^n\right\}$$

$$= \left\{\left[a_0 + (b_0 + c_0)\right] + \left[a_1 + (b_1 + c_1)\right]x + \left[a_2 + (b_2 + c_2)\right]x^2 + ... + \left[a_n + (b_n + c_n)\right]x^n\right\}$$

$$= \left\{\left(a_0 + a_1x + +a_2x^2 + ... + a_nx^n\right) + \left[(b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)x + (b_2 + c_2)x^2 + ... + (b_n + c_n)x^n\right]\right\}$$

$$= F(x) + \left[P(x) + Q(x)\right]$$

Por lo que se cumple la propiedad asociativa para la suma.

4) $F\left(x\right)+0=\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n\right)+0=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n=F(x)$

Por lo que existe el elemento neutro para la suma de polinomios que es el polinomio nulo.

5) $F\left(x\right)+\left[-F\left(x\right)\right]=\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n\right)+\left(-a_0-a_1x-a_2x^2-\ldots-a_nx^n\right)$

$$=\left(a_0-a_0\right)+\left(a_1-a_1\right)x+\left(a_2-a_2\right)x^2+\ldots+\left(a_n-a_n\right)x^n=0$$

Por lo que existe el inverso aditivo u opuesto en la suma de polinomios.

6) $hF\left(x\right)=h\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n\right)=ha_0+ha_1x+ha_2x^2+\ldots+ha_nx^n$

Por lo que $hF\left(x\right)$ es también un polinomio de grado menor o igual que ***n*** y se cumple la propiedad de cerradura o ley uniforme para la multiplicación por un escalar.

7) $(hk)F\left(x\right)=\left(hk\right)\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n\right)=\left(hk\right)a_0+\left(hk\right)a_1x+\left(hk\right)a_2x^2+\ldots+\left(hk\right)a_nx^n$

$$=h(ka_0)+h(ka_1)x+h(ka_2)x^2+\ldots+h(ka_n)x^n$$

$$=h\left[kF\left(x\right)\right]$$

Por lo que se cumple la propiedad asociativa del producto de dos escalares por un polinomio.

8) $h\left[F\left(x\right)+P(x)\right]=h\left[\left(a_0+b_0\right)+\left(a_1+b_1\right)x+\left(a_2+b_2\right)x^2+\ldots+\left(a_n+b_n\right)x^n\right]$

$$=h\left(a_0+b_0\right)+h\left(a_1+b_1\right)x+h\left(a_2+b_2\right)x^2+\ldots+h\left(a_n+b_n\right)x^n$$

$$=\left[ha_0+hb_0\right]+\left[ha_1+hb_1\right]x+\left[ha_2+hb_2\right]x^2+\ldots+\left[ha_n+hb_n\right]x^n$$

$$=\left(ha_0+ha_1x+ha_2x^2+\ldots+ha_nx^n\right)+hb_0+hb_1x+hb_2x^2+\ldots+hb_nx^n$$

$$=hF\left(x\right)+hP(x)$$

Por lo que se cumple la propiedad distributiva del producto de un escalar respecto a la suma de polinomios.

$$
\begin{aligned}
9)\ (h+k)F(x) &= (h+k)\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n\right) \\
&= \left[(h+k)a_0\right] + \left[(h+k)a_1\right]x + \left[(h+k)a_2\right]x^2 + \ldots + \left[(h+k)a_n\right]x^n \\
&= \left(ha_0 + ka_0\right) + \left(ha_1 + ka_1\right)x + \left(ha_2 + ka_2\right)x^2 + \ldots + \left(ha_n + ka_n\right)x^n \\
&= \left(ha_0 + ha_1x + ha_2x^2 + \ldots + ha_nx^n\right) + \left(ka_0 + ka_1x + ka_2x^2 + \ldots + ka_nx^n\right) \\
&= hF(x) + kF(x)
\end{aligned}
$$

Por lo que se cumple la propiedad distributiva del producto de un polinomio respecto a la suma de dos escalares.

$$
\begin{aligned}
10)\ 1.F(x) &= 1.\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n\right) = 1.a_0 + 1.a_1x + 1.a_2x^2 + \ldots + 1.a_nx^n \\
&= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n = F(x)
\end{aligned}
$$

Existe el elemento neutro para la multiplicación por un escalar y es el uno (1).

Como se cumplen las 10 propiedades podemos afirmar que P_n, el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual que ***n*** define un espacio vectorial en el campo de los números reales.

2.6. Multiplicación de Polinomios:

2.6.1. Multiplicación de dos Monomios:

Para multiplicar dos monomios, se multiplican los coeficientes y se suman los exponentes. O sea $\left(ax^n\right)\left(bx^m\right) = abx^{n+m}$.

Ejemplo: $\left(3x^2\right)\left(-4x^3\right) = -12x^5$

2.6.2. Multiplicación de dos Polinomios Cualesquiera:

La multiplicación de polinomios está basada en el método para multiplicar monomios y la utilización repetida de la propiedad distributiva. Esto es, se multiplica cada término del polinomio multiplicador por cada uno de los términos del polinomio multiplicando;

siendo el polinomio producto la sumatoria de los productos parciales anteriormente obtenidos y cuyo grado viene dado por la suma de los grados de los polinomios factores.

Ejemplos:

1) Hallar el producto de $P(x)=x^2-5x+4$ por $Q(x)=3x-2$.

$$
\begin{aligned}
P(x)Q(x) &= \left(x^2-5x+4\right)(3x-2)=x^2(3x-2)-5x(3x-2)+4(3x-2) \\
&= x^2(3x)+x^2(-2)-5x(3x)-5x(-2)+4(3x)+4(-2) \\
&= 3x^3-2x^2-15x^2+10x+12x-8 \\
&= 3x^3-17x^2+22x-8
\end{aligned}
$$

Este proceso se hace un poco largo y podemos simplificarlo un poco si procedemos de esta forma:

$$
\begin{array}{r}
x^2-5x+4 \\
3x-2 \\
\hline
3x^3-15x^2+12x \quad\quad \\
-2x^2+10x-8 \\
\hline
3x^3-17x^2+22x-8
\end{array}
$$

2) Hallar el producto de $P(x)=x^2+4x+3$ por $Q(x)=x^4-5x^3+4x^2-7x+2$.

$$
\begin{array}{l}
x^4-5x^3+4x^2-7x+2 \\
\qquad\qquad\quad x^2+4x+3 \\
\hline
x^6-5x^5+4x^4-7x^3+2x^2 \\
\qquad 4x^5-20x^4+16x^3-28x^2+8x \\
\qquad\qquad\quad 3x^4-15x^3+12x^2-21x+6 \\
\hline
x^6-x^5-13x^4-6x^3-14x^2-13x+6
\end{array}
$$

Entonces $P(x)Q(x)=x^6-x^5-13x^4-6x^3-14x^2-13x+6$

2.6.3. Propiedades de la Multiplicación de Polinomios:

En la multiplicación de polinomios son válidas las siguientes propiedades:

1) Asociativa $\left[F(x)P(x)\right]Q(x) = F(x)\left[P(x)Q(x)\right]$.
2) Conmutativa $F(x)P(x) = P(x)F(x)$.
3) Distributiva con respecto a la suma
   $F(x)\left[P(x)+Q(x)\right] = F(x)P(x)+F(x)Q(x)$.
4) Elemento neutro $F(x)(1) = F(x)$.
5) Elemento absorbente $F(x)(0) = 0$.

2.7. División de Polinomios:

2.7.1. El Cociente Entre dos Monomios:

Para dividir dos monomios se dividen los coeficientes y se restan los exponentes. Es decir el cociente entre ax^n y bx^m, $b \neq 0$ es $\dfrac{ax^n}{bx^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)x^{n-m}$

Ejemplo: $\dfrac{8x^7}{4x^5} = 2x^2$.

2.7.2. El cociente Entre dos Polinomios:

Siendo $F(x)$ el polinomio de grado ***n*** denominado dividendo y $f(x)$ el polinomio de grado ***m*** denominado divisor se define la división entre $F(x)$ y $f(x)$ como:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{f(x)} \qquad (1)$$

Donde $Q(x)$ es el polinomio cociente de grado ***n – m*** y $R(x)$ es el polinomio denominado resto o residuo y es de grado menor que ***m***. Si multiplicamos la expresión (1) por $f(x)$ obtenemos: $F(x) = Q(x)f(x) + R(x)$ (2)

De esta expresión podemos deducir un método para dividir polinomios ya que a partir de $F(x)$ y $f(x)$ podemos obtener el cociente y el resto.

Ejemplo:

Hallar el cociente y el resto que resulta de dividir $F(x) = x^5 + 6x^4 + 7x^3 - 4x^2 - 2x + 6$ entre $f(x) = x^2 + 4x + 3$.

Ya sabemos $F(x) = Q(x)\,f(x) + R(x)$ y que el grado de $Q(x)$ es 5 – 2 = 3 por lo que podemos definir un polinomio $Q(x)$ de grado 3 de la siguiente forma: $Q(x) = A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0$.

Como el grado del resto $R(x)$ tiene que ser menor que el grado del divisor $f(x)$, podemos definir un polinomio $R(x)$ de grado 1 de la siguiente forma: $R(x) = B_1x + B_0$.

Entonces si sustituimos en $F(x) = Q(x)\,f(x) + R(x)$ obtenemos:

$$F(x) = Q(x)\,f(x) + R(x)$$
$$F(x) = \left(A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0\right)\left(x^2 + 4x + 3\right) + \left(B_1x + B_0\right)$$

Primero calculemos $\left(A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0\right)\left(x^2 + 4x + 3\right)$.

$$\begin{array}{r}
A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0 \qquad\qquad\qquad\qquad \\
x^2 + 4x + 3 \qquad\qquad\qquad\qquad \\
\hline
A_3x^5 + A_2x^4 + A_1x^3 + A_0x^2 \qquad\qquad\qquad \\
4A_3x^4 + 4A_2x^3 + 4A_1x^2 + 4A_0x \qquad \\
3A_3x^3 + 3A_2x^2 + 3A_1x + 3A_0 \\
\hline
A_3x^5 + \left(A_2 + 4A_3\right)x^4 + \left(A_1 + 4A_2 + 3A_3\right)x^3 + \left(A_0 + 4A_1 + 3A_2\right)x^2 + \left(4A_0 + 3A_1\right)x + 3A_0
\end{array}$$

Ahora sumamos $\left(B_1x + B_0\right)$ para obtener.

$$F(x) = x^5 + 6x^4 + 7x^3 - 4x^2 - 2x + 6 = \left(A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0\right)\left(x^2 + 4x + 3\right) + \left(B_1x + B_0\right)$$
$$= \left[A_3x^5 + \left(A_2 + 4A_3\right)x^4 + \left(A_1 + 4A_2 + 3A_3\right)x^3 + \left(A_0 + 4A_1 + 3A_2\right)x^2 + \left(4A_0 + 3A_1\right)x + 3A_0\right] + \left(B_1x + B_0\right)$$
$$= A_3x^5 + \left(A_2 + 4A_3\right)x^4 + \left(A_1 + 4A_2 + 3A_3\right)x^3 + \left(A_0 + 4A_1 + 3A_2\right)x^2 + \left(4A_0 + 3A_1 + B_1\right)x + \left(3A_0 + B_0\right)$$

Luego por igualdad de polinomios podemos establecer que:

$A_3 = 1$

$A_2 + 4A_3 = 6 \Rightarrow A_2 = 6 - 4A_3 = 5 - 4(1) = 6 - 4 = 2$

$A_1 + 4A_2 + 3A_3 = 7 \Rightarrow A_1 = 7 - 4A_2 - 3A_3 = 7 - 4(2) - 3(1) = 7 - 8 - 3 = -4$

$A_0 + 4A_1 + 3A_2 = -4 \Rightarrow A_0 = -4 - 4A_1 - 3A_2 = -4 - 4(-4) - 3(2) = -4 + 16 - 6 = 6$

$4A_0 + 3A_1 + B_1 = -2 \Rightarrow B_1 = -2 - 4A_0 - 3A_1 = -2 - 4(6) - 3(-4) = -2 - 24 + 12 = -14$

$3A_0 + B_0 = 6 \Rightarrow B_0 = 6 - 3A_0 = 6 - 3(6) = 6 - 18 = -12$

Por lo que: $A_3 = 1,\ A_2 = 2,\ A_1 = -4,\ A_0 = 6,\ \ B_1 = -14$ y $B_0 = -12$, entonces el cociente buscado es $Q(x) = A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0 = x^3 + 2x^2 - 4x + 6$ y el resto

$R(x) = B_1x + B_0 = -14x - 12$.

Este método que hemos utilizado es llamado de **coeficientes indeterminados**. Ahora utilizaremos otro método que simplifica mucho el proceso de la división y es el de la **división tradicional**.

Este método consiste en ordenar los polinomios dividendo $F(x)$ y divisor $f(x)$ en forma descendente, si no es completo podemos completar con ceros o dejar el espacio en blanco. Comenzamos dividiendo el primer término del dividendo $F(x)$ entre el primer término del divisor $f(x)$ para así obtener el primer término del cociente. Este término se multiplica por el divisor y se resta del dividendo. El resultado de la resta se toma como nuevo dividendo y se repite el procedimiento hasta que el dividendo que resulte tenga grado menor que el divisor.

Ejemplo:

Dividir $F(x) = 4x^6 - 3x^4 - 2x^3 + 2$ entre $f(x) = x^3 - 2x^2 - x - 1$.

Como los polinomios están ordenados procedemos a completar el dividendo de la siguiente manera $F(x) = 4x^6 + 0x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 0x^2 + 0x + 2$. Luego se inicia el proceso de la división.

$$
\begin{array}{l|l}
4x^6+0x^5-3x^4-2x^3+0x^2+0x+2 & x^3-2x^2-x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{-4x^6+8x^5+4x^4+4x^3} & 4x^3+8x^2+17x+44 \\
\quad 8x^5+x^4+\ 2x^3+\ 0x^2+0x+2 & \\
\quad \underline{-8x^5+16x^4+8x^3+8x^2} & \\
\qquad 17x^4+10x^3+8x^2+0x+2 & \\
\qquad \underline{-17x^4+34x^3+17x^2+17x} & \\
\qquad\quad 44x^3+25x^2+17x+2 & \\
\qquad\quad \underline{-44x^3+88x^2+44x+44} & \\
\qquad\qquad 113x^2+61x+46 &
\end{array}
$$

Así hemos obtenido el cociente $Q(x)=4x^3+8x^2+17x+44$ y el resto $R(x)=113x^2+61x+46$ de la división.

2.7.3. <u>Método de División Sintética o de Ruffni</u>:

Este método es un proceso abreviado para efectuar la división de un polinomio cualquiera $P(x)$ entre un binomio de la forma $(x-a)$ basado en los coeficientes indeterminados. Veamos como funciona:

Sea $F(x)=A_4x^4+A_3x^3+A_2x^2+A_1x+A_0$ un polinomio cualquiera y $(x-a)$ un binomio, entonces el cociente y el resto vienen definidos por:

$\dfrac{F(x)}{(x-a)}=Q(x)+\dfrac{R}{(x-a)}$, donde $Q(x)$ es de grado 3 y R es de grado 0; es decir, una constante. Entonces podemos construir $Q(x)$ de la forma:

$$Q(x)=B_3x^3+B_2x^2+B_1x+B_0$$

Por definición sabemos que: $F(x)=(x-a)Q(x)+R$, luego sustituyendo tenemos:

$$
\begin{aligned}
F(x)&=(x-a)\left(B_3x^3+B_2x^2+B_1x+B_0\right)+R\\
&=B_3x^4+B_2x^3+B_1x^2+B_0x-aB_3x^3-aB_2x^2-aB_1x-aB_0+R\\
&=B_3x^4+\left(B_2-aB_3\right)x^3+\left(B_1-aB_2\right)x^2+\left(B_0-aB_1\right)x+\left(R-aB_0\right)
\end{aligned}
$$

Luego por transitividad de la igualdad tenemos que:

$$\begin{aligned}
A_4 &= B_3 & &\Rightarrow & B_3 &= A_4\\
A_3 &= B_2 - aB_3 & &\Rightarrow & B_2 &= A_3 + aB_3\\
A_2 &= B_1 - aB_2 & &\Rightarrow & B_1 &= A_2 + aB_2\\
A_1 &= B_0 - aB_1 & &\Rightarrow & B_0 &= A_1 + aB_1\\
A_0 &= R - aB_0 & &\Rightarrow & R &= A_0 + aB_0
\end{aligned}$$

Podemos concluir diciendo que para dividir un polinomio $P(x)$ entre un binomio de la forma $(x-a)$ por la regla de Ruffini se procede de la manera siguiente:

1. Organice el polinomio dividendo de forma descendente y escriba los coeficientes, con sus signos e incluyendo los ceros, de manera horizontal tal como aparecen en el polinomio organizado. Tome el opuesto del término independiente del binomio separado mediante una línea vertical.

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & A_4 & A_3 & A_2 & A_1 & A_0 \\
a & & & & & \\
\hline
 & & & & &
\end{array}$$

2. Se toma el coeficiente principal del polinomio dividendo A_4 como coeficiente principal del polinomio cociente B_3.

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & A_4 & A_3 & A_2 & A_1 & A_0 \\
a & \downarrow & & & & \\
\hline
 & B_3 & & & &
\end{array} \qquad B_3 = A_4$$

3. Se obtiene el siguiente coeficiente del polinomio cociente mediante la suma del siguiente coeficiente del polinomio dividendo con el producto del opuesto del término independiente del binomio y el coeficiente del cociente obtenido anteriormente.

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & A_4 & A_3 & A_2 & A_1 & A_0 \\
a & \downarrow & aB_3 & & & \\
\hline
 & B_3 & B_2 & & &
\end{array} \qquad B_2 = A_3 + aB_3$$

4. Y así sucesivamente hasta llegar a la última sumatoria la cual representa el resto de la división.

	A_4	A_3	A_2	A_1	A_0
a	$\downarrow$	aB_3	aB_2	aB_1	aB_0
	B_3	B_2	B_1	B_0	R

$$B_1 = A_2 + aB_2$$
$$B_0 = A_1 + aB_1$$
$$R = A_0 + aB_0$$

Ejemplos:

1) Hallar el cociente y el resto que resulta de dividir $P(x) = x^5 + 4x^4 - 2x + 6$ entre el binomio $(x-2)$ mediante el uso de la regla de Ruffini.

	1	4	0	0	-2	6
2		2	12	24	48	92
	1	6	12	24	46	98

$$Q(x) = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 24x + 46$$
$$R = 98$$

2) Hallar el cociente y el resto que resulta de dividir el polinomio $P(x) = x^6 + 7x^5 - 13x^3 + 18x^2 + 7x - 15$ entre el binomio $(x+3)$ mediante el uso de la regla de Ruffini.

	1	7	0	-13	18	7	-15
-3		-3	-12	36	-69	153	-480
	1	4	-12	23	-51	160	-495

$$Q(x) = x^5 + 4x^4 - 12x^3 + 23x^2 - 51x + 160$$
$$R = -495$$

2.7.4. Polinomio Degradado:

Es el cociente que resulta de dividir un polinomio $P(x)$ entre un binomio $(x-a)$ y cuyo resto sea igual a cero.

Ejemplo: Dividamos $P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ entre $(x-1)$.

	1	-3	-6	8
1		1	-2	-8
	1	-2	-8	0

$$Q(x) = x^2 - 2x - 8$$
$$R = 0$$

Como el resto es cero, entonces $Q(x) = x^2 - 2x - 8$ es un polinomio degradado de $P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$.

2.7.5. <u>Teorema del Resto</u>:

El resto que resulta al dividir un polinomio $F(x)$ entre un binomio de la forma $(x-a)$, será siempre igual a $F(a)$. Es decir, es el valor numérico del polinomio que resulta de sustituir la variable $\boldsymbol{x}$ por el valor de $\boldsymbol{a}$.

Demostración:

Sea $F(x)$ un polinomio y $(x-a)$ el binomio, entonces $R = F(a)$.

$$\frac{F(x)}{(x-a)} = Q(x) + \frac{R}{(x-a)} \qquad \text{por definición}$$

Hay que destacar que **R** no depende de $\boldsymbol{x}$ ya que su grado debe ser menor que el del divisor $(x-a)$ que es de primer grado por lo que **R** debe ser de grado cero, es decir, un valor constante.

Ahora si multiplicamos ambos miembros de $\frac{F(x)}{(x-a)} = Q(x) + \frac{R}{(x-a)}$ por $(x-a)$ tenemos que: $F(x) = (x-a)Q(x) + R$

Ahora sustituyendo $x = a$ tenemos que:

$$F(a) = (a-a)Q(a) + R$$
$$F(a) = (0)Q(a) + R$$
$$F(a) = R$$

Ejemplo: Determine el resto de dividir $F(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 2x + 7$ entre $(x-2)$.

Hallamos

$$F(2) = (2)^4 + 3(2)^3 - 5(2)^2 - 2(2) + 7 = 16 + 3(8) - 5(4) - 4 + 7 = 16 + 24 - 20 - 4 + 7 = 23$$

Por lo tanto R = 23.

Observaciones:

1) Si el divisor es $(x+a)$, como $(x+a)=[x-(-a)]$, entonces $R=F(-a)$. Es decir, el resto se obtiene reemplazando ***x*** por el opuesto del término independiente del binomio.

Ejemplo:

Determine el resto de dividir $F(x)=2x^4-3x^3+4x^2+5x+1$ entre $(x+1)$.

Hallamos

$$F(-1)=2(-1)^4-3(-1)^3+4(-1)^2+5(-1)+1=2(1)-3(-1)+4(1)-5+1=2+3+4-5+1=5$$

por lo tanto R = 5.

2) Lo que se ha analizado acerca del teorema del resto está basado en el hecho de que el coeficiente de ***x*** en el binomio $(x-a)$ es la unidad. Si se da el caso de que el coeficiente de ***x*** fuera diferente de la unidad, entonces se divide el binomio entre el valor del coeficiente de ***x***. Esto es si se divide un polinomio $F(x)$ entre $(bx-a)$, entonces el resto se obtiene evaluando para $F\left(\frac{a}{b}\right)$.

Ejemplo:

Determine resto de dividir $F(x)=2x^4-3x^3+4x^2+5x+1$ entre $(2x-1)$.

Dividimos el binomio $(2x-1)$ entre 2 y obtenemos $\left(x-\frac{1}{2}\right)$, entonces hallamos

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)^4-3\left(\frac{1}{2}\right)^3+4\left(\frac{1}{2}\right)^2+5\left(\frac{1}{2}\right)+1=2\left(\frac{1}{16}\right)-3\left(\frac{1}{8}\right)+4\left(\frac{1}{4}\right)+5\left(\frac{1}{2}\right)+1$$

$$=\frac{1}{8}-\frac{3}{8}+1+\frac{5}{2}+1=\frac{17}{4}$$

Por lo tanto R = $\frac{17}{4}$.

2.7.6. <u>Teorema del Factor</u>:

Si al dividir un polinomio $F(x)$ entre un binomio de la forma $(x-a)$, el resto que resulta es igual a cero, entonces el binomio $(x-a)$ es un factor de $F(x)$.

Demostración:

Por definición sabemos que $\dfrac{F(x)}{(x-a)} = Q(x) + \dfrac{R}{(x-a)}$.

Luego, multiplicando ambos miembros por $(x-a)$ obtenemos:

$$F(x) = (x-a)Q(x) + R$$

Sustituyendo $R = 0$ por hipótesis tenemos que:

$$F(x) = (x-a)Q(x) + 0$$
$$F(x) = (x-a)Q(x)$$

Por tanto tenemos que: $(x-a)$ es un factor de $F(x)$.

Ejemplos:

1- Probar si $(x-1)$ es un factor de $P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$.
Determinamos si el resto de dividir $P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ entre $(x-1)$ es cero.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & -6 & 8 \\ 1 & & 1 & -2 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & -8 & 0 \end{array}$$

$Q(x) = x^2 - 2x - 8$.
$R = 0$

Como el resto es cero, entonces $(x-1)$ es un factor de $P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$.

2- Hallar el valor de "***k***" tal que $P(x) = x^5 + 3x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 2kx - 3k$ sea divisible entre $(x-2)$.

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & 3 & -2 & -10 & 2k & -3k \\ 2 & & 2 & 10 & 16 & 12 & 4k+24 \\ \hline & 1 & 5 & 8 & 6 & 2k+12 & k+24 \end{array}$$

El resto de la división es $k + 24$, al igualar a 0 obtenemos $k + 24 = 0 \Rightarrow k = -24$

2.7.7. Teorema Reciproco del Teorema del Factor:

Si al dividir un polinomio $F(x)$ entre un binomio de la forma $(x-a)$, siendo $(x-a)$ un factor del polinomio $F(x)$, entonces el resto de la división tiene que ser igual a cero.

Demostración:

Por definición sabemos que $\frac{F(x)}{(x-a)} = Q(x) + \frac{R}{(x-a)}$. Luego, multiplicando ambos miembros por $(x-a)$ obtenemos:

$$F(x) = (x-a)Q(x) + R$$

Como $(x-a)$ es un factor por hipótesis tenemos que:

$$F(x) = (x-a)Q(x)$$

Lo que implica que: $R = 0$

2.7.8. Divisibilidad Entre dos Polinomios:

Un polinomio es divisible entre otro cuando existe un tercer polinomio que al multiplicarlo por el segundo, produce al primer polinomio. Es decir, sean $F(x)$ y $f(x)$ dos polinomios, decimos que $F(x)$ es divisible por $f(x)$ si existe un polinomio $Q(x)$ tal que $F(x) = Q(x)f(x)$.

Ejemplo: Al dividir $F(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ entre $f(x) = x - 1$ obtenemos $Q(x) = x^2 - 2x - 8$ y $R = 0$. Por lo tanto $F(x)$ es divisible entre $f(x)$ ya que existe $Q(x) = x^2 - 2x - 8$ tal que $F(x) = Q(x)f(x)$.

2.7.9. Divisores de un Polinomio:

Si $F(x)$ es divisible entre $f(x)$ tal que $F(x) = Q(x)f(x)$ entonces los polinomios $f(x)$ y $Q(x)$ son divisores de $F(x)$.

2.7.9.1. **Divisores Triviales de un Polinomio**:

Un polinomio $F(x)$ sobre un campo numérico ***K*** admite como divisores triviales a todos los elementos diferentes de cero del campo, $h \in K,\ h \neq 0$ y a todos los polinomios de la forma $hF(x)$.

Ejemplo: Sea $F(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$, entonces cualquier número real diferente de cero $\left(2, 5, -3, \frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$ y cualquier polinomio asociado a $F(x)$, $(2F(x), -3F(x))$ son divisores triviales de $F(x)$.

Recordemos que dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ definidos sobre un campo K, se dice que son ***asociado***s si se cumple que $Q(x) = hP(x)$ siendo *h* un elemento no nulo $(h \neq 0)$ del campo K. Esto significa que si dos polinomios son asociados, entonces uno divide al otro ya que son divisores triviales uno del otro.

2.7.9.2. **Divisores Propios de un Polinomio**:

Todo divisor de un polinomio $F(x)$ que no sea trivial se denomina divisor propio.

Ejemplo: Sea $F(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$, entonces $f(x) = x - 1$ es uno de sus divisores propios.

2.7.9.3. **Polinomio Irreducible**:

Un polinomio que no tiene ningún divisor propio se denomina polinomio irreducible.

Es importante aclarar que un polinomio puede no ser reducible en un campo, pero sí serlo en otro campo.

Ejemplos:

1) El polinomio $F(x) = x^2 - 2$ no es reducible en el campo de los números racionales,

pero sí lo es en el de los números reales ya que $x^2 - 2 = \left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)$ Entonces $\left(x - \sqrt{2}\right)$ y $\left(x + \sqrt{2}\right)$ son divisores propios de $F(x)$.

2) El polinomio $F(x) = x^2 + 4$ no es reducible en el campo de los números reales, pero sí lo es en el de los números complejos ya que $x^2 + 4 = (x + 2i)(x - 2i)$. Entonces $(x + 2i)$ y $(x - 2i)$ son divisores propios de $F(x)$.

2.7.9.4. Polinomio Primo:

Un polinomio es ***primo*** si es irreducible y mónico o normal a la vez. Recuerde que un polinomio es mónico o normal si su coeficiente principal es 1.

Ejemplo: El polinomio $(x - 2)$ es un polinomio primo en el campo de los reales, pero $(3x + 1)$ no lo es.

***Nota:* Para el estudio de la divisibilidad, en lugar de un polinomio $F(x)$ puede considerarse uno cualquiera de sus asociados , ya que tienen los mismos divisores y los mismos múltiplos. Conviene en la mayoría de los casos considerar aquellos que son mónicos porque facilitan algunos cálculos, como veremos más adelante.**

2.7.10. Mínimo Común Múltiplo de dos o más Polinomios:

El Mínimo Común Múltiplo (MCM) de $F(x)$ y $G(x)$ es el polinomio de menor grado que contiene exactamente a $F(x)$ y $G(x)$. En otras palabras, el polinomio de menor grado del cual $F(x)$ y $G(x)$ son divisores.

2.7.11. Máximo Común Divisor de dos o más Polinomios:

El Máximo Común Divisor (MCD) de $F(x)$ y $G(x)$ es el polinomio de mayor grado que divide exactamente a $F(x)$ y $G(x)$.

2.7.11.1. <u>**Algoritmo de Euclides:**</u>

El algoritmo de Euclides es un procedimiento que se utiliza para calcular el Máximo Común Divisor (MCD) de dos polinomios.

El procedimiento para hallar el MCD de $F(x)$ y $G(x)$ utilizando el algoritmo de Euclides es el siguiente:

Se divide $F(x)$ entre $G(x)$ para obtener un cociente $Q_1(x)$ y un resto $R_1(x)$.

Si $R_1(x)$ es cero, entonces el MCD es $G(x)$. En caso contrario se divide $G(x)$ entre $R_1(x)$ para obtener un cociente $Q_2(x)$ y un resto $R_2(x)$.

Si $R_2(x)$ es cero, entonces el MCD es $R_1(x)$. En caso contrario se divide $R_1(x)$ entre $R_2(x)$ para obtener un cociente $Q_3(x)$ y un resto $R_3(x)$.

Se continúa este procedimiento hasta que uno de los restos sea cero, entonces el resto anterior (el último divisor utilizado) es el MCD buscado. Esto es:

$$\frac{F(x)}{G(x)} = Q_1(x) + \frac{R_1(x)}{G(x)} \Rightarrow \text{ entonces si } \begin{cases} R_1(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad MCD = G(x) \\ R_1(x) = k \neq 0 \quad \Rightarrow \quad F(x) \text{ y } G(x) \text{ son primos entre sí} \\ \mathrm{R}_1(x) = \text{un Polinomio} \Rightarrow \text{ se divide } G(x) \text{ entre } R_1(x) \end{cases}$$

$$\frac{G(x)}{R_1(x)} = Q_2(x) + \frac{R_2(x)}{R_1(x)} \Rightarrow \text{ entonces si } \begin{cases} R_2(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad MCD = R_1(x) \\ R_2(x) = k \neq 0 \quad \Rightarrow \quad P(x) \text{ y } G(x) \text{ son primos entre sí} \\ \mathrm{R}_2(x) = \text{un Polinomio} \Rightarrow \text{ se divide } \mathrm{R}_1(x) \text{ entre } R_2(x) \end{cases}$$

$$\frac{R_1(x)}{R_2(x)} = Q_3(x) + \frac{R_3(x)}{R_2(x)} \Rightarrow \text{ entonces si } \begin{cases} R_3(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad MCD = R_2(x) \\ R_3(x) = k \neq 0 \quad \Rightarrow \quad P(x) \text{ y } G(x) \text{ son primos entre sí} \\ \mathrm{R}_3(x) = \text{un Polinomio} \Rightarrow \text{ se divide } \mathrm{R}_2(x) \text{ entre } R_3(x) \end{cases}$$

y así sucesivamente hasta que:

$$\frac{R_{n-2}(x)}{R_{n-1}(x)} = Q_n(x) + \frac{R_n(x)}{R_{n-1}(x)} \Rightarrow \text{ entonces si } \begin{cases} R_n(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad MCD = R_{n-1}(x) \\ \\ R_n(x) = k \neq 0 \quad \Rightarrow \quad P(x) \text{ y } G(x) \text{ son primos entre sí} \end{cases}$$

Ejemplos:

1) Sean $F\left(x\right)=x^8+5x^7-3x^6-42x^5-25x^4+92x^3+78x^2-35x-15$

$$\text{y} \quad G(x)=x^5+5x^4-27x^2-25x+10$$

Hallar el MCD de $F(x)$ y $G(x)$

Solución: Iniciamos dividiendo $F(x)$ entre $G(x)$.

$$\begin{array}{l|l}
x^8+5x^7-3x^6-42x^5-25x^4+92x^3+78x^2-35x-15 & x^5+5x^4+0x^3-27x^2-25x+10 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^8-5x^7+0x^6+27x^5+25x^4-10x^3} & x^3-3x \\
\quad -3x^6-15x^5+0x^4+82x^3+78x^2-35x-15 & \\
\quad \underline{3x^6+15x^5+0x^4-81x^3-75x^2+30x} & \\
\qquad x^3+3x^2-5x-15 &
\end{array}$$

Entonces $Q_1(x)=x^3-3x$ y $R_1(x)=x^3+3x^2-5x-15$.

