CÁLCULO VECTORIAL

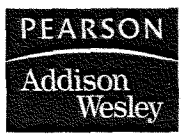
Quinta Edición

JERROLD E. MARSDEN
California Institute of Technology, Pasadena

ANTHONY J. TROMBA
University of California, Santa Cruz

Traducción
Patricio Cifuentes Muñiz
Jesús García Azorero
José Pedro Moreno Díaz
Fernando Quirós Gracián
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid

Revisión Técnica
Eugenio Hernández Rodríguez
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid



Madrid • México • Santafé de Bogotá • Buenos Aires • Caracas • Lima • Montevideo • San Juan
San José • Santiago • São Paulo • White Plains

Datos de catalogación bibliográfica

MARSDEN, J. E.; TROMBA, A. J.
CÁLCULO VECTORIAL. Quinta Edición

PEARSON EDUCACIÓN, S.A., Madrid, 2004

ISBN: 84-7829-069-9
Materia: Cálculo, 372

Formato 195 × 250 Páginas: 696

Todos los derechos reservados.
Queda prohibida, salvo excepción prevista en la Ley, cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública y transformación de esta obra sin contar con autorización de los titulares de propiedad intelectual. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual (*arts.* 270 *y sgts. Código Penal*).

DERECHOS RESERVADOS
© 2004 por PEARSON EDUCACIÓN, S.A.
Ribera del Loira, 28
28042 Madrid (España)

MARSDEN, J. E.; TROMBA, A. J.
CÁLCULO VECTORIAL. Quinta Edición

ISBN: 84-7829-069-9
Depósito legal: M. 36.308-2004

ADDISON WESLEY es un sello editorial autorizado de PEARSON EDUCACIÓN, S.A.

First published in the United States by
W. H. FREEMAN AND CO., New York and Basingstoke

Copyright © 2004 by W. H. Freeman and Co. All Rights Reserved

Publicado originalmente en Estados Unidos por
W. H. FREEMAN AND CO., New York and Basingstoke

Copyright © 2004 by W. H. Freeman and Co. All Rights Reserved

Equipo editorial:
Editor: Miguel Martín-Romo
Técnico editorial: Marta Caicoya
Equipo de producción:
Director: José Antonio Clares
Técnico: Isabel Muñoz
Diseño de cubierta: Equipo de diseño de PEARSON EDUCACIÓN, S.A.
Composición: COPIBOOK, S.L.
Impreso por: CLOSAS-ORCOYEN, S.L.

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN

Este libro ha sido impreso con papel y tintas ecológicos

Contenido

Prefacio vii

Agradecimientos ix

Introducción histórica xi

1. La geometría del espacio euclídeo 1

1.1. Vectores en los espacios de dos y de tres dimensiones 1
1.2. Producto escalar, longitud y distancia 22
1.3. Matrices, determinantes y el producto vectorial 36
1.4. Coordenadas cilíndricas y esféricas 61
1.5. El espacio euclídeo n-dimensional 70
Ejercicios de repaso del Capítulo 1 84

2. Diferenciación 89
2.1. La geometría de las funciones con valores reales 90
2.2. Límites y continuidad 101
2.3. Diferenciación 121
2.4. Introducción a trayectorias y curvas 134
2.5. Propiedades de la derivada 144
2.6. Gradientes y derivadas direccionales 156
Ejercicios de repaso del Capítulo 2 167

3. Derivadas de orden superior: máximos y mínimos 175
3.1. Derivadas parciales iteradas 176
3.2. El teorema de Taylor 187
3.3. Extremos de funciones con valores reales 196
3.4. Extremos condicionados y multiplicadores de Lagrange 217
3.5. El teorema de la función implícita 237
Ejercicios de repaso del Capítulo 3 247

4. Funciones con valores vectoriales 253
4.1. La aceleración y la segunda ley de Newton 253
4.2. Longitud de arco 266
4.3. Campos vectoriales 276
4.4. La divergencia y el rotacional 286
Ejercicios de repaso del Capítulo 4 305

5. Integrales dobles y triples 309
5.1. Introducción 309
5.2. La integral doble sobre un rectángulo 319
5.3. La integral doble sobre regiones más generales 331
5.4. Cambio del orden de integración 339
5.5. La integral triple 345
Ejercicios de repaso del Capítulo 5 356

6. La fórmula del cambio de variables y aplicaciones de la integración 359
6.1. La geometría de las aplicaciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ 360
6.2. El teorema del cambio de variables 367
6.3. Aplicaciones 384
6.4. Integrales impropias 396
Ejercicios de repaso del Capítulo 6 406

7. Integrales sobre curvas y superficies 411
7.1. La integral a lo largo de una trayectoria 411
7.2. La integral de línea 419
7.3. Superficies parametrizadas 439
7.4. El área de una superficie 448
7.5. Integrales de funciones escalares sobre superficies 460
7.6. Integrales de campos vectoriales sobre superficies 468
7.7. Aplicaciones a la geometría diferencial, la Física y a las formas de la vida 483
Ejercicios de repaso del Capítulo 7 496

8. Los teoremas de integración del análisis vectorial 499
8.1. El teorema de Green 499
8.2. El teorema de Stokes 513
8.3. Campos conservativos 530
8.4. El teorema de Gauss 541
8.5. Algunas ecuaciones diferenciales de la mecánica y la tecnología 555
8.6. Formas diferenciales 567
Ejercicios de repaso del Capítulo 8 584

Respuestas a los ejercicios impares 587

Índice alfabético 645

Créditos de las ilustraciones 655

Prefacio

Este libro de texto ha sido diseñado para un curso semestral de cálculo de funciones de varias variables y análisis vectorial, que normalmente se explica durante el segundo año universitario. Además de haber realizado cambios y mejoras a lo largo de todo el texto, en esta nueva edición hemos añadido una cantidad importante de materiales que presentan el desarrollo histórico del tema y también hemos intentado transmitir una sensación de entusiasmo, relevancia e importancia de los temas tratados.

Requisitos

A veces, los cursos de cálculo vectorial vienen precedidos por un primer curso de álgebra lineal, pero no es éste un requisito esencial. Solamente requeriremos rudimentos básicos de álgebra de matrices y los conceptos necesarios se desarrollan en el texto. Si el presente curso está precedido por un curso de álgebra lineal el profesor no tendrá problemas para ampliar el material presentado. Sin embargo sí que damos por sabido lo fundamental del cálculo de una variable —los procesos de diferenciación e integración y sus interpretaciones geométricas y físicas así como el conocimiento de las funciones elementales como son las trigonométricas y la exponencial.

El papel de la teoría

El texto incluye la mayor parte de la teoría básica así como muchos ejemplos y problemas concretos. Algunas de las demostraciones técnicas de los teoremas de los Capítulos 2 y 5 se exponen en secciones opcionales que son fácilmente accesibles en la página web del libro en www.librosite.net/marsden (*véase* la descripción en la página siguiente). La Sección 2.2, sobre límites y continuidad, se ha diseñado para tratarse someramente y es deliberadamente breve. Temas teóricos más sofisticados, como la compacidad y algunas demostraciones delicadas de la teoría de la integración, se han omitido ya que corresponden a un curso más avanzado de análisis real.

Concreto y orientado al estudiante

Las técnicas de cálculo y la comprensión intuitiva son importantes a este nivel, y hemos tratado de ajustarnos a este requisito haciendo el libro concreto y orientado al estudiante. Por ejemplo,

aunque formulamos correctamente la definición de derivada, se ha hecho utilizando matrices de derivadas parciales en vez de transformaciones lineales abstractas. Incluimos también un buen número de ejemplos tomados de la física, como mecánica de fluidos, gravitación y teoría electromagnética, y también de la economía aunque no se supone ningún conocimiento de estas materias.

