Sobre la Distancia entre Circunferencias

Manuel A. Beato Vz.

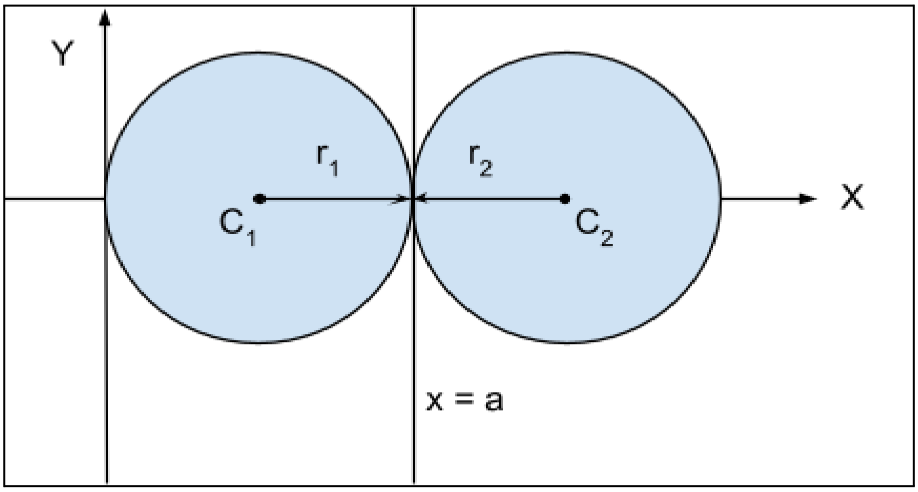
8 de ago. de 2021

1) Tangencialidad

Sea C_1 y r_1 el centro y radio respectivo de una circunferencia, y sea C_2 y r_2 el centro y radio respectivo de otra circunferencia distinta ($C_1 \neq C_2$). Si ambas circunferencias son tangenciales entre sí tocándose en el punto de coordenadas (a, 0), entonces la distancia entre sus radios será

$$\overline{C_1C_2} = \overline{C_1a} + \overline{aC_2} = r_1 + r_2$$

Figura 1

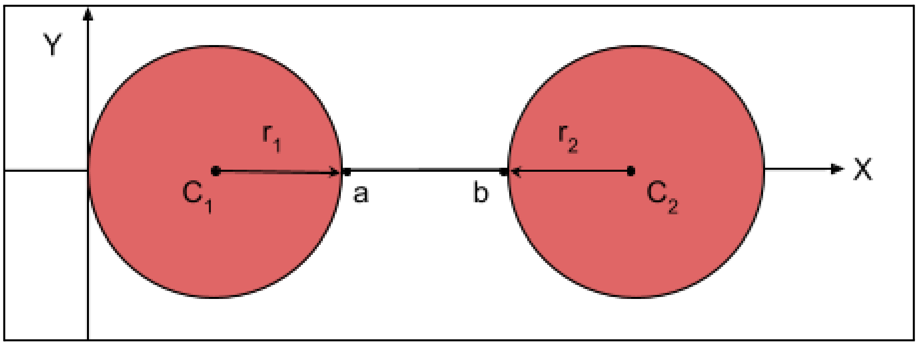


El punto de tangencia (a, 0) es solución tanto de la ecuación de la primera circunferencia como de la ecuación de la segunda circunferencia (Ver figura 1). Por simplicidad y conveniencia elegimos que los centros, radios y distancias yazcan sobre el eje X. No obstante, el argumento es el mismo cuando la distancia entre los centros de dos circunferencias depende de la variable abscisa *y*.

Si dos circunferencias son tangenciales entre sí —es decir, si se tocan en un único punto— entonces la distancia que separa sus centros es **igual** a la suma de sus radios.

2) Separación

Figura 2



Si las mismas dos circunferencias ahora se encuentran separadas por una distancia real y positiva en el plano real —ver figura 2— dicha distancia entre los centros de las circunferencias, C_1 y C_2, vendrá dada por

$$\overline{C_1C_2} = \overline{C_1a} + \overline{ab} + \overline{bC_2} = r_1 + r_2 + \overline{ab}$$

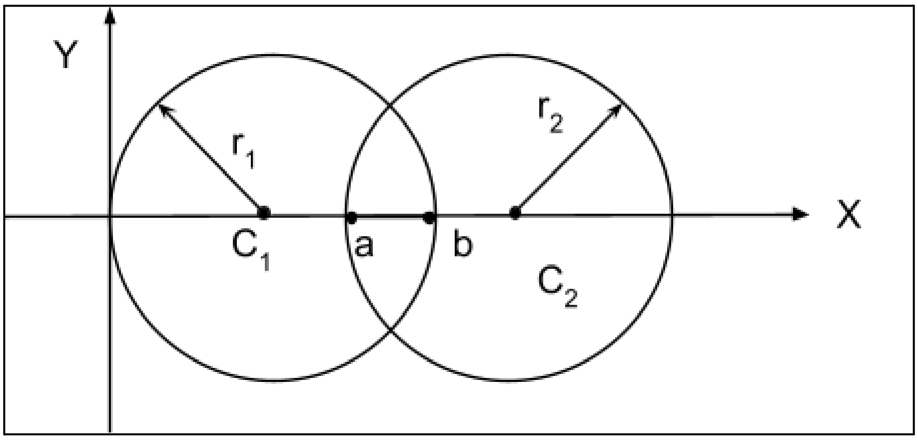
Si $\overline{ab} \neq 0$, entonces $\overline{C_1C_2} > r_1 + r_2$.

Si dos circunferencias distintas están separadas por una distancia no nula $\overline{ab}$, entonces la distancia entre sus centros es **mayor** a la suma de sus radios.

Nótese que cuando $\overline{ab} \to 0$, las circunferencias se tocan exactamente en $\overline{ab} = 0$ y se tiene la situación de tangencialidad.

3) Solapamiento

Figura 3



Si ahora la distancia $\overline{ab}$ es negativa, i.e. el segmento se encuentra *dentro* de las circunferencias, entonces las circunferencias se solapan y comparten un área en común. De la figura 3, la distancia entre los dos centro C_1 y C_2 vendrá dada por

$$\overline{C_1C_2} = \overline{C_1a} + \overline{ab} + \overline{bC_2}$$

Tenemos que, $\overline{C_1a} + \overline{ab} = \overline{C_1b} = r_1$. Y, como $\overline{aC_2} = \overline{ab} + \overline{bC_2}$, entonces $\overline{bC_2} = \overline{aC_2} - \overline{ab} = r_2 - \overline{ab}$. Por lo que queda

$$\overline{C_1C_2} = r_1 + r_2 - \overline{ab}$$

Es decir, si $\overline{ab} \neq 0$, entonces $\overline{C_1C_2} < r_1 + r_2$.

Si dos circunferencias se solapan y comparten un área en común, la distancia entre sus centros es **menor** que la suma de sus radios.

Nuevamente, si $\overline{ab} = 0$ tenemos la situación de tangencialidad.