Como $R_1(x)$ es diferente de cero procedemos a efectuar $G(x)$ entre $R_1(x)$.

$$\begin{array}{l|l}
x^5+5x^4+0x^3-27x^2-25x+10 & x^3+3x^2-5x-15 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^5-3x^4+5x^3+15x^2} & x^2+2x-1 \\
\quad 2x^4+5x^3-12x^2-25x+10 & \\
\quad \underline{-2x^4-6x^3+10x^2+30x} & \\
\qquad -x^3-2x^2+5x+10 & \\
\qquad \underline{x^3+3x^2-5x-15} & \\
\qquad\quad x^2+0x-5 &
\end{array}$$

Entonces $Q_2(x)=x^2+2x-1$ y $R_2(x)=x^2-5$.

Como $R_2(x)$ es diferente de cero procedemos a efectuar $R_1(x)$ entre $R_2(x)$.

$$\begin{array}{l|l}
x^3+3x^2-5x-15 & x^2+0x-5 \\ \cline{2-2}
\underline{-x^3+0x^2+5x} & x+3 \\
\quad 3x^2+0x-15 & \\
\quad \underline{-3x^2+0x+15} & \\
\qquad 0 &
\end{array}$$

Entonces $Q_3(x)=x+3$ y $R_3(x)=0$

Como $R_3(x)$ es igual a cero el MCD de $F(x)$ y $G(x)$ es $R_2(x)=x^2-5$.

2) Sean $M(x)=2x^4+9x^2+17x-21$ y $N(x)=x^3+2x^2+4x+21$

Hallar el MCD de $M(x)$ y $N(x)$

Solución: Iniciamos dividiendo $M(x)$ entre $N(x)$.

$$
\begin{array}{rl}
2x^4+0x^3+9x^2+17x-21 & \underline{|\,x^3+2x^2+4x+21} \\
\underline{-2x^4-4x^3-8x^2-42x\qquad} & \quad 2x-4 \\
-4x^3+x^2-25x-21 & \\
\underline{4x^3+8x^2+16x+84} & \\
9x^2-9x+63 &
\end{array}
$$

Entonces $Q_1(x)=2x-4$ y $R_1(x)=9x^2-9x+63$

Como $R_1(x)$ es diferente de cero procedemos a efectuar $N(x)$ entre $R_1(x)$. Pero en este caso, para facilitar los cálculos, vamos a dividir entre un polinomio asociado a $R_1(x)$ y que sea mónico.

$R_1(x)=9x^2-9x+63=9\left(x^2-x+7\right)$ por lo que x^2-x+7 es un polinomio mónico asociado a $R_1(x)$.

$$
\begin{array}{rl}
x^3+2x^2+4x+21 & \underline{|\,x^2-x+7} \\
\underline{-x^3+x^2+7x\qquad} & \quad x+3 \\
3x^2-3x+21 & \\
\underline{-3x^2+3x-21} & \\
0 &
\end{array}
$$

Entonces $Q_2(x)=x+3$ y $R_2(x)=0$

Como $R_2(x)$ es igual a cero el MCD de $M(x)$ y $N(x)$ es $R_1(x)=x^2-x+7$.

3) Sean $F(x)=x^2+3x+2$ y $f(x)=x^2+3$

Hallar el MCD de $F(x)$ y $f(x)$

Solución: Iniciamos dividiendo $F(x)$ entre $f(x)$.

$$\begin{array}{rl} x^2+3x+2 & \underline{|x^2+0x+3} \\ \underline{-x^2+0x-3} & \quad 1 \\ 3x-1 & \end{array}$$

Entonces $Q_1(x)=1$ y $R_1(x)=3x-1.$

Como $R_1(x)$ es diferente de cero procedemos a efectuar $f(x)$ entre el polinomio mónico asociado a $R_1(x)$.

$$\begin{array}{rl} x^2+0x+3 & \underline{|x-\frac{1}{3}} \\ \underline{-x^2+\frac{1}{3}x} & \quad x+\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}x+3 & \\ \underline{-\frac{1}{3}x+\frac{1}{9}} & \\ \frac{28}{9} & \end{array}$$

Como $R_2(x)=\frac{28}{9}$ es diferente de cero y además es una constante, cuyo polinomio asociado es 1, entonces los polinomios $F(x)$ y $f(x)$ son primos entre sí y el MCD entre ellos no existe.

2.7.12. <u>Propiedades de la Divisibilidad de Polinomios</u>:

1. Sea $F(x)$ un polinomio y $k \neq 0$ una constante, entonces $F(x)$ es divisible entre k.
2. Si $F(x)$ es divisible entre $Q(x)$ y $P(x)$ es divisible entre $Q(x)$, entonces:
   - $F(x)+P(x)$ es divisible entre $Q(x)$.
   - $F(x)P(x)$ es divisible entre $Q(x)$.
   - $kF(x)$ es divisible entre $Q(x)$.
   - $F(x)$ es divisible entre $kQ(x)$.

3. <u>Derivada de un Polinomio</u>:

Dado $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_2x^2+a_1x+a_0$ se define el polinomio derivado o simplemente la derivada de $P(x)$, que se representa $\frac{d\left(P(x)\right)}{dx}=P'(x)$, como el polinomio $P'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+(n-2)a_{n-2}x^{n-3}+...+2a_2x+a_1$.

La derivada de un polinomio es otro polinomio de grado una unidad menor; es decir, la derivada de un polinomio de grado 5 es otro polinomio de grado 4.

Ejemplo: Dado el polinomio $P(x)=x^5+4x^4-7x^3+2x^2-7x+6$ hallar la derivada.

$$\begin{aligned} P'(x) &= 5\left(x^{5-1}\right)+4\left(4x^{4-1}\right)-3\left(7x^{3-1}\right)+2\left(2x^{2-1}\right)-1\left(7x^{1-1}\right)+0\left(6x^{0-1}\right) \\ &= 5x^4+16x^3-21x^2+4x-7 \end{aligned}$$

3.1. Derivada Sucesiva o de Orden Superior:

Si derivamos un polinomio $P(x)$ obtenemos una primera derivada $P'(x)$. Si este polinomio $P'(x)$ lo volvemos a derivar obtenemos una segunda derivada $P''(x)$. Prosiguiendo así podemos obtener la tercera, la cuarta, …, derivada. Para un polinomio de grado ***n*** podemos obtener ***n*** derivadas no nulas, la ***n*** + 1 derivada es nula, o sea es igual a cero.

Ejemplo: Hallar las derivadas sucesivas de $P(x)=x^5+4x^4-7x^3+2x^2-7x+6$.

$$\begin{aligned} P'(x) &= 5x^4+16x^3-21x^2+4x-7 \\ P''(x) &= 20x^3+48x^2-42x+4 \\ P'''(x) &= 60x^2+96x-42 \\ P^{iv}(x) &= 120x+96 \\ P^{v}(x) &= 120 \\ P^{vi}(x) &= 0 \end{aligned}$$

4. Esquema de Horner:

El esquema de Horner establece la relación entre las derivadas sucesivas de un polinomio evaluadas en un valor determinado $x=a$ y los restos que resultan de dividir sucesivamente al polinomio entre el binomio $x-a$. Es decir, sea $P(x)$ de grado "n" y $x=a$, con el esquema de Horner calculamos:

$$R_0 = P(a), \quad R_1 = \frac{P^{(1)}(a)}{1!},\ R_2 = \frac{P^{(2)}(a)}{2!}, \quad R_3 = \frac{P^{(3)}(a)}{3!}, \dots,\ R_n = \frac{P^{(n)}(a)}{n!}$$

La expresión $n!$ se denomina factorial de un número natural ***n*** y se define como: $n! = n(n-1)(n-2)\dots(2)(1)$. En particular, $5! = (5)(4)(3)(2)(1) = 120$.

Ejemplo:

Sea $P(x) = x^4 - 3x^2 + 4x - 6$, hallar el valor numérico de $P(x)$ y sus derivadas sucesivas para $x = 2$.

$$P(x) = x^4 - 3x^2 + 4x - 6 \ \Rightarrow\ P(2) = (2)^4 - 3(2)^2 + 4(2) - 6 = 16 - 12 + 8 - 6 = 6$$

$$P^{(1)}(x) = 4x^3 - 6x + 4 \ \Rightarrow\ P^{(1)}(2) = 4(2)^3 - 6(2) + 4 = 32 - 12 + 4 = 24$$

$$P^{(2)}(x) = 12x^2 - 6 \ \Rightarrow\ P^{(2)}(2) = 12(2)^2 - 6 = 48 - 6 = 42$$

$$P^{(3)}(x) = 24x \ \Rightarrow\ P^{(3)}(2) = 24(2) = 48$$

$$P^{(4)}(x) = 24 \ \Rightarrow\ P^{(4)}(2) = 24$$

Ahora aplicando el esquema de Horner tenemos que:

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 0 & -3 & 4 & -6 \\
2 & & 2 & 4 & 2 & 12 \\
\hline
 & 1 & 2 & 1 & 6 & \underline{6} = R_0 \longrightarrow \text{Por tanto } R_0 = P(2) = 6 \\
2 & & 2 & 8 & 18 & \\
\hline
 & 1 & 4 & 9 & \underline{24} = R_1 \longrightarrow \text{Por tanto } R_1 = \dfrac{P^{(1)}(2)}{1!} = \dfrac{24}{1} = 24 & \\
2 & & 2 & 12 & & \\
\hline
 & 1 & 6 & \underline{21} = R_2 \longrightarrow \text{Por tanto } R_2 = \dfrac{P^{(2)}(2)}{2!} = \dfrac{42}{2} = 21 & & \\
2 & & 2 & & & \\
\hline
 & \underline{1} & \underline{8} = R_3 \longrightarrow \text{Por tanto } R_3 = \dfrac{P^{(3)}(2)}{3!} = \dfrac{48}{6} = 8 & & & \\
\end{array}$$

$$\underline{1} = R_4 \longrightarrow \text{Por tanto } R_4 = \frac{P^{(4)}(2)}{4!} = \frac{24}{24} = 1$$

5. Fórmula de Taylor:

Cuando una función $f(x)$ tiene una expresión complicada y resulta difícil calcular su valor en un punto ***a*** de su dominio, podemos utilizar polinomios para calcular el valor aproximado de ella alrededor de dicho punto.

Si $f(x)$ y sus ***n*** derivadas son continuas en un intervalo que contiene al punto ***a***, podemos aproximar el valor de la función en $x=a$ por medio de la fórmula de Taylor:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

Esto quiere decir que la función $f(x)$ alrededor del punto $x=a$ y el polinomio que resulta de la fórmula de Taylor tienen valores muy aproximados.

Ejemplo: aproximemos la función $f(x)=sen(x)$ a un polinomio en el punto $x=0$.

$$f(x)=sen(x)\to f(0)=sen(0)\approx 0\pi$$

$$f'(x)=\cos(x)\to f'(0)=\cos(0)\approx 1$$

$$f''(x)=-sen(x)\to f''(0)=-sen(0)\approx 0$$

$$f'''(x)=-cos(x)\to f'''(0)=-\cos(0)=-1$$

$$f^{iv}(x)=sen(x)\to f^{iv}(0)=sen(0)=\approx 0$$

$$f^{v}(x)=cos(x)\to f^{v}(0)=\cos(0)=1$$

Aproximando la función $f(x)=sen(x)$ a un polinomio de quinto grado en el punto $x=0$ obtenemos:

$$f(x)=sen(x)$$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}(x-0)+\frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2+\frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3+\frac{f^{iv}(0)}{4!}(x-0)^4+\frac{f^{v}(0)}{5!}(x-0)^5$$

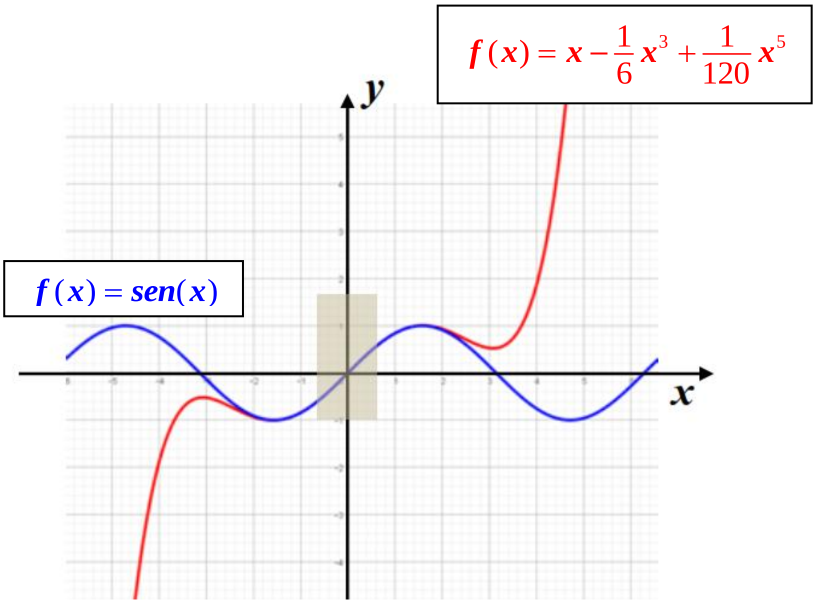
$$f(x)=0+\frac{1}{1!}(x-0)-\frac{0}{2!}(x-0)^2-\frac{(-1)}{3!}(x-0)^3+\frac{0}{4!}(x-0)^4+\frac{1}{5!}(x-0)^5\Rightarrow$$

$$\boxed{f(x)=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5}$$

Veamos la gráfica:

Observe que alrededor del punto $x=0$ las dos gráficas coinciden.

Elegimos un polinomio de 5to grado, pero igual pudimos elegir otro polinomio



Esta fómula, además, permite el desarrollo de un polinomio algebraico cuando x se incrementa en un valor a.

$$f(x+a)=f(y)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}y+\frac{f''(a)}{2!}y^2+\frac{f'''(a)}{3!}y^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}y^n$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}y^i$$

Esta expresión es de gran aplicación en la teoría de ecuaciones.

Ejemplo:

Desarrollar el polinomio $f(x)=x^2-4x+2$ si se incrementa x en $a=1$ y $a=-1$

Solución: Hallamos las derivadas y evaluamos Para $f(1)$ **y** $f(-1)$**:**

$$f(x)=x^2-4x+2 \rightarrow \quad f(1)=1-4+2=-1 \rightarrow \quad f(-1)=1+4+2=7$$

$$f'(x)=2x-4 \quad \rightarrow \quad f'(1)=2-4=-2 \quad \rightarrow \quad f'(-1)=-2-4=-6$$

$$f''(x)=2 \quad \rightarrow \quad f''(1)=2 \quad \rightarrow \quad f''(-1)=2$$

Aplicando la fórmula de Taylor tenemos que:

Para $a=1$ $\quad f(x+1)=f(1)+\dfrac{f'(1)}{1!}y+\dfrac{f''(1)}{2!}y^2=-1+\dfrac{(-2)}{1}y+\dfrac{2}{2}y^2$

$$=-1-2y+y^2=y^2-2y-1$$

$$f(x+1)=f(y)=y^2-2y-1$$

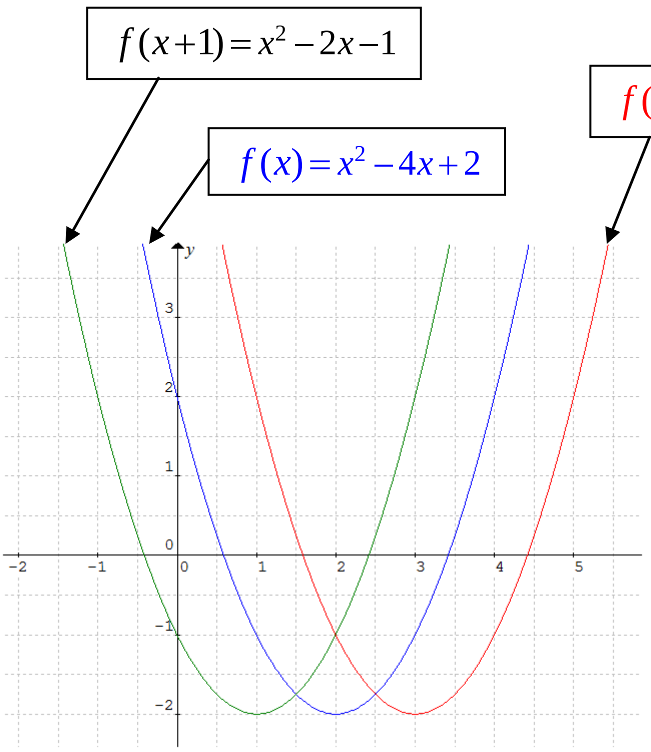
Para $a=-1$ $\quad f\left(x+(-1)\right)=f\left(x-1\right)=f(-1)+\dfrac{f'(-1)}{1!}y+\dfrac{f''(-1)}{2!}y^2$

$$=7+\frac{(-6)}{1}y+\frac{2}{2}y^2=12-6y+y^2=y^2-6y+7$$

$$f(x-1)=f(y)=y^2-6y+7$$

Intercambiando la y por x obtenemos: $f(x+1)=f(y)=y^2-2y-1=x^2-2x-1$ y $f(x-1)=f(y)=y^2-6y+7=x^2-6x+7$.

Observemos las gráficas de $f(x)$, $f(x+1)$ **y** $f(x-1)$.



Observe que cuando $a=-1$ la gráfica se traslada 1 unidad hacia la derecha y cuando $a=1$ se traslada una unidad hacia la izquierda. Es decir, cuando el valor es positivo se traslada a la izquierda y si es negativo a la derecha.

En lugar de hacer los cálculos de las derivadas sucesivas y luego evaluar en $x=a$, podemos utilizar el esquema de Horner.

Ejemplo:

Desarrolle el polinomio $P(x)=x^3+4x^2+3x-6$ si x se incrementa en 2 unidades.

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 4 & 3 & -6 \\
2 & & 2 & 12 & 30 \\
\hline
 & 1 & 6 & 15 & 24=R_0 \\
2 & & 2 & 16 & \\
\hline
 & 1 & 8 & 31=R_1 & \\
2 & & 2 & & \\
\hline
 & 1 & 10=R_2 & & \\
 & =R_3 & & &
\end{array}
$$

Por lo tanto $P(x+2)=P(y)=24+31y+10y^2+y^3$.

En conclusión, la fórmula de Taylor nos permite transformar un polinomio en otro donde la variable se ha incrementado en un valor ***a***, su expresión es:

$$f(x+a)=f(y)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}y+\frac{f''(a)}{2!}y^2+\frac{f'''(a)}{3!}y^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}y^n$$

Además, expresar un polinomio cualquiera en función de las potencias de un binomio de la forma $(x-a)$. Su expresión es:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

En ambos casos se procede de igual manera, aplicando el esquema de Horner, para obtener los coeficientes $\dfrac{f^{(i)}(a)}{i!}$.

Ejemplos:

Sea $P(x)=x^4-3x^2+5x-6$

1) Exprese el polinomio $P(x)$ en potencia del binomio $(x-1)$.

Solución: Utilizamos el esquema de Horner

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 0 & -3 & 5 & -6\\
1 & & 1 & 1 & -2 & 3\\ \hline
 & 1 & 1 & -2 & 3 & -3=R_0\\
1 & & 1 & 2 & 0 & \\ \hline
 & 1 & 2 & 0 & 3=R_1 & \\
1 & & 1 & 3 & & \\ \hline
 & 1 & 3 & 3=R_2 & & \\
1 & & 1 & & & \\ \hline
 & \underset{=R_4}{1} & 4=R_3 & & &
\end{array}$$

Por lo tanto $P(x)=-3+3(x-1)+3(x-1)^2+4(x-1)^3+(x-1)^4$.

2) Transforme $P(x)$ en otro donde ***x*** se ha incrementado en 3 unidades.

Solución: Utilizamos el esquema de Horner

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & 0 & -3 & 5 & -6\\
3 & & 3 & 9 & 18 & 69\\ \hline
 & 1 & 3 & 6 & 23 & 63=R_0\\
3 & & 3 & 18 & 72 & \\ \hline
 & 1 & 6 & 24 & 95=R_1 & \\
3 & & 3 & 27 & & \\ \hline
 & 1 & 9 & 51=R_2 & & \\
3 & & 3 & & & \\ \hline
 & \underset{=R_4}{1} & 12=R_3 & & &
\end{array}$$

Por lo tanto $P(x+3)=P(y)=63+95y+51y^2+12y^3+y^4$.

3) Transforme $P(x)$ en otro donde ***x*** se ha incrementado en -2 unidades.

Solución: Utilizamos el esquema de Horner

$$
\begin{array}{r|rrrrl}
 & 1 & 0 & -3 & 5 & -6 \\
-2 & & -2 & 4 & -2 & -6 \\
\hline
 & 1 & -2 & 1 & 3 & -12 = R_0 \\
-2 & & -2 & 8 & -18 & \\
\hline
 & 1 & -4 & 9 & -15 = R_1 & \\
-2 & & -2 & 12 & & \\
\hline
 & 1 & -6 & 21 = R_2 & & \\
-2 & & -2 & & & \\
\hline
 & 1 & -8 = R_3 & & & \\
 & \searrow = R_4 & & & &
\end{array}
$$

Por lo tanto $P(x-2) = P(y) = -12 - 15y + 21y^2 - 8y^3 + y^4$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

I- En el siguiente cuadro responda lo que se pide en la casilla correspondiente.

Polinomio	¿Cuál es su grado?	¿Está ordenado?	¿Es completo?	¿Es mónico?	Coef. Principal
$x^6 + 3x^5 - 8x^2 + 4x - 25$					
$2x^5 - x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 5x + 17$					
$4x - 3x^7 + 2x^3 + x^8 - 5x^6 + 7x^2 - 14 - x^5 + 9x^4$					
$13 + x^2 - 5x^3 + 7x^5 - x^{10}$					
$x^7 + x^9 - x^2 + x^6 - x^3 + x^5$					
$2x^4 + 3x^5 - 8x^3 + x^6 - x^2 + 7$					

II- Complete

1) El polinomio que tiene todos sus coeficientes iguales a cero se llama polinomio

____

2) Un polinomio es mónico o normal si ______________________________________

3) Dado el polinomio $\mathbf{x^4 - 2x^3 + 5x - 3}$ su forma vectorial es ____________________

4) Si $\mathbf{P(}\boldsymbol{x}\mathbf{)}$ es un polinomio de grado "$\boldsymbol{n}$" y $\mathbf{P(}\boldsymbol{a}\mathbf{) = 0}$, entonces $\boldsymbol{a}$ es ________________ ___________ de $\mathbf{P(}\boldsymbol{x}\mathbf{)}$.

5) Si $\mathbf{P(}\boldsymbol{x}\mathbf{) =} \boldsymbol{k}\ \mathbf{Q(}\boldsymbol{x}\mathbf{)}$ siendo $\mathbf{P(}\boldsymbol{x}\mathbf{)}$ y $\mathbf{Q(}\boldsymbol{x}\mathbf{)}$ polinomios de grado **"*n*"** y $\boldsymbol{k}$ es un elemento de algún campo, entonces $\mathbf{P(}\boldsymbol{x}\mathbf{)}$ y $\mathbf{Q(}\boldsymbol{x}\mathbf{)}$ son ____________________________________

6) Enuncie el teorema del resto:
____

____

____

7) Enuncie el teorema del factor:
____

____

____

8) Un polinomio es _______________________ si no tiene divisores propios.

9) Un polinomio es _____________________si es a la vez irreducible sobre un campo numérico y mónico.

10) Si dividimos un polinomio $\mathbf{P(}\boldsymbol{x}\mathbf{)}$ entre $\mathbf{(}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\mathbf{)}$ y la división es exacta (el resto es cero) el resultado de esa división se le llama __________________________________

11) Dado el polinomio $\mathbf{P(}\boldsymbol{x}\mathbf{) =} \boldsymbol{x}^{\mathbf{5}} \mathbf{- 2}\boldsymbol{x}^{\mathbf{3}} \mathbf{+ 3}\boldsymbol{x}^{\mathbf{4}} \mathbf{- 7}\boldsymbol{x} \mathbf{+ 3}$ el término principal es _______

12) Si $\mathbf{P(}\boldsymbol{x}\mathbf{) = 26}$, entonces $\mathbf{P(}\boldsymbol{x}\mathbf{)}$ es un polinomio ___________________

III- Dados los polinomios:

P(x)= $x^4 - 2x^3 + 3x$ Q(x)= $x^2 + 5x - 6$ S(x)= $4x^3 - 2x^2 + 3x - 7$ R(x)= $x - 6$

1) Evalúe **P(x)** para **$x = -2$**

2) Determine si **$x = 1$** es un cero o raíz de **Q(x)**

3) Efectúe

(a) P(x) + S(x)=

(b) P(x) – Q(x)=

(c) P(x) **.** Q(x)=

(d) S(x) ÷ Q(x)=

4) Divida S(x) entre R(x) utilizando el método de coeficientes indeterminados.

IV- Determine aplicando los teoremas del resto y del factor

1) El resto de dividir **F(x)= $5x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x + 6$** entre **($x + 1$).**

2) Si **(x -2)** es un factor del polinomio **P(x)= $x^4 + 2x^3 - 10x^2 + 7x - 6$.**

3) El valor de ***k*** para que el resto de dividir **$x^4 + kx^3 + 3kx^2 - 5$** entre **($x + 2$)** sea **3**.

4) El valor de ***k*** para que **($x - 3$)** sea un factor de **$x^3 - kx^2 + 2kx - 6$.**

5) Halle el polinomio degradado que resulta de dividir **$x^3 - 4x^2 - x + 4$** entre **($x - 1$).**

V- Halle el cociente **Q(x)** y el resto **R** de dividir $\boldsymbol{x^4 - 2x^3 + 5x - 3}$ entre $\boldsymbol{(x - 3)}$ aplicando la regla de Ruffini

Q(x)= **R=**

VI- Halle el MCD de $\mathbf{P}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x^4+5x^3+5x^2-5x-6}$ **y** $\mathbf{Q}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x^2+5x+6}$.

VII- Sea $\boldsymbol{f(x)= x^4 + 2x^3 - 10x^2 + 7x - 6}$, determine la derivada de orden superior de $\boldsymbol{f(x)}$

a) $f'(x) =$

b) $f''(x) =$

c) $f'''(x) =$

d) $f^{IV}(x) =$

e) Evalúe $f''(2) =$

VIII- Desarrolle

1) El polinomio $\boldsymbol{F(x) = x^4 + 2x^3 - 10x^2 + 7x - 6}$ en potencias de $\boldsymbol{(x - 1)}$ aplicando la Fórmula de Taylor.

2) Exprese el polinomio $\mathbf{P}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{2x^3 - 5x^2 + 7x - 1}$ al incrementar $\boldsymbol{x}$ en $\mathbf{h = 2,}$ aplicando la Fórmula de Taylor y utilizando el Esquema de Horner.

UNIDAD 3: TEORÍA DE ECUACIONES POLINÓMICAS

1. <u>Ecuación Polinómica</u>:

Una ***ecuación polinómica*** es el resultado de igualar un polinomio a cero. Es decir, si un polinomio algebraico de grado "***n***" se iguala a cero, se obtiene una ecuación polinómica de grado "***n***".

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$, entonces $P(x) = 0$ es una ecuación polinómica en la variable x.

Ejemplos:

1) $P(x) = 3x - 7 = 0$ es una ecuación polinómica de primer grado.

2) $Q(x) = 5x^2 - 4x + 2 = 0$ es una ecuación polinómica de segundo grado.

3) $M(x) = x^5 + 2x^3 - x^2 + 1 = 0$ es una ecuación polinómica de quinto grado.

1.1. <u>Raíz de una Ecuación</u>:

No todos los valores que asignemos a x satisfacen la igualdad $P(x) = 0$. De todos los valores que puede tomar la x sólo algunos hacen que la expresión sea verdadera. A esos valores se les llama **raíces** de la ecuación.

Entonces una ***raíz*** de una ecuación es todo valor, real o complejo, que la satisface; es decir, un valor que al sustituir la x por él en el polinomio, hace que tome un valor cero. Estos valores son los ceros del polinomio $P(x)$.

Si "r" es una raíz de $P(x) = 0$, entonces $P(r) = 0$ y $P(x)$ es divisible entre $(x - r)$.

Ejemplo:

Sea $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4 = 0$, si calculamos $P(2) = 2^3 - 3(2)^2 + 4 = 8 - 12 + 4 = 0$. Como $P(2) = 0$ significa que el 2 es una raíz de la ecuación $P(x) = 0$ y $f(x)$ es divisible entre $(x - 2)$

Resolver una ecuación $P(x) = 0$ es encontrar ***todas sus raíces.***

El objetivo fundamental de esta unidad es resolver todo tipo de ecuaciones polinómicas. Paso a paso iremos abordando esta temática hasta adquirir todas las herramientas necesarias para lograrlo. Iniciando por las más sencillas, las ecuaciones de primer y segundo grado.

Ejemplos: Resolver las siguientes ecuaciones

1) Resolver $P(x)=4x-12=0$. Esta es una ecuación de primer grado o lineal y para resolverla procedemos a despejar la x aplicando operaciones inversas.

$$4x-12=0$$

$$4x-12+12=0+12 \quad \text{sumamos 12 a ambos lados}$$

$$4x=12$$

$$\frac{4x}{4}=\frac{12}{4} \quad \text{dividimos entre 4 a ambos lados}$$

$$x=3$$

El único valor que satisface la igualdad es $x=3$

2) Resolver $f(x)=x^2+4x-12=0$. Esta es una ecuación de segundo grado o cuadrática y para resolverla podemos aplicar la fórmula general que es aplicable a toda ecuación de la forma $ax^2+bx+c=0$.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Para nuestro ejemplo $a=1$ $b=4$ $c=-12$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4(1)(-12)}}{2(1)}=\frac{-4\pm\sqrt{16+48}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{-4\pm 8}{2}$$

$$x_1=\frac{-4+8}{2}=\frac{4}{2}=2 \quad \wedge \quad x_2=\frac{-4-8}{2}=\frac{-12}{2}=-6.$$

Hay dos valores que satisfacen la ecuación $x_1=2$ y $x_2=-6$. Es decir, la ecuación tiene dos raíces. El conjunto solución es {2, –6}.

Como 2 y -6 son las raíces de $f(x)=0$ podemos afirmar que $f(x)$ es divisible entre $(x-2)$ y $(x-(-6))=(x+6)$.

Esta ecuación también pudo resolverse por método de factorización ya que

$$x^2+4x-12=(x-2)(x+6)=0 \Rightarrow (x-2)=0 \quad \vee \quad (x+6)$$

$$(x-2)=0 \quad \vee \quad (x+6)=0 \Rightarrow x_1=2 \quad \vee \quad x_2=-6$$

En la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ puede ocurrir que $b=0$ o $c=0,$ en estos casos la solución se hace más fácil.

Ejemplos: Resolver las siguientes ecuaciones

1) $x^2+4x=0$, en este caso $c=0$ y para resolver solo tenemos que factorizar por factor común: $x^2+4x=x(x+4) \Rightarrow x_1=0 \quad \vee \quad (x+4)=0 \Rightarrow x_2=-4$, el conjunto solución es {–4, 0}.

2) $2x^2-8=0$, en este caso podemos proceder de la siguiente manera:

$$2x^2=8 \Rightarrow \frac{2x^2}{2}=\frac{8}{2} \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm\sqrt{4}=\pm 2$$, entonces $x_1=2 \wedge x_2=-2$.

El conjunto solución es {–2, 2}.

Hay ecuaciones de grado mayor que dos que pueden ser resueltas aplicando la factorización y reduciéndola a una de menor grado. Este caso se da cuando $a_0=0$.

Ejemplos: Resolver las siguientes ecuaciones

1) $x^3+3x^2-4x=0$

Sacando el factor común x obtenemos $x^3+3x^2-4x=x(x^2+3x-4)$ de donde $x=0$ o $x^2+3x-4=0$.