Ordenación de los temas

Una característica especial de este texto es la pronta introducción de los campos de vectores, la divergencia y el rotacional en el Capítulo 4, antes de la integración. Con frecuencia, el análisis vectorial queda desplazado en un curso de este tipo y la ordenación presente va dirigida a evitar esta tendencia. Para ir incluso más allá, puede considerarse el explicar el Capítulo 3 (teoremas de Taylor, máximos y mínimos, multiplicadores de Lagrange) tras el Capítulo 8 (teoremas e integración del análisis vectorial).

La quinta edición se ha reestructurado completamente, pero conserva y mejora el equilibrio entre teoría, aplicaciones, material opcional y notas históricas que estaba presente en anteriores ediciones.

Suplementos

Uno de los cambios principales en esta edición está en los suplementos. Son los que siguen:

1. **Librosite.** La página web del libro contiene los materiales siguientes:
   - **Suplemento en Internet**, un archivo PDF que tiene material adicional adecuado para utilizar en proyectos así como demostraciones técnicas y exámenes de muestra con soluciones completas.
   - **Diapositivas en PowerPoint y en KeyNote** para que el profesor pueda mostrar en clase las figuras del texto, así como resúmenes por secciones.
   - **Archivos LaTeX y PDF de exámenes de muestra** (en el sitio Internet protegido para profesores).
   - **Puestas al día**.

Jerry Marsden y Tony Tromba,
Caltech y UC Santa Cruz, verano de 2003.

Agradecimientos

Muchos colegas y estudiantes de la comunidad matemática nos han hecho sugerencias y contribuciones valiosas desde que este libro comenzó a redactarse. Un primer borrador del libro se escribió en colaboración con Ralph Abraham. Le agradecemos el habernos permitido seguir adelante basándonos en su trabajo. Es imposible citar a todos los que nos han ayudado en este libro, pero queremos agradecer especialmente a Michel Hoffman y Joanne Seitz por su ayuda en las primeras ediciones. También hemos recibido comentarios valiosos de Mary Anderson, John Ball, Patrick Brosnan, Andrea Brose, David Drasin, Gerald Edgar, Michael Fischer, Frank Gerrish, Mohammad Gohmi, Jenny Harrison, Jan Hogendijk, Jan-Japp Oosterwijk y Anne van Weerden (Uterecht), David Knudson, Richard Kock, Andrew Lenard, William McCain, Gordon McLean, David Merriell, Jeanette Nelson, Dan Norman, Keith Phillips, Anne Perleman, Oren Walter Rosen, Kenneth Ross, Ray Sachs, Diane Sauvageot, Joel Smoller, Francis Su, Melvyn Tews, Ralph y Bob Tromba, Steve Wan, Alan Weinstein, John Wilker y Peter Zvengrowski. Los estudiantes y profesores de Austin Community College merecen una nota especial de agradecimiento, así como nuestros estudiantes de Caltech y de UC Santa Cruz.

Debemos un agradecimiento especial a Stefan Hildebrant por sus consejos sobre historia.

Agradecemos las revisiones detalladas del manuscrito que hemos recibido de los siguientes profesores: Dr. Michael Barbosu, SUNY Brockport; Brian Bradie, Christopher Newport University; Mike Daven, Mount Saint Mary; Elias Deeba, University of Houston-Downtown; John Feroe, Vassar; David Gurari, Case Western Reserve; Alan Horowitz, Penn State; Rhonda Hughes, Bryn Mawr; Frank Jones, Rice University; Leslie Hay, Virginia Tech; Richard Laugesen, University of Michigan; Namyong Lee, Minnesota State University; Tanya Leiese, Rose Hullman Institute; John Lott, University of Michigan; Gerald Paquin, Université du Québec à Montréal; Joan Rand Moschovakis, Occidental College; A. Shadi Tahvildad-Zadeh, Princeton University; Dr. Stuart Smith, California State University at Hayward; Howard Swann, San Jose State University; Denise Szecsei, Stetson University; Edward Taylor, Wesleyand y Chaogui Zhang, Case Western Reserve. En esta quinta edición queremos dar las gracias a todos los revisores, pero especialmente a Andrea Brose, UCLA, por sus detallados y valiosos comentarios. Los más importantes de todos son los lectores y usuarios del libro cuya lealtad durante más de un cuarto de siglo ha hecho posible esta quinta edición.

Un palabra final de agradecimiento a aquellos que nos ayudaron en la preparación del original y en la producción del libro. De las ediciones anteriores agradecemos a Connie Calica, Nora Lee, Marnie McElhiney, Ruth Suzuki, Ikuko Workman y Esther Zack su excelente mecanografiado de varias versiones y revisiones del manuscrito; a Herb Holden de Gonzaga University

y Jerry Kazdan de la Universidad de Pennsylvania por sugerir y preparar las versiones primeras de las figuras generadas con computador; a Jerry Lyons and Holly Hodder por sus respectivos papeles como nuestros anteriores editores matemáticos; a Christine Hastings por su supervisión editorial; y a Trumbull Rogers por su experta revisión del texto. En esta quinta edición, agradecemos a Matt Haigh y a Wendy McKay su ayuda en la preparación del material con TeX y con Mathematica, y también a Terri Ward, la editora de adquisiciones matemáticas de W. H. Freeman, su excelente conducción del proyecto, y a Vivien Weiss su excelente manejo de los asuntos de producción.

Mantendremos al día en la página web una lista de correcciones y sugerencias a la quinta edición y nos encantará recibir de nuestros lectores cualquier sugerencia o corrección adicional. Por favor, envíenoslas bien a Jerrold Marsden (marsden@cds.caltech.edu), bien a Anthony Tromba (tromba@cats.ucsc.edu).

Introducción histórica: Un breve relato

Esto, por tanto, es matemáticas; te recuerda la forma invisible del alma: da luz a sus propios descubrimientos; despierta la mente y purifica el intelecto; ilumina nuestras ideas intrínsecas; elimina el olvido y la ignorancia que nacen con nosotros.

Proclo, c. 450

Cum Deus Calculat Fit Mundus.
(Según Dios calcula se va creando el mundo.)

Leibniz, c. 1700

La palabra «matemáticas» viene de la palabra griega *mathema*, que significa conocimiento, entendimiento o percepción, lo que sugiere que el estudio de lo que hoy llamamos matemáticas comenzó haciéndose preguntas acerca del mundo. De hecho, la evidencia histórica sugiere que las matemáticas comenzaron hace alrededor de 2.700 años como un intento de comprender la naturaleza. Desafortunadamente, en la mayor parte de los escritos y conferencias de matemáticas se sacrifica tanto el contexto como las motivaciones históricas. En esta nueva edición los autores abordan de nuevo este problema incrementando la discusión del material histórico y contextual en los lugares apropiados. Así, antes de sumergirnos en las matemáticas del *Cálculo vectorial*, discutimos brevemente el desarrollo de las matemáticas hasta al descubrimiento del cálculo.

Matemáticas egipcias, babilónicas y griegas

De forma generalizada, se admite que las matemáticas se desarrollaron en los siglos septimo y sexto a.C., algún tiempo después de que los griegos desarrollaran un alfabeto uniforme. No quiere esto decir que las matemáticas no existieran antes de los griegos. De hecho los egipcios y los babilonios conocían un gran número de hechos empíricos siglos antes del nacimiento de la civilización griega. Por ejemplo, resolvían ecuaciones de segundo grado, calculaban el área de ciertas figuras geométricas, como cuadrados, rectángulos y triángulos, y tenían una fórmula suficientemente buena para calcular el área del círculo, que usaba 3,16 como valor de π. Sabían también cómo calcular ciertos volúmenes como el del cubo, los de paralelepípedos, conos, cilindros y (no es de sorprender) pirámides. Los antiguos conocían también el teorema de Pitágoras (al menos empíricamente).

Los griegos, que se asentaron por todo el Mediterráneo, debieron de jugar un papel muy importante como preservadores y divulgadores del conocimiento matemático de los egipcios y los babilonios. Sin embargo los griegos se dieron cuenta de que tenían fórmulas distintas para calcular las mismas áreas o volúmenes. Por ejemplo, los babilonios tenían una fórmula para calcular el volumen de un tronco de pirámide de base cuadrada y los egipcios otra (*véase* la Figura 1).

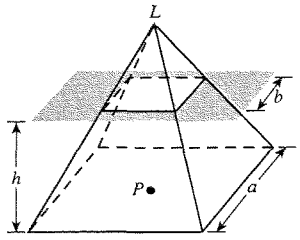


Figura 1. Volumen de un tronco de pirámide de base cuadrada: $V = \frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2)$.

No es de sorprender que los egipcios (con experiencia en la construcción de pirámides) tuvieran la fórmula correcta. Ahora bien, dadas dos fórmulas estaba claro que solamente una de ellas podía ser correcta. Pero, ¿cómo se podía decidir cuál era la correcta? No es ésta, ciertamente, una cuestión de debate, como lo sería la cuestión de la calidad de una obra de arte. Probablemente fue la necesidad de responder a estas preguntas la que llevó al desarrollo de la demostración matemática y el método del razonamiento deductivo.

La persona a la que usualmente se atribuye la invención de la demostración matemática rigurosa fue un comerciante llamado Tales de Mileto (624-548 a.C.). Se dice que fue Tales quien creó la geometría griega, y que fue esta geometría (medida de la tierra) como teoría matemática abstracta (no como una recolección de hechos empíricos) apoyada en demostraciones deductivas rigurosas uno de los puntos de partida del pensamiento científico. Esto llevó a la creación del primer modelo matemático para los fenómenos físicos.

Por ejemplo, una de las más bellas teorías geométricas desarrolladas en la antigüedad fue la de las secciones cónicas (*véase* la Figura 2).

Las cónicas incluyen la línea recta, la circunferencia, la elipse, la parábola y la hipérbola. Se atribuye su descubrimiento a Menecmo, miembro de la escuela del gran filósofo griego Platón. Platón, discípulo de Sócrates, fundó su escuela, la Academia (*véase* la Figura 3), en un área sagrada de Atenas dedicada al héroe Akademos. Todas las academias posteriores reciben su nombre de esta institución, que existió sin interrupción durante 1.000 años hasta que el emperador romano Justiniano la disolvió en 529 d.C.

Platón planteó a sus discípulos el problema siguiente:

Explicad el movimiento de los cuerpos celestes por medio de alguna teoría geométrica.

¿Por qué era ésta una cuestión de interés y confusión para los griegos? La observación de estos movimientos desde la Tierra parece muy complicada. Los movimientos del Sol y de la Luna se pueden describir aproximadamente como circulares con velocidad constante, pero las desviaciones de una órbita circular eran problemáticas para los griegos y se sentían retados a hallar una explicación a estas irregularidades. Las órbitas observadas de los planetas son incluso más complicadas ya que en una misma revolución parecen cambiar de dirección varias veces. Los griegos querían entender este movimiento aparentemente errático por medio de su geometría. Eudoxo, Hiparco y más tarde Apolonio de Pérgamo (262-190 a.C.) sugirieron que las

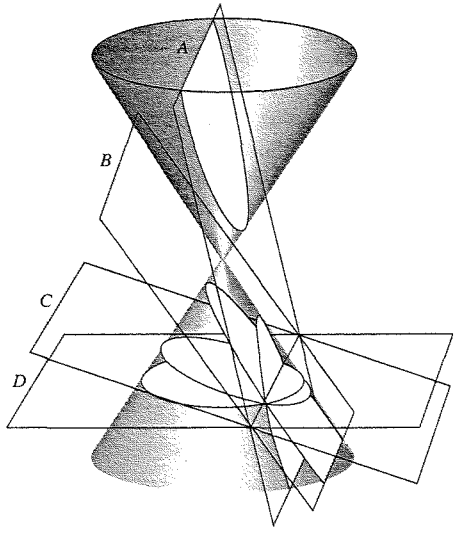


Figura 2. Secciones cónicas: (A) hipérbola, (B) parábola, (C) elipse, (D) circunferencia.



Figura 3. *Academia de Platón* (mosaico hallado en Pompeya. Villa de T. Siminius Stephanus, 86 × 85 cm, Nápoles, Museo Arqueológico). Los siete personajes se han identificado con certeza como Platón (tercero por la izquierda) y otros seis filósofos que discuten sobre el universo, las esferas celestes y las estrellas. El mosaico muestra la Academia de Platón con la ciudad de Atenas al fondo. Es probablemente copia (del primer siglo a.C.) de una pintura helenística.

órbitas celestes se podrían explicar como combinaciones de movimientos circulares (es decir, por la construcción de curvas, llamadas epiciclos, descritas por círculos que se mueven sobre otros círculos). Esta idea llegaría a ser la teoría astronómica más importante de los dos mil años siguientes. Esta teoría, que conocemos a través de los escritos del astrónomo griego Tolomeo de Alejandría, se llamó posteriormente «teoría tolemaica».



Figura 4. Grabado sobre madera del *Theoreticae novae planetarum* de Georg von Peurbach, editado por Oronce Fine como libro de texto de la Universidad de París (1515). Fue la descripción canónica del cielo hasta el final del siglo XVI e incluso tuvo una gran influencia en Copérnico. Peurbach describía la representación por esferas sólidas de los modelos planetarios de Tolomeo, probablemente a través del trabajo «Sobre la configuración del mundo» de ibn al-Haytham (traducido al latín en el siglo XIII). La misma portada se usó en la edición de Sacrobosco de los primeros cuatro libros de los *Elementos* de Euclides (en extractos), que aparecieron bajo el título *Textus de Sphaera* en París (1521).

Euclides recopiló la mayor parte de la geometría griega en sus *Elementos* (de matemáticas). En realidad, los *Elementos* están formados por trece libros en los que Euclides recopiló la mayor parte de los conocimientos matemáticos de su época (c. 300 a.C.) transformándolos en una obra lúcida y lógicamente desarrollada. Además de los *Elementos* han llegado hasta nosotros algunos otros de los escritos de Euclides que incluyen la *Óptica* y la *Catóptrica* (teoría de los espejos).

El éxito de las matemáticas griegas tuvo una gran influencia en la concepción de la naturaleza. Los platonistas, o seguidores de Platón, distinguían entre el mundo de las ideas y el mundo de los objetos físicos. Platón fue el primero en proponer que la verdad o el conocimiento final no podían obtenerse del mundo material, que está en constante cambio, sino solamente de modelos o construcciones matemáticas. Así, el conocimiento infalible sólo podría lograrse a través de las matemáticas. Platón no solamente quería utilizar las matemáticas en el estudio de la naturaleza, sino que incluso llegó a tratar de sustituir la naturaleza por las matemáticas. Para Platón la realidad vive únicamente en el mundo de las ideas, especialmente de las ideas matemáticas.

No todo el mundo antiguo coincidía en este punto. Aristóteles, un discípulo de Platón, criticó la reducción platónica de la ciencia al estudio de las matemáticas. Aristóteles pensaba que el estudio del mundo material era una de las fuentes primarias de la realidad. A pesar de la crítica de Aristóteles, la visión de que las leyes matemáticas gobernaban el universo se estableció con firmeza en el pensamiento clásico. *La búsqueda de las leyes matemáticas de la naturaleza había comenzado.*

Tras la muerte de Arquímedes, en 212 a.C., la civilización griega comenzó un periodo de lenta decadencia. El golpe final lo recibió en 640 d.C. con la conquista de Egipto por los árabes. Los libros griegos que aún permanecían de la gran biblioteca de Alejandría se quemaron. Los sabios que sobrevivieron emigraron a Constantinopla (hoy parte de Turquía), la capital del Imperio Romano de Oriente. Fue en esta gran ciudad donde lo que sobrevivió de la civilización griega se conservó para su redescubrimiento por la civilización europea alrededor de quinientos años más tarde.