Ya tenemos una raíz $x_1=0$ y otra ecuación $x^2+3x-4=0$ pero ahora de grado 2, que podemos resolver aplicando lo que ya hemos visto antes.

$x^2+3x-4=(x-1)(x+4) \Rightarrow (x-1)=0 \vee (x+4)=0 \Rightarrow x_2=1 \quad \wedge \quad x_3=-4.$

Entonces el conjunto solución es $\{0, 1, -4\}$.

2) $x^5+2x^4-3x^3=0$

Sacando el factor común x^3 obtenemos $x^5+2x^4-3x^3=x^3(x^2+2x-3)$ de donde $x^3=0 \quad \vee \quad x^2+2x-3=0$.

Como $x^3=0$ podemos factorizar $x^3=x\cdot x\cdot x=0$. Esto nos da 3 raíces $x_1=x_2=x_3=0$ y otra ecuación $x^2+2x-3=0$ de segundo grado, que ya sabemos resolver.

$$x^2+2x-3=(x+3)(x-1) \Rightarrow x+3=0 \quad \vee \quad x-1=0 \Rightarrow x=-3 \quad \vee \quad x=1$$

Entonces el conjunto solución es {0, –3, 1} siendo 0 una raíz triple.

EJERCICIOS PROPUESTOS

I- Resolver

1) $3x-1=0$

2) $5x-3=x+9$

3) $2x-6+4i=0$

4) $x^2+2x-15=0$

5) $x^2-9=0$

6) $2x^2-4x=0$

7) $3x^2-x-4=0$

8) $x^2-4x+4=0$

9) $x^2+16=0$

10) $x^4-81=0$

11) $x^2-9=0$

12) $x^5-x^3=0$

13) $3x^2+2x=x+8$

14) $2x-6=8x+9$

15) $x^3-8=0$

II - Halle los valores de A, B y C de forma que la ecuación $x^3+Ax^2-Bx+C=0$ tenga por conjunto solución {1,2,3}.

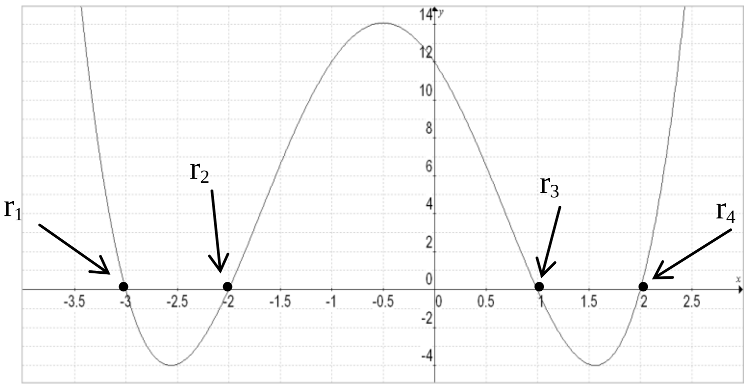
1.2. Solución Gráfica de una Ecuación:

Si se representa gráficamente la función polinómica, su gráfica es una curva continua para todos los valores de x, tal que $x \in R$. Los puntos r_1, r_2, r_3, etc. donde la curva corta el eje de abscisas (eje x) son las raíces reales de la ecuación polinómica deducida de la función polinómica graficada. Por lo tanto, podemos determinar las raíces reales de una ecuación mediante su representación gráfica.

Ejemplo: Al resolver la ecuación $f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$, sus raíces son –3, –2, 1 y 2. Podemos factorizarlo de la siguiente forma:

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = (x+3)(x+2)(x-1)(x-2).$$

En la siguiente figura podemos observar que la gráfica corta el eje X en esos puntos. Es decir, en $\boldsymbol{r}_1 = -3$, $\boldsymbol{r}_2 = -2$, $\boldsymbol{r}_3 = 1$ y $\boldsymbol{r}_4 = 2$.



Es importante tener presente que esto solo ocurre si las raíces de la ecuación son números reales, en caso que sean números complejos no se pueden observar de esta manera.

2. Teorema Fundamental del Álgebra

"Toda ecuación racional entera, de grado mayor que cero, con una incognita tiene por lo menos una raíz o solución que puede ser real o compleja".

3. Teorema de la Descomposición Factorial

"Toda ecuación de grado "***n***" tiene exactamente "***n***" raíces reales o complejas"

De acuerdo con el teorema fundamental del álgebra si $f(x)=0$ es una ecuación de grado "***n***" tiene por lo menos una raíz real o imaginaria. Vamos a suponer que esa raíz es r_1, entonces $f(x)=(x-r_1)\,Q_1(x)$, luego $Q_1(x)$ es un polinomio de grado (***n*** – 1) y por tanto $Q_1(x)=0$ tendrá por lo menos una raíz. Suponiendo que esa raíz es r_2, entonces $Q_1(x)=(x-r_2)\,Q_2(x)$.

De igual manera $Q_2(x)$ es un polinomio de grado (***n*** – 2) y por tanto $Q_2(x)=0$ tendrá por lo menos una raíz r_1 y $Q_2(x)=(x-r_3)\,Q_3(x)$. Procediendo de esta manera llegamos hasta $Q_{n-1}(x)=(x-r_n)\,Q_n(x)$ donde $Q_n(x)$ es de grado cero.

$$f(x)=(x-r_1)\,Q_1(x) \qquad (1)$$
$$Q_1(x)=(x-r_2)\,Q_2(x) \qquad (2)$$
$$Q_2(x)=(x-r_3)\,Q_3(x) \qquad (3)$$
$$\vdots$$
$$Q_{n-1}(x)=(x-r_n)\,Q_n(x) \qquad (4)$$

Entonces si reemplazamos sucesivamente, desde (1) hasta (4), tenemos:

$$f(x)=(x-r_1)\,(x-r_2)(x-r_3)...(x-r_n) \qquad (5)$$

donde $r_1,\ r_2,\ r_3,\ ...,\ r_n$ son las "***n***" raíces de la ecuación y no hay más de "***n***" pues solo reemplazando en (5) a x por cualquiera de las raíces $r_1,\ r_2,\ r_3,\ ...,\ r_n$ se obtiene $f(x)=0$.

De acuerdo a lo que establece el teorema anterior se puede concluir que toda ecuación polinómica de grado "***n***" se puede descomponer en "***n***" factores binómicos de la forma $(x-r_i)$ donde los r_i (con $i=1,2,3,...,n$) son las raíces reales o complejas de dicha ecuación.

Para esta descomposición factorial de $f(x)=0$ se asume que $f(x)$ es un polinomio mónico. Es decir, que $a_n=1$.

Ejemplos:

1) Resolver la ecuación $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ sabiendo que $x = 2$ es una raíz.

Solución:

Esta ecuación es de 3er grado y todavía no tenemos la estrategia para resolverla, pero podemos aprovechar la información que nos dan de que $x_1 = 2$ y la idea de que si $"r"$ es una raíz de $f(x) = 0$, entonces $f(x)$ es divisible entre $(x - r)$.

Como $x = 2$ es una raíz esto significa que $x^3 - 4x^2 + x + 6$ es divisible entre $x - 2$; es decir $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x-2)Q(x)$.

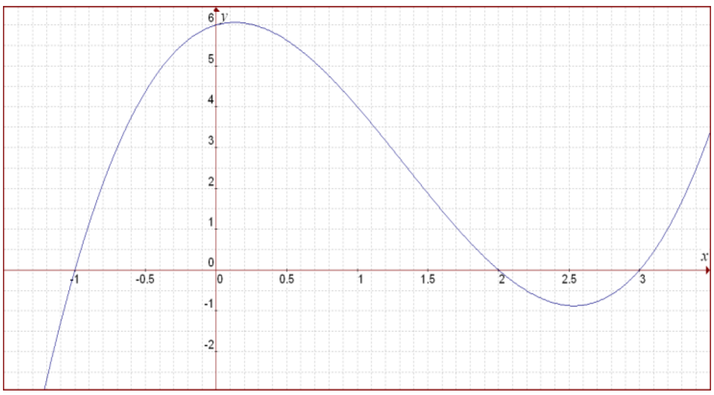
Para conseguir ese $Q(x)$ hagamos la división por Ruffini

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ 2 & & 2 & -4 & -6 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & 0 \end{array}$$

Entonces $Q(x) = x^2 - 2x - 3$

A partir de $Q(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$ podemos resolver por factorización o por fórmula general, como ya vimos, obteniendo $Q(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$ de donde las raíces son $x_1 = 3 \ \wedge \ x_2 = -1$.

Por tanto, las tres raíces de $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ son $r_1 = 2, \quad r_2 = 3 \ \wedge \ r_3 = -1$, como puede observarse en la gráfica de la derecha donde $y = f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$



2) Resuelva la ecuación $x^4 + 5x^3 + x^2 - 21x - 18 = 0$, sabiendo que $x_1 = 2$ y $x_2 = -1$ son raíces.

Como 2 y –1 son raíces de la ecuación podemos afirmar que el polinomio $x^4+5x^3+x^2-21x-18=0$ es divisible entre $(x-2)$ y entre $(x+1)$. Es decir, $x^4+5x^3+x^2-21x-18=(x-2)(x+1)Q(x)$.

Para conseguir ese $Q(x)$ hagamos la división de $x^4+5x^3+x^2-21x-18$ entre $(x-2)$ y entre $(x+1)$ sucesivamente.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 5 & 1 & -21 & -18 \\
2 & & 2 & 14 & 30 & 18 \\
\hline
 & 1 & 7 & 15 & 9 & 0 \\
-1 & & -1 & -6 & -9 & \\
\hline
 & 1 & 6 & 9 & 0 &
\end{array}$$

$$Q(x)=x^2+6x+9$$

Por lo que $x^4+5x^3+x^2-21x-18=(x-2)(x+1)(x^2+6x+9)$

Para resolver $Q(x)=x^2+6x+9=0$ podemos factorizar y obtener:

$$x^2+6x+9=(x+3)(x+3)=0 \rightarrow x_3=-3 \;\wedge\; x_4=-3$$

Entonces el conjunto solución es {2, –1, –3} siendo –3 una raíz doble.

Ejercicio: Resuelva esta ecuación $x^4-7x^3+11x^2+7x-12=0$, sabiendo que $x_1=1$ y $x_2=4$ son raíces.

4. Multiplicidad de una Raíz

Puede suceder que una o varias de las "***n***" raíces de una ecuación $f(x)=0$ aparezca más de una vez en la descomposición factorial. Si esto ocurre a esa raíz se le llama "**raíz múltiple**" y la veces que se repite se le llama "**grado de multiplicidad"**. A la raíz que no se repite, es decir, aparece una sola vez, se les llama "**raíz simple**".

Ejemplo: Resolver $f(x)=x^3-5x^2+7x-3=0$ sabiendo que $x=1$ es una raíz.

Como ya sabemos, $f(x)=x^3-5x^2+7x-3=(x-1)Q(x)$. Para obtener $Q(x)$ dividimos por Ruffini y obtenemos:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -5 & 7 & -3 \\ 1 & & 1 & -4 & 3 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & 0 \end{array} \qquad Q(x)=(x^2-4x+3)$$

Entonces $f(x)=x^3-5x^2+7x-3=(x-1)Q(x)=(x-1)(x^2-4x+3)$, donde $Q(x)=(x^2-4x+3)=0$ se puede resolver por factorización.

$$f(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)\rightarrow x_2=1 \quad \vee \quad x_3=3$$

Entonces las raíces son: $x_1=1,\ \ x_2=1 \ \wedge \ x_3=3$ donde 3 es raíz simple y 1 es raíz múltiple de multiplicidad 2.

Una ecuación $f(x)=0$ de grado "***n***" puede tener todas sus raíces múltiples. En este caso la suma de los grados de multiplicidad debe ser igual a "***n***".

Ejemplo: Resolver $f(x)=x^5-x^4-5x^3+x^2+8x+4=0$ sabiendo que –1 y 2 son raíces múltiples.

Aplicamos la Regla de Ruffini de forma sucesiva.

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & -1 & -5 & 1 & 8 & 4 \\ -1 & & -1 & 2 & 3 & -4 & -4 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & 4 & 4 & 0 \\ -1 & & -1 & 3 & 0 & -4 & \\ \hline & 1 & -3 & 0 & 4 & 0 & \\ -1 & & -1 & 4 & -4 & & \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 & & \\ 2 & & 2 & -4 & & & \\ \hline & 1 & -2 & 0 & & & \\ 2 & & 2 & & & & \\ \hline & 1 & 0 & & & & \end{array}$$

Como se puede observar –1 es raíz de multiplicidad tres, mientras el 2 es raíz de multiplicidad dos.

$$x^5-x^4-5x^3+x^2+8x+4=(x+1)^3(x-2)^2=0$$

El grado de la ecuación es 5 que es resultado de sumar los grados de multiplicidad de ambas raíces: 3 + 2 = 5.

Si alguna de las raíces de una ecuación es múltiple, es obvio que el número de raíces diferentes va a ser menor que "***n***" porque las que se repiten se cuentan como raíces tantas veces como se repiten.

En conclusión: supongamos que las raíces de una ecuación $f(x)=0$ son todas múltiples y que r_1 es de multiplicidad "*s*", r_2 es de multiplicidad "*t*", r_3 es de multiplicidad "*w*" y así sucesivamente. Entonces:

$f(x)=(x-r_1)^s(x-r_2)^t(x-r_3)^w\ldots$ de donde $s+t+w+\ldots=n$.

5. <u>Teorema de las Raíces Múltiples</u>:

Un número es raíz múltiple de la ecuación $f(x)=0$ si anula la ecuación y sus sucesivas derivadas hasta un cierto número de ellas.

Si el número de derivadas que anula es "***h***", entonces será (***h*** + 1) el grado de multiplicidad. Si las anula a todas, entonces su multiplicidad será "***n***" y el polinomio resulta del desarrollo de $(x-r)^n$.

Ejemplo:

En el ejemplo anterior vimos que $f(x)=x^5-x^4-5x^3+x^2+8x+4=0$ tiene raíces múltiples –1 de multiplicidad 3 y 2 de multiplicidad 2. Vamos a derivar sucesivamente y probar el cumplimiento del teorema de raíces múltiples.

$f(x)=x^5-x^4-5x^3+x^2+8x+4 \qquad f(-1)=(-1)^5-(-1)^4-5(-1)^3+(-1)^2+8(-1)+4=0$

$f(2)=(2)^5-(2)^4-5(2)^3+(2)^2+8(2)+4=0$

$f'x)=5x^4-4x^3-15x^2+2x+8 \qquad f'(-1)=5(-1)^4-4(-1)^3-15(-1)^2+2(-1)+8=0$

$f'(2)=5(2)^4-4(2)^3-15(2)^2+2(2)+8=0$

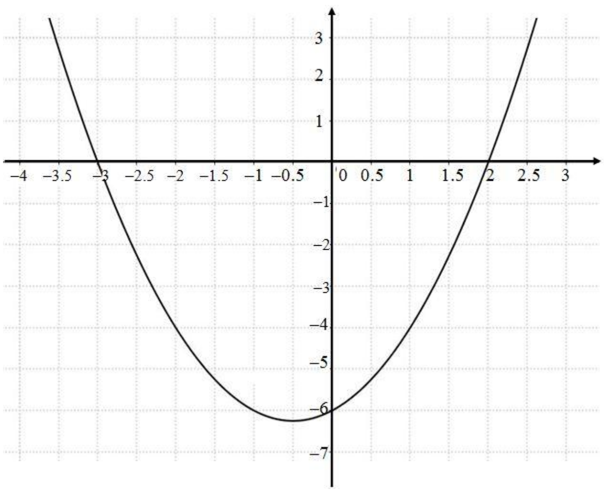
$f''(x) = 20x^3 - 12x^2 - 30x + 2$ $\qquad$ $f''(-1) = 20(-1)^3 - 12(-1)^2 - 30(-1) + 2 = 0$

$f''(2) = 20(2)^3 - 12(2)^2 - 30(2) + 2 = 54 \neq 0$

Como se puede ver $f(-1) = 0, \quad f'(-1) = 0 \ \wedge \ f''(-1) = 0$, esto significa que –1 anula a $f(x)$, a su primera y segunda derivada por lo que es una raíz de multiplicidad tres. (anula hasta la $\boldsymbol{h}$ = 2 derivadas). En el caso del 2, $f(2) = 0 \ \wedge \ f'(2) = 0$, o sea que 2 anula a $f(x)$ y su primera derivada por lo que es una raíz de multiplicidad dos.

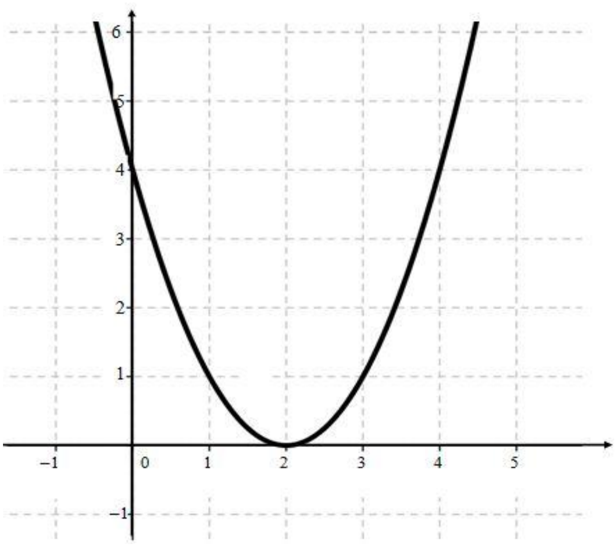
6. <u>Interpretación Gráfica de las Raíces Múltiples</u>

a) Si una raíz real r_1 es simple, la curva que corresponde a la gráfica corta el eje X en el punto cuyo valor sea igual a la raíz.



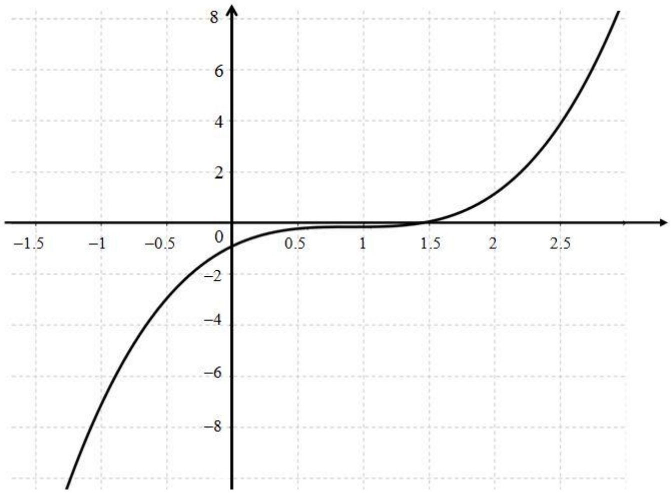
La gráfica de la derecha representa la ecuación $f(x) = x^2 + x - 6 = 0$ que tiene por raíces $r_1 = -3 \ \wedge \ r_2 = 2$ que son ambas simples, por eso la gráfica corta el eje X en $x = -3 \ \wedge \ x = 2$.

b) Si una raíz real r_2 es de multiplicidad par, la curva que corresponde a la gráfica es tangente al eje X en el punto cuyo valor sea igual a la raíz.

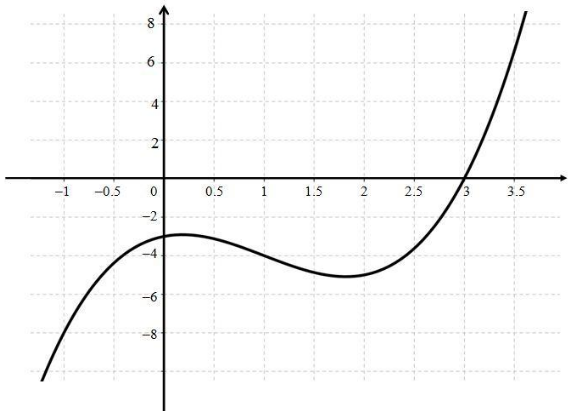


La gráfica de la derecha representa la ecuación $f(x) = x^2 - 4x + 4 = 0$ cuyas raíces son $r_1 = 2 \ \wedge \ r_2 = 2$, es decir que 2 es raíz de multiplicidad par, por eso la gráfica es tangente al eje X en $x = 2$.

c) Si una raíz real r_3 es de multiplicidad impar, la curva que corresponde a la gráfica presenta un punto de inflexión sobre el eje X en el punto cuyo valor sea igual a la raíz.



La gráfica de la derecha representa la ecuación $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$ que tiene por raíces $r_1 = 1,\ r_2 = 1 \ \wedge \ r_3 = 1$, es decir que 1 es raíz de multiplicidad impar, por eso la gráfica presenta un punto de inflexión en el eje X, en $x = 1$.



Este análisis es válido solo para las raíces reales, ya que las raíces complejas no se pueden ver en los cortes de las gráficas. Por ejemplo, las raíces de la ecuación $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$ son $r_1 = 3,$, $r_2 = i \ \wedge \ r_3 = -i$ pero al graficarla solo se puede observar un corte con el eje X. Esto se debe a que las raíces $r_2 = i \ \wedge \ r_3 = -i$ son imaginarias.

Ejercicio:

Dada la ecuación $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0$ determine, aplicando el teorema de las raíces múltiples, el grado de multiplicidad de su raíz $r = -2$ y luego exprese la ecuación en función de factores binómicos.

7. <u>Teorema de las Raíces Complejas</u>:

Si un número complejo $(a + bi)$ es raíz de una ecuación entera $f(x) = 0$ de coeficientes reales, entonces su conjugado $(a - bi)$ es también una raíz de la ecuación. Esto significa que las raíces complejas siempre aparecen en pares conjugados.

Si $(a+bi)$ es una raíz de la ecuación $f(x)=0$, entonces al sustituir $x=(a+bi)$ en el polinomio y realizar todas las operaciones de lugar obtenemos una suma de la parte real que llamaremos ***c*** y la parte imaginaria que llamaremos ***d***. Por lo que $f(a+bi)=(c+di)=0$.

Para que $(c+di)=0$ debe cumplirse que ***c*** = 0 y ***d*** = 0. Si en lugar de i ponemos $-i$ se obtiene $f\left[a+b(-i)\right]=f(a-bi)=c+d(-i)=c-di$, pero como ***c*** = 0 y ***d*** = 0, entonces $f(a-bi)=0$ y $f(a+bi)=f(a-bi)=0.$

En el ejemplo anterior pudimos ver que $r_2=i \;\wedge\; r_3=-i$ son raíces de la ecuación $f(x)=x^3-3x^2+x-3=0$. Como $-i=(0-i)$ es el conjugado de $i=(0+i)$ se puede comprobar que se cumple el teorema.

Como consecuencia de este teorema se puede afirmar que toda ecuación entera con coeficientes reales y de grado impar tiene al menos una raíz real.

8. <u>Binomio Irracional Cuadrático</u>:

Un binomio irracional cuadrático es una expresión de la forma $(a+\sqrt{b})$ siendo $a\ y\ b$ números racionales y $\sqrt{b}$ un número irracional. A la expresión $(a-\sqrt{b})$ se le llama binomio irracional cuadrático conjugado de $(a+\sqrt{b})$.

Ejemplo: $(3+\sqrt{2})$ es un binomio irracional cuadrático y $(3-\sqrt{2})$ es su conjugado.

8.1. <u>Teorema de las Raíces Irracionales Cuadráticas</u>:

Si un binomio irracional cuadrático $(a+\sqrt{b})$ es raíz de la ecuación $f(x)=0$ con coeficientes racionales, entonces el binomio irracional cuadrático conjugado $(a-\sqrt{b})$ también es raíz de la ecuación.

Ejemplo: Resolver $f(x)=x^3-3x^2-9x+11=0$ sabiendo que $x=1$ es una raíz.

Sabiendo que 1 es raíz utilizamos la Regla de Ruffini

	1	-3	-9	11
1		1	-2	-11
	1	-2	-11	0

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 11 = (x-1)(x^2 - 2x - 11)$$

De donde $x^2 - 2x - 11 = 0$ podemos resolver por formula general.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ siendo $a = 1$ $b = -2$ $c = -11$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-11)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4+44}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{48}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm 4\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{2} \pm \frac{4}{2}\sqrt{3} = 1 \pm 2\sqrt{3}$$ lo que implica que $x_1 = 1 + 2\sqrt{3} \quad \wedge \quad x_2 = 1 - 2\sqrt{3}$

Por tanto las raíces de $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 11 = 0$ son: $r_1 = 1,\ r_2 = 1 + 2\sqrt{3}$ y $r_3 = 1 - 2\sqrt{3}$, siendo $r_2 \wedge r_3$ binomios irracionales cuadráticos conjugados.

EJERCICIO PROPUESTO

En los siguientes casos se dan ecuaciones y algunas de sus raíces. Halle las demás.

1) $x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 6x + 4 = 0$ $\quad r_1 = 1 - \sqrt{3}$

2) $x^5 - x^4 - 5x^3 + x^2 + 6x + 2 = 0$ $\quad r_1 = \sqrt{2} \quad r_2 = 1 + \sqrt{2}$

3) $x^5 - 8x^4 + 26x^3 - 40x^2 + 16x = 0$ $\quad r_1 = 2 + \sqrt{2} \quad r_2 = 2 + 2i$

4) $2x^5 - 5x^4 + 30x^3 - 50x^2 + 108x - 45 = 0$ $\quad r_1 = 1 + 2i \quad r_2 = 3i$

5) $x^6 - 8x^5 + 26x^4 - 44x^3 + 41x^2 - 20x + 4 = 0$, 1 y 2 son raíces múltiples, determine el grado de multiplicidad.

9. **<u>Teorema de las Raíces Racionales</u>:**

Si $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_0 = 0$ es una ecuación polinómica con coeficientes enteros, donde $a_n \wedge a_0$ son diferentes de cero y la fracción de forma simplificada $\frac{p}{q}$, siendo "***p***" y "***q***" números enteros, es una raíz de $P(x)=0$, entonces "***p***" es un factor o divisor del término constante a_0 y "***q***" es un factor o divisor del coeficiente a_n.

A partir de este teorema podemos concluir que si $P(x)=0$ es una ecuación entera donde $a_n = 1 \wedge a_0 \neq 0$, entonces todas sus raíces racionales dividen exactamente a a_0.

Ejemplos: Halle todas las raíces racionales de:

1) $2x^3 - 9x^2 + 7x + 6 = 0$

En este caso $a_n = 2 \wedge a_0 = 6$. Los divisores de 2 son: $\pm 1,\ \pm 2$

Los divisores de 6 son: $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$

Las posibles raíces racionales de la ecuación son $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6,\ \pm \frac{1}{2},\ \pm \frac{3}{2}$.

Entonces comenzamos a probar cada una de las posibles raíces con la división sintética (Ruffini).

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -9 & 7 & 6 \\ -1 & & -2 & 11 & -18 \\ \hline & 2 & -11 & 18 & -12 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 2 & -9 & 7 & 6 \\ 1 & & 2 & -7 & 0 \\ \hline & 2 & -7 & 0 & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 2 & -9 & 7 & 6 \\ -2 & & -4 & 26 & -66 \\ \hline & 2 & -13 & 33 & -60 \end{array}$$

Como se puede observar, al probar con 1, –1, –2 nos damos cuenta que no son raíces de la ecuación, porque el resto no es cero.

Sin embargo, al probar con 2, 3 y $-\frac{1}{2}$ el resto es cero lo que indica que estas son las raíces.

	2	–9	7	6
2		4	–10	–6
	2	–5	–3	0
3		6	3	
	2	1	0	
– ½		–1		
	2	0		

2) $x^5 + x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 4x + 4 = 0$

En este caso $a_n = 1 \wedge a_0 = 4$. Como $a_n = 1$ las posibles raíces racionales son los divisores de 4: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$. Probamos cada una de las posibles raíces.

	1	1	–5	–5	4	4
–1		–1	0	5	0	–4
	1	0	–5	0	4	0
–1		–1	1	4	–4	
	1	–1	–4	4	0	
1		1	0	–4		
	1	0	–4	0		
2		2	4			
	1	2	0			
–2	1	–2				
	1	0				

Después de probar concluimos que el conjunto solución es:

$\{1, -2, 2, -1\}$. Siendo -1 de multiplicidad 2.

3) $x^4 - \frac{7}{6}x^3 - \frac{47}{3}x^2 + \frac{56}{3}x - \frac{16}{3} = 0$

Esta ecuación no cumple con el requisito del teorema de tener todos los coeficientes enteros, sin embargo podemos multiplicar por 6 ambos miembros y obtener $6x^4 - 7x^3 - 94x^2 + 112x - 32 = 0$.

En este caso $a_n = 6 \wedge a_0 = 32$. Los divisores de 6 son: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Los divisores de 32 son: $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \pm 8,\ \pm 16,\ \pm 32.$

Las posibles raíces racionales de la ecuación son:

$$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \pm 8,\ \pm 16, \pm 32, \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{1}{6},\ \pm\frac{2}{3},\ \pm\frac{4}{3},\ \pm\frac{8}{3},\ \pm\frac{16}{3},\ \pm\frac{32}{3}$$

Después de probar se concluye que el conjunto solución es: $\left\{-4, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 4.\right\}$

4) $x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 10x^2 + 4x + 24 = 0$

En este caso $a_n = 1 \wedge a_0 = 24$. Como $a_n = 1$ las posibles raíces racionales son los divisores de 24: $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 6,\ \pm 8,\ \pm 12,\ \pm 24$.

	1	–4	5	–10	4	24
–1		–1	5	–10	20	–24
	1	–5	10	–20	24	0
2		2	–6	8	–24	
	1	–3	4	–12	0	
3		3	0	12		
	1	0	4	0		

Aquí tenemos tres raíces racionales: $-1,\ 2$ y 3.

Factorizando $x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 10x^2 + 4x + 24 = (x+1)(x-2)(x-3)(x^2+4) = 0$.

Al resolver $(x^2+4) = 0$ vemos que las raíces son $2i$ y $-2i$. Por lo que el conjunto solución es $\{-1,\ 2,\ 3,\ 2i,\ -2i\}$.

EJERCICIO PROPUESTO

I- Hallar todas las raíces racionales de las siguientes ecuaciones

1) $6x^4 + x^3 - 46x^2 - 39x + 18 = 0$

2) $2x^5 + x^4 - 10x^3 - 5x^2 + 8x + 4 = 0$

3) $6x^4 + 7x^3 - 29x^2 - 28x + 20 = 0$

4) $x^3 - 6x^2 - \frac{4}{9}x + \frac{8}{3} = 0$

5) $x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 6x + 8 = 0$

6) $x^6 - \frac{1}{3}x^5 - 3x^4 + 3x^3 - \frac{2}{3}x^2 = 0$

10. <u>Relacion entre Coeficientes y Raíces de una Ecuación Algebraica</u>:

Sea $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ una ecuación polinómica mónica ($a_n = 1$), cuyos coeficientes pueden ser reales o complejos. Sean $r_1, r_2, r_3, ..., r_n$ sus raíces (reales o complejas), las cuales pueden ser simples o múltiples. Entonces podemos expresar $P(x)$ mediante la descomposición factorial siguiente: $f(x)=(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)...(x-r_n)=0$.

Si desarrollamos todos los binomios y agrupamos los términos semejantes podemos establecer la siguiente relación entre las raíces y los coeficientes de $P(x)=0$.

$$
\begin{aligned}
&a_n = 1,\\
&a_{n-1} = -(r_1 + r_2 + r_3 + ... + r_n)\\
&a_{n-2} = r_1 r_2 + r_1 r_3 + ... + r_1 r_n + r_2 r_3 + ... + r_2 r_n + r_3 r_4 + ... + r_3 r_n + ... + r_{n-1} r_n\\
&a_{n-3} = -(r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + ... + r_1 r_2 r_n + r_1 r_3 r_4 + ... + r_1 r_3 r_n + r_2 r_3 r_4 + ... + r_2 r_3 r_n + ... + r_{n-2} r_{n-1} r_n)\\
&\vdots\\
&a_1 = (-1)^{n-1}(r_1 r_2 r_3 ... r_{n-1} + ... + r_2 r_3 ... r_{n-1} r_n)\\
&a_0 = (-1)^n (r_1 r_2 r_3 ... r_n)
\end{aligned}
$$

Aprovechando esta relación podemos hallar una ecuación si conocemos sus raíces.