Las matemáticas indias y árabes

Sin embargo, la actividad matemática no cesó con la caída de la civilización griega. Mediado el siglo VI en algún lugar del valle del Indo, en India, se desarrolló nuestro sistema de numeración moderno. Los indios desarrollaron un sistema basado en el diez, con diez símbolos abstractos del cero al nueve que se parece «ligeramente» a los de hoy. Desarrollaron las reglas de la suma, la multiplicación y la división (como las de hoy), un sistema infinitamente superior al ábaco romano, que se usó (por una clase especial de criados llamados *aritméticos*) en toda Europa hasta el siglo XV.

Tras la caída de Egipto comenzó la civilización árabe, centrada en Bagdad. Se invitó a sabios procedentes de Constantinopla y de India a compartir sus conocimientos. Los árabes, a través de estos contactos, aprendieron el saber antiguo y el nuevo sistema de numeración descubierto por los indios (*véase* la Figura 5).

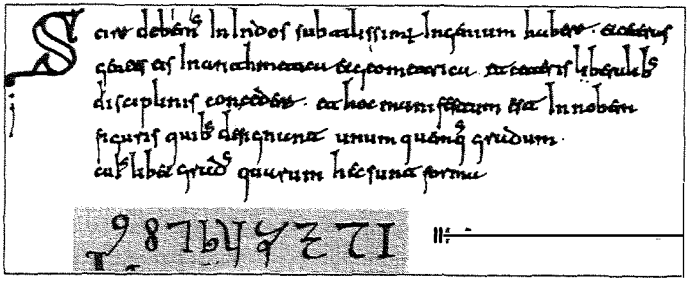


Figura 5. Detalle del *Codex Vigilanus* (976 A.D., norte de España), la primera aparición conocida de los nueve dígitos indoarábigos en la Europa occidental (biblioteca de El Escorial, Madrid).

Fueron los árabes quienes nos dejaron la palabra *álgebra*, que procede del libro del astrónomo Mohamed ibn Musa al-Khuwarizmi titulado *Al-Jabr w'al muqabola*, que significa «restaurar» o «equilibrar» (ecuaciones). Al-Khuwarizmi también es responsable de un segundo libro, de gran influencia, titulado *Kitab al jami' wa'l tafriq bi hisab al hind* («Técnica india de la suma y la resta»), que describía y aclaraba el sistema indio decimal de posición.

Al-Khuwarizmi nos dio también otro nombre a una rama fundamental de la ciencia, la palabra *algoritmo*. Su nombre latinizado dio primeramente *algorism*, después *algorismus* y finalmente *algoritmo*. El término designaba inicialmente el sistema indio de numeración, pero finalmente acabó usándose en su sentido computacional moderno.

La caída de la civilización árabe coincidió con el nacimiento de la civilización europea. La edad moderna comenzó cuando Ricardo Corazón de León llegó a los muros de Jerusalén. Aproximadamente, desde 1192 hasta alrededor de 1270 los caballeros cristianos trajeron a Europa los conocimientos de los «infieles». Alrededor de 1200-1205, Leonardo de Pisa (conocido también como Fibonacci), que había viajado ampliamente por África y Asia Menor, escribió su interpretación (en latín) de las matemáticas árabe y griega. Sus textos históricos trajeron el trabajo de al-Khuwarizmi y Euclides a la atención de una gran audiencia en Europa.

Las matemáticas europeas

Alrededor de 1450, Johann Gutenberg inventó la imprenta de caracteres móviles. Combinada con la llegada del papel de lino y algodón descubierto por los chinos hizo crecer de forma

impresionante la divulgación del conocimiento. El acentuado desarrollo del comercio y las manufacturas favorecieron el crecimiento de la riqueza y un cambio muy importante en las sociedades europeas desde el feudalismo hasta las ciudades estado. En Italia, la madre del Renacimiento, observamos la aparición de estados extraordinariamente ricos, como Venecia bajo los Doges y Florencia bajo los Medici.

La demanda de la creciente clase de los mercaderes aceleró la adopción del sistema indio de numeración. Las enseñanzas de la Iglesia Católica, que se apoyaban en la autoridad absoluta y en el dogma, empezaron a cuestionarse por las ideas de Platón. Los sabios aprendieron de Platón que *el mundo era racional y podía entenderse*, y que el medio para entender la naturaleza eran las matemáticas. Sin embargo, estas ideas contradecían las enseñanzas de la Iglesia, que enseñaba que Dios había creado el universo. La única solución posible a esta contradicción aparente era que «Dios ha creado el mundo matemáticamente» o que «Dios es un matemático».

Quizás sea sorprendente cuánto inspiró este punto de vista el trabajo de muchos matemáticos y científicos entre los siglos XVI y XVIII ya que, si este era el caso, entendiendo las leyes matemáticas del universo uno se acercaría a entender al mismísimo Creador. Créase o no, este punto de vista ha sobrevivido hasta hoy. La siguiente es una cita de Paul Dirac, premio Nobel de Física y creador de la moderna teoría de la mecánica cuántica.

> *Parece ser una de las propiedades principales de la naturaleza que las leyes fundamentales de la física se describan en términos de una teoría matemática de gran poder y belleza que requiere un alto conocimiento de las matemáticas para entenderla. Podríamos preguntarnos: ¿por qué la naturaleza se ha construido de esta forma? Solamente podemos responder que nuestros conocimientos presentes parecen mostrar que la naturaleza se ha construido así. Simplemente tenemos que aceptarlo. Podríamos quizás describir la situación diciendo que Dios es un matemático de un nivel muy alto y que ha usado matemáticas muy avanzadas para construir el universo. Nuestros débiles intentos con las matemáticas nos permiten entender un poco del universo, y según desarrollemos matemáticas más y más avanzadas podemos esperar entenderlo mejor.*

Las matemáticas comenzaron a vislumbrar nuevos descubrimientos y aplicaciones. En los siglos XVI y XVII, el álgebra de al-Khuwarizmi fue ampliamente superado por Cardano, Vieta, y Descartes. Los babilonios ya habían resuelto la ecuación de segundo grado, pero ahora, dos mil años después, del Ferro y Tartaglia resolvieron la de tercer grado, que condujo a su vez al descubrimiento de los números imaginarios. Como veremos, estos números imaginarios jugarían más adelante un papel fundamental en el desarrollo del cálculo vectorial. A principios del siglo XVII Descartes, motivado quizás por la técnica de la cuadrícula utilizada por los pintores italianos de frescos para localizar puntos sobre la pared o sobre el lienzo, creó en un momento de gran inspiración matemática, la geometría de coordenadas (o analítica). Este nuevo modelo matemático nos permite reducir la geometría de Euclides al álgebra y proporciona un método preciso y cuantitativo para describir las curvas y superficies del espacio, y realizar cálculos.

Anteriormente, el gran trabajo de Arquímedes sobre estática y equilibrio (centros de gravedad, el principio de la palanca ---que estudiaremos en este libro) se había comprendido y mejorado, y había llevado a logros de ingeniería impresionantes. En una carrera arquitectónica que aún hoy resulta sorprendente, los avances en ingeniería propiciaron el levantamiento de un número increíble de catedrales por toda Europa, que incluyen la catedral de Florencia, Nôtre Dame de París y la gran catedral de Colonia, por mencionar algunas (*véase* la Figura 6).