Ejemplos

1) Hallar la ecuación cuyas raíces son: $x_1 = -3,\ \ x_2 = 2 \ \wedge\ x_3 = 4$

Solución:

La ecuación es de 3er grado y tendrá la forma $P(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$

$$
\begin{aligned}
&a_3 = 1,\\
&a_2 = -(r_1 + r_2 + r_3) = -(-3 + 2 + 4) = -3\\
&a_1 = r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 = (-3)(2) + (-3)(4) + (2)(4) = -6 - 12 + 8 = -10\\
&a_0 = -\left(r_1 r_2 r_3\right) = -\left((-3)(2)(4)\right) = -(-24) = 24
\end{aligned}
$$

Entonces la ecuación buscada es $P(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$

2) Hallar la ecuación cuyas raíces son: $x_1 = -1,\ \ x_2 = 1,\ \ x_3 = 2\ \ \wedge\ x_4 = 3$

Solución: La ecuación es de 4to grado y tendrá la forma:

$$P(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

$$a_4 = 1,$$

$$a_3 = -(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) = -(-1+1+2+3) = -5$$

$$a_2 = r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_1 r_4 + r_2 r_3 + r_2 r_4 + r_3 r_4 = (-1)(1) + (-1)(2) + (-1)(3) + (1)(2) + (1)(3) + (2)(3)$$

$$= -1 - 2 - 3 + 2 + 3 + 6 = 5$$

$$a_1 = -\left(r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + r_1 r_3 r_4 + r_2 r_3 r_4\right) = -\ [(-1)(1)(2) + (-1)(1)(3) + (-1)(2)(3) + (1)(2)(3)]$$

$$= -\ [-2 - 3 - 6 + 6] = -(-5) = 5$$

$$a_0 = r_1 r_2 r_3 r_n = (-1)(1)(2)(3) = -6$$

Entonces la ecuación buscada es $P(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$

3) Hallar la ecuación cuyas raíces son: $x_1 = -2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1,\ \ x_4 = 1 \wedge x_5 = 2$

Solución: La ecuación es de grado 5 y tendrá la forma:

$$P(x) = a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

$$a_5 = 1$$

$$a_4 = -(-2 - 1 + 1 + 1 + 2) = -1$$

$$a_3 = (-2)(-1) + (-2)(1) + (-2)(1) + (-2)(2) + (-1)(1) + (-1)(1) + (-1)(2) + (1)(1) + (1)(2) + (1)(2)$$

$$= 2 - 2 - 2 - 4 - 1 - 1 - 2 + 1 + 2 + 2 = -5$$

$$a_2 = -[(-2)(-1)(1) + (-2)(-1)(1) + (-2)(-1)(2) + (-2)(1)(1) + (-2)(1)(2) + (-2)(1)(2) + (-1)(1)(1)$$

$$+ (-1)(1)(2) + (-1)(1)(2) + (1)(1)(2)] = -[2 + 2 + 4 - 2 - 4 - 4 - 1 - 2 - 2 + 2] = -(-5) = 5$$

$$a_1 = [(-2)(-1)(1)(1) + (-2)(-1)(1)(2) + (-2)(-1)(1)(2) + (-2)(1)(1)(2) + (-1)(1)(1)(2)]$$

$$= (2 + 4 + 4 - 4 - 2) = 4$$

$$a_0 = -[(-2)(-1)(1)(1)(2)] = -4$$

Entonces la ecuación buscada es $P(x) = x^5 - x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 4x - 4 = 0$

Caso en que la ecuación no es mónica.

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ no es mónica, entonces su factorización es $P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)...(x - r_n) = 0$ y al calcular los valores de los coeficientes se debe multiplicar por a_n. Esto es:

$$a_n = a_n$$
$$a_{n-1} = -a_n(r_1 + r_2 + r_3 + ... + r_n)$$
$$a_{n-2} = a_n(r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_1 r_4 + ... + r_1 r_n + r_2 r_3 + r_2 r_4 + ... + r_2 r_n + ... + r_{n-1} r_n$$
$$a_{n-3} = -a_n(r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + r_1 r_3 r_4 + ... + r_1 r_2 r_n + r_2 r_3 r_4 + ... + r_2 r_4 r_n + ... + r_{n-2} r_{n-1} r_n)$$
$$\vdots$$
$$a_1 = (-1)^{n-1} a_n(r_1 r_2 r_3 ... r_{n-1} + ... + r_2 r_3 ... r_{n-1} r_n)$$
$$a_0 = (-1)^n a_n(r_1 r_2 r_3 ... r_n)$$

Ejemplo

Hallar la ecuación cuyas raíces son: $x_1 = 1,\ x_2 = 2 \wedge x_3 = 5,$ sabiendo que $a_3 = 3$.

Solución:

La ecuación es de 3er grado y tendrá la forma $P(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$

$$a_3 = 3,$$
$$a_2 = -a_3(r_1 + r_2 + r_3) = -3(1 + 2 + 5) = -3(8) = -24$$
$$a_1 = a_3(r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3) = -3[(1)(2) + (1)(5) + (2)(5)] = 3(2 + 5 + 10) = 3(17) = 51$$
$$a_0 = -a_3(r_1 r_2 r_3) = -3((1)(2)(5)) = -3(10) = -30$$

Entonces la ecuación buscada es $P(x) = 3x^3 - 24x^2 + 51x - 30 = 0$

11. <u>Transformación de Ecuaciones</u>:

Cuando las raíces de una ecuación no se conocen y es muy difícil determinarlas, son útiles todos los procedimientos que sirvan para simplificarla y poder obtenerlas. Para esto vamos a ver algunos procedimientos que nos permitan hacer transformaciones convenientes a las ecuaciones y hacer más fácil la solución de la misma.

Transformar una ecuación es obtener otra cuyas raíces satisfagan relaciones preestablecidas respecto a la ecuación original.

11.1. <u>Tipos de transformaciones</u>:

1- ***Transformación de una Ecuación que posea raíces múltiples en otra cuyas raíces sean las mismas de la ecuación original, pero todas raíces simples.***

Para hacer el análisis más simple y comprensivo tomemos una ecuación de 5to. grado y que solo tiene una raíz múltiple, cuyo grado de multiplicidad es 3. Esto es: $f(x)=(x-a)^3(x-b)(x-c)=0$, donde $"a", "b"\ y\ "c"$ son las únicas raíces distintas que tiene la ecuación, siendo $"a"$ múltiple y $"b"\ y\ "c"$ son simples.

Si $f(x)=(x-a)^3(x-b)(x-c)=0$, entonces al calcular su derivada se obtiene $f'(x)=(x-a)^2(B_2x^2+B_1x+B_0)$, donde $B_2x^2+B_1x+B_0$ es un polinomio de segundo grado que no es divisible entre $(x-b)$ ni $(x-c)$, pues si lo fueran $"b"\ y\ "c"$ serían raíces múltiples y esto contradice la hipótesis inicial de que solo $"a"$ es múltiple.

De esto podemos deducir que el grado de multiplicidad de una raíz disminuye en una unidad en cada una de las derivadas sucesivas de la ecuación.

Bajo las condiciones dadas, sabemos que el MCD entre $f(x) \wedge f'(x)$ es $(x-a)^2$.

Si hacemos $g(x)=\dfrac{f(x)}{MCD}=\dfrac{(x-a)^3(x-b)(x-c)}{(x-a)^2}=(x-a)(x-b)(x-c)$, entonces $g(x)=0$ es una ecuación con las mismas raíces de la ecuación original pero todas simples.

Del proceso seguido anteriormente podemos deducir la siguiente regla:

Para transformar una ecuación $f(x)=0$ a otra que solo posea raíces simples, basta con dividir $f(x)$ entre el máximo común divisor (MCD) correspondiente a $f(x)$ y a su primera derivada. Es decir, procedemos de la siguiente manera:

Primero: Se halla la derivada de $f(x)$

Segundo: Se halla el máximo común divisor (MCD) entre $f(x) \wedge f'(x)$

Tercero: Se divide $f(x)$ entre el MCD $(f(x), f'(x))$, el resultado obtenido igualado a cero es la ecuación buscada.

En conclusión:

Si $f(x)=0$ es la ecuación dada y $g(x)=0$ es la ecuación transformada que buscamos, entonces $g(x)=\dfrac{f(x)}{MCD\left(f(x), f'(x)\right)}$

Ejemplos:

1) Transformar la ecuación $f(x)=3x^4+8x^3-6x^2-24x-8=0$ a otra $g(x)=0$ cuyas raíces sean simples.

Solución:

Primero: Hallamos $f'(x)=12x^3+24x^2-12x-24$

Segundo: Hallamos el MCD $\left(f(x), f'(x)\right)$ (aplicamos el algoritmo de Euclides)

Como $12x^3+24x^2-12x-24=12\left(x^3+2x^2-x-2\right)$ podemos efectuar

$3x^4+8x^3-6x^2-24x-8$ entre x^3+2x^2-x-2

$$\begin{array}{l|l} 3x^4+8x^3-6x^2-24x-8 & x^3+2x^2-x-2 \\ \cline{2-2} -3x^4-6x^3+3x^2+6x & 3x+2 \\ \cline{1-1} \quad 2x^3-3x^2-18x-8 & \\ \quad -2x^3-4x^2+2x+4 & \\ \cline{1-1} \qquad -7x^2-16x-4 & \end{array}$$

Ahora dividimos x^3+2x^2-x-2 entre $-7x^2-16x-4=-(7x^2+16x+4)$

$$\begin{array}{l|l} x^3+2x^2-x-2 & 7x^2+16x+4 \\ \cline{2-2} -x^3-\frac{16}{7}x^2-\frac{4}{7}x & \frac{1}{7}x-\frac{2}{49} \\ \cline{1-1} \quad -\frac{2}{7}x^2-\frac{11}{7}x-2 & \\ \quad \frac{2}{7}x^2+\frac{32}{49}x+\frac{8}{49} & \\ \cline{1-1} \qquad -\frac{45}{49}x-\frac{90}{49} & \end{array}$$

Ahora dividimos $7x^2+16x+4$ entre el resto anterior $-\frac{45}{49}x-\frac{90}{49}=-\frac{49}{45}\left(x+2\right)$

$$\begin{array}{l|l} 7x^2+16x+4 & x+2 \\ \cline{2-2} -7x^2-14x & 7x+2 \\ \cline{1-1} \quad 2x+4 & \\ \quad -2x-4 & \\ \cline{1-1} \qquad 0 & \end{array}$$

El MCD $\left(f(x),\ f'(x)\right)=x+2$

Tercero: Dividimos, aplicando Ruffini, $f(x)=3x^4+8x^3-6x^2-24x-8$ entre el MCD hallado; es decir, la ecuación que buscamos es:

$$g(x)=\frac{f(x)}{MCD\left(f(x),\ f'(x)\right)}=\frac{3x^4+8x^3-6x^2-24x-8}{x+2}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 8 & -6 & -24 & -8 \\ -2 & & -6 & -4 & 20 & 8 \\ \hline & 3 & 2 & -10 & -4 & 0 \end{array}$$

Entonces $g(x)=\dfrac{f(x)}{MCD}=3x^3+2x^2-10x-4=0$

$g(x)=3x^3+2x^2-10x-4=0$ es una ecuación con las mismas raíces que $f(x)=0$, pero todas son simples.

Ya sabemos que –2 es raíz múltiple de $f(x)=0$ por lo que aplicando Ruffini podemos determinar el grado de multiplicidad y encontrar las demás raíces

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & 8 & -6 & -24 & -8 \\ -2 & & -6 & -4 & 20 & 8 \\ \hline & 3 & 2 & -10 & -4 & 0 \\ -2 & & -6 & 8 & 4 & \\ \hline & 3 & -4 & -2 & 0 & \end{array}$$

Entonces $f(x)=(x+2)^2(3x^2-4x-2)$ y podemos resolver por la fórmula general la ecuación cuadrática $3x^2-4x-2=0$. Las raíces de $f(x)=0$ son: $x_1=-2,\ x_2=-2,\ x_3=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\sqrt{10} \ \wedge\ x_4=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}\sqrt{10}$

Las raíces de $g(x)=0$ son: $x_1=-2,\ x_2=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\sqrt{10} \ \wedge\ x_3=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}\sqrt{10}$

2) Transformar la ecuación $f(x)=x^4+x^3-3x^2-x+2=0$ en otra ecuación que tenga las mismas raíces, pero todas simples.

Primero: Hallamos $f'(x)=4x^3+3x^2-6x-1$

Segundo: Hallamos el MCD $\left(f(x),\ f'(x)\right)$aplicando el algoritmo de Euclides.

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 & 4x^3 + 3x^2 - 6x - 1 \\
\hline
-x^4 - \frac{3}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x & \frac{1}{4}x + \frac{1}{16} \\
\quad \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + 2 & \\
\quad -\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{1}{16} & \\
\qquad -\frac{27}{16}x^2 - \frac{3}{8}x + \frac{33}{16} &
\end{array}
$$

Ahora dividimos $4x^3 + 3x^2 - 6x - 1$ entre el resto anterior $-\frac{27}{16}x^2 - \frac{3}{8}x + \frac{33}{16}$

Como $-\frac{27}{16}x^2 - \frac{3}{8}x + \frac{33}{16} = -\frac{3}{16}\left(9x^2 + 2x - 11\right)$ podemos efectuar

$$
\begin{array}{l|l}
4x^3 + 3x^2 - 6x - 1 & 9x^2 + 2x - 11 \\
\hline
-4x^3 - \frac{8}{9}x^2 + \frac{44}{9}x & \frac{4}{9}x + \frac{19}{81} \\
\quad \frac{19}{9}x^2 - \frac{10}{9}x - 1 & \\
\quad -\frac{19}{9}x^2 - \frac{38}{81}x + \frac{209}{81} & \\
\qquad -\frac{128}{81}x + \frac{128}{81} &
\end{array}
$$

Siguiendo el proceso de división

Como $-\frac{128}{81}x + \frac{128}{81} = -\frac{128}{81}(x-1)$ podemos efectuar

$9x^2 + 2x - 11$ entre $x - 1$

$$
\begin{array}{l|l}
9x^2 + 2x - 11 & x - 1 \\
\hline
-9x^2 + 9x & 9x + 11 \\
\quad 11x^2 - 11 & \\
\quad 11x - 11 & \\
\qquad 0 &
\end{array}
$$

Por lo tanto el MCD $\left(f(x), f'(x)\right) = x - 1$

Tercero: Obtenemos $g(x)=\dfrac{f(x)}{MCD\left(f(x),f'(x)\right)}=\dfrac{x^4+x^3-3x^2-x+2}{x-1}$ que podemos dividir por Ruffini.

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 1 & -3 & -1 & 2 \\ 1 & & 1 & 2 & -1 & -2 \\ \hline & 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

Entonces $g(x)=x^3+2x^2-x-2=0$

Podemos comprobar que las raíces de $f(x)=0$ son $x_1=1,\ x_2=1\quad x_3=-1$ $\wedge\ x_4=-2$. Es decir, 1 es raíz doble mientras que en $g(x)=0$, las raíces son $x_1=1,\quad x_2=-1\ \wedge\ x_3=-2$ que son las mismas pero todas simples.

11.1.2. Transformación mediante operaciones elementales:

11.1.2.1 ***Dada una Ecuación transformarla en otra cuyas raíces sean múltiplos o submúltiplos de las raíces de la ecuación dada. (y = kx)***

La idea es que partiendo de la ecuación $f(x)=0$, cuyas raíces son $r_1,\ r_2,\ r_3,...,\ r_n$, obtener otra ecuación $f(k\,x)=0$ (k es un número real diferente de cero) cuyas raíces serán $k\,r_1,\ k\,r_2,\ k\,r_3,\ ...\ ,\ k\,r_n$. Es decir, las raíces están multiplicadas por k .

Dada $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_2x^2+a_1x+a_0=0$ vamos a obtener otra ecuación $f(y)=0$ cuyas raíces sean las de $f(x)=0$ multiplicadas por un valor "***k***"

$f(kx)=f(y)=0$ implica que $y=k\,x\to x=\dfrac{y}{k}$

Vamos a sustituir $x=\dfrac{y}{k}$ en $f(x)=0$

$$f(x) = f\left(\frac{y}{k}\right) = a_n\left(\frac{y}{k}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{y}{k}\right)^{n-1} + a_{n-2}\left(\frac{y}{k}\right)^{n-2} + ... + a_2\left(\frac{y}{k}\right)^2 + a_1\left(\frac{y}{k}\right) + a_0 = 0$$

Distribuyendo las potencias tenemos

$$a_n \frac{y^n}{k^n} + a_{n-1}\frac{y^{n-1}}{k^{n-1}} + a_{n-2}\frac{y^{n-2}}{k^{n-2}} + ... + a_2\frac{y^2}{k^2} + a_1\frac{y}{k} + a_0 = 0$$

Multiplicando por k^n para eliminar los denominadores tenemos

$$a_n y^n + a_{n-1}k\, y^{n-1} + a_{n-2}k^2 y^{n-2} + ... + a_2 k^{n-2} y^2 + a_1 k^{n-1} y + a_0 k^n = 0$$

Intercambiando las variables y por x

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}k\, x^{n-1} + a_{n-2}k^2 x^{n-2} + ... + a_2 k^{n-2} x^2 + a_1 k^{n-1} x + a_0 k^n = 0$$

En conclusión, podemos establecer la siguiente regla:

Para obtener de una ecuación, otra con sus raíces multiplicadas por un número $k \neq 0$ ***se multiplica cada término de la ecuación dada por*** k ***elevado a un exponente igual a la diferencia entre el grado de la ecuación y el exponente del término.***

Ejemplos:

1) Dada la ecuación $f(x) = x^4 + 4x^3 - 10x^2 - 28x - 15 = 0$ transformarla en otra cuyas raíces sean las de $f(x) = 0$ multiplicadas por 2.

Solución:

$$f(2x) = (2)^0 x^4 + (2)4x^3 - (2)^2 10x^2 - (2)^3 28x - (2)^4 15 = 0$$

$$f(2x) = x^4 + 8x^3 - 40x^2 - 224x - 240 = 0$$

La ecuación transformada es $x^4 + 8x^3 - 40x^2 - 224x - 240 = 0$

Las raíces de la ecuación dada son $r_1 = -1,\ r_2 = -1,\ r_3 = -5$ y $r_4 = 3$

Las raíces de la ecuación transformada son: $r_1 = -2,\ r_2 = -2,\ r_3 = -10$ y $r_4 = 6$

2) Transformar la ecuación $f(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$ en otra cuyas raíces sean las de $f(x) = 0$ multiplicadas por –3

Solución: para este caso *k* = –3. Hacemos la sustitución.

$$f(-3x) = (-3)^0 x^4 - (-3)^1 x^3 - (-3)^2 7x^2 + (-3)^3 x + (-3)^4 6 = 0$$

$$f(-3x) = (1)x^4 - (-3)x^3 - (9)7x^2 + (-27)x + (81)6 = 0$$

$$f(-3x) = x^4 + 3x^3 - 63x^2 - 27x + 446 = 0$$

La ecuación transformada es : $x^4 + 3x^3 - 63x^2 - 27x + 446 = 0$

Transformación de la forma (*y* = –*x*)

Si tomemos *k* = –1, entonces las raíces de la ecuación transformada serán las opuestas de las raíces de la ecuación dada. Es decir, estamos obteniendo $f(-x) = 0$. Veamos lo que ocurre.

$$f(-x) = a_n(-1)^0 x^n + a_{n-1}(-1)^1 x^{n-1} + a_{n-2}(-1)^2 x^{n-2} + \ldots + a_2(-1)^{n-2} x^2 + a_1(-1)^{n-1} x + a_0(-1)^n = 0$$

$$f(-x) = a_n(1)x^n + a_{n-1}(-1)x^{n-1} + a_{n-2}(1)x^{n-2} + \ldots + a_2(-1)^{n-2} x^2 + a_1(-1)^{n-1} x + a_0(-1)^n = 0$$

$$f(-x) = a_n(1)x^n - a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2}(1)x^{n-2} + \ldots + a_2(-1)^{n-2} x^2 + a_1(-1)^{n-1} x + a_0(-1)^n = 0$$

De lo anterior podemos deducir que para transformar una ecuación en otra cuyas raíces sean opuestas basta con cambiar de signo a los términos de paridad diferente al grado de la ecuación. Es decir, si la ecuación es de grado par se le cambia el signo a los términos de grado impar. Si es de grado impar, se le cambia el signo a los de grado par.

Ejemplos:

1) Transformar la ecuación $f(x) = x^4 - x^3 - 19x^2 - 11x + 30 = 0$ en otra cuyas raíces sean las opuestas de la ecuación dada.

Solución:
Como la ecuación dada es de grado par (4) se le cambia el signo a los términos de grado impar ($-x^3$ y $-11x$) para obtener $f(-x) = x^4 + x^3 - 19x^2 + 11x + 30 = 0$

2) Transformar la ecuación $f(x) = x^5 - 9x^4 - 25x^3 - 15x^2 - 26x + 24 = 0$ en otra cuyas raíces sean las opuestas de la ecuación dada.

Solución: Como la ecuación dada es de grado impar (5) se le cambia el signo a los términos de grado par ($-9x^4$, $-15x^2$ y 24) para obtener:

$$f(-x) = x^5 + 9x^4 - 25x^3 + 15x^2 - 26x - 24 = 0$$

11.1.2.2. ***Dada una Ecuación transformarla en otra cuyas raíces estén incrementadas (aumentadas o disminuidas) en una cantidad "k", respecto a las raíces de la ecuación dada.***

La idea es que partiendo de la ecuación $f(x) = 0$, cuyas raíces son $r_1,\ r_2,\ r_3, ..., r_n$, obtener otra ecuación $f(x+k) = 0$ (k es un número real diferente de cero) cuyas raíces serán $(r_1 + k),\ (r_2 + k),\ (r_3 + k),\ ...\ ,\ (r_n + k)$. En esta transformación se dice que las raíces están **disminuidas si el valor de k es positivo y aumentadas si es negativo**.

Dada la ecuación $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ vamos a obtener otra $f(y) = 0$ cuyas raíces sean las de $f(x) = 0$ disminuidas o aumentadas en un valor "***k***". Es decir, $f(y) = f(x+k) = 0$.

Recordemos que $f(y) = f(x+k) = 0$ es una expresión de la Fórmula de Taylor que podemos resolver así:

$$f(x+k) = f(y) = f(k) + \frac{f^{(1)}(k)}{1!}y + \frac{f^{(2)}(k)}{2!}y^2 + \frac{f^{(3)}(k)}{3!}y^3 + ... + \frac{f^{(n)}(k)}{n!}y^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(k)}{i!}y^i$$

Ejemplos:

1) Transformar la ecuación $f(x) = x^2 + 3x - 4 = 0$ en otra cuyas raíces sean las de $f(x) = 0$ aumentadas en 3 unidades.

Solución:

Como se quiere que las raíces estén aumentadas debemos tomar ***k* = –3**, entonces

$$f(y) = f(x+(-3) = f(x-3) = f(-3) + \frac{f^{(1)}(-3)}{1!}y + \frac{f^{(2)}(-3)}{2!}y^2$$

$$f(x) = x^2 + 3x - 4 \rightarrow f(-3) = (-3)^2 + 3(-3) - 4 = 9 - 9 - 4 = -4$$

$$f^{(1)}(x) = 2x + 3 \quad \rightarrow f^{(1)}(-3) = 2(-3) + 3 = -6 + 3 = -3$$

$$f^{(2)}(x) = 2 \rightarrow f^{(2)}(-3) = 2$$

Entonces

$$f(y) = f(-3) + \frac{f^{(1)}(-3)}{1!}y + \frac{f^{(2)}(-3)}{2!}y^2 = -1 + \frac{(-3)}{1}y + \frac{2}{2}y^2 = -4 - 3y + y$$

Ordenando de forma ascendente obtenemos $f(y) = y^2 - 3y - 4$.

Por lo que la ecuación buscada es $f(y) = y^2 - 3y - 4 = 0$. Si intercambiamos la ***y*** por ***x*** obtenemos $f(x) = x^2 - 3x - 4 = 0$.

Las raíces de $f(x) = x^2 + 3x - 4 = 0$ son **–4** y **1** y las de $f(y) = y^2 - 3y - 4 = 0$ son **–1** y **4.** Se comprueba que las raíces de $f(x) = 0$ son las de $f(y) = 0$ aumentada en 3 unidades.

Este procedimiento se simplifica si se utiliza el Esquema de Horner. Esto es:

$$\begin{array}{r|rrl}
 & 1 & 3 & -4 \\
-3 & & -3 & 0 \\ \hline
 & 1 & 0 & \mathbf{-4} \longrightarrow f(-3) \\
-3 & & -3 & \\ \hline
 & \mathbf{1} & \mathbf{-3} \longrightarrow \dfrac{f^{(1)}(-3)}{1!} & \\
\end{array}$$

$$\mathbf{1} \searrow \dfrac{f^{(2)}(-3)}{2!}$$

2) Transformar la ecuación $f(x)=x^2+3x-4=0$ en otra cuyas raíces sean las de $f(x)=0$ disminuidas en 2 unidades.

Solución:

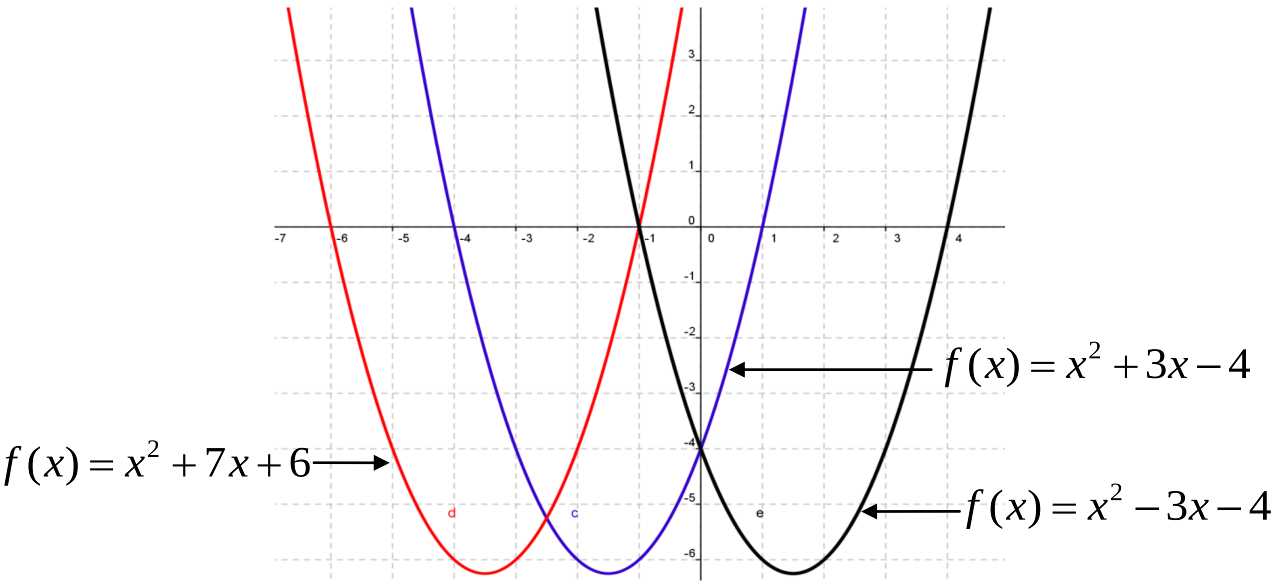
Como se quiere que las raíces estén disminuidas debemos tomar ***k* = 2**, entonces

$$\begin{array}{r|rrl}
 & 1 & 3 & -4 \\
2 & & 2 & 10 \\ \hline
 & 1 & 5 & \mathbf{6} \longrightarrow f(2) \\
2 & & 2 & \\ \hline
 & \mathbf{1} & \mathbf{7} \longrightarrow \dfrac{f^{(1)}(2)}{1!} & \\
\end{array}$$

$$\mathbf{1} \searrow \dfrac{f^{(2)}(2)}{2!}$$

Por lo que la ecuación buscada es $f(y)=y^2+7y+6=0$ cuyas raíces son **–6** y **–1** que son las de $f(x)=0$ disminuidas en 2 unidades. Si intercambiamos la ***y*** por ***x*** obtenemos $f(x)=x^2+7x+6=0$.

La siguiente figura muestra las gráficas de las tres ecuaciones donde se puede apreciar como $f(x)=x^2-3x-4=0$ se ha trasladado 3 unidades hacia la derecha y $f(x)=x^2+7x+6=0$ 2 hacia la izquierda con relación a $f(x)=x^2+3x-4=0$ que es la ecuación original.



> ***<u>Muy importante</u>: Tener siempre presente que para disminuir se lleva el número con el mismo signo y para aumentar se lleva con signo contrario***

Analicemos otros ejemplos:

1) Transformar la ecuación $f(x) = x^4 - x^3 - 19x^2 - 11x + 30 = 0$ en otra cuyas raíces sean las de la ecuación dada disminuidas en 3 unidades.

Solución:

Como se nos pide que las raíces estén disminuidas en 3 unidades debemos tomar ***k* = 3**. Utilizando el Esquema de Horner obtenemos

	1	–1	–19	–11	30
3		3	6	–39	–150
	1	2	–13	–50	**–120**
3		3	15	6	
	1	5	2	**–44**	
3		3	24		
	1	8	**26**		
3		3			
	1	**11**			

Entonces la ecuación transformada es $f(x)=x^4+11x^3+26x^2-44x-120=0$

Las raíces de la ecuación dada son $x_1=-3,\ x_2=-2,\ x_3=1$ y $x_4=5$, entonces las de la ecuación transformada deben ser: $x_1=-6,\ x_2=-5,\ x_3=-2$ y $x_4=2.$ Compruébelo.

2) Transformar la ecuación $f(x)=x^4-x^3-19x^2-11x+30=0$ en otra cuyas raíces sean las de la ecuación dada aumentadas en 5 unidades.

Solución:

Observe que es la misma ecuación del ejemplo (1) pero ahora debemos transformarla en otra que las raíces estén aumentadas en 5 unidades. Ahora ***k* = –5**

Utilizamos el Esquema de Horner obtenemos:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -1 & -19 & -11 & 30 \\
-5 & & -5 & 30 & -55 & 330 \\
\hline
 & 1 & -6 & 11 & -66 & 36\mathbf{0} \\
 & & -5 & 55 & -330 & \\
\hline
 & 1 & -11 & 66 & \mathbf{-396} & \\
 & & -5 & 80 & & \\
\hline
 & 1 & -16 & \mathbf{146} & & \\
 & & -5 & & & \\
\hline
 & \mathbf{1} & \mathbf{-21} & & &
\end{array}$$

La ecuación transformada es $f(x)=x^4-21x^3+146x^2-396x+360=0$

Como vimos las raíces de la ecuación dada son: $x_1=-3,\ x_2=-2,\ x_3=1$ y $x_4=5,$

Entonces $x_1=2,\ x_2=3,\ x_3=6$ y $x_4=10$ deben ser las de la ecuación transformada. Compruébelo.

11.1.2.3. ***Dada una Ecuación transformarla en otra cuyas raíces sean las recíprocas de las raíces de la ecuación dada*.**

La idea es que partiendo de la ecuación $f(x)=0$, cuyas raíces son $r_1,\ r_2,\ r_3,...,\ r_n$, obtener otra ecuación $f\left(\frac{1}{x}\right)=0$ cuyas raíces serán $\frac{1}{r_1},\ \frac{1}{r_2},\ \frac{1}{r_3},\ ...\ ,\frac{1}{r_n}$. Es decir, las raíces son recíprocas a las raíces de $f(x)=0$.

Dada $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_2x^2+a_1x+a_0=0$ vamos a obtener otra ecuación $f(y)=0$ cuyas raíces sean las recíprocas de las de $f(x)=0$.

$f(y)=0\rightarrow y=\frac{1}{x}\rightarrow x=\frac{1}{y}$

Vamos a sustituir $x=\frac{1}{y}$ en $f(x)=0$

$$f(y)=a_n\left(\frac{1}{y}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{1}{y}\right)^{n-1}+a_{n-2}\left(\frac{1}{y}\right)^{n-2}+...+a_2\left(\frac{1}{y}\right)^2+a_1\left(\frac{1}{y}\right)+a_0=0$$

Distribuyendo las potencias tenemos:

$$f(y)=a_n\frac{1}{y^n}+a_{n-1}\frac{1}{y^{n-1}}+a_{n-2}\frac{1}{y^{n-2}}+...+a_2\frac{1}{y^2}+a_1\frac{1}{y}+a_0=0$$

Multiplicando por y^n para eliminar los denominadores obtenemos:

$$f(y)=a_n+a_{n-1}\,y+a_{n-2}y^2+...+a_2y^{n-2}+a_1y^{n-1}+a_0y^n=0$$

Intercambiando las variables ***y*** por ***x***

$$f(x)=a_n+a_{n-1}\,x+a_{n-2}x^2+...+a_2x^{n-2}+a_1x^{n-1}+a_0x^n=0$$

En conclusión:

Para transformar una ecuación en otra cuyas raíces sean las recíprocas de las raíces de la ecuación dada, solo tenemos que invertir el orden de colocación de los coeficientes de los términos de la ecuación dada.

Ejemplos:

1) Transformar la ecuación $f(x)=x^4-4x^3-x^2+16x-12=0$ en una que sus raíces sean las recíprocas de $f(x)=0$, es decir, $f\left(\frac{1}{x}\right)=0$

Solución:

Aplicando la regla deducida anteriormente, sólo tenemos que intercambiar los coeficientes.

Tememos que $a_4=1,\quad a_3=-4,\quad a_2=-1,\quad a_1=16\quad \wedge\ a_0=-12$

Si intercambiamos los coeficientes obtenemos $f(x)=-12x^4+16x^3-x^2-4x+1=0$ que es la ecuación transformada.

Observe que lo que se ha hecho es intercambiar $a_4\to a_0\quad a_3\to a_1\quad a_2\to a_2$.

Las raíces de la ecuación dada son: $x_1=-2,\ x_2=1,\ x_3=2,\ \wedge\ x_4=3$.

Entonces las de la ecuación transformada tienen que ser:

$x_1=-\dfrac{1}{2},\ x_2=1,\ x_3=\dfrac{1}{2}\ \wedge\ x_4=\dfrac{1}{3}$. Compruébelo.

2) Transformar la ecuación $f(x)=6x^5+13x^4-30x^3-45x^2+4x+12=0$ en una que sus raíces sean las recíprocas de $f(x)=0$

Solución:

Tememos que $a_5=6,\ a_4=13,\ a_3=-30,\ a_2=-45,\ a_1=4\ \wedge\ a_0=12$

Si intercambiamos los coeficientes obtenemos:

$f(x)=12x^5+4x^4-45x^3-30x^2+13x+6=0$ que es la ecuación transformada.

Las raíces de la ecuación dada son:

$$x_1 = -3,\ x_2 = -\frac{2}{3},\ x_3 = -1, \quad x_4 = \frac{1}{2} \quad \wedge \quad x_5 = 2$$

Entonces las de la ecuación transformada tienen que ser:

$$x_1 = -\frac{1}{3},\ x_2 = -\frac{3}{2},\ x_3 = -1, \quad x_4 = 2 \quad \wedge \quad x_5 = \frac{1}{2}$$. Compruébelo.

12. Naturaleza de las Raíces de una Ecuación

12.1. Raíces nulas de una ecuación

Cuando en una ecuación falta el término independiente a_0 pero no a_1 podemos afirmar que posee una raíz nula (***x*** = 0 es raíz de la ecuación). Si faltan $a_0 \wedge a_1$ pero no a_2 entonces posee dos raíces nulas (***x*** = 0 es raíz doble de la ecuación). Si faltan $a_0, a_1 \wedge a_2$ pero no a_3 entonces posee tres raíces nulas (***x*** = 0 es raíz triple de la ecuación), y así sucesivamente.

Ejemplos:

1) $f(x) = x^3 - x^2 + 16x = 0$

2) $g(x) = x^5 - x^3 + 6x^2 = 0$

3) $h(x) = x^5 + x^4 - 3x^3 = 0$

4) $P(x) = x^7 - x^6 + 2x^5 = 0$

En los casos anteriores podemos afirmar que ***f(x) = 0*** posee una raíz nula, ***g(x) = 0*** posee dos raíces nulas, ***h(x) = 0*** posee tres raíces nulas y ***P(x) = 0*** tiene cinco raíces nulas.

12.2. Variación de signo

En un polinomio $f(x)$ que esté ordenado de forma descendente **se** dice que hay una **variación de signo** si dos términos sucesivos difieren en el signo. Para contar las variaciones no importa que el polinomio no esté completo, lo que sí importa es que esté ordenado descendentemente.

Ejemplos:

1) El polinomio $f(x)=2x^4+5x^3-3x^2-4x+1$ presenta dos variaciones de signo.

2) El polinomio $f(x)=x^6-x^4+5x^3-3x^2+4x-1$ presenta cinco variaciones de signo.

12.3. Regla de los Signos de Descartes

Esta regla afirma que si $f(x)=0$ es una ecuación polinómica entera con coeficientes reales y sin raíces nulas tendrá tantas raíces reales positivas como variaciones de signo o es menor que este en un número par. Esto quiere decir, por ejemplo que si $f(x)$ tiene 5 variaciones de signo, entonces existe la posibilidad de que hayan 5 – 0 = 5, 5 – 2 = 3 ó 5 – 4 = 1 raíces positivas.

Para determinar el número de las posibles raíces reales negativas se aplica la misma regla a la ecuación transformada en $f(-x)=0$ puesto que las raíces positivas de $f(-x)=0$ son las negativas de $f(x)=0$

Ejemplo:

1) Determinar la naturaleza de las raíces de la ecuación $f(x)=x^5+5x^3-10x^2-2x+8=0$ por medio de la Regla de los Signos de Descartes**.**

Solución:

$f(x)$ tiene dos variaciones de signo, por lo que hay 2 ó 0 raíces reales positivas

Hallamos $f(-x) = x^5 + 5x^3 + 10x^2 - 2x - 8 = 0$

Esta tiene una sola variación de signo por lo que hay exactamente una raíz real negativa.

Entonces existen las siguientes posibilidades

Grado de la ecuación	Raíces positivas	Raíces negativas	Nulas	Raíces complejas
5	2	1	0	2
5	0	1	0	4

2) Determinar la naturaleza de las raíces de la ecuación $f(x) = x^9 + 4x^7 - 6x^6 + 4x^4 - 8 = 0$ por medio de la Regla de los Signos de Descartes**.**

Solución:

$f(x)$ tiene tres variaciones de signos, por lo que hay 3 ó 1 raíces reales positivas

Hallamos $f(-x) = x^9 + 4x^7 + 6x^6 - 4x^4 + 8 = 0$

Esta tiene dos variaciones de signo por lo que hay 2 ó 0 raíces reales negativas.

Entonces existen las siguientes posibilidades

Grado de la ecuación	Raíces positivas	Raíces negativas	Nulas	Raíces complejas
9	3	2	0	4
9	3	0	0	6
9	1	2	0	6
9	1	0	0	8

3) Determinar la naturaleza de las raíces de la ecuación $f(x)=x^7-6x^6+3x^5-8x^4+3x^3+4x^2=0$ por medio de la Regla de los Signos de Descartes**.**

Solución:

$f(x)$ tiene cuatro variaciones de signo, por lo que hay 4, 2 ó 0 raíces reales positivas. Se ve también que hay dos raíces nulas.

Hallamos $f(-x)=x^7+6x^6+3x^5+8x^4+3x^3-4x^2=0$

Esta tiene una variación de signo por lo que hay exactamente 1 raíz real negativa.

Entonces existen las siguientes posibilidades

Grado de la ecuación	Raíces positivas	Raíces negativas	Nulas	Raíces complejas
7	4	1	2	0
7	2	1	2	2
7	0	1	2	4

12.4. Acotación de las Raíces Reales

Dada $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0=0$ una ecuación entera de coeficientes reales donde a_n positivo vamos a determinar dos números $L\geq 0$ y $L'\leq 0$ que llamaremos respectivamente cota superior y cota inferior, tales que las raíces de $f(x)=0$ se encuentren dentro del intervalo $(L',\ L)$. Existen varios métodos para determinar los límites de las raíces de la ecuación $f(x)=0$. Veremos a continuación uno de ellos denominado Regla de Leguerre.

12.4.1 Regla de Laguerre

Esta regla nos dará un método para encontrar el intervalo en el que se encuentran todas las raíces reales de una ecuación.

Sea L un real positivo. Si al dividir $f(x)$ entre $(x-L)$ resultan positivos o cero todos los coeficientes del cociente y el resto, entonces L es una cota superior de las raíces positivas de la ecuación $f(x)=0$. Esto significa que no hay ninguna raíz mayor que L.

Demostración:

La división $f(x)\div(x-L)$ puede indicarse así $f(x)=Q(x).(x-L)+R$ (1) donde $Q(x)$ tiene todos los coeficientes positivos o ceros y $R\geq 0$. Sea S un número tal que $S>L$, entonces si en (1) evaluemos para $x=S$ obtenemos: $f(S)=Q(S).(S-L)+R$ (2).

En (2) $Q(S)>0$ porque $Q(x)$ tiene todos sus términos positivos. $S-L>0$ porque $S>L$ y por hipótesis $R\geq 0$, lo que nos indica que necesariamente $f(S)>0$.

Como S es un número cualquiera mayor que **L** esto nos indica que la ecuación nunca tomará un valor nulo (cero) en el intervalo $(L,+\infty)$ y que **L** es la cota superior de las raíces de $f(x)=0$.

Para obtener L utilizamos el método de división sintética probando enteros hasta que resulten positivos o cero todos los coeficientes del cociente y del resto. Para obtener la cota inferior L' procedemos de igual manera con la ecuación transformada $f(-x)=0$ cambiando de signo al valor encontrado.

Ejemplo:

Acotar las raíces reales de la ecuación:

$$f(x) = x^6 - 4x^5 + 7x^4 + 32x^3 + 31x^2 + 40x + 25 = 0$$

Solución:

Comenzamos a probar ***L* =1**

	1	–4	7	32	31	40	25
1		1	–3	4	36	67	107
	1	–3	4	36	67	107	132

Como no resultaron positivos o cero todos los coeficientes, debemos probar con un número mayor que 1. Probemos con ***L* = 2**

	1	–4	7	32	31	40	25
2		2	–4	6	76	214	508
	1	–2	3	38	107	254	533

Tampoco resulta esta prueba. Probamos con ***L* = 3**

	1	–4	7	32	31	40	25
3		3	–3	12	132	489	1587
	1	–1	4	44	163	529	1612

Tampoco resulta esta prueba. Probamos con ***L* = 4**

	1	–4	7	32	31	40	25
4		4	0	28	240	1084	4496
	1	0	7	60	271	1124	4521

Para ***L* = 4** resultaron positivos o cero todos los coeficientes del cociente y el resto por lo que este valor es la cota superior de las raíces.

Para encontrar la cota inferior hacemos la transformación de $f(x)=0$ a

$f(-x)=0$ es decir $f(-x)=x^6+4x^5+7x^4-32x^3+31x^2-40x+25=0$

Procedemos igual que el caso anterior

Probemos con ***L* = 1**

	1	4	7	–32	31	–40	25
1		1	5	12	–20	11	–29
	1	5	12	–20	11	–29	–4

No resulta esta prueba. Probamos con ***L* = 2**

	1	4	7	–32	31	–40	25
2		2	12	38	12	66	52
	1	6	19	6	33	26	77

Para ***L* = 2** resultaron positivos todos los coeficientes del cociente y el resto por lo que el opuesto de 2, o sea –2 es la cota inferior de las raíces. Entonces el intervalo de acotación es (–2, 4). Esto significa que todas las raíces reales están entre –2 y 4.

12.5. <u>Teorema de Bolzano</u>

Si un polinomio $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ ...\ +a_1x+a_0$ toma para $x=a\ \wedge\ x=b,$ siendo $a<b$ valores $f(a)\wedge f(b)$ de signos opuestos, la ecuación $f(x)=0$ tiene por lo menos una raíz en el intervalo $(a,\ b)$.

Este teorema permite la separación de las raíces reales de una ecuación.

Ejemplo:

Separar las raíces reales de la ecuación $f(x)=2x^3-7x^2-2x+3=0$ aplicando el teorema de Bolzano.

Solución:

Primero determinamos la cota superior ***L*** y la cota inferior ***L`***

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -7 & -2 & 3 \\ 1 & & 2 & -5 & -7 \\ \hline & 2 & -5 & -7 & -4 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 2 & -7 & -2 & 3 \\ 2 & & 4 & -6 & -16 \\ \hline & 2 & -3 & -8 & -13 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 2 & -7 & -2 & 3 \\ 3 & & 6 & -3 & -15 \\ \hline & 2 & -1 & -5 & -12 \end{array}$$

Al probar con 1, 2 y 3 vemos que no son positivos o cero todos los coeficientes y el resto por lo que ninguno de ellos son la cota superior.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -7 & -2 & 3 \\ 4 & & 8 & 4 & 8 \\ \hline & 2 & 1 & 2 & 11 \end{array}$$

Al probar con el 4 resultan positivos todos los coeficientes y el resto por lo que ***L* = 4** es la cota superior.

Ahora procedemos de igual forma con $f(-x)=0$ para determinar la cota inferior.

$$f(-x)=2x^3+7x^2-2x-3=0$$

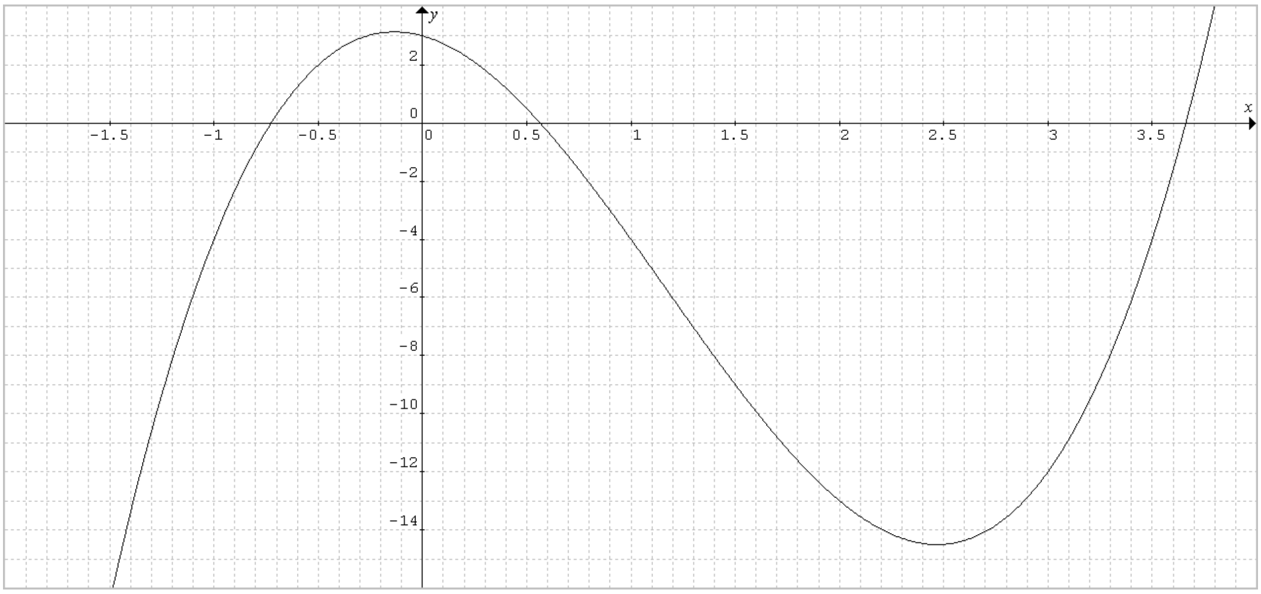
$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 7 & -2 & -3 \\ 1 & & 2 & 9 & 7 \\ \hline & 2 & 9 & 7 & 4 \end{array}$$

Al probar con 1 resultaron positivos todos los coeficientes y el resto por lo que $L' = -1$ es la cota inferior. Entonces todas las raíces reales están en el intervalo (– 1, 4).

Veamos cómo se comporta *f*(*x*) al ser evaluada en los valores enteros del intervalo de acotación (– 1, 4).

x	– 1	0	1	2	3	4
f(*x*)	–4	3	–4	–13	–12	11

En el intervalo (– 1, 0) $f(x)$ cambia de signo, esto significa que en ese intervalo hay una raíz. Lo mismo ocurre en los intervalos (0, 1) y (3, 4). Como la ecuación es tercer grado se puede concluir que sus tres raíces son reales y se encuentran en los intervalos indicados. Esto se puede confirmar en la siguiente gráfica.

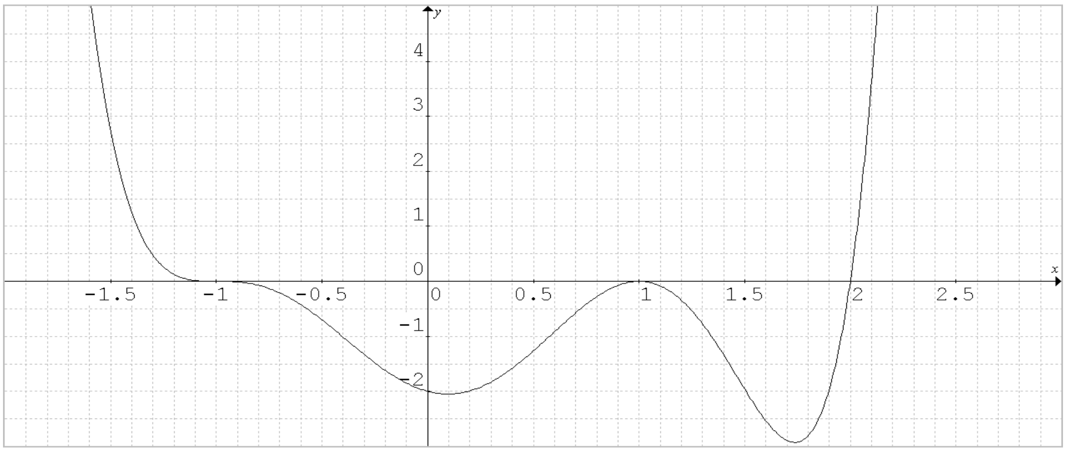


EJERCICIOS PROPUESTOS

I- Para cada una de las siguientes ecuaciones indique lo que se pide.

Ecuación	Grado	¿Cuáles son las raíces?	¿Cuáles son múltiples?	Grado de multiplicidad
$f(x) = (x-3)^2(x-2)(x-1) = 0$				
$P(x) = (x+1)^3(x-5)^2(x+2) = 0$				
$h(x) = (x-4)^5(2x-3)^3(3x-1)^2 = 0$				
$Q(x) = (x-2i)(x+2i)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = 0$				

II- La siguiente es la gráfica de una función polinómica $y = f(x)$. Analice y conteste.



1) ¿Cuáles son la raíces de $f(x)=0$?

2) ¿Cuál o cuáles son simples?

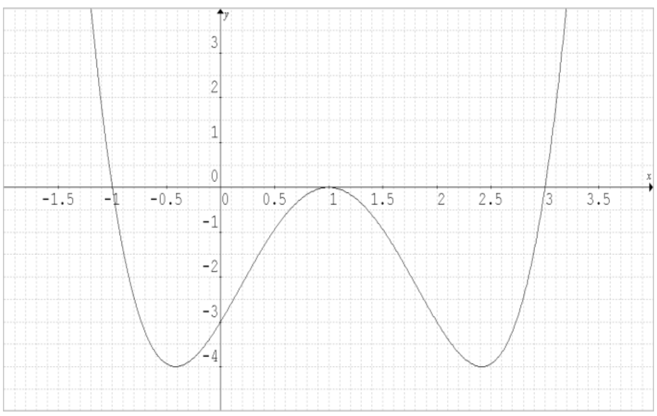
3) ¿Cuál o cuáles son múltiples?

4) ¿Cuál o cuáles tienen grado de multiplicidad par?

5) ¿Cuál o cuáles tienen grado de multiplicidad impar?

6) ¿Cuál es el menor grado que puede ser $f(x)=0$?

III- ¿A cuál de las siguientes ecuaciones corresponde esta gráfica?



a) $f(x) = (x-1)^2 (x+1)(x-3)=0$

b) $f(x) = (x-1)^3 (x+1)^2 (x+3)=0$

c) $f(x) = (x-1) (x+1)^2 (x-3)=0$

d) $f(x) = (x-1) (x+1)^2(x-3)=0$

IV- Determine todas las raíces de la ecuación $f(x) = x^6 - x^5 + x^4 - x^3 - 12x^2 + 12x = 0$, sabiendo que: $x_1 = 1, \; x_2 = 2i \; \wedge \; x_3 = \sqrt{3}$.

V- Use la relación entre las raíces y los coeficientes para formar la ecuación cuyas raíces son: $x_1 = -3, \; x_2 = 1 \; \wedge \; x_3 = 2$ y $\boldsymbol{a_n} = \mathbf{1}$.

VI- Determine los valores de ***a*** y ***b*** para que 2 sea raíz doble de la ecuación:

$\boldsymbol{f(x) = x^3 - 5x^2 + ax + b = 0}$.

VII- Resuelva la siguiente ecuación $f(x) = x^5 - 2x^4 - 16x^3 + x^2 - 12x + 4 = 0$.

VIII- Dada la ecuación $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4 = 0$. Determine todo lo que se pide a continuación.

1) Halle todas las raíces de la ecuación $f(x) = 0$

2) Si tiene raíces múltiples transfórmela en otra que tenga las mismas raíces pero todas simples.

3) Transforme la ecuación $f(x) = 0$ en otra que las raíces sean el doble de las raíces de la ecuación dada.

4) Transforme la ecuación $f(x) = 0$ en otra que las raíces sean $\frac{2}{3}$ de las raíces de la ecuación dada.

5) Transforme la ecuación $f(x) = 0$ en otra que las raíces sean las opuestas de las raíces de la ecuación dada.

6) Transforme la ecuación $f(x) = 0$ en otra que las raíces sean las recíprocas de las raíces de la ecuación dada.

7) Transforme la ecuación $f(x) = 0$ en otra que las raíces sean las de la ecuación dada disminuidas en 3 unidades.

8) Transforme la ecuación $f(x) = 0$ en otra que las raíces sean las de la ecuación dada aumentadas en 2 unidades.

IX- Aplique la Regla de Descartes para determinar la naturaleza de las raíces de la ecuación $f(x) = x^4 + 22x^3 - 15x^2 = 0$.

Grado de la ecuación	Raíces positivas	Raíces negativas	Nulas	Raíces complejas

X- Dada la ecuación $f(x) = 6x^4 + 7x^3 - 13x^2 - 9x + 3 = 0$, determine:

1) La naturaleza de las raíces.

2) El intervalo de acotación de las raíces de la ecuación.

3) Cuántas raíces reales hay, aplicando el teorema de Bolzano.

4) Las posibles raíces racionales del intervalo de acotación.

5) Todas las raíces racionales que hayan.

UNIDAD 4:   MATRICES

1. <u>Definición de Matriz</u>:

Por el uso constante de las matemáticas en la ciencia y la tecnología, así como en otros campos del saber humano, se hace necesario el estudio de las matrices, las cuales constituyen herramientas eminentemente útiles por su valor estructural y operativo. Las matrices se utilizan en la mayoría de las ciencias y en la misma matemática para resolver cálculos numéricos, en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, de las ecuaciones diferenciales y de las derivadas parciales. Una gran cantidad de las operaciones realizadas por las computadoras se hacen tomando como elementos a las matrices. Tienen también muchas aplicaciones en el campo de la física.

Definición: Una matriz es un arreglo rectangular de elementos ordenados en filas y columnas. Estos elementos pueden ser números reales, complejos, funciones, etc. y se acostumbran a colocar entre corchetes**.**

En este curso trataremos con matrices cuyas entradas serán números reales.

1.1. <u>Notación</u>:

Las matrices, en general, se denotan por letras mayúscula y sus elementos se designan por letras minúsculas seguidas de dos subíndices *i, j*, el primero (*i*) indica la fila en que está ese elemento y el segundo (*j*) la columna.

$$A_{m\times n}=\begin{array}{cl}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & =\left(a_{ij}\right)\end{array}$$

Fila i

Columna j

En este caso, por ejemplo, $A_{m\times n}$ está denotando a una matriz que tiene m filas y n columnas y el elemento a_{12} nos indica que está en la fila 1 y la columna 2.

Sea i el número de filas y j el número de columnas a que pertenece cada elemento de la matriz; luego a_{ij} representa un elemento cualquiera de la matriz, donde $1 \le i \le m$ y $1 \le j \le n$.

Es importante tener presente que una matriz no tiene valor numérico y que solo es una manera de ordenar datos.

1.2. <u>Ejemplos de algunos de los usos que se les da a las matrices</u>:

1) La matriz siguiente proporciona las distancias entre las ciudades indicadas (en millas)

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \text{Londres} & \text{Madrid} & \text{New York} & \text{Tokio} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Londres} \\ \text{Madrid} \\ \text{New York} \\ \text{Tokio} \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 785 & 3{,}469 & 5{,}959 \\ 785 & 0 & 3{,}593 & 6{,}706 \\ 3{,}469 & 3{,}593 & 0 & 6{,}757 \\ 5{,}959 & 6{,}706 & 6{,}757 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

2) Un supermercado tiene 4 sucursales en diferentes ciudades del país. La siguiente matriz representa las ventas en pesos de cada una de ellas durante una semana:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} \text{Lunes} & \text{Martes} & \text{Miércoles} & \text{Jueves} & \text{Viernes} & \text{Sábado} & \text{Domingo} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Sucursal A} \\ \text{Sucursal B} \\ \text{Sucursal C} \\ \text{Sucursal D} \end{array} & \begin{bmatrix} 83{,}250 & 70{,}275 & 93{,}245 & 75{,}630 & 90{,}465 & 105{,}456 & 87{,}508 \\ 54{,}750 & 50{,}275 & 67{,}436 & 61{,}930 & 73{,}460 & 72{,}050 & 68{,}655 \\ 64{,}348 & 60{,}380 & 71{,}125 & 73{,}340 & 69{,}500 & 83{,}925 & 75{,}320 \\ 58{,}780 & 55{,}895 & 65{,}750 & 63{,}685 & 56{,}800 & 67{,}945 & 62{,}070 \end{bmatrix} \end{array}$$

1.3. <u>Tamaño u Orden de una Matriz</u>:

Es el número de elementos que posee la matriz, el cual viene definido mediante el producto indicado entre el número de filas y el número de columnas.

Ejemplos:

1) $A_{2\times3} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Matriz A de orden 2 por 3

2) $B_{3\times2} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matriz B de orden 3 por 2

3) $C_{1\times6} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 & 8 & -1 \end{bmatrix}$

Matriz C de orden 1 por 6

2. Tipo de Matrices:

2.1. Matriz Cuadrada:

La matriz cuadrada es aquella donde el número de filas es igual al número de columnas; es decir, $m = n$.

Cuando la matriz es cuadrada el orden se indica con un solo valor $\left(A_{n\times n} = A_n\right)$.

Ejemplo: $A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ es una matriz cuadrada de orden 3.

2.2. Matriz Fila o Vector Fila:

Se llama matriz fila o vector fila a la matriz que tiene una sola fila $A_{1\times n}$.

Ejemplos: a) $A_{1\times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}$ b) $M_{1\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -2 \end{bmatrix}$

2.3. Matriz Columna o Vector Columna:

Se llama matriz o vector columna a la matriz que tiene una sola columna. $A_{m\times 1}$

Ejemplos: a) $A_{m\times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \dots \\ a_{1m} \end{bmatrix}$ b) $M_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

2.4. Matriz nula (0):

Es aquella cuyos elementos son iguales a cero.

Ejemplos: a) $A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ b) $B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. Matrices Iguales:

Dos matrices son iguales si sus elementos correspondientes son iguales, es decir, sean $A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$ y $B_{m\times n}=\left(b_{ij}\right)$, entonces $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son iguales si y sólo si $a_{ij}=b_{ij}$.

Ejemplo: Si $A=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} w & z \\ y & t \end{bmatrix}$ ¿cuáles son los valores de w, z, y y t para que $A=B$?

$$w=2, \quad z=5, \quad y=4 \quad \text{y} \quad t=7$$

4. Matrices Opuestas:

Son aquellas matrices cuyos elementos correspondientes son opuestos, es decir, sean $A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$ y $B_{m\times n}=\left(b_{ij}\right)$ son opuestas si y sólo si $a_{ij}=-b_{ij}$.

Ejemplo: $A=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ son dos matrices opuestas.

5. Diagonal Principal y Diagonal Secundaria de una Matriz Cuadrada:

Se llama ***diagonal principal*** de una matriz cuadrada a la línea definida por los elementos a_{ij} donde $i=j$; es decir, $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots, a_{nn}$. Y diagonal secundaria a la línea definida por los elementos a_{ij} donde $i+j=n+1$; es decir, $a_{1n}, a_{2(n-1)}, a_{3(n-2)}, \ldots, a_{n1}$.

Ejemplo:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -5 & 3 \\ 1 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -5 & 3 \\ 1 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Diagonal Principal   Diagonal secundaria

6. <u>Traza de una Matriz</u>:

La ***traza*** de una matriz cuadrada es la sumatoria de los elementos de la diagonal principal; es decir, $Tr\left(A_n\right)=\sum_{i=j=1}^{n} a_{ij}$ para $i=j$.

Ejemplos:

a) Hallar la traza de la matriz $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$. $Tr\left(A\right)=a_{11}+a_{22}=2+7=9$

b) Hallar la traza de la matriz $B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. $Tr\left(B\right)=b_{11}+b_{22}=0+0=0$

c) Hallar la traza de la matriz $D=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & -7 & 5 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

$Tr\left(D\right)=d_{11}+d_{22}+d_{33}=3-7+4=0$

7. <u>Otros Tipos de Matrices:</u>

7.1. <u>Matriz Diagonal</u>:

Se llama ***matriz diagonal*** a la matriz cuyos elementos que no están en la diagonal principal son iguales a cero, es decir $\forall a_{ij}=0 \quad para \quad i\neq j.$

Ejemplos:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7.2. <u>Matriz Escalar</u>:

Se llama ***matriz escalar*** a la matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal principal son iguales a una constante, es decir, $a_{ij}=0 \quad para \quad i\neq j \quad \wedge \quad a_{ij}=k \quad para \quad i=j$ siendo k un escalar cualquiera.

Ejemplos: $A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

7.3. Matriz Identidad o Unidad (I_n):

Se llama ***matriz identidad*** o ***unidad*** a la matriz escalar cuyo elemento de la diagonal principal es igual a la unidad positiva (1). Es decir, $a_{ij} = 0 \;\; para \;\; i \neq j \;\wedge\; a_{ij} = 1 \;\; para \;\; i = j$. Este tipo de matriz se representa por I_n.

Ejemplos: $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7.4. Matriz Triangular:

Se llama ***matriz triangular*** a la matriz cuadrada cuyos elementos por encima o por debajo de la diagonal principal son iguales a cero. Esta puede ser superior o inferior.
$\forall a_{ij} = 0 \;\; para \;\; i > j \;\vee\; \forall a_{ij} = 0 \;\; para \;\; i < j.$

7.4.1. Matriz Triangular Superior y Triangular Inferior:

Se llama ***matriz triangular superior*** a la matriz triangular cuyos elementos por debajo de la diagonal principal son iguales a cero. Es decir, $\forall a_{ij} = 0 \;\; para \;\; i > j.$

Se llama ***matriz triangular inferior*** a la matriz cuyos elementos por encima de la diagonal principal son iguales a cero. Es decir, $\forall a_{ij} = 0 \;\; para \;\; i < j.$

Ejemplos: $M = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

M es una matriz triangular superior — N es una matrices triangular inferior

EJERCICIOS PROPUESTOS

I.- 1) Forme la matriz A de orden 4 cuyos elementos correspondan a lo que se indica:

$a_{ii} = 5 \quad (i = j) \quad \text{para} \quad i = 1, 2, 3, 4$

$a_{12} = -3 \qquad a_{13} = 4 \qquad a_{14} = 2$

$a_{24} = 6 \qquad a_{34} = -7 \qquad a_{23} = -5$

$a_{12} + a_{21} = 5 \qquad a_{13} - a_{31} = 5 \qquad a_{14}\left(a_{41}\right) = -6$

$a_{24} + a_{42} = -8 \qquad a_{34} - a_{43} = 10 \qquad a_{23}\left(a_{32}\right) = 15$

2) Forme una matriz B de orden 3 x 2 cuyos elementos vienen dados por $b_{ij} = i^2 - 3j$

3) Forme una matriz C de orden 2 x 4 cuyos elementos vienen dados por $c_{ij} = 2i + j$

II- Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ y+1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & w-2 \end{bmatrix}$ determine los valores de las variables para que:

1) A sea igual a $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

2) A sea opuesta a $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -5 & -2 & -4 \\ -5 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

3) La traza de A sea igual a 4

III- Dada las matrices: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 4 & 7 \\ 1 & 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $F = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, determine:

1) ¿Cuál es el orden de la matriz A? ____________

2) ¿Cuál o cuáles matrices son?

Diagonal: ________________ Escalar:_________________

Identidad o unidad: _________________ Nula: __________________

Triangular superior: ________________ Triangular inferior: __________________

IV- Escriba la matriz que se indica en cada caso:

1) Una matriz 5 x 3.

2) Una matriz diagonal de orden 4.