Filippo Brunelleschi (1377-1446) estudió las obras de Euclides y de Hiparco, y fue el primer artista que empleó las matemáticas sistemáticamente. Los principios matemáticos de la perspectiva los completó posteriormente Piero della Francesca (1410-1492). Los príncipes en guerra

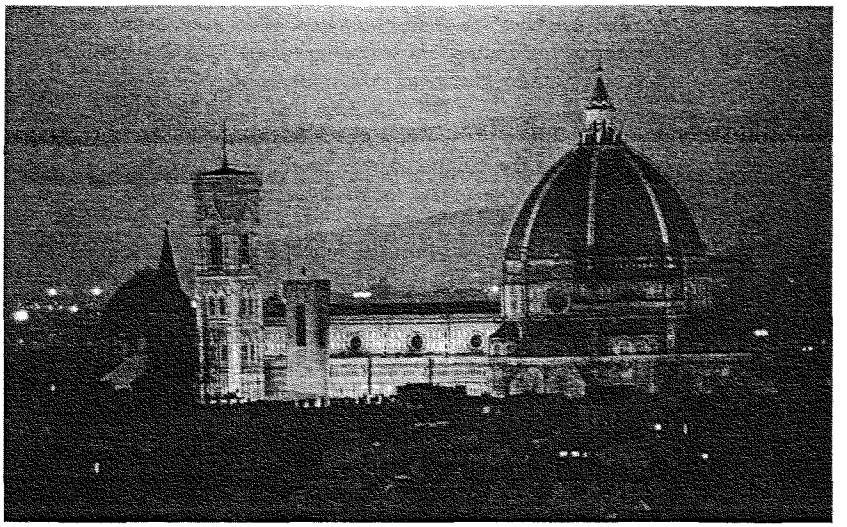


Figura 6. Catedral de Florencia.

contrataban a matemáticos e ingenieros para activar la construcción de armas avanzadas y desarrollar la ciencia balística. El más famoso de todos ellos no fue otro que Leonardo da Vinci, a quien en los últimos años de su vida contrató el duque de Milán. Fue en estos últimos años-cuando pintó la *Mona Lisa* que ahora se encuentra en el Louvre de París. *Véase* la Figura 7.

Fue, sin embargo, la astronomía, como en tiempo de los griegos, la que iba a dar a las matemáticas su mayor ímpetu. No es de sorprender que los astrónomos griegos situaran la Tierra y no el Sol en el centro del universo, ya que día a día vemos al Sol salir y ponerse. Aun así, es interesante preguntarse si los griegos, que fueron tan magníficos pensadores, al menos trataron de estudiar la teoría heliocéntrica, que sitúa al Sol en el centro del universo. De hecho, en el siglo III a.C., Aristarco de Samos enseñaba que la Tierra y otros planetas se movían en órbitas circulares alrededor de un sol fijo. Sus hipótesis, por razones varias, fueron rechazadas. Primeramente, los astrónomos contrarios a ellas razonaban que si la Tierra verdaderamente se movie-



Figura 7. Leonardo, autorretrato.



Figura 8. Nicolás Copérnico (1473-1543).

ra tendríamos que notarlo; en segundo lugar, ¿cómo podrían permanecer en una Tierra móvil los objetos que giran con nosotros?, finalmente, ¿por qué las nubes no se quedan atrás en una Tierra en movimiento?

Estos mismos argumentos volverían a usarse en el siglo XVI contra el astrónomo polaco Nicolás Copérnico (*véase* la Figura 8), quien en 1543 introdujo la teoría heliocéntrica (los planetas se mueven en órbitas alrededor del Sol). Su libro *Revolutionibus Orbium Coelestium* («Sobre la Revolución de las Órbitas Celestes») iniciaría la «revolución copernicana» de la ciencia y daría al mundo una nueva palabra, *revolucionario*.

En 1619, el astrónomo alemán Johannes Kepler (*véase* la Figura 9), utilizando los cálculos astronómicos del astrónomo danés Tycho Brahe, demostró que las órbitas de los planetas eran



Figura 9. Johannes Kepler (1571-1630).

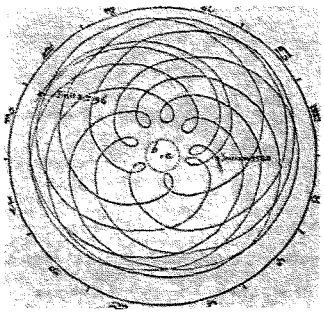


Figura 10. El movimiento de Marte. De la *Astronomia Nova* de Kepler (1609).

en realidad elípticas, las mismas elipses que los griegos habían estudiado como formas abstractas alrededor de 2.000 años antes (*véase* la Figura 10).

Pero la ley de Kepler de las órbitas elípticas no era más que una de las tres leyes que gobiernan el movimiento de los planetas y que él descubrió. La segunda ley de Kepler establece que si un planeta se mueve de un punto A a otro punto B en un tiempo dado T, y se mueve también de A' a B' en el mismo tiempo, y si S es un foco de la órbita elíptica, entonces las secciones SAB y $SA'B'$ tienen áreas iguales (*véase* la Figura 11). La tercera ley de Kepler dice que el cuadrado del tiempo T que un cuerpo planetario necesita para completar una órbita es proporcional a a^3, donde a es el eje mayor de la órbita elíptica. En forma de ecuación, $T^2 = Ka^3$, donde K es una constante (obtendremos esta ley para órbitas circulares en el Capítulo 4).

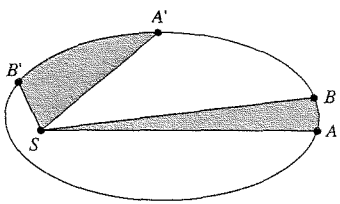


Figura 11. Segunda ley de Kepler.

A pesar de la profundidad de estas observaciones faltaba una explicación de la razón por la cual estas leyes se verificaban. Sin embargo, a mediados del siglo XVII, se entendía con claridad que un cambio en la velocidad requiere la acción de alguna fuerza, pero cómo estas fuerzas podían influir en el movimiento no estaba nada claro. En 1674 Robert Hooke, intentando explicar las leyes de Kepler, supuso la existencia de una fuerza atractiva que el Sol debía ejercer sobre los planetas, una fuerza que decrecía con la distancia planetaria. La teoría de Hooke, sin embargo, era solamente cualitativa.

Newton

El punto importante que faltaba era una definición precisa tanto de velocidad como de aceleración, asunto que se resolvió finalmente con el invento del cálculo por Isaac Newton y por Gottfried Wilhelm Leibniz (*véase* la Figura 12). Hooke nunca llegó a comprender las ideas profundas en que se basaba el cálculo infinitesimal; sin embargo, durante el periodo 1679-1680 Hooke discutió sus ideas con Newton, incluida la de que la fuerza que el Sol ejerce sobre los planetas era inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.



Figura 12. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

Después de que Sir Christopher Wren, astrónomo aficionado, arquitecto de la ciudad de Londres y de la magnífica catedral de St. Paul lanzara el reto público sobre la «determinación teórica» de las órbitas de los planetas, Isaac Newton se interesó seriamente por el problema. Quizás siguiendo algunos rumores, el gran astrónomo inglés Edmund Halley (1656-1743) visitó a Newton en Cambridge, en agosto de 1684, y le preguntó directamente cuál debía ser la órbita de un planeta sometido a una fuerza del inverso del cuadrado. Newton le respondió que debía ser una elipse. Al preguntarle el sorprendido Halley cómo lo sabía, la conocida respuesta de Newton fue «Porque lo he calculado». Halley finalmente presionó a Newton para que publicara sus resultados en un libro y éstos aparecieron en 1686 en los ahora legendarios *Principia* de Newton (*véase* la Figura 13).

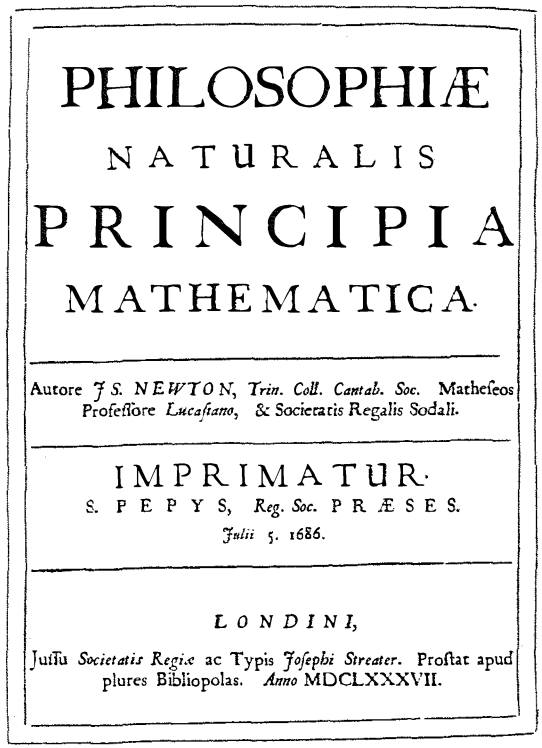
Este libro, a menudo y con justicia citado como fundamento de la ciencia moderna, tuvo un impacto inmediato sorprendente. Alexander Pope escribió:

La Naturaleza y sus leyes yacen ocultas en la noche,
Dios dijo: «Hágase Newton» y se hizo la luz.

En la portada de este libro vemos a Newton sosteniendo un ejemplar abierto de sus *Principia*.

Aunque Newton no utilizó el cálculo en los *Principia*, se han dado razonamientos convincentes de que Newton originalmente utilizó el cálculo para deducir las trayectorias de las órbitas planetarias a partir de la ley del inverso del cuadrado[1]. Los *Principia* aportaban profunda evidencia de que el universo, como los griegos primitivos habían comprendido, estaba de hecho diseñado matemáticamente. Por cierto, fue Newton quien primero conceptualizó la fuerza como un *vector*, aunque no dio una definición formal de lo que era un vector. Una definición formal tendría que esperar a William Rowan Hamilton siglo y medio tras los *Principia*. Fue por este logro y por su creación del cálculo por lo que hemos elegido a Newton para nuestra portada.

[1] Estudiaremos el problema de las órbitas planetarias en la Sección 4.1 y con más detalle en el suplemento de Internet.



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore *J. S. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheſeos Profeſſore *Lucaſiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,
Juſſu *Societatis Regiæ* ac Typis *Joſephi Streater*. Proſtat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

Figura 13. Frontispicio de la impresión con dos líneas de los *Principia*, que lleva la impresión «Prostat apud plures Bibliopolas», que se llama a veces «la primera entrega» de la primera edición. La «versión para la exportación» (con las tres líneas «Prostant Venales apud Sam Smith... aliosq; nonnulos Bibliopolas») se llama la segunda entrega de la primera edición. Esta distinción entre la primera y la segunda entrega parece ser infundada. Se ha sugerido que Halley hizo un acuerdo con Smith respecto a las ventas en el extranjero; de hecho, la mayor parte de las cincuenta copias de Smith parece ser que se vendieron en el continente.

La invención del cálculo y el desarrollo subsiguiente del cálculo vectorial fue el verdadero principio de la ciencia y tecnología modernas que han transformado nuestro mundo de forma tan sorprendente. De las matemáticas de la mecánica de Newton a las profundas construcciones intelectuales de la electrodinámica de Maxwell, de la relatividad de Einstein y de la mecánica cuántica de Heisenberg y de Schrödinger hemos visto los descubrimientos de la radio, la televisión, las comunicaciones sin hilos, el vuelo, los computadores, los viajes espaciales y las incontables maravillas de la ingeniería.

Como trasfondo de estos avances están las matemáticas, una emocionante aventura de la mente y una manifestación sobresaliente del espíritu humano. En este contexto comenzamos nuestro relato del cálculo vectorial.

Requisitos y notación

Damos por sabido el cálculo de funciones de una variable real, incluida la geometría analítica del plano. Algunos estudiantes también pueden haber tenido alguna experiencia con las matrices, aunque lo que necesitaremos de ellas se dará en las Secciones 1.3 y 1.5.

También damos por sabidas las funciones habituales del cálculo elemental: $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, e^x y $\log x$ (escribimos $\log x$ o $\ln x$ para el logaritmo natural, a veces denotado $\log_e x$). El estudiante debe conocer, o repasar según transcurre el curso, las reglas básicas de derivación e integración de funciones de una variable, como la regla de la cadena, la regla del cociente, la integración por partes, etc.

Resumimos a continuación las notaciones que utilizaremos más adelante. El estudiante puede revisarlas ahora de forma rápida y volver a ellas más adelante si lo necesitare.

El conjunto de los números reales se denotará por $\mathbb{R}$. Por tanto $\mathbb{R}$ incluye los ***enteros***, ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...; los ***números racionales***, p/q, donde p y q son enteros ($q \neq 0$); y los ***números irracionales***, como $\sqrt{2}$, π y e. Los elementos de $\mathbb{R}$ se pueden visualizar como puntos de la recta real numérica, como se muestra en la Figura P.1.

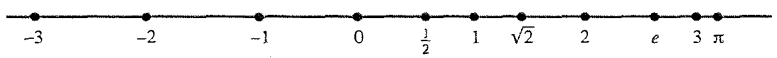


Figura P.1. Representación geométrica de puntos en la recta real numérica.

Al escribir $a \in \mathbb{R}$ queremos decir que a es un elemento del conjunto R, en otras palabras, que a es un número real. Dados dos números reales a y b con $a < b$ (es decir, a menor que b) construimos el ***intervalo cerrado*** $[a, b]$, que consiste de todos los x tales que $a \leqslant x \leqslant b$, y el ***intervalo abierto*** (a, b), que consiste de todos los x tales que $a < x < b$. De igual manera podemos construir los intervalos semiabiertos $(a, b]$ y $[a, b)$ (Figura P.2).

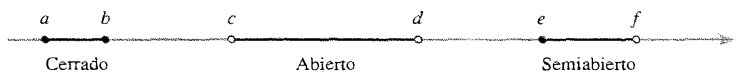


Figura P.2. Representación geométrica de los intervalos $[a, b]$, (c, d) y $[e, f)$.

El ***valor absoluto*** de un número $a \in \mathbb{R}$ se escribe $|a|$ y se define como

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geqslant 0 \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Por ejemplo, $|3| = 3$, $|-3| = 3$, $|0| = 0$ y $|-6| = 6$. La desigualdad $|a + b| \leqslant |a| + |b|$ se verifica siempre. La ***distancia de a a*** b es igual a $|a - b|$. Por tanto la distancia de 6 a 10 es 4 y de -6 a 3 es 9.

Si escribimos $A \subset \mathbb{R}$ queremos decir que A es un ***subconjunto*** de $\mathbb{R}$. Por ejemplo, A podría ser el conjunto de los enteros $\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$. Otro ejemplo de un subconjunto de $\mathbb{R}$ es el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales. En general, dadas dos colecciones de objetos (es decir, conjuntos) A y B, $A \subset B$ quiere decir que A es un subconjunto de B; es decir, cada elemento de A es también un elemento de B.

El símbolo $A \cup B$ representa la ***unión*** de A y B, la colección cuyos elementos son miembros de A o de B (o de ambos). Por tanto

$$\{..., -3, -2, -1, 0\} \cup \{-1, 0, 1, 2, ...\} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, ...\}.$$

De forma análoga, $A \cap B$ es la ***intersección*** de A y B; es decir, el conjunto que consiste en aquellos elementos de A y B que están en A y en B. Por tanto, la intersección de los dos conjuntos anteriores es $\{-1, 0\}$.