3) Una matriz escalar de orden 5.

4) Una matriz identidad de orden 6.

8. Operaciones con Matrices:

8.1. Adición o Suma:

Para sumar dos matrices, estas tienen que ser del mismo orden, siendo la matriz suma otra matriz del orden de las matrices sumando y cuyos elementos se obtienen sumando los elementos correspondientes de cada una de ellas. Es decir, si $A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$ y $B_{m\times n}=\left(b_{ij}\right)$ decimos que

$$A_{m\times n}+B_{m\times n}=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1j}+b_{1j} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2j}+b_{2j} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \dots & a_{ij}+b_{ij} & \dots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mj}+b_{mj} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Si $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, hallar $A+B$

$$A+B=\begin{bmatrix} (2-1) & (3+3) & (4-2) \\ (-1+0) & (3+4) & (2+5) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -1 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

8.1.1. Propiedades de la Suma de Matrices:

Sea $M_{m\times n}$ el conjunto de todas las matrices $m\times n$

1. Para toda matrices $A,B\in M_{m\times n}$ se cumple que $A+B\in M_{m\times n}$. Es decir, la suma de matrices es cumple la propiedad de cerradura o clausurativa.

2. Para todas matrices $A,\, B\in M_{m\times n}$ se cumple que $A+B=B+A$. Es decir, que la suma de matrices es conmutativa.

Ejemplo: Sean $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ -7 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, calcular $A+B$ y $B+A$.

$$A+B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ -7 & -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3+2 & 2+1 & -1-1 \\ 4+3 & 0+4 & 1+0 \\ -2-7 & 3-1 & 5+3 \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 7 & 4 & 1 \\ -9 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$B+A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ -7 & -1 & 3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+3 & 1+2 & -1-1 \\ 3+4 & 4+0 & 0+1 \\ -7-2 & -1+3 & 3+5 \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 7 & 4 & 1 \\ -9 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

3. Para todas matrices $A, B, C \in M_{m\times n}$ se cumple que $(A+B)+C=A+(B+C)$. Es decir, que la suma de matrices es asociativa.

4. Para toda matriz $A\in M_{m\times n}$ existe la matriz $\mathbf{0}\in M_{m\times n}$ tal que $A+\mathbf{0}=\mathbf{0}+A=A$ siendo $\mathbf{0}\in M_{m\times n}$ la matriz nula que es la identidad o neutro para la suma de matrices.

Ejemplo: Sea $B=\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 6 \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, calcular $B+\mathbf{0}$

$$B+\mathbf{0}=\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 6 \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3+0 & 2+0 & -1+0 \\ 4+0 & 0+0 & 6+0 \\ -2+0 & 7+0 & 1+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 6 \\ -2 & 7 & 1 \end{pmatrix}=B$$

5. Para toda matriz $A\in M_{m\times n}$ existe $-A\in M_{m\times n}$ tal que $A+(-A)=\mathbf{0}\in M_{m\times n}$. La matriz $-A$ es llamada la matriz opuesta o inversa aditiva de A.

Ejemplo: Sean $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ y $-A=\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ -4 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -5 \end{pmatrix}$ calcular $A+(-A)$

$$A+(-A)=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ -4 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3-3 & 2-2 & -1+1 \\ 4-4 & 0+0 & 1-1 \\ -2+2 & 3-3 & 5-5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8.2. <u>Resta o Diferencia</u>:

Para restar dos matrices, que sean del mismo orden, se suma la matriz minuendo con la opuesta de la matriz sustraendo. Es decir, sean $A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$ y $B_{m\times n}=\left(b_{ij}\right)$ decimos que $A_{m\times n}-B_{m\times n}=\left(A+\left(-B\right)\right)_{m\times n}=(a_{ij}-b_{ij})=(a_{ij}+(-b_{ij}))$

Ejemplo: Sea $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$, hallar $A-B$

$$A-B=A+(-B)=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -4 & -5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \left(2+1\right) & \left(3+(-3)\right) & \left(4+2\right) \\ \left(-1+0\right) & \left(3+(-4)\right) & \left(2+(-5)\right) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

8.3. <u>Producto de una Matriz por un Escalar</u>:

Para multiplicar una matriz por un escalar, se multiplica el escalar por cada elemento de la matriz. Es decir, si $A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$ y k un escalar, entonces $kA=\left(ka_{ij}\right)$.

Ejemplo: Sea $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ una matriz y $k=2$, hallar kA.

$$kA=2A=2\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2(2) & 2(3) & 2(4) \\ 2(-1) & 2(3) & 2(2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ -2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

8.3.1. <u>Propiedades de la Multiplicación de una Matriz por un Escalar</u>:

Sean $A, B\in M_{m\times n}$ y $k,t\in R$, entonces se cumple lo siguiente:

1. $k.A\in M_{m\times n}$
2. $k.(t.A)=(k.t).A$

3. $k.(A+B)=k.A+k.B$

4. $(k+t).A=k.A+t.A$

5. $1.A=A$

8.4. El Espacio Vectorial de las Matrices $M_{m\times n}$:

Como se ha observado, la suma de matrices y la multiplicación de un escalar por una matriz cumplen con las 10 propiedades requeridas para formar un espacio vectorial. Por lo que el conjunto de todas las matrices $M_{m\times n}$ con la suma de matrices y la multiplicación por escalar aquí definida constituyen un espacio vectorial en el campo de los números reales.

8.5. Multiplicación de Matrices:

8.5.1. Producto de una Matriz Fila por una Matriz Columna:

El producto de multiplicar una matriz fila $A_{1\times m}=\left(a_{1j}\right)$ por una matriz columna $B_{m\times 1}=\left(b_{i1}\right)$, donde el número de columnas de ***A*** es igual al número de filas de ***B***, es la matriz $C_{1\times 1}=\left(c_{11}\right)$, que se obtiene de la siguiente manera:

$$\left(c_{11}\right)=\left(a_{1j}\right)\left(b_{i1}\right)=\left(\sum_{i=j=1}^{m} a_{1j}b_{i1}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}+...+a_{1m}b_{m1}\right)$$

Ejemplo: Sean $A=\begin{bmatrix}3 & -2 & 4\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}$, hallar AB.

$$AB=\left[(3)(1)+(-2)(-2)+(4)(3)\right]=\left[3+4+12\right]=\left[19\right]$$

8.5.2. Producto de dos Matrices Cualesquiera:

Sea $A_{m\times p}=\left[a_{ik}\right]$ y $B_{p\times n}=\left[b_{kj}\right]$ donde $1\le i\le m;\quad 1\le k\le p$ y $1\le j\le n$, el producto de ***A*** por ***B*** viene dado por $AB=C_{m\times n}$, donde $C_{m\times n}=\left(c_{ij}\right)=\left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\right)$.

$$A_{m\times p}B_{p\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \boxed{c_{ij}} & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

Es decir; para multiplicar dos matrices cualesquiera es ***necesario que el número de columnas de la primera matriz factor sea igual al número de filas de la segunda matriz factor***, siendo la matriz producto de orden igual al producto indicado entre el número de filas de la primera matriz factor y el número de columnas de la segunda matriz; y cada elemento de la matriz producto resulta de multiplicar la $i-esima$ fila de la primera matriz por la $j-esima$ columna de la segunda matriz. O sea hay que multiplicar cada fila de la primera matriz por cada una de las columnas de la segunda matriz.

Ejemplo: Sean $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

1) Hallar AB.

El producto ***AB*** está definido ya que el número de columnas de ***A*** es igual al número de filas de ***B***·

$$\begin{array}{cc} A & B \\ 2 \text{ x } 3 & 3 \text{ x } 2 \end{array}$$

$$AB=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (2)(1)+(3)(4)+(-1)(-1) & (2)(3)+(3)(2)+(-1)(5) \\ (4)(1)+(0)(4)+(2)(-1) & (4)(3)+(0)(2)+(2)(5) \end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix} 2+12+1 & 6+6-5 \\ 4+0-2 & 12+0+10 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 15 & 7 \\ 2 & 22 \end{bmatrix}$$

2) Hallar BA.

El producto ***BA*** está definido ya que el número de columnas de ***B*** es igual al número de filas de ***A***·

$$\begin{array}{cc} B & A \\ 3 \text{ x } 2 & 2 \text{ x } 3 \end{array}$$

$$BA=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\\ -1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 4 & 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+12 & 3+0 & -1+6\\ 8+8 & 12+0 & -4+4\\ -2+20 & -3+0 & 1+10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & 3 & 5\\ 16 & 12 & 0\\ 18 & -3 & 11\end{bmatrix}$$

Observe que $AB \neq BA$; es decir, la multiplicación de matrices no es conmutativa.

Además $\underbrace{\overset{A}{2 \text{ x } 3} \qquad \overset{B}{3 \text{ x } 2}}_{\text{tamaño de } AB}$ y $\underbrace{\overset{B}{3 \text{ x } 2} \qquad \overset{A}{2 \text{ x } 3}}_{\text{tamaño de } BA}$

8.5.3. <u>Potencia Entera de una Matriz Cuadrada</u>:

Sea $A=(a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden ***n*,** si queremos obtener **una potencia entera positiva de *A*** solo tenemos que multiplicar por sí misma tantas veces como lo indique la potencia. En general $A^2 = AA$, $A^3 = A^2A$, $A^4 = A^2A^2 = A^3A$, $A^n = AA^{n-1}$.

Ejemplo: Sea $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$ hallar A^2, A^3 y A^4

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4-1 & 2+3\\ -2-3 & -1+9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 5\\ -5 & 8\end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix}3 & 5\\ -5 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6-5 & 3+15\\ -10-8 & -5+24\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 18\\ -18 & 19\end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^2A^2 = \begin{bmatrix}3 & 5\\ -5 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 5\\ -5 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9-25 & 15+40\\ -15-40 & -25+64\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-16 & 55\\ -55 & 39\end{bmatrix}$$

8.5.4. <u>Propiedades de la Multiplicación de Matrices</u>:

Sean A, B y C matrices conformes con la multiplicación; es decir que está definida la multiplicación entre ellas:

1. $A(BC)=(AB)C$ propiedad asociativa.
2. $A(B+C)=AB+AC$ 1ra. propiedad distributiva
3. $(A+B)C=AC+BC$ 2da. propiedad distributiva

Sin embargo

4. $AB \neq BA$ en general no se cumple la propiedad conmutativa (como ya vimos en el ejemplo anterior).

5. $AB = \mathbf{0}$ no implica necesariamente que $A = \mathbf{0} \vee B = \mathbf{0}$.

Ejemplo: Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ninguna de las cuales es la matriz cero. Pero si hallamos el producto AB obtenemos la matriz cero ya que

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(0)+0(3) & 2(0)+0(1) \\ 4(0)+0(3) & 4(0)+0(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$AB = \mathbf{0}$ sin que ni A ni B sean $\mathbf{0}$.

6. $AB = AC$ no implica necesariamente que $B = C$.

7. $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$

EJERCICIOS PROPUESTOS

I.- Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \\ -6 & 8 & 2 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -4 \\ 3 & 5 & -3 \\ -1 & -7 & 9 \end{bmatrix}$$

determine, si es posible:

1) $B + E$ 2) $3D - 5F$ 3) $AB + 3C$

4) $A+B$ 5) $BA-2D$ 6) BE

7) D^2-3BA 8) C^3 9) $\left(tr\left(D\right)\right)AB+\left(tr\left(C\right)\right)C$

10) La matriz X si $X-7C=AE$ 11) La matriz X si $2X+3D=5F$

9. <u>Matriz Transpuesta</u> $\left(A^T\right)$:

Dada una matriz *A*, la ***matriz transpuesta*** de ***A*** que se denota A^T es la matriz que se obtiene al intercambiar las filas por las columnas y las columnas por las filas de ***A***. Si $A=\left(a_{ij}\right)$ es una matriz de orden m x n, la matriz transpuesta de ***A*** es la matriz de orden n x m $A^T=\left(a_{ij}\right)^T=\left(a_{ji}\right)$.

Ejemplo: Si $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 7 \\ -1 & 3 & 5 & 6 \\ -4 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ entonces $A^T=\begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & -1 \\ 7 & 6 & 2 \end{bmatrix}$.

9.1. <u>Propiedades que Cumple la Transposición de Matrices</u>:

1. $\left(A+B\right)^T=A^T+B^T$
2. $\left(A^T\right)^T=A$
3. $\left(kA\right)^T=kA^T$ si k es un escalar.
4. $\left(AB\right)^T=B^TA^T$

10. <u>Matriz Simétrica</u>:

Una matriz cuadrada A_n es simétrica si y sólo si $A_n=A_n^T$. En una matriz simétrica se cumple que $a_{ij}=a_{ji}$ para todos los valores de *i* y *j*. Es decir, los elementos que equidistan de la diagonal principal son iguales.

Ejemplo: $A=\begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ -4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ es simétrica ya que $A=A^T=\begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ -4 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

Además $a_{12}=a_{21}=-4$, $a_{13}=a_{31}=5$ y $a_{23}=a_{32}=2$.

11. <u>Matriz Antisimétrica</u>:

Una matriz cuadrada es antisimétrica si y sólo si $A_n=-A_n^T$. En una matriz antisimétrica se cumple que $a_{ij}=0$ si $i=j$ y $a_{ij}=-a_{ji}$ si $i\neq j$. Es decir, los elementos de la diagonal principal son iguales a cero y los elementos que equidistan de ella son opuestos.

Ejemplo:

Sea $A=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{bmatrix}$, entonces $A^T=\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -5 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ y $A=-A^T=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{bmatrix}$.

Además $a_{11}=a_{22}=a_{33}=0$ y $a_{12}=-a_{21}$, $a_{13}=-a_{31}$ y $a_{23}=-a_{32}$

12. <u>Matriz Normal</u>:

Una matriz es normal si conmuta con su transpuesta, esto es, si $AA^T=A^TA$. Observe que si A es simétrica o antisimétrica, es necesariamente normal.

Ejemplo: Sea $A=\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$. Entonces: $AA^T=\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{bmatrix}$ y

$A^TA=\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 45 \end{bmatrix}$.

Puesto que $AA^T=A^TA$, la matriz $\boldsymbol{A}$ es normal.

Compruebe si la matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ **es normal.**

13. Matriz Ortogonal:

Decimos que una matriz cuadrada es ortogonal, si $AA^T = A^T A = I$.

Ejemplo: La matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ es ortogonal ya que:

$$AA^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) & \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) & \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} + \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Compruebe que $A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **y por lo tanto *A* es una matriz ortogonal.**

14. Combinación Lineal de las Filas y Columnas de una Matriz:

Se llama combinación lineal de varias filas o columnas de una matriz, a otra fila o columna que resulte de sumar sus elementos después de multiplicarlos por ciertos números llamados coeficientes.

Ejemplo: Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 3 & -4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, la fila 3 es combinación lineal de

las filas 1 y 2 ya que $F_3 = 3F_1 + 2F_2$, observe:

$F_1 = (1,-2,3,4)$ $\qquad$ $3F_1 = (3,-6,9,12)$

$F_2 = (0,1,-2,-5)$ $\qquad$ $2F_2 = (0,2,-4,-10)$

$F_3 = (3,-4,5,2)$ $\qquad$ $F_3 = 3F + 2F_2 = (3,-4,5,2)$

15. <u>Dependencia Lineal de las Filas y Columnas de una Matriz</u>:

Una fila o columna de una matriz es linealmente dependiente de otras cuando es una combinación lineal de las mismas.

Ejemplo: En el ejemplo anterior, la fila 3 es linealmente dependiente porque es combinación lineal de las filas 1 y 2.

16. <u>Independencia Lineal de las Filas y Columnas de una Matriz</u>:

Varias filas o columnas de una matriz son linealmente independientes, o no existe una relación lineal entre ellas, cuando ninguna se puede expresar como combinación lineal de las otras.

Ejemplo: La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & -4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ tiene sus tres filas linealmente independientes.

17. <u>Rango o Característica de una Matriz</u> $h(A)$:

Es el número máximo de filas o columnas linealmente independiente que posee la matriz. Si una fila o columna de una matriz es combinación lineal de otras paralelas a ella, al suprimirla se obtiene otra matriz de igual característica.

Ejemplo: En la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -5 & 7 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ se verifica que $F_3 = 2F_1 + F_2$ por tanto la característica de A es igual a 2 es decir que $h(A) = 2$.

18. <u>Matriz Ampliada</u>:

Es aquella que resulta al agregar por la derecha, a una matriz dada, otra matriz de igual número de filas.

Ejemplos:

1) sean las matrices $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 4\\5 & -1 & 7\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & -1\end{bmatrix}$ la matriz ampliada A/B viene dada por $A/B=\begin{bmatrix}3 & 2 & 4 & : & 2 & 3\\5 & -1 & 7 & : & 1 & -1\end{bmatrix}$

2) Sea la matriz $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\5 & -1 & 7\\0 & 2 & 1\end{bmatrix}$, la matriz ampliada $A/I=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4 & : & 1 & 0 & 0\\5 & -1 & 7 & : & 0 & 1 & 0\\0 & 2 & 1 & : & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

19. Transformaciones u Operaciones Elementales en una Matriz:

Son operaciones que se realizan sobre las filas o columnas de una matriz sin alterar ni su orden ni su característica o rango. Las tres transformaciones elementales son:

- Intercambio de dos filas o columnas.
- Multiplicar una fila o columna por un escalar diferente de cero.
- Sumar a una fila o columna una o más filas o columnas previamente multiplicadas por un escalar diferente de cero.

20. Matrices Equivalentes:

Dos matrices $A \wedge B$ son equivalentes $(A \approx B)$ si una es obtenida de la otra mediante una o más transformaciones elementales. Las matrices equivalentes tienen el mismo orden e igual característica.

Ejemplo:

Sean $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\5 & -1 & 7\\0 & 2 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5 & -1 & 7\\2 & 3 & 4\\0 & 2 & 1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}4 & 6 & 8\\5 & -1 & 7\\0 & 2 & 1\end{bmatrix}$ y $D=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\5 & -1 & 7\\4 & 8 & 9\end{bmatrix}$

Las matrices $B, C \wedge D$ son equivalentes a la matriz A ya que: B se obtuvo de A intercambiando $F_1 \wedge F_2$. C se obtuvo haciendo $2F_1$ y D se obtuvo sustituyendo F_3 por $2F_1 + F_3$.

21. Matriz Elemental E:

Una matriz cuadrada se denomina "***matriz elemental***" si se puede obtener a partir de la matriz identidad I_n mediante una sola transformación u operación elemental.

Ejemplo: Obtener dos matrices elementales de 3 x 3

$$1)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} f_2 \to 3f_2 \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad 2)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} f_3 \to f_3 + 5f_1 \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

22. Matriz Escalonada:

Una matriz está en la forma escalonada si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Todas las filas que consistan solo de ceros (si existen) están en la parte inferior de la matriz.

2. El primer elemento no nulo (distinto de cero) de cada fila, llamado *pivote*, está a la derecha del pivote de la fila anterior. Esto supone que todos los elementos debajo de un pivote son ceros.

Ejemplos: Las siguientes matrices son matrices escalonadas

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

23. <u>Matriz en la Forma Escalonada Reducida</u>:

Una matriz está en la forma ***escalonada reducida*** si, además de las dos condiciones, anteriores cumple las siguientes condiciones:

1. Sus pivotes son todos iguales a 1.
2. En cada fila el pivote es el único elemento no nulo de su columna.

Ejemplos: Las siguientes matrices son matrices escalonadas reducidas.

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad D=\begin{bmatrix}1&3&2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

24. <u>Cálculo del Rango o Característica de una Matriz</u>:

Para calcular el rango o característica de una matriz se transforma la matriz dada en una matriz escalonada mediante el uso de las transformaciones u operaciones elementales; siendo el rango o característica de la matriz dada el número de filas no nulas que posee la matriz escalonada equivalente.

Para escalonar una matriz se toma como pivote el primer elemento no nulo de la primera fila y se hacen cero todos los demás elementos que están por debajo de él. Para esto se puede efectuar cualquiera de las tres transformaciones u operaciones elementales. Este proceso se repite con la segunda fila y así sucesivamente cuantas veces sea necesario.

El rango o característica de la matriz escalonada es igual al de la matriz original y es igual al número de filas que no se anulan.

Ejemplo: Calcular el rango o característica de la matriz $A=\begin{bmatrix}2&-3&1\\-5&7&2\\-1&1&4\end{bmatrix}$

$$A=\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\ -5 & 7 & 2\\ -1 & 1 & 4\end{bmatrix}\begin{matrix}f_2\to 2f_2+5f_1\\ f_3\to 2f_3+f_1\end{matrix}\approx\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\ 0 & -1 & 9\\ 0 & -1 & 9\end{bmatrix}f_3\to f_3-f_2\approx\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\ 0 & -1 & 9\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Luego tenemos que $h(A)=2$

Ejemplo:

Calcular la característica de la matriz $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -1 & 4 & 5\\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1\\ 3 & 8 & 2 & 6 & 6\\ 2 & 6 & -2 & 8 & 10\\ -1 & -2 & -4 & 2 & 4\end{bmatrix}$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & -1 & 4 & 5\\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1\\ 3 & 8 & 2 & 6 & 6\\ 2 & 6 & -2 & 8 & 10\\ -1 & -2 & -4 & 2 & 4\end{bmatrix}\begin{matrix}f_2\to f_2-2f_1\\ f_3\to f_3-3f_1\\ f_4\to f_4-2f_1\\ f_5\to f_5+f_1\end{matrix}\approx\begin{bmatrix}1 & 3 & -1 & 4 & 5\\ 0 & -1 & 5 & -6 & -9\\ 0 & -1 & 5 & -6 & -9\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -5 & 6 & 9\end{bmatrix}\begin{matrix}f_3\to f_3-f_2\\ f_5\to f_5+f_2\end{matrix}\approx\begin{bmatrix}1 & 3 & -1 & 4 & 5\\ 0 & -1 & 5 & -6 & -9\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Luego la característica de la matriz es igual a 2; $h(A)=2$

EJERCICIOS PROPUESTOS

I.- Determine el rango o característica de la matriz:

1) $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -3\\ -3 & 2 & -1\end{bmatrix}$

2) $B=\begin{bmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\ 2 & 5 & 0 & -3\\ 1 & 2 & 1 & -5\end{bmatrix}$

$$3)\quad C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 5 & 7 \\ -3 & -6 & 9 & -12 \\ 2 & 4 & -6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$4)\quad D=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & -6 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$5)\quad E=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

II.- Determine para qué valor de $\boldsymbol{x}$ el rango o característica de la matriz $\boldsymbol{A}$ es:

$$1)\quad A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & x \end{bmatrix}$$

a) 2

b) 3

UNIDAD 5: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (SEL)

1. Ecuación Lineal:

Muchos de los problemas que se presentan en las Ciencias Naturales, Sociales, Económicas, etc. en Ingeniería, en Física y muchos otros casos del quehacer cotidiano, tienen que ver con ecuaciones que relacionan a dos conjuntos de variables.

Una ecuación del tipo $a\,x = b$, que expresa a la variable ***b*** en término de la variable ***x*** y la constante ***a*** se denomina ***ecuación lineal***.

De igual manera, la ecuación $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b$ que expresa a la variable ***b*** en término de las variables $x_1,\ x_2, ..., x_n$ y las constantes $a_{11},\ a_{12}, ... , a_{1n}$ se denomina ***ecuación lineal***.

En la mayoría de los casos nos dan los valores de ***b*** y de las constantes $a_1,\ a_2, ... , a_n$ para que determinemos los valores de $x_1,\ x_2, ..., x_n,$ denominados ***incógnitas,*** que satisfacen la ecuación.

2. Sistema de Ecuaciones Lineales:

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de ***m*** ecuaciones de primer grado con ***n*** incógnitas que se satisfacen para los mismos valores; siendo el conjunto de valores de las incógnitas que satisfacen al sistema, el conjunto solución de dicho sistema. Un sistema de ecuaciones lineales puede representarse mediante:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \ = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \ = b_2 \\ \ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

Sistema de ***m*** ecuaciones lineales con ***n*** incógnitas

3. Clasificación de los Sistema de Ecuaciones Lineales:

Los sistemas de ecuaciones lineales, según su solución, se clasifican en:

3.1. Sistema de Ecuaciones Compatible o Consistente:

Un sistema de ecuaciones lineales se denomina ***compatible o consistente*** si tiene por lo menos una solución. Este a su vez puede clasificarse en:

1) **Determinado** si el conjunto solución es unitario, es decir, si tiene una sola solución.

2) **Indeterminado** si el conjunto solución es infinito, es decir, si tiene infinitas soluciones.

3.1. Sistema de Ecuaciones Incompatible o Inconsistente:

Un sistema de ecuaciones lineales se denomina ***incompatible o inconsistente*** si no tiene solución.

4. Forma Matricial de un Sistema de Ecuaciones:

Sean las matrices $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ y $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Multipliquemos la matriz ***A*** por la matriz ***X***:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

Observe que si en este resultado igualamos cada ecuación obtenida a un valor $b_1, b_2, ..., b_n$ respectivamente obtenemos el sistema de ecuaciones que ya habíamos definido.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Esto significa que el sistema de ecuaciones dado podemos descomponerlo en ***forma matricial*** de la siguiente manera: $AX = B$

Forma matricial del sistema de ecuaciones $\rightarrow$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots & a_{mn} \end{bmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}^{X} = \overbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}^{B}$$

Donde:

$A =$ matriz de los coeficientes

$X =$ matriz de las incógnitas

$B =$ matriz de los términos independientes

Luego $AX = B$ es la representación matricial del sistema de ecuaciones.

Otra matriz importante es la matriz ampliada del sistema formada por la matriz de coeficientes ***A*** ampliada con la matriz de los términos independientes ***B***.

$$A/B = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

5. <u>Sistema de Ecuaciones Lineales Homogéneos y no Homogéneos</u>:

Los sistemas de ecuaciones lineales se clasifican en **homogéneos,** si todos los términos independientes son iguales a cero y **no homogéneos,** si por lo menos uno de los términos independientes es diferente de cero

Es decir, $AX = \mathbf{0}$ representa un sistema **homogéneo**, mientras que $AX = B,\ B \neq \mathbf{0}$ representa un sistema **no homogéneo**.

6. Solución de un Sistema de Ecuaciones Lineales:

Resolver un sistema de ecuaciones es hallar el conjunto solución del sistema. O sea, los valores $s_1, s_2, ..., s_n$ tales que al sustituir las incógnitas por dichos valores $x_1 = s_1, x_2 = s_2, ..., x_n = s_n$ se satisfacen todas las ecuaciones.

Para resolver sistemas de ecuaciones existen varios métodos. En este curso haremos mayor énfasis en el método de Gauss y de Gauss-Jordan.

7. Método de Gauss o Eliminación Gaussiana:

Este método nos sirve para analizar y resolver un sistema de ecuaciones lineales, tomando como base el teorema de Rouché-Frobenius y las transformaciones elementales u operaciones gaussianas.

El teorema de Rouché-Frobenius establece que si en un sistema la característica o rango de la matriz de los coeficientes es igual a la característica o rango de la matriz ampliada, entonces el sistema tiene solución y si son diferentes el sistema no tiene solución, es incompatible.

8. Procedimiento para utilizar el Método de Gauss o Eliminación Gaussiana:

Para analizar y resolver un sistema de ecuaciones lineales no homogéneo, mediante el método de Gauss, se procede de la siguiente manera:

1. Se transforma el sistema de ecuaciones en una ecuación matricial equivalente.
2. Se obtiene la matriz ampliada del sistema.
3. Se transforma la matriz ampliada del sistema en una matriz escalonada equivalente.
4. Se determina el rango o característica de la matriz de los coeficientes $h(A)$ y el rango o característica de la matriz ampliada $h\left(A/B\right)$.
5. Se comparan las características anteriores y si: $h(A) = h(A/B)$ entonces el sistema es compatible. Pero si $h(A) \neq h(A/B)$ entonces el sistema es incompatible.

6. Si el sistema es compatible se compara el rango o característica de la matriz de los coeficientes $h(A)$ con el número de incógnitas, si son igual el sistema es compatible determinado. Si $h(A)$ es menor que el número de incógnitas, el sistema es indeterminado. Es decir, si: $h(A)=n$ el sistema es compatible determinado y si $h(A)<n$ el sistema es compatible indeterminado.

7. Si el sistema es determinado, en el sistema correspondiente a la matriz escalonada que es equivalente al sistema original, se despeja la variable que ha quedado sola en una ecuación y luego se comienza a sustituir y despejar hacia atrás hasta conseguir el valor de todas las demás variables.

8. Si el sistema es indeterminado se determina el número de incógnita no principales que será siempre igual a la diferencia entre el número de incógnitas y el rango o característica de la matriz de los coeficientes $h(A)$. Siendo las incógnitas no principales, aquella que no inician ecuaciones en el sistema correspondiente a la matriz escalonada correspondiente.

9. Se les asignan valores arbitrarios a las incógnitas no principales en el sistema equivalente a la matriz escalonada y se resuelve a partir de la ecuación que contiene una sola incógnita y se va sustituyendo en las demás ecuaciones hasta determinar el valor.

Ejemplos: 1) Analizar y resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned} x+2y+\ \ z&=3\\ 3x+5y+4z&=5\\ 2x+3y-2z&=12 \end{aligned}$$

Forma matricial: $AX=B \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1\\ 3 & 5 & 4\\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ y\\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3\\ 5\\ 12 \end{bmatrix}$

Matriz ampliada $A/B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 3 \\ 3 & 5 & 4 & : & 5 \\ 2 & 3 & -2 & : & 12 \end{bmatrix}$

$$A/B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 3 \\ 3 & 5 & 4 & : & 5 \\ 2 & 3 & -2 & : & 12 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ f_2 \to f_2 - 3f_1 \\ f_3 \to f_3 - 2f_1 \end{matrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 3 \\ 0 & -1 & 1 & : & -4 \\ 0 & -1 & -4 & : & 6 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \\ f_3 \to f_3 - f_2 \end{matrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 3 \\ 0 & -1 & 1 & : & -4 \\ 0 & 0 & -5 & : & 10 \end{bmatrix}$$

Luego tenemos que: $h(A)=h(A/B)=3$ el sistema es compatible.

Como $h(A)=h(A/B)=3$ y $n=3$ entonces el sistema es compatible determinado.

El sistema equivalente será:

$$\begin{aligned} x+2y+z&=3 \\ -y+z&=-4 \\ -5z&=10 \end{aligned} \qquad \text{donde } -5z=10 \Rightarrow z=-2$$

Sustituyendo ***z*** en la 2da ecuación se obtiene:

$$\begin{aligned} -y+(-2)&=-4 \\ -y&=-4+2 \\ y&=2 \end{aligned}$$

Sustituyendo ***y*** y ***z*** en la 1ra ecuación:

$$\begin{aligned} x+2(2)+(-2)&=3 \\ x+2&=3 \\ x&=3-2 \\ x&=1 \end{aligned} \qquad \text{El conjunto solución es } \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=-2 \end{cases}$$

2) Analizar y resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned} x+2y+\ \ z&=3 \\ 3x+5y+4z&=5 \\ 2x+3y+3z&=2 \end{aligned}$$

Forma matricial: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $A/B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 3 \\ 3 & 5 & 4 & : & 5 \\ 2 & 3 & 3 & : & 2 \end{bmatrix}$.

$$A/B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 3 \\ 3 & 5 & 4 & : & 5 \\ 2 & 3 & 3 & : & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ f_2 - 3f_1 \\ f_3 - 2f_1 \end{matrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 3 \\ 0 & -1 & 1 & : & -4 \\ 0 & -1 & 1 & : & -4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ f_3 - f_2 \end{matrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 3 \\ 0 & -1 & 1 & : & -4 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

Luego tenemos que: $h(A) = h(A/B) = 2$ el sistema es compatible.

Como $h(A) = 2$ y $n = 3$ entonces el sistema tiene infinitas soluciones; es decir, es compatible indeterminado y posee una incógnita no principal.

El sistema equivalente es:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 3 \\ -y + z &= -4 \end{aligned}$$

La incógnita no principal es z a la cual le asignaremos el valor $z = \alpha$.

Si sustituimos z en la segunda ecuación tenemos:

$$-y + z = -4 \Rightarrow -y + \alpha = -4$$
$$y = 4 + \alpha$$

Sustituyendo ***y*** y ***z*** en la primera ecuación

$$x + 2y + z = 3 \Rightarrow x + 2(4 + \alpha) + \alpha = 3 \Rightarrow x + 8 + 2\alpha + \alpha = 3 \Rightarrow x = -3\alpha - 5$$

La solución general es $\begin{cases} x = -3\alpha - 5 \\ y = 4 + \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$

Si damos algún valor a α obtenemos una solución particular.