Escribiremos $A \backslash B$ para el conjunto de elementos de A que no están en B. Por tanto,

$$\{..., -3, -2, -1, 0\} \backslash \{-1, 0, 1, 2, ...\} = \{..., -3, -2\}.$$

También podemos definir conjuntos como sigue:

$$\{a \in \mathbb{R} \mid a \text{ es un entero}\} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$$

$$\{a \in \mathbb{R} \mid a \text{ es un entero par}\} = \{..., -2, 0, 2, 4, ...\}$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\} = [a, b].$$

Una ***función*** $f: A \to B$ es una regla que asigna a cada $a \in A$ un número específico $f(a)$ de B. Llamamos a A el ***dominio*** de f y a B el ***espacio de llegada*** de f. El conjunto $\{f(x) \mid x \in A\}$ que consiste de todos los valores de $f(x)$ se llama ***rango*** de f; se denota por $f(A)$. El rango es un subconjunto del espacio de llegada B. Puede ser todo B, en cuyo caso se dice que f es una función ***sobre*** B. El hecho de que f envíe a a $f(a)$ se denota por $a \to f(a)$. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3/(1 - x)$ que asigna el número $x^3/(1 - x)$ a cada $x \neq 1$ en $\mathbb{R}$ puede definirse también por medio de la regla $x \to x^3/(1 - x)$. Las funciones también se denominan ***aplicaciones*** o ***transformaciones***. La notación $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ significa que A es un subconjunto de $\mathbb{R}$ y que f asigna un valor $f(x)$ en $\mathbb{R}$ a cada $x \in A$. La gráfica de f es el conjunto de puntos del plano de la forma $(x, f(x))$ (*véase* la Figura P.3).

La notación $\sum_{i=1}^{n} a_i$ significa $a_1 + \cdots + a_n$, donde $a_1, ..., a_n$ son números dados. La suma de los primeros n enteros es:

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

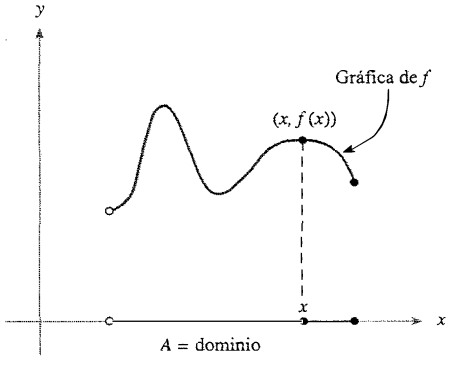


Figura P.3. Gráfica de una función que tiene por dominio el intervalo semiabierto A.

La ***derivada*** de una función $f(x)$ se denota por $f'(x)$ o

$$\frac{df}{dx},$$

y la ***integral definida*** se escribe

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Si escribimos $y = f(x)$, la derivada también se denota por

$$\frac{dy}{dx}.$$

Se supone que el lector está familiarizado con la regla de la cadena, la integración por partes y otros resultados básicos del cálculo de funciones de una variable. En particular, debe saber derivar e integrar la exponencial, el logaritmo y las funciones trigonométricas. Unas tablas concisas de derivadas e integrales, adecuadas a los requisitos del texto, se encuentran en las contraportadas del libro.

Las siguientes notaciones se usarán de forma equivalente: $e^x = \exp x$, $\ln x = \log x$ y $\text{sen}^{-1} x = \text{arcsen}\, x$.

1

La geometría del espacio euclídeo

Los cuaterniones vienen de Hamilton [...] y han sido una verdadera maldición para quienes, de un modo u otro, han tenido alguna relación con ellos. El vector es un superviviente inútil [...] y jamás ha sido de la más mínima utilidad para criatura alguna.

Lord Kelvin

En este capítulo se consideran las operaciones básicas con vectores en los espacios de dos y tres dimensiones: suma de vectores, multiplicación por un escalar, y los productos escalar y vectorial. En la Sección 1.5 se generaliza alguna de estas nociones al espacio de n dimensiones y se repasan las propiedades de las matrices que se necesitarán en los Capítulos 2 y 3.

1.1. Vectores en los espacios de dos y de tres dimensiones

Los puntos P del plano se representan mediante pares ordenados de números reales (a_1, a_2); los números a_1 y a_2 se llaman ***coordenadas cartesianas de*** P. Dibujemos dos rectas perpendiculares, que llamaremos ejes x e y, y tracemos ahora perpendiculares desde P a estos ejes, como en la Figura 1.1.1. Después de designar a la intersección de los ejes x e y como origen y de escoger

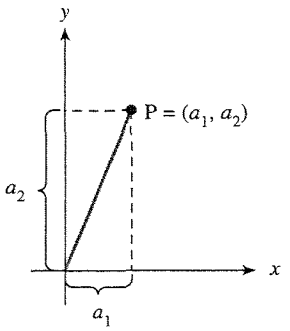


Figura 1.1.1. Coordenadas cartesianas en el plano.

unidades en estos ejes, definimos dos distancias con signo a_1 y a_2 como se muestra en la figura; a_1 es la ***coordenada*** x de P, y a_2 es la ***coordenada*** y.

Los puntos del espacio se pueden representar de forma similar como ternas ordenadas de números reales. Para ello, elegimos tres rectas perpendiculares entre sí que se corten en un punto del espacio. Estas rectas se llaman ***eje*** x, ***eje*** y, y ***eje*** z, y el punto en el que se cortan es el ***origen*** (éste es nuestro punto de referencia). Escogemos una escala en estos ejes, como se muestra en la Figura 1.1.2.

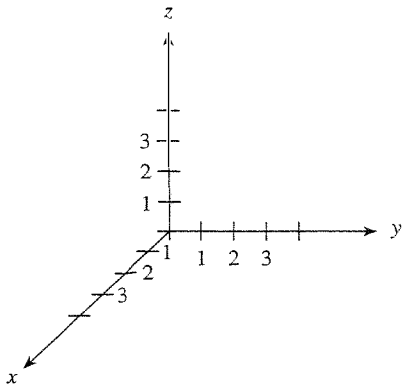


Figura 1.1.2. Coordenadas cartesianas en el espacio.

La terna (0, 0, 0) corresponde al origen del sistema de coordenadas, y las flechas en los ejes indican las direcciones positivas. Por ejemplo, la terna (2, 4, 4) representa un punto que se encuentra a 2 unidades del origen según la dirección positiva del eje x, 4 unidades según la dirección positiva del eje y, y 4 unidades según la dirección positiva del eje z (Figura 1.1.3).

Puesto que de esta manera podemos asociar puntos del espacio con ternas ordenadas, se utiliza con frecuencia la expresión «el punto (a_1, a_2, a_3)» en lugar de esta otra más larga «el punto P que corresponde a la terna (a_1, a_2, a_3)». Decimos que a_1 es la ***coordenada*** x (o primera coordenada), a_2 es la ***coordenada*** y (o segunda coordenada), y a_3 es la ***coordenada*** z (o tercera coordenada) de P. También es frecuente denotar los puntos del espacio con las letras x, y, z en lugar de a_1, a_2, a_3. Así, la terna (x, y, z) representa el punto cuya primera coordenada es x, su segunda coordenada es y, y su tercera coordenada es z.

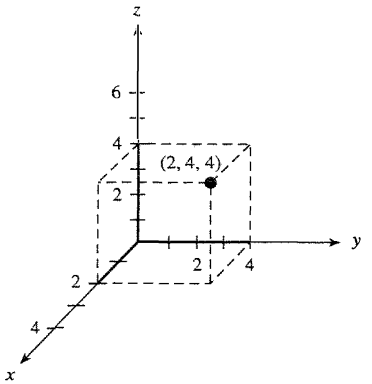


Figura 1.1.3. Representación geométrica del punto (2, 4, 4) en coordenadas cartesianas.

Se empleará la siguiente notación para la recta, el plano y el espacio tridimensional:

i) La recta de los números reales se denota por $\mathbb{R}^1$ o simplemente $\mathbb{R}$.

ii) El conjunto de los pares ordenados (x, y) de números reales se denota $\mathbb{R}^2$.

iii) El conjunto de las ternas ordenadas (x, y, z) de números reales se denota $\mathbb{R}^3$.