Por ejemplo, sea $\alpha = 2$, entonces

$$\begin{aligned} x &= -3\alpha - 5 = -3(2) - 5 = -6 - 5 = -11 \\ y &= 4 + \alpha = 4 + 2 = 6 \\ z &= \alpha = 2 \end{aligned}$$

una solución particular es: $\begin{cases} x = -11 \\ y = 6 \\ z = 2 \end{cases}$

3) Analizar y resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned} x+2y+\ \ z&=3\\ 3x+5y+4z&=5\\ 2x+3y+3z&=3 \end{aligned}$$

Forma matricial: $\begin{bmatrix}1&2&1\\3&5&4\\2&3&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\5\\3\end{bmatrix}$ y $A/B=\begin{bmatrix}1&2&1&:&3\\3&5&4&:&5\\2&3&3&:&3\end{bmatrix}$

$$A/B=\begin{bmatrix}1&2&1&:&3\\3&5&4&:&5\\2&3&3&:&3\end{bmatrix}\begin{matrix}\\f_2-3f_1\\f_3-2f_1\end{matrix}\approx\begin{bmatrix}1&2&1&:&3\\0&-1&1&:&-4\\0&-1&1&:&-3\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\f_3-f_2\end{matrix}\approx\begin{bmatrix}1&2&1&:&3\\0&-1&1&:&-4\\0&0&0&:&1\end{bmatrix}$$

Luego tenemos que: $h(A)=2\neq h(A/B)=3$ el sistema es incompatible.

4) Analizar y resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$x+2y+3z=4$$

Forma matricial $AX=B\Rightarrow\begin{bmatrix}1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\end{bmatrix}$ y $A/B=\begin{bmatrix}1&2&3&:&4\end{bmatrix}$

$A/B=\begin{bmatrix}1&2&3&:&4\end{bmatrix}$ Como $h(A)=h(A/B)=1\Rightarrow$ el sistema es compatible.

Como $n=3$ y $h(A)=1\Rightarrow$ el sistema es compatible indeterminado.

El sistema tiene dos incógnitas no principales que son: y y z a las cuales le asignamos los siguientes valores arbitrarios: $y=\alpha$ y $z=\beta$; sustituyendo en la ecuación y despejando tenemos:

$x=4-2\alpha-3\beta$

Solución general $\begin{cases}x=4-2\alpha-3\beta\\y=\alpha\\z=\beta\end{cases}$, solución particular para $\alpha=1$ y $\beta=3$: $\begin{cases}x=-7\\y=1\\z=3\end{cases}$

5) Analizar y resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned} x+2y+\ \ z&=3 \\ 2x+4y+2z&=6 \end{aligned}$$

La forma matricial es $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ y $A/B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 3 \\ 2 & 4 & 2 & : & 6 \end{bmatrix}$

$$A/B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 3 \\ 2 & 4 & 2 & : & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ f_2-2f_1 \end{matrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 3 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{bmatrix}$$

$h(A)=h(A/B)=1 \ \wedge \ n=3$ por tanto el sistema es compatible indeterminado con dos incógnitas no principales y y z a las cuales le asignamos los siguientes valores:

$y=\alpha$ y $z=\beta$ por tanto

$$\begin{aligned} x+2\alpha+\beta&=3 \\ x&=3-2\alpha-\beta \end{aligned}$$

y la solución general es: $\begin{cases} x=3-2\alpha-\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{cases}$

Una solución particular para $\alpha=-1$ y $\beta=2$ es: $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \\ z=2 \end{cases}$

9. <u>Solución de los Sistemas Homogéneos</u>:

Si el sistema es homogéneo ($\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$) será compatible siempre; ya que siempre tendrá por lo menos la solución nula; es decir, donde $x_1=x_2=...=x_n=0$. El sistema homogéneo se clasifica según su solución en trivial y no trivial.

9.1. <u>Sistema Homogéneo Trivial</u>:

Es aquel cuya única solución es la solución nula o solución trivial.

9.1. <u>Sistema Homogéneo no Trivial</u>:

Es aquel que además de la solución nula o trivial posee infinitas soluciones más.

Según el teorema de Rouché-Frobenius decimos que si $h(A)=n$, entonces el sistema es trivial y si $h(A)<n$ es no trivial.

Ejemplo: Analizar y resolver el sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned} x-2y+3z-\ \ w&=0\\ -2x+\ \ y-2z+\ \ w&=0\\ x+\ \ y-\ \ z+2w&=0\\ x-2y+3z+\ \ w&=0 \end{aligned}$$

Cuando el sistema es homogéneo la matriz ampliada no tiene sentido, ya que se ampliaría con una columna nula y la característica de ésta nunca será diferente a la característica de la matriz de los coeficientes.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1\\ -2 & 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 2\\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ f_2\to f_2+2f_1\\ f_3\to f_3-f_1\\ f_4\to f_4-f_1 \end{matrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1\\ 0 & -3 & 4 & -1\\ 0 & 3 & -4 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} f_3\to f_3+f_2$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1\\ 0 & -3 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} f_4\to f_4-f_3 \qquad \approx \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1\\ 0 & -3 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La característica $h(A)=3$ y el número de incógnitas $n=4$ por tanto el sistema tiene solución no trivial. Con una incógnita no principal que es z a la cual le asignamos un valor arbitrario $z=\alpha$.

$$\begin{aligned} x-2y+3z-w&=0\\ -3y+4z-w&=0\\ 2w&=0 \end{aligned}$$

Despejando $\boldsymbol{w}$ en $2w=0 \Rightarrow w=0$.

Sustituyendo $z=\alpha$ y $w=0$ y despejando y en $-3y+4z-w=0$ obtenemos

$$-3y+4\alpha-0=0 \Rightarrow y=\frac{4}{3}\alpha$$

Despejando x y sustituyendo $z=\alpha,\ y=\frac{4}{3}\alpha$ y $w=0$ en $x-2y+3z-w=0$

obtenemos $x=2y-3z+w=2\left(\frac{4}{3}\alpha\right)-3\alpha+0=-\frac{1}{3}\alpha$

Solución general $\begin{cases} x=-\frac{1}{3}\alpha \\ y=\frac{4}{3}\alpha \\ z=\alpha \\ w=0 \end{cases}$ Una solución particular para $\alpha=3$ es $\begin{cases} x=-1 \\ y=4 \\ z=3 \\ w=0 \end{cases}$

10. Método de Gauss-Jordan:

En este método se reduce la matriz ampliada a la forma escalonada reducida, obteniéndose los valores de las incógnitas directamente.

Ejemplo: Analizar y resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} x+2y+\ \ z&=3 \\ 3x+5y+4z&=5 \\ 2x+3y-2z&=12 \end{aligned}$$

Forma matricial: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 12 \end{bmatrix}$ y $A/B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 3 \\ 3 & 5 & 4 & : & 5 \\ 2 & 3 & -2 & : & 12 \end{bmatrix}$

$$A/B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 3 \\ 3 & 5 & 4 & : & 5 \\ 2 & 3 & -2 & : & 12 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ f_2\to f_2-3f_1 \\ f_3\to f_3-2f_1 \end{matrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & : & 3 \\ 0 & -1 & 1 & : & -4 \\ 0 & -1 & -4 & : & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} f_1\to f_1+2f_2 \\ f_2\to -f_2 \\ f_3\to f_2-f_3 \end{matrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & : & -5 \\ 0 & 1 & -1 & : & 4 \\ 0 & 0 & 5 & : & -10 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ f_3\to \frac{1}{5}f_3 \end{matrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & : & -5 \\ 0 & 1 & -1 & : & 4 \\ 0 & 0 & 1 & : & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} f_1\to f_1-3f_3 \\ f_2\to f_2+f_3 \\ \\ \end{matrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & : & 1 \\ 0 & 1 & 0 & : & 2 \\ 0 & 0 & 1 & : & -2 \end{bmatrix}$$

Entonces el sistema equivalente es:
$$\begin{aligned} x \qquad &= 1 \\ y \quad &= 2 \\ z &= -2 \end{aligned}$$

El sistema tiene solución única y es $\boxed{\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -2 \end{cases}}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

I- Sea:
$$\begin{aligned} x + 3y - z &= 1 \\ -x + y + az &= 2 \\ 2x - y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

Hallar el valor de "a" para que:

a) El sistema sea compatible

b) El sistema sea incompatible

II.- Utilice el método de Gauss para analizar cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones. Si es compatible hallar la solución.

1) $\begin{aligned} 2x + 4y + 6z &= 18 \\ 4x + 5y + 6z &= 24 \\ 2x + 7y + 12z &= 30 \end{aligned}$

2) $\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 11 \\ 4x + y - z &= 4 \\ 2x - y + 3z &= 10 \end{aligned}$

3) $\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= -2 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 6 \end{aligned}$

4) $\begin{aligned} x - 3y + 4z &= 7 \\ x - 4y - 9z &= -11 \\ 3x + 2y - z &= 5 \\ -2x - 5y + 5z &= 6 \end{aligned}$

5) $\begin{aligned} 5x + 6y - z &= -10 \\ 4x - 7y + 2z &= 24 \\ 9x + y - 3z &= 4 \\ 8x + 3y - z &= 5 \end{aligned}$

6) $\begin{aligned} x + 2y + 3z + u + 3w &= -5 \\ 2x - 7y + 6z + 4u - 5w &= 3 \\ 2x + 4y - z - 3u + 5w &= 3 \end{aligned}$

III.- **Resuelva cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por Gauss-Jordan. Si tiene infinitas soluciones, dé la solución general y 2 soluciones particulares:**

1) $\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + y - 2z &= 4 \\ 2x + y + z &= 2 \end{aligned}$

2) $\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ 2x - 3y + 4z &= 7 \\ 3x - y + 3z &= 4 \end{aligned}$

3) $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 5 \end{aligned}$

4) $\begin{aligned} x - 2y - z &= 1 \\ 2x + 3y + 4z &= 3 \\ -3x - y + 2z &= 1 \end{aligned}$

5) $\begin{aligned} x_1 + 2x_3 + x_4 + x_5 &= 2 \\ x_2 + 2x_3 - x_5 &= -3 \\ -x_1 + x_2 + x_4 + 2x_5 &= -1 \end{aligned}$

6) $\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 10 \\ 2x + y + 5z &= -5 \\ 3x - 5y + z &= -1 \end{aligned}$

7) $\begin{aligned} x + y + 2z - 5w &= 3 \\ 2x + 5y - z - 9w &= -3 \\ 2x + y - z + 3w &= -11 \\ x - 3y + 2z + 7w &= -5 \end{aligned}$

8) $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 4x_5 &= 2 \\ -x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 &= 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 13x_5 &= 7 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 &= 0 \end{aligned}$

9) $\begin{aligned} x - y + 2z + 6w &= 2 \\ 5x + 2y - 3z + 4w &= -2 \\ 3x + 5y + z - 2w &= 7 \\ 2x - 3y + 4z - 8w &= -8 \end{aligned}$

IV.- Determine el conjunto solución de cada sistema.

1) $\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ 4x - 2y + 7z &= 0 \end{aligned}$

2) $\begin{aligned} 3x - 4y + z &= 0 \\ 2x + y - 5z &= 0 \\ x + 2y + 3z &= 0 \end{aligned}$

3) $\begin{aligned} x + 2y - 4z - 3w &= 0 \\ 2x + 3y + z + w &= 0 \\ 3x + 5y - 3z - 2w &= 0 \\ -x - y - 5z - 4w &= 0 \end{aligned}$

4) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$

V.- Determine el valor de $"k"$ **para que el sistema sea compatible determinado.**

$$\begin{aligned} x - y + w &= 6 \\ -3x + 2y + kw &= -10 \\ 2x + y - 3w &= -9 \end{aligned}$$

UNIDAD 6: MATRICES INVERTIBLES

1. <u>Inversa de una Matriz</u> A^{-1}:

Una matriz cuadrada A es invertible si existe una matriz B tal que $AB = BA = I_n$. Sabiendo que $\boldsymbol{I_n}$ es la matriz identidad o unidad. Bajo estas condiciones la matriz B se llama la inversa de A y se escribe $B = A^{-1}$ (B es la inversa de A). Recíprocamente A es la inversa de B y se puede escribir $A = B^{-1}$.

No todas las matrices tienen inversa, pero si la tienen, es única.

Si una matriz no es invertible, es decir, que no tiene inversa se llama "**matriz singular"**, en caso contrario se denomina "**matriz no singular**".

Ejemplo: Pruebe que $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ son inversas.

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-3 & -6+6 \\ 2-2 & -3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \quad \text{por tanto son inversas.}$$

Una manera de hallar la inversa de una matriz consiste en suponer una matriz desconocida de orden igual a la que se conoce, donde cada elemento es una incógnita a determinar, que se obtiene realizando el producto matricial igualando a la matriz identidad de orden igual a la matriz buscada, se resuelven los sistemas que resulten se determina el valor de las incógnitas y así obtener la matriz inversa que buscamos.

Ejemplo: Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ determinar B tal que $B = A^{-1}$

Suponemos $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ y hallamos los valores de x, y, z y w tal que A y B sean inversas. Es decir, $AB = I$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x-2z & y-2w \\ -x+3z & -y+3w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A partir de esto se obtienen dos sistemas de ecuaciones y al resolverlos determinamos los valores de las variables x, y, z y w y así la matriz inversa de A.

$$\begin{array}{r} x-2z=1 \\ \underline{-x+3z=0} \\ z=1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} x-2(1)=1 \\ x=1+2 \\ x=3 \end{array} \quad \begin{array}{r} y-2w=0 \\ \underline{-y+3w=1} \\ w=1 \end{array} \Rightarrow \quad \begin{array}{r} y-2(1)=0 \\ y=2 \end{array} \quad \text{Solución} \begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=1 \\ w=1 \end{cases}$$

Entonces $B = A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

1.1. <u>Propiedades de la Inversa de Matrices</u>:

Si $A \wedge B$ son matrices invertibles entonces:

1. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$
2. $\left(AB\right)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

2. <u>Cálculo de la Inversa de una Matriz de 2do. Orden</u>:

Para calcular la inversa de una matriz de 2do orden se procede de la siguiente manera:

- Se determina la diferencia entre el producto de los elementos de la diagonal principal y el producto de los elementos de la diagonal secundaria. Si esta diferencia es diferente de cero, entonces la matriz tiene inversa, de lo contrario no tiene inversa.
- Se intercambian los elementos de la diagonal principal y se le cambian los signos de los elementos de la diagonal secundaria en la matriz dada.

- Se divide cada elementos de la matriz anteriormente obtenida entre la diferencia obtenida en el paso 1; siendo este resultado la inversa de la matriz.

Este método está basado en una fórmula que estudiaremos más adelante y que nos permite hallar la inversa de cualquier matriz, en el caso de orden 2 es muy simple.

Ejemplos: 1) Hallar la inversa de $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$.

$(3)(1)-(2)(1)=1\neq 0$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

2) Hallar la inversa de $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -1 & 4\end{bmatrix}$

$(3)(4)-(-1)(2)=14\neq 0$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{4}{14} & \frac{-2}{14}\\ \frac{1}{14} & \frac{3}{14}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{7} & -\frac{1}{7}\\ \frac{1}{14} & \frac{3}{14}\end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{2}{7} & -\frac{1}{7}\\ \frac{1}{14} & \frac{3}{14}\end{bmatrix}$$

3. Calculo de la Inversa de una Matriz (Método de Gauss-Jordan)

Los sistemas lineales que se deben resolver para hallar la inversa de una matriz tienen en común la misma matriz de coeficiente por lo que se pueden resolver de manera simutánea. Esto nos permite generalizar con el denominado método de Gauss-Jordan.

Si una matriz cuadrada tiene inversa, esta se calcula mediante el siguiente método.

- Se amplía la matriz dada con la matriz unidad correspondiente.
- Se determina la característica de la matriz ampliada y si esta es igual al orden de la matriz, entonces tiene inversa. En caso contrario no tiene inversa.
- Si la matriz tiene inversa, se transforma la matriz que ocupa el espacio de la matriz dada en una matriz unidad mediante el uso de las transformaciones elementales, siendo la matriz que ocupa el espacio de la matriz unidad original la matriz inversa deseada.

Ejemplos:

1) Hallar la inversa de la matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

$$A/I=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & : & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ f_2 \to f_2 - 2f_1 \\ f_3 \to f_3 + 3f_1 \end{matrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & : & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & : & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \\ \\ f_3 \to 3f_3 + f_2 \end{matrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & : & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 7 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Como $h(A)=3=n$ $\quad A^{-1}$ existe

$$\begin{matrix} f_1 \to f_1 - f_3 \\ f_2 \to f_2 + 5f_3 \\ \\ \end{matrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & : & -6 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & : & 33 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & : & 7 & 1 & 3 \end{bmatrix} f_2 \to \tfrac{1}{3} f_2 \approx \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & : & -6 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & : & 11 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & : & 7 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} f_1 \to f_1 + f_2 \\ \\ \\ \end{matrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & : & 11 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & : & 7 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

por lo tanto la inversa es $A^{-1}=\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 11 & 2 & 5 \\ 7 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

2) Hallar la inversa de $B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

$$B/I=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & : & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ f_2 \to f_2 - 2f_1 \\ f_3 \to f_3 - 3f_1 \end{matrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & : & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & : & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} f_1 \to f_1 + 2f_3 \\ f_2 \to -f_3 \\ f_3 \to -f_2 \end{matrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & : & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & : & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & : & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Como $h(A)=3=n$ $\quad B^{-1}$ existe.

$$\begin{matrix} f_1 \to f_1 + 3f_3 \\ f_2 \to f_2 - 3f_3 \\ \end{matrix} \approx \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Por tanto la inversa es $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

3) Hallar la inversa de $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

$$C/I = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ f_2 \to f_2 - 5f_1 \\ f_3 \to f_3 - 2f_1 \end{matrix} \approx \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{matrix} \\ \\ f_3 \to f_3 - f_2 \end{matrix} \approx \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Como la característica de C es $h(C) = 2 < n = 3$ la matriz ***C*** no tiene inversa.

En conclusión, podemos afirmar que si el rango o característica de una matriz cuadrada es igual que su orden, entonces la matriz es invertible o **no singular**. Si es menor, entonces es no invertible o **singular**.

Si todas las filas de una matriz cuadrada son linealmente independientes, entonces la matriz es **invertible o no singular**.

EJERCICIOS PROPUESTOS

I.-Determine la inversa de estas matrices si esta existe:

1) $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}$ 2) $B=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ 3) $C=\begin{bmatrix}-2 & -3\\ 4 & 6\end{bmatrix}$

4) $D=\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ -3 & 8 & -3\\ 2 & -5 & 3\end{bmatrix}$ 5) $E=\begin{bmatrix}-1 & 3 & -5\\ 2 & -4 & 6\\ -3 & 2 & 1\end{bmatrix}$ 6) $F=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 3\\ 5 & 4 & 3\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$

7) $G=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 3\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix}$ 8) $H=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 3\\ 1 & 0 & 8\end{bmatrix}$ 9) $I=\begin{bmatrix}1 & -2 & -4\\ -2 & 0 & 3\\ -3 & -2 & 2\end{bmatrix}$

10) $J=\begin{bmatrix}1 & 4 & 5 & -1\\ 2 & 3 & 0 & 3\\ 1 & -1 & -5 & 4\\ 4 & 1 & -10 & 11\end{bmatrix}$ 11) $K=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2 & 1\\ -1 & -2 & 3 & -3\\ 0 & 4 & -1 & 2\\ -1 & 5 & 1 & 3\end{bmatrix}$ 12) $L=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 2 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$

II-Determine para qué valor de *x* la matriz dada no tiene inversa.

1) $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & x\end{bmatrix}$

2) $B=\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\\ 1 & 1 & -3\\ 2 & 5 & x\end{bmatrix}$

3) $C=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ -2 & 4 & 6\\ 3 & 5 & x\end{bmatrix}$

UNIDAD 7: DETERMINANTES

1. Permutaciones:

Son las diferentes formaciones que pueden obtenerse con los elementos de un conjunto dado, en lo que entran todos los elementos del conjunto sin que se repita ninguno de ellos. Es decir, sea $S=\{1,2,3,...,n\}$ el conjunto de los enteros desde 1 hasta n, ordenados en forma ascendente; al arreglo $j_1, j_2, j_3,..., j_n$ de los elementos de S se denomina una permutación de S.

Por ejemplo si $S=\{1,2,3,4\}$, entonces 4312 es una permutación de S. Esta permutación se corresponde con la función $f:S\to S$ definida por:

$$\begin{aligned} f(1)&=4\\ f(2)&=3\\ f(3)&=2\\ f(4)&=1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad f(i)=j_i \text{ para } 1\le i\le n.$$

Si observamos la definición tenemos que para colocar en la primera posición podemos tomar cualquier de los n elementos del conjunto S; para la segunda posición podemos tomar cualquiera de los $n-1$ elementos restantes de S y así sucesivamente, hasta llegar a la $n-esima$ posición, la cual sólo puede ser ocupada por el elemento que resta. Por lo tanto la totalidad de posibilidades viene dada por:

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot,...,(2)\cdot(1)=n!$$

Al conjunto que contiene todas las permutaciones de S, lo representaremos por S_n cuyo número de elementos es igual al $n!$.

Ejemplos:

1) Si $S=\{1\}$ entonces $\#(S_n)=1!=1$; luego tenemos que $S_n=\{1\}$.
2) Si $S=\{1,2\}$ entonces $\#(S_n)=2!=2$; luego tenemos que $S_n=\{12,21\}$.

3) Si $S=\{1,2,3\}$ entonces $\#(S_n)=3!=6$; luego tenemos que

$S_n=\{123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321\}$

1.2. <u>Inversión en una Permutación</u>:

Una permutación $j_1, j_2, j_3,..., j_n$ de $S=\{1,2,3,...,n\}$ tiene una inversión si un entero mayor j_r precede a uno menor j_s. Esta puede ser positiva o negativa dependiendo de que esta tenga un número par o impar de inversiones con relación a la permutación natural.

Por ejemplo en $S=\{1,2,3,4\}$ la permutación 4312 tiene cinco inversiones, ya que el 4 está antes de 3, antes de 1 y antes de 2; el 3 está antes de 1 y antes de 2. Por lo tanto es una permutación impar o negativa.

Si $n\geq 2$ podemos decir que S_n tiene $\dfrac{n!}{2}$ permutaciones pares y un número igual de permutaciones impares.

Ejemplo:

Si tenemos como conjunto el formado por las letras de la palabra “AMOR” y además consideramos que como se presentan en la palabra dada es el orden natural; podemos determinar el número de inversiones que poseen las palabras “MORA” y “ROMA”

M O R A tiene tres inversiones por tanto es una permutación negativa.

R O M A tiene seis inversiones por tanto es una permutación positiva.

2. <u>Determinante</u>:

Sea A_n una matriz cuadrada de orden n, definimos un determinante como una función operacional que asocia a cada matriz cuadrada un escalar que está definido por una sumatoria de $(n!)$ términos donde cada término es un producto de (n) elementos representativos de cada una de las filas y las columnas de la matriz sin repetir ninguna y que tendrá un signo positivo o negativo según sea par o impar el número de inversiones contenidas en cada término. El determinante se denota por $\det(A)$ o $|A|$ o por sus elementos encerrados entre dos barras verticales.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Es decir, el determinante de una matriz de orden n, se define como el número calculado de la siguiente suma: $|A| = \sum(\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$ la suma se toma sobre todas las permutaciones de los segundos subíndices. A cada término se le asigna el signo (+) si $j_1, j_2, j_3, \dots, j_n$ es una permutación par de $(1,2,\dots\dots n)$, y el signo (-) si ella es una permutación impar

2.1. **<u>Determinantes de Orden Uno y Dos</u>:**

Si $A = (a_{ij})$ es una matriz 1×1, entonces S_1 sólo tiene una permutación, la permutación identidad, que es par y luego tenemos que $\det(A) = |A| = a_{11}$.

Ejemplos: $\det(24) = 24$, $\det(-3) = -3$ y $\det(3x+5) = 3x+5$.

Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ es una matriz 2×2, entonces $\#(S_2) = 2$ tiene dos permutaciones, luego el determinante tiene dos términos $a_{1\_} a_{2\_}$ y $a_{1\_} a_{2\_}$ si llenamos los espacios en blanco con todos los elementos posibles de S_2; estos son 1 2 y 2 1. Como 1 2 es permutación par, el término $a_{11}a_{22}$ tiene signo positivo $(+)$ asociado. Como 2 1 es una permutación impar, el término $a_{12}a_{21}$ tiene signo negativo $(-)$ asociado. Por lo tanto el determinante de A viene dado por:

$$\det(A) = |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad \text{o} \quad |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Ejemplos:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 2(5) - 3(-4) = 10 + 12 = 22$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (5)(2) = 3 - 10 = -7$

c) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = (2)(-4) - (-3)(1) = -8 + 3 = -5$

2.3. <u>Determinantes de Orden Tres</u>:

Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ es una matriz 3×3, entonces $\#(S_3) = 6$ tiene seis permutaciones, luego el determinante tendrá seis términos $a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_}$, $a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_}$, $a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_}$, $a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_}$, $a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_}$ y $a_{1\_}a_{2\_}a_{3\_}$, si llenamos los espacios en blanco con todos los elementos posibles de S_3; estos son 123, ,132, 213, 231, 312, y 321, donde 123, ,231, y 312 son permutaciones pares, los términos $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$ y $a_{13}a_{21}a_{32}$ tienen signos positivos $(+)$ asociados; como 132, 213 y 321 son permutaciones impares, los términos $a_{11}a_{23}a_{32}$, $a_{12}a_{21}a_{33}$ y $a_{13}a_{22}a_{31}$ tienen signos negativos $(-)$ asociados.

Por lo tanto el determinante de A viene dado por:

$$\det(A) = |A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

El determinante de orden tres también podemos obtenerlo aplicando la regla de Sarrus. Es decir, repetimos las dos primeras filas o las dos primeras columnas y obtenemos los productos de las diagonales. De izquierda a derecha (con líneas continuas) se toman con signos positivos y los de derecha a izquierda (con líneas discontinuas) con signos negativos:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{array}$$

Ejemplos:

1) Sea $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ evaluar el determinante de A.

Ampliando con las dos primeras columnas tenemos $\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}$

$$\det(A)=(1)(1)(2)+(2)(3)(3)+(3)(2)(1)-(3)(1)(3)-(1)(3)(1)-(2)(2)(2)$$

$$=2+18+6-9-3-8=6$$

2) Sea $B=\begin{bmatrix} 5 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 7 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ evaluar el determinante de B.

Ampliando con las dos primeras columnas tenemos $\begin{array}{ccccc} 5 & 0 & -3 & 5 & 0 \\ -2 & 3 & 7 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 6 & -1 & 4 \end{array}$

$$\det(B)=(5)(3)(6)+(0)(7)(-1)+(-3)(-2)(4)-(-3)(3)(-1)-(5)(7)(4)-(0)(-2)(6)$$

$$=90+0+24-9-140+0=-35$$

2.4. Propiedades de los Determinantes:

1. El determinante de una matriz y de su transpuesta son iguales; es decir, $|A| = |A^T|$.

Ejemplo: Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ probar que $|A| = |A^T|$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (2)(1)(2) + (3)(2)(1) + (1)(5)(3) - (1)(1)(1) - (2)(2)(3) - (3)(5)(2)$$

$$= 4 + 6 + 15 - 1 - 12 - 30 = -18$$

Tenemos que $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ entonces:

$$\det(A^T) = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (2)(1)(2) + (5)(3)(1) + (1)(3)(2) - (1)(1)(1) - (2)(3)(2) - (5)(3)(2)$$

$$= 4 + 15 + 6 - 1 - 12 - 30 = -18$$

Por lo tanto $|A| = |A^T|$

2. Si la matriz B se obtiene de la matriz A al intercambiar dos filas o columnas de A, entonces $|A| = -|B|$.

Ejemplo: Sean $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ donde B se ha obtenido intercambiando las filas 1 y 2 de A.

Evaluemos det (A) y det (B)

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -18$$, como ya habíamos calculado.

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (5)(3)(2) + (1)(1)(1) + (2)(3)(2) - (2)(3)(1) - (5)(1)(3) - (1)(2)(2)$$

$$= 30 + 1 + 12 - 6 - 15 - 4 = 18$$

Por lo tanto $\det(A) = -\det(B)$.

3. Si dos filas o columnas son iguales, entonces el valor del determinante es igual a cero.

Ejemplos: 1) Sea $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$ donde las filas 1 y 3 son iguales.

Evaluemos det (A)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = a_1b_2a_3 + a_2b_3a_1 + a_3b_1a_2 - a_3b_2a_1 - a_1b_3a_2 - a_2b_1a_3 = 0$$

2) Sea $B = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ donde la fila 1 y la 3 son iguales.

Evaluemos det (B)

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (4)(5)(1) + (-3)(-1)(4) + (1)(2)(-3) - (1)(5)(4) - (4)(-1)(-3) - (-3)(2)(1)$$

$$= 20 + 12 - 6 - 20 - 12 + 6 = 0$$

Por lo tanto $\det(B) = |B| = 0$

4. Si una fila o columna de una matriz A es nula, entonces $|A| = 0$.

Ejemplos: 1) Sea $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ donde todos los elementos de la fila 3 son ceros.

Evaluemos det (A)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_1b_2(0) + a_2b_3(0) + a_3b_1(0) - a_3b_2(0) - a_1b_3(0) - a_2b_1(0) = 0$$

2) Sea $B = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ evaluemos det (B)

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (4)(5)(0) + (-3)(-1)(0) + (1)(2)(0) - (1)(5)(0) - (4)(-1)(0) - (-3)(2)(0)$$

$$= 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 0$$

5. Si B se obtiene de A al multiplicar una fila o columna de A por un escalar h, entonces $\det(B) = h\det(A)$.

De aquí se deduce que si todos los elementos de una fila o columna tienen un factor común este puede eliminarse y colocarse como factor del determinante.

Ejemplo: Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} ha & hb \\ c & d \end{bmatrix}$

Observe que B se ha obtenido al multiplicar la fila 1 de A por $h \neq 0$.

Evaluemos det (A) y det (B)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \qquad \det(B) = \begin{vmatrix} ha & hb \\ c & d \end{vmatrix} = had - hbc = h(ad - bc)$$

Lo que significa que $\det(B) = h\det(A)$

Ejemplo: Sean $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ donde *B* se ha obtenido multiplicando por *h* = 2 la fila 1 de *A*.

Evaluemos det (*A*) y det (*B*)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (2)(4)(1) + (3)(2)(3) + (0)(1)(5) - (0)(4)(3) - (2)(2)(5) - (3)(1)(1)$$

$$= 8 + 18 + 0 - 0 - 20 - 3 = 3$$

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (4)(4)(1) + (6)(2)(3) + (0)(1)(5) - (0)(4)(3) - (4)(2)(5) - (6)(1)(1)$$

$$= 16 + 36 + 0 - 0 - 40 - 6 = 6$$

Por lo tanto $\det(B) = 2\det(A)$.

6. Si en un determinante los elementos de una fila o columna son múltiplos de los elementos correspondientes de otra fila o columna, su valor es cero.

Ejemplo: Sean $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ ha_1 & ha_2 & ha_3 \end{bmatrix}$ donde la fila 3 es múltiplo de la fila 1.

Evaluemos det (*A*)

$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ ha_1 & ha_2 & ha_3 \end{vmatrix} = h \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = h(0) = 0$. Este resultado es se ha obtenido aplicando las propiedades 3 y 5.

7. Si cada elemento de una fila o columna de un determinante es igual a la suma de varios términos, el determinante puede escribirse como la suma de tantos determinantes como términos tengan los elementos de la fila o columna que se trate.

Sea $A=\begin{bmatrix} a_1+m_1+n_1 & a_2+m_2+n_2 & a_3+m_3+n_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ donde los elementos de la fila 1 corresponden a la suma de tres términos, entonces det (A) puede escribirse así:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_1+m_1+n_1 & a_2+m_2+n_2 & a_3+m_3+n_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Ejemplo: Sean $A=\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Al evaluar $\det(A)=\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=18-14=4$

Observe lo que ocurre si se descomponen los elementos de la fila 1

$$|A|=\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1+2+3 & 2+5+0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=(3-4)+(6-10)+(9-0)=-1-4+9=4$$

8. Si B se obtiene de A sumando a cada elemento de la $r-ésima$ fila o columna de A una constante h por el elemento correspondiente de la $s-ésima$ fila o columna de A $(r \neq s)$, entonces $|B|=|A|$.

Ejemplo: Sean $A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix} a_1+kb_1 & a_2+kb_2 & a_3+kb_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$

La matriz ***B*** se ha obtenido de ***A*** sumando a la fila 1 la fila 2 multiplicada por $k \neq 0$.

Evaluemos det (B)

$$\det(B)=\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & a_2+kb_2 & a_3+kb_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} kb_1 & kb_2 & kb_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\det(B)=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\det(A)+k(0)=\det(A)+0=\det(A)\,.$$

Por lo tanto $|B|=|A|$

Este resultado se ha obtenido aplicando las propiedades 5 y 6.

9. Si una matriz A es triangular superior o inferior, entonces el determinante de A es igual al producto de los elementos de la diagonal principal. Es decir, $|A|=a_{11}a_{22}a_{33}...a_{nn}$.

Ejemplo: Sea $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, una matriz triangular inferior. Evalúe $|A|$

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}=(2)(4)(1)+(0)(0)(3)+(0)(1)(5)-(0)(4)(3)-(2)(0)(5)-(0)(1)(1)\,.$$

$$=\left[(2)(4)(1)\right]+0+0+0+0+0=8$$

10. El determinante del producto de dos matrices es el producto de sus determinantes; es decir, $|AB|=|A|\,|B|$.

2.5. <u>Cálculo de Determinantes de Cualquier Orden Aplicando las Propiedades</u>:

Como ya vimos en la propiedad 9, el determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de su diagonal principal. Entonces, aplicando las propiedades, podemos llevar cualquier determinante a la forma escalonada y así obtener una matriz triangular.

Ejemplo: Evaluar el determinante $|B| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}$ aplicando este método.

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} f_2 \to f_2 + 3f_1 \\ f_3 \to f_3 - f_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} f_2 \to f_3 \\ f_3 \to f_2 \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 9 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} f_3 \to f_3 + 2f_2 \\ f_4 \to f_4 - 2f_2 \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{vmatrix} f_3 \to f_3 - f_4 = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{vmatrix}$$

$$f_4 \to f_4 - 6f_3 = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -72 \end{vmatrix} = -\big((1)(1)(1)(-72)\big) = -(-72) = 72$$

Observe que en el tercer paso se han intercambiado las filas 2 y 3 por eso se ha colocado el signo negativo (**−**)

3. <u>Menor Complementario</u>:

Sea A una matriz de orden $n \times n$. Se define al menor complementario M_{ij} como el determinante de la submatriz de ***A*** de orden $(n-1)\times(n-1)$ que resulta de eliminar la fila i y la columna j en la matriz.

Ejemplo: Sea: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \end{bmatrix}$ hallar los menores M_{13}, M_{21} y M_{22}.

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 6 = -6 \quad M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 4 - 12 = -8$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = -8 - 24 = -32$$

4. Adjunto o Cofactor:

Sea A una matriz de orden $n \times n$. El adjunto o cofactor A_{ij} del elemento a_{ij} de A se define como $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Es decir, es el menor complementario que resulta de eliminar la fila i y la columna j multiplicado por un signo positivo o negativo según sea par o impar la suma de la fila y la columna eliminada respectivamente.

Ejemplo: Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \end{bmatrix}$, hallar todos sus adjuntos o cofactores.

Desarrollo:

$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 15 = -19$ $\qquad A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = -(0 - 30) = 30$

$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 6 = -6$ $\qquad A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -(4 - 12) = 8$

$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = -8 - 24 = -32$ $\qquad A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -(6 + 6) = -12$

$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -5 - 4 = -9$ $\qquad A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -(10 - 0) = -10$

$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2$

5. Matriz de los Adjuntos o Cofactores:

Es la matriz que resulta al sustituir cada elemento de una matriz dada por sus cofactores correspondientes.

Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, entonces $A_C = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$

Para el ejemplo anterior la matriz de cofactores es $A_C = \begin{bmatrix} -19 & 30 & -6 \\ 8 & -32 & -12 \\ -9 & -10 & 2 \end{bmatrix}$

6. Matriz Adjunta:

Es la matriz transpuesta de la matriz de los cofactores.

Para la matriz: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$

la matriz adjunta de A es: $adj(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \dots & A_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$

Ejemplo: Hallar la matriz adjunta de: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \end{bmatrix}$

Como la matriz adjunta de ***A*** es la transpuesta de la matriz de cofactores que ya habíamos calculado en el ejemplo anterior, entonces:

$$adj(A) = (A_C)^T = \begin{bmatrix} -19 & 30 & -6 \\ 8 & -32 & -12 \\ -9 & -10 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -19 & 8 & -9 \\ 30 & -32 & -10 \\ -6 & -12 & 2 \end{bmatrix}$$

7. Desarrollo de un Determinante por los Elementos de una Fila o Columna (Expansión o método de Laplace):

Teorema 7.1: Si A es una matriz cuadrada de orden "n", entonces, $\det(A) = |A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$ para $1 \le i \le n$, denominado desarrollo del determinante con respecto a la $i-ésima$ fila. Y para $1 \le j \le n$, $\det(A_n) = |A_n| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$ denominado desarrollo del determinante con respecto a la $j-ésima$ columna.

Esto significa que el valor de cualquier determinante de orden "*n*" es igual a la suma de "*n*" productos cada uno de los cuales se forma multiplicando cada elemento de una cualquiera de las filas o columnas por sus cofactores correspondientes.

Demostración:

Para la demostración usaremos una matriz de orden 3×3 para facilitar el entendimiento de la misma. Si $A_3 = (a_{ij})$ por definición tenemos que:

$$\det(A_3) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \quad (1)$$

Reagrupando los términos y sacando factor común podemos escribirlo de la forma:

$$\det(A_3) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \quad (2)$$

Los cofactores de *A* correspondientes a la primera fila son:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) = a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$$

Sustituyendo estas tres expresiones en (2) tenemos:

$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$. Esta expresión es el desarrollo del determinante de A_3 con respecto a la primera fila.

Si la expresión (1) la reagrupáramos como:

$\det(A) = a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) + a_{23}(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}) + a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})$ podemos verificar fácilmente que es equivalente a: $\det(A) = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$ que es el desarrollo del determinante de A_3 con respecto a la tercera columna.

Ejemplos:

1) Hallar el determinante de la matriz

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$ usando los elementos de una línea fila o columna.

1ro. Usando la primera fila tenemos que:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \end{vmatrix}=(2)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}+(-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}+(4)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=(2)(1)(-4-15)+(-1)(-1)(0-30)+(4)(1)(0-6)$$

$$=(2)(-19)+(1)(-30)+(4)(-6)=-38-30-24=-92$$

2do. Usando la tercera columna tenemos que:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \end{vmatrix}=(4)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}+(5)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}+(-4)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(4)(1)(0-6)+(5)(-1)(6+6)+(-4)(1)(2-0)$$

$$=(4)(-6)+(-5)(12)+(-4)(2)=-24-60-8=-92$$

2) Sea $B=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ determinante $|B|$ con respecto a la primera columna:

$$|B|=(1)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}+(-3)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}+(1)(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}+(0)(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=(-16+0+8+8+0-48)+(3)(8+18-4-4+24-6)+(0+16-12+0-16+24)+(0)(0+6+8+0-8-36)$$

$$=-48+(3)(36)+(12)+(0)=-48+108+12=72$$

Una herramienta útil y que simplifica el trabajo es aplicar las propiedades de los determinantes para transformar la matriz en otra donde todos los elementos de una fila o columna, a excepción de uno, sean ceros para desarrollarlo por esa fila o columna. Es decir, combinando los dos métodos estudiados (de Gauss y Laplace). A este método combinado suele llamársele **método Pivotal**.

Ejemplo

Evaluar el determinante del ejemplo anterior aplicando el **método pivotal**.

Vamos a hacer algunas transformaciones a la matriz ***B*** para hacer ceros todos los elementos de la primera columna, menos el 1 de la primera fila.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} f_2 \to f_2 + 3f_1 \\ f_3 \to f_3 - f_1 \end{matrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Ahora podemos desarrollar el determinante por la primera columna, pero solo vamos a tener un elemento ya que los elementos cero no hay que tomarlos en cuenta porque nos darán ceros. Entonces,

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = (1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 9 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 9 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

El determinante que era de orden 4 ahora se ha reducido a orden 3 y lo podemos calcular aplicando la regla de Sarrus que ya vimos.

$$\begin{vmatrix} -2 & 9 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} = (-2)(-1)(-2) + (9)(2)(2) + (1)(1)(4) - (1)(-1)(2) - (-2)(2)(4) - (9)(1)(-2)$$

$$= -4 + 36 + 4 + 2 + 16 + 18 = 72$$

Teorema 7.2:

Sea $A=\left(a_{ij}\right)$ una matriz de orden $n\times n$, entonces $A\left(Adj\left(A\right)\right)=\left(Adj\left(A\right)\right)A=\det\left(A\right)I_n$

Demostración:

Tenemos que: $A\left(Adj\left(A\right)\right)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix}$

Cada elemento d_{ij} en la matriz producto $A\left(Adj\left(A\right)\right)$ viene definido por: $d_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{kj}$.

Luego tenemos que:

$$\begin{aligned} a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\dots+a_{in}A_{jn} &= \det\left(A\right) \quad \text{si} \quad i=j \\ &= 0 \qquad\qquad \text{si} \quad i\neq j \end{aligned}$$

Esto significa que:

$$A\left(Adj\left(A\right)\right)=\begin{bmatrix} \det\left(A\right) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det\left(A\right) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det\left(A\right) \end{bmatrix}=\det\left(A\right)I_n$$

Por tanto $A\left(Adj\left(A\right)\right)=\det\left(A\right)I_n$

Ejemplo: Dada la matriz $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \end{bmatrix}$, probar el teorema anterior.

Ya habíamos calculado la matriz adjunta de $\boldsymbol{A}$: $Adj(A)=\begin{bmatrix} -19 & 8 & -9 \\ 30 & -32 & -10 \\ -6 & -12 & 2 \end{bmatrix}$,

entonces tenemos que:

$$A\left(Adj\left(A\right)\right)=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -19 & 8 & -9 \\ 30 & -32 & -10 \\ -6 & -12 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (-38-30-24) & (16+32-48) & (-18+10+8) \\ (0+30-30) & (0-32-60) & (0-10+10) \\ (-114+90+24) & (48-96+48) & (-54-30-8) \end{bmatrix}$$

$$A\left(Adj(A)\right)=\begin{bmatrix}-92 & 0 & 0\\ 0 & -92 & 0\\ 0 & 0 & -92\end{bmatrix}=-92\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=-92(I_3)=\det(A)I_3$$

Y se concluye que $A\left(Adj(A)\right)=\det(A)I_3$

Teorema 7.3: Si A es una matriz de orden $n\times n$ y $\det(A)\neq 0$, entonces:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\left(Adj(A)\right)=\begin{bmatrix}\frac{A_{11}}{\det(A)} & \frac{A_{21}}{\det(A)} & \cdots & \frac{A_{n1}}{\det(A)}\\ \frac{A_{12}}{\det(A)} & \frac{A_{22}}{\det(A)} & \cdots & \frac{A_{n2}}{\det(A)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{A_{1n}}{\det(A)} & \frac{A_{2n}}{\det(A)} & \cdots & \frac{A_{nn}}{\det(A)}\end{bmatrix}$$

Demostración:

Según el teorema anterior tenemos que: $A\left(Adj(A)\right)=\det(A)I_n$ si $\det(A)\neq 0$, entonces tenemos que multiplicando ambos miembros por $\frac{1}{\det(A)}$ obtenemos:

$$\frac{1}{\det(A)}\left[A\left(Adj(A)\right)\right]=\frac{1}{\det(A)}\left[\det(A)I_n\right]=I_n \text{ luego}$$

$$A\frac{1}{\det(A)}\left(Adj(A)\right)=I_n$$ multiplicando ambos miembros por A^{-1} se obtiene:

$$A^{-1}A\frac{1}{\det(A)}\left(Adj(A)\right)=A^{-1}I_n \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{\det(A)}\left(Adj(A)\right)=A^{-1}$$

Por tanto:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\left(Adj(A)\right)$$

Ejemplo:

Dada la matriz $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \end{bmatrix}$, hallar la inversa A^{-1}.

Como ya habíamos calculado $|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \end{vmatrix}=-92$ y $Adj(A)=\begin{bmatrix} -19 & 8 & -9 \\ 30 & -32 & -10 \\ -6 & -12 & 2 \end{bmatrix}$,

entonces :

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\left(Adj(A)\right)=-\frac{1}{92}\begin{bmatrix} -19 & 8 & -9 \\ 30 & -32 & -10 \\ -6 & -12 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{-19}{-92} & \frac{8}{-92} & \frac{-9}{-92} \\ \frac{30}{-92} & \frac{-32}{-92} & \frac{-10}{-92} \\ \frac{-6}{-92} & \frac{-12}{-92} & \frac{2}{-92} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{19}{92} & -\frac{8}{92} & \frac{9}{92} \\ -\frac{30}{92} & \frac{32}{92} & \frac{10}{92} \\ \frac{6}{92} & \frac{12}{92} & -\frac{2}{92} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{19}{92} & -\frac{2}{23} & \frac{9}{92} \\ -\frac{15}{46} & \frac{16}{46} & \frac{5}{46} \\ \frac{3}{46} & \frac{3}{23} & -\frac{1}{46} \end{bmatrix}$$

Teorema 7.4: Una matriz A_n es invertible si y sólo si su determinante es diferente de cero, $\det(A_n)\neq 0$.

Demostración:

Como es una doble condicional lo demostraremos en ambos sentidos:

Si $\det(A_n)\neq 0$, entonces según el **Teorema 7.2** obtenemos una expresión para A^{-1}, de modo que A es invertible. Entonces, $AA^{-1}=I_n$

Por la propiedad 10 tenemos que: $\det(AA^{-1})=\det(A)\det(A^{-1})=\det(I_n)=1$

Luego podemos concluir que $\det(A)\neq 0$

Si A es una matriz de orden $n \times n$, entonces las siguientes expresiones son equivalentes:

A es invertible $\approx$ A es equivalente a I_n $\approx$ $\det(A) \neq 0.$

8. <u>Regla de Cramer</u>:

Es un método que nos sirve para resolver un sistema de n ecuaciones con n incógnitas cuya matriz de los coeficientes es **no singular**.

Teorema 8.1: (Regla de Cramer): Sean

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}$$

un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas y sea $A = (a_{ij})$ la matriz de los coeficientes de modo que podamos escribir el sistema dado como $AX = B$, donde

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Si $\det(A) \neq 0$, entonces el sistema tiene solución única

$x_1 = \dfrac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \dfrac{\det(A_2)}{\det(A)}, \quad \ldots \quad , \quad x_n = \dfrac{\det(A_n)}{\det(A)}$, donde A_i es la matriz obtenida de A al reemplazar su $i-ésima$ columna por B (Los coeficientes de la incógnita x_i por los términos independientes).

Demostración:

Si $\det(A) \neq 0$, entonces A es no singular. Por lo tanto,

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=A^{-1}B=\begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1\frac{A_{11}}{|A|} + b_2\frac{A_{21}}{|A|} + \cdots + b_n\frac{A_{n1}}{|A|} \\ b_1\frac{A_{12}}{|A|} + b_2\frac{A_{22}}{|A|} + \cdots + b_n\frac{A_{n2}}{|A|} \\ \vdots \\ b_1\frac{A_{1n}}{|A|} + b_2\frac{A_{2n}}{|A|} + \cdots + b_n\frac{A_{nn}}{|A|} \end{bmatrix}$$

Esto significa que:

$$x_1=b_1\frac{A_{11}}{|A|}+b_2\frac{A_{21}}{|A|}+\ldots+b_n\frac{A_{n1}}{|A|}=\frac{1}{|A|}\left(b_1A_{11}+b_2A_{21}+\ldots+b_nA_{n1}\right)$$

$$x_2=b_1\frac{A_{12}}{|A|}+b_2\frac{A_{22}}{|A|}+\ldots+b_n\frac{A_{n2}}{|A|}=\frac{1}{|A|}\left(b_1A_{12}+b_2A_{22}+\ldots+b_nA_{n2}\right)$$

$$\vdots$$

$$x_n=b_1\frac{A_{1n}}{|A|}+b_2\frac{A_{2n}}{|A|}+\ldots+b_n\frac{A_{nn}}{|A|}=\frac{1}{|A|}\left(b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+\ldots+b_nA_{nn}\right)$$

De donde se puede concluir que

$$x_i=b_1\frac{A_{1i}}{|A|}+b_2\frac{A_{2i}}{|A|}+\ldots+b_n\frac{A_{ni}}{|A|}=\frac{1}{|A|}\left(b_1A_{1i}+b_2A_{2i}+\ldots+b_nA_{ni}\right)$$

para $i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ ,\ n$

Ahora, sea

$$A_i=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Si desarrollamos el determinante de A_i con respecto a la $i-ésima$ columna, vemos que: $\det\left(A_i\right)=b_1A_{1i}+b_2A_{2i}+\ldots+b_nA_{ni}$

Por lo tanto, $x_i=\dfrac{1}{\det(A)}\det\left(A_i\right)=\dfrac{\det\left(A_i\right)}{\det(A)}$ para $i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ ,\ n$

Para aplicar la regla de Cramer seguiremos el siguiente procedimiento:

Sea $AX = B$, donde A es de orden $n \times n$ entonces:

1. Calculamos $\det(A)$. Si $\det(A) = 0$, no se puede aplicar la regla de Cramer. Se emplea el método de Gauss.
2. Si $\det(A) \neq 0$, entonces para cada i tenemos que: $x_i = \dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}$

Recuerde que A_i es la matriz obtenida de A al reemplazar la $i-ésima$ columna de A por B (Los coeficientes de la incógnita x_i por los términos independientes).

Ejemplos:

1) Resuelva el siguiente sistema usando la regla de Cramer si es posible:

$$\begin{aligned} -2x + 3y - z &= 1 \\ x + 2y - z &= 4 \\ -2x - y + z &= -3 \end{aligned}$$

Tenemos que: $$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 6 + 1 - 4 - 3 + 2 = -2 \neq 0$$

Luego: $$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{(2 + 9 + 4 - 6 - 1 - 12)}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{(-8 + 3 + 2 - 8 - 1 + 6)}{-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{(12 - 1 - 24 + 4 - 8 + 9)}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

2) Resuelva el siguiente sistema usando la regla de Cramer si es posible:

$$\begin{aligned} 3x+2y-z &= 4 \\ 2x-y+2z &= 3 \\ x+3y+2z &= -5 \end{aligned}$$

Calculamos el $\det(A)=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=-6+4-6-1-8-18=-35\neq 0$

Aplicando la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -5 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{-35}=\frac{-8-20-9+5-24-12}{-35}=\frac{-68}{-35}=\frac{68}{35}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix}}{-35}=\frac{18+8+10+3+30-16}{-35}=\frac{53}{-35}=-\frac{53}{35}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix}}{-35}=\frac{15+6+24+4-27+20}{-35}=\frac{42}{-35}=-\frac{42}{35}$$

La solución única del sistema es $\boxed{\begin{cases} x=\dfrac{68}{23} \\ y=\dfrac{-53}{23} \\ z=\dfrac{-42}{23} \end{cases}}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

I- Si $|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -3$ $\;y\;$ $|B| = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 7$**, determine aplicando las propiedades:**

1) $|C| = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix} = \_\_\_\_\_$

2) $|D| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 2a_2 & 2b_2 & 2c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \_\_\_\_$

3) $|E| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = \_\_\_\_$

4) $|F| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + 3a_1 & b_2 + 3b_1 & c_2 + 3c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \_\_\_\_$

5) $|G| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 3a_1 & 3b_1 & 3c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \_\_\_\_$

6) $|A \cdot B| = \left| \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \right| = \_\_\_\_$

7) $|H| = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \_\_\_\_$

8) $|A^2| = \_\_\_\_$

9) $|B^3| = \_\_\_\_\_$

II- Calcular los siguientes determinantes:

1) $|A| = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \_\_\_\_\_$

2) $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = \_\_\_\_\_$

3) $|C| = \begin{vmatrix} -5 & -8 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = \_\_\_\_\_$

III- Calcular los siguientes determinantes aplicando el método de Sarrus:

1) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$

2) $|B| = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} =$

3) $|C| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 5 & 3 \end{vmatrix} =$

IV- Calcular los siguientes determinantes (Recuerde las propiedades):

1) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \_\_\_\_\_$ **2)** $|B| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = \_\_\_\_\_$ **3)** $|C| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \_\_\_\_\_$

V- Calcular los siguientes determinantes aplicando el método de Gauss:

1) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 5 & 3 \\ 7 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \_\_\_\_\_$ **2)** $|B| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & -6 & 3 \\ 6 & 0 & -8 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \_\_\_\_\_$

3) $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & -4 & 2 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ **4)** $|D| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

VI- Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$**. Calcule** $\det(A)$ **desarrollándolo por**

a) La fila 1: **b) La columna 4**

VII- Calcular el siguiente determinante utilizando el método Pivotal:

1) $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & -6 & 3 \\ 6 & 0 & -8 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \_\_\_\_\_\_$

2) $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

3) $|C| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & 1 & 6 & 4 \\ 0 & 6 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

VIII- Determine el valor de "x" en cada caso:

1) $\begin{vmatrix} x+1 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$

2) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & x & 3 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

3) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & x \\ x & 0 & -12 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} = 0$

4) $\begin{vmatrix} x-5 & x & x+1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 2-x \\ -5 & 8 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 9 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 0$

6) $\begin{vmatrix} x-5 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

7) $\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & -x & 1 \end{vmatrix} = 0$

8) $\begin{vmatrix} x-2 & x-3 & x-1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 6$

IX.- Hallar la matriz adjunta de A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

X.- Hallar inversa de cada matriz si la tiene, aplicando determinante:

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ 2) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 3) $D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

XI.- Determine los valores de ***x*** que hacen que la matriz siguiente no tenga inversa:

1) $A = \begin{bmatrix} x & 3 \\ 4 & x+1 \end{bmatrix}$ 2) $B = \begin{bmatrix} x & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & -x & 1 \end{bmatrix}$

I.- Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones usando la regla de Cramer:

1) $\begin{aligned} 2x + 3y &= -1 \\ 7x + 4y &= 47 \end{aligned}$

3) $\begin{aligned} 2x + y + z &= 6 \\ 3x - 2y - 3z &= 5 \\ 8x + 2y + 5z &= 11 \end{aligned}$

4) $\begin{aligned} x \qquad\qquad - w &= 7 \\ 2y + z \qquad &= 2 \\ 4x - y \qquad\qquad &= -3 \\ 3z - 5w &= 2 \end{aligned}$

PROGRAMA DE LA ASIGNATURA

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE SANTO DOMINGO
FACULTAD DE CIENCIAS
Oficina de Planificación Universitaria (OPLAU)
Oficina de Planificación Sectorial (OPLASE)

Consolidado del Semestre (horas) HT: 48 HP:32

Escuela: *Matemática* **Cátedra:** *Álgebra*

Nombre de la Asignatura: *Álgebra Superior*

Clave: *Mat-230* **Prerrequisito:** *Mat-014*

Fecha de Elaboración: *Julio 1994* **Fecha de Actualización:** *Julio 2006*

Coordinadora: Francisca A. Medrano A.M.

Descripción de la Asignatura:

Introducir las técnicas algebraicas con la visión de espacio vectorial de polinomios, características y operaciones entre ellos, la obtención de raíces de ecuaciones algebraicas, es espacio vectorial de las matrices, los determinantes y métodos de resolución de sistemas como eliminación de gauss y Rouché-Frobenius.

Objetivos Generales:

Desarrollar los conceptos básicos del Álgebra que sirven de base en las ingenierías, matemática, física, economía, farmacia, estadística y educación.

Población Destinataria:

Estudiantes de matemática, ingenierías, física, química, biología, economía, estadística, educación y farmacia.

Criterio de Evaluación:

Prácticas en el aula y para la casa, talleres en grupo, trabajos de investigación y las pruebas.

***Unidad:* 1**

Nombre de la Unidad: *Espacios Vectoriales*

Objetivo General: *Introducir el concepto de espacio vectorial de polinomios, sus características y aplicaciones.*

HT: *08* ***HP****: 4*

Objetivos Específicos (terminales)	***Contenidos***	***Estrategias de Aprendizaje***	***Forma de Evaluación***
▪ *Definir espacio vectorial.* ▪ *Establecer el espacio vectorial de polinomios y sus características.* ▪ *Dividir polinomios aplicando diferentes procedimientos: división tradicional, división de Ruffini.* ▪ *Conocer los teoremas del resto y del factor y aplicarlo en la resolución de problemas.*	*1. Concepto de espacio vectorial en* R^n. *2. Operaciones con vectores(suma, multiplicación de un vector por un escalar, producto escalar, distancia entre vectores, norma de un vector)* *3. El espacio vectorial de los polinomios, igualdad y operaciones con polinomios.* *4. Máximo común divisor. Algoritmo de Euclides.* *5. División de un polinomio de grado n por uno de la forma (x-a).División sintética.* *6. Teorema del resto y teorema del factor.* *7. Derivada de un polinomio. Derivada sucesiva.* *8. Fórmula de Taylor. Método de Ruffini-Horner.*	✓ *Preparar guías de estudios de los conceptos nuevos.* ✓ *Hacer aclaraciones y profundización por el/la profesor/a.* ✓ *Hacer las demostraciones que sean necesarias.* ✓ *Talleres en el aula, trabajando en pequeños grupos.* ✓ *Hacer prácticas asignadas para la casa.* ✓ *Revisar dudas de la práctica con su monitor/a y/o profesor/a.*	✓ *Talleres en el aula* ✓ *Pruebines* ✓ *Práctica.*

***Unidad:* 2**

Nombre de la Unidad: *Teoría general de ecuaciones.*

Objetivo General: *Establecer métodos para obtener las raíces reales de una ecuación.*

HT: *16* ***HP:*** *08*

Objetivos Específicos (terminales)	***Contenidos***	***Estrategias de Aprendizaje***	***Forma de Evaluación***
▪ *Factorizar polinomios en factores lineales obteniendo sus raíces.* ▪ *Determinar la ecuación conocida sus raíces, por diferentes procedimientos.* ▪ *Resolver una ecuación de coeficientes enteros conocidas algunas de sus raíces.* ▪ *Obtener las raíces racionales de una ecuación algebraica, aplicando: la relación entre raíces y coeficientes de una*	*1. Definición de una ecuación algebraica.* *2. Raíces de una ecuación algebraica. Multiplicidad de una raíz. Teorema de raíces múltiples.* *3. Teorema fundamental del álgebra.* *4. Raíces complejas de una ecuación algebraica. Teorema de las raíces complejas. Teorema de las raíces irracionales cuadráticas.* *5. Relación entre los coeficientes y raíces de una ecuación algebraica.* *6. Transformaciones de ecuaciones en otras cuyas raíces:* *- sean las opuestas de la original,* *- sus raíces sean*	✓ *Preparar guías de estudios de los conceptos nuevos.* ✓ *Hacer aclaraciones y profundización por el/la profesor/a.* ✓ *Hacer las demostraciones que sean necesarias.* ✓ *Talleres en el aula, trabajando en pequeños grupos.* ✓ *Hacer prácticas asignadas para la casa.* ✓ *Revisar dudas de la práctica con su monitor/a y/o profesor/a.* ✓ *Usar la calculadora para verificar las*	✓ *Talleres en el aula* ✓ *Pruebines* ✓ *Práctica.*

ecuación y el teorema de raíces racionales. ▪ *Encontrar las raíces irracionales de una ecuación algebraica, usando la calculadora y el Teorema de Bolzano.*	*las recíprocas de la ecuación original,* - *en otra cuyas raíces queden aumentadas o disminuídas en un valor real diferente de cero,* - *en otra cuyas raíces queden aumentadas en un valor k diferente de cero.* - *en otra de raíces múltiples cuyas raíces sean todas simples.* 7. *Naturaleza de las raíces reales de una ecuación: variación de los signos de un polinomio. Regla de los signos de Descartes.* 8. *Acotación de raíces reales. Método de Laguerre.* 9. *Teorema de raíces racionales. Obtención de las raíces racionales de una ecuación.* 10. *Teorema de Bolzano. Obtención de las raíces irracionales de una ecuación.*	*raíces racionales e irracionales de una ecuación.*	

Unidad: 3

Nombre de la Unidad: *Matrices.*

Objetivo General: *Desarrollar las características, propiedades y operaciones en el espacio vectorial de matrices de orden* $m \times n$

HT: *08* ***HP:*** *04*

Objetivos Específicos (terminales)	***Contenidos***	***Estrategias de Aprendizaje***	***Forma de Evaluación***
▪ *Establecer el espacio vectorial de las matrices.* ▪ *Conocer las matrices especiales.* ▪ *Realizar operaciones con matrices.* ▪ *Calcular la inversa de una matriz* 2×2 *y resolver ecuaciones matriciales.* ▪ *Resolver problemas donde se apliquen las matrices.*	*1. Espacio vectorial de las matrices. Concepto de: matriz, filas-columnas, orden de una matriz.* *2. Matrices especiales. Diagonal principal y secundaria. Traza de una matriz.* *3. Operaciones con matrices.* *4. Propiedades algebraicas de las operaciones con matrices.* *5. Ecuaciones con matrices. Inversa de una matriz* 2×2. *6. Forma escalonada de una matriz.* *7. Matrices elementales. Matrices equivalentes.*	✓ *Preparar guías de estudios de los conceptos nuevos.* ✓ *Demostraciones modelos hecha por el/la profesor/a.* ✓ *Talleres en pequeños grupos.* ✓ *Uso de la calculadora (para comprobar las operaciones con matrices y en la solución de ecuaciones)* ✓ *Asignar prácticas para hacerlas en la casa.* ✓ *Revisar dudas de la práctica con su monitor/a y/o profesor/a.*	✓ *Talleres en el aula* ✓ *Pruebines* ✓ *Práctica.*

Unidad: 4

Nombre de la Unidad: *Determinantes y sistemas.*

Objetivo General: *Desarrollar la teoría de determinantes y aplicarla para resolver sistemas de ecuaciones con n incógnitas*

HT: *16* ***HP:*** *08*

Objetivos Específicos (terminales)	***Contenidos***	***Estrategias de Aprendizaje***	***Forma de Evaluación***
▪ *Definir los conceptos: permutación, inversión par e impar.* ▪ *Definir determinante.* ▪ *Establecer las propiedades de los determinantes.* ▪ *Resolver ecuaciones y sistemas de ecuaciones aplicando determinantes.* ▪ *Establecer diversos teoremas de sistemas de ecuaciones lineales.*	*1. Definición de determinante.* *2. Calculo de determinante de orden 2. De orden 3 aplicando la regla de Sarros.* *3. Propiedades de los determinantes.* *4. Menor o adjunto complementario de un elemento.* *5. Cálculo de determinantes de orden mayor que 3 por: elementos de una línea(adjuntos); aplicando propiedades de los determinantes y por el método de Gauss.* *6. Adjunta de una matriz cuadrada.* *7. Inversa de una matriz cuadrada por adjunta y por Gauss-Jordan.*	✓*Preparar guías de estudios de los conceptos nuevos.* ✓*Aclaraciones y profundización por el/la profesor/a.* ✓*Hacer las demostraciones que sean necesarias.* ✓*Realizar talleres en el aula, trabajando en pequeños grupos.* ✓*Usar la calculadora para calcular determinantes, resolver sistemas, encontrar inversas de matrices, entre otras actividades.* ✓*Realizar investigación sobre diferentes*	✓ *Talleres en el aula* ✓ *Pruebines* ✓ *Práctica.*

▪ *Resolver sistemas de ecuaciones por diferentes métodos: matricial, por Gauss, método de Cramer y por Rouché-Frobenius.*	*8. Características o rango de una matriz.* *9. Sistemas de ecuaciones lineales. Representación matricial. Sistemas homogéneos y no homogéneos.* *10. Sistemas determinados de solución única. Indeterminados con infinitas soluciones. Sistemas incompatibles.* *11. Solución de sistemas de ecuación por diversos métodos.*	*métodos de encontrar una matriz inversa.* ✓*Asignar prácticas para hacerlas en la casa.* ✓*Revisar dudas de la práctica con su monitor/a y/o profesor/a.*	

Bibliografía de Álgebra Superior (Mat-230)

- ***Álgebra Superior.***
  Autor: Murray R. Spiegel

  Editorial: Mc Graw Hill. 1991.

- ***Matrices***
  Autor: Frank Ayres

  Editorial: MCcGraw Hill. 1992

- **Álgebra Y Análisis Matricial.**
  Autor: Rubén Félix Lebreault.

  Editorial: Editora Universitaria. UASD. 2007

- **Notas de Cátedras de los profesores:**
  a) Tomás Darío Navarro
  b) Tulio Mateo y Rosa de Peña