Cuando se habla de $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ al mismo tiempo, se escribe $\mathbb{R}^n$, donde $n = 1, 2$ o 3; o $\mathbb{R}^m$, donde $m = 1, 2, 3$. A partir de la Sección 1.5 también se estudiará $\mathbb{R}^n$ para $n = 4, 5, 6, \ldots$, pero los casos $n = 1, 2, 3$ son los más cercanos a nuestra intuición geométrica y se pondrá mayor énfasis en ellos a lo largo del libro.

Suma de vectores y multiplicación por un escalar

La operación de suma se puede extender de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^2$ y a $\mathbb{R}^3$. Para $\mathbb{R}^3$ se hace como sigue. Dadas dos ternas (a_1, a_2, a_3) y (b_1, b_2, b_3), se define su ***suma*** como

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3).$$

EJEMPLO 1.1

$$(1, 1, 1) + (2, -3, 4) = (3, -2, 5),$$
$$(x, y, z) + (0, 0, 0) = (x, y, z),$$
$$(1, 7, 3) + (a, b, c) = (1 + a, 7 + b, 3 + c).$$

El elemento $(0, 0, 0)$ se llama ***elemento cero*** (o simplemente ***cero***) de $\mathbb{R}^3$. El elemento $(-a_1, -a_2, -a_3)$ es el ***opuesto*** de (a_1, a_2, a_3), y se escribirá $(a_1, a_2, a_3) - (b_1, b_2, b_3)$ en lugar de $(a_1, a_2, a_3) + (-b_1, -b_2, -b_3)$.

Cuando se suma un vector con su opuesto, el resultado es cero:

$$(a_1, a_2, a_3) + (-a_1, -a_2, -a_3) = (0, 0, 0).$$

Existen varias e importantes operaciones de multiplicación que se definirán en $\mathbb{R}^3$. Una de éstas, llamada *producto escalar*, asigna un número real a cada par de elementos de $\mathbb{R}^3$. Será estudiado con detalle en la Sección 1.2. Otra operación de multiplicación en $\mathbb{R}^3$ es la llamada

multiplicación por escalares (la palabra «escalar» es aquí un sinónimo de «número real»). Este producto combina escalares (números reales) y elementos de $\mathbb{R}^3$ (ternas ordenadas) para producir elementos de $\mathbb{R}^3$: dado un escalar α y una terna (a_1, a_2, a_3), definimos la ***multiplicación por un escalar*** como

$$\alpha(a_1, a_2, a_3) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3).$$

EJEMPLO 1.2

$$2(4, e, 1) = (2 \cdot 4, 2 \cdot e, 2 \cdot 1) = (8, 2e, 2),$$

$$6(1, 1, 1) = (6, 6, 6),$$

$$1(u, v, w) = (u, v, w),$$

$$0(p, q, r) = (0, 0, 0).$$

La suma de ternas y la multiplicación por un escalar satisfacen las siguientes propiedades:

i)	$(\alpha\beta)(a_1, a_2, a_3) = \alpha[\beta(a_1, a_2, a_3)]$	(asociativa)
ii)	$(\alpha + \beta)(a_1, a_2, a_3) = \alpha(a_1, a_2, a_3) + \beta(a_1, a_2, a_3)$	(distributiva)
iii)	$\alpha[(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3)] = \alpha(a_1, a_2, a_3) + \alpha(b_1, b_2, b_3)$	(distributiva)
iv)	$\alpha(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$	(propiedad del cero)
v)	$0(a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0)$	(propiedad del cero)
vi)	$1(a_1, a_2, a_3) = (a_1, a_2, a_3)$	(propiedad del elemento unidad)

Estas identidades se demuestran directamente a partir de la definición de suma y multiplicación por un escalar. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)(a_1, a_2, a_3) &= ((\alpha + \beta)a_1, (\alpha + \beta)a_2, (\alpha + \beta)a_3) \\ &= (\alpha a_1 + \beta a_1, \alpha a_2 + \beta a_2, \alpha a_3 + \beta a_3) \\ &= \alpha(a_1, a_2, a_3) + \beta(a_1, a_2, a_3).\end{aligned}$$

Para $\mathbb{R}^2$, la suma y la multiplicación por un escalar se definen como en $\mathbb{R}^3$, suprimiendo la tercera componente de cada vector. Todas las propiedades i) a vi) también son válidas.

EJEMPLO 1.3 Interpretar la ecuación química $2NH_2 + H_2 = 2NH_3$ como una ecuación algebraica de pares ordenados.

Solución Se puede pensar en la molécula N_xH_y (x átomos de nitrógeno, y átomos de hidrógeno) como el par ordenado (x, y). Entonces, la ecuación química dada es equivalente a $2(1, 2) + (0, 2) = 2(1, 3)$. Claramente, ambos lados de la igualdad son iguales a $(2, 6)$.

La geometría de las operaciones vectoriales

Volvamos a la geometría de estas operaciones en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Por el momento, definiremos un **vector** como un segmento recto con punto inicial en el origen, y con dirección y tamaño especificados. La Figura 1.1.4 muestra diferentes vectores, dibujados con flechas que empiezan en el origen. En los textos, los vectores se suelen denotar usualmente con letras en negrita, como **a**. Cuando se escribe a mano, se suelen denotar como $\vec{a}$ o simplemente como a, a veces con una línea recta u ondulada debajo.

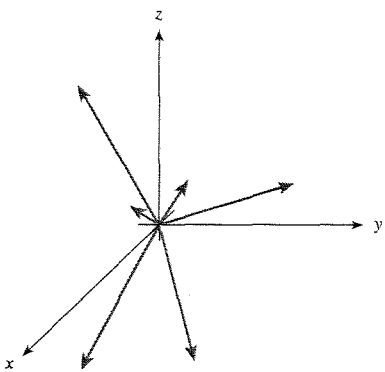


Figura 1.1.4. Geométricamente, los vectores se identifican con flechas que parten del origen.

Usando esta definición de vector, podemos asociar a cada vector **a** el punto (a_1, a_2, a_3) donde termina **a** y, recíprocamente, cada punto (a_1, a_2, a_3) del espacio se puede asociar con un vector **a**. De este modo, identificaremos **a** con (a_1, a_2, a_3) y escribiremos $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Por esta razón, los elementos de $\mathbb{R}^3$ no son sólo ternas ordenadas de números reales sino también vectores. La terna (0, 0, 0) se denota $\mathbf{0}$. Llamamos a a_1, a_2 y a_3 las ***componentes*** de **a** y, cuando lo pensamos como un punto, sus ***coordenadas***.

Dos vectores $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ son iguales si y sólo si $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ y $a_3 = b_3$. Geométricamente esto significa que **a** y **b** tienen el mismo sentido y la misma longitud (o «tamaño»).

La suma de vectores se define geométricamente como sigue. En el plano que contiene a los vectores $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ (*véase* la Figura 1.1.5), se forma el paralelogramo cuyos lados adyacentes son **a** y **b**. La suma **a** + **b** es el segmento que parte del origen y recorre la diagonal del paralelogramo.

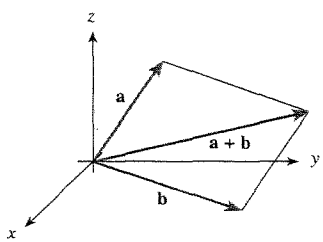


Figura 1.1.5. La geometría de la suma de vectores.

Esta interpretación geométrica de la suma de vectores es útil en muchas situaciones físicas, como se verá en la sección siguiente. Para tener un ejemplo fácil de visualizar, considérese un pájaro o un avión volando con velocidad $\mathbf{v}_1$ a favor del viento, que tiene velocidad $\mathbf{v}_2$. La velocidad resultante, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, es la que uno ve; *véase* la Figura 1.1.6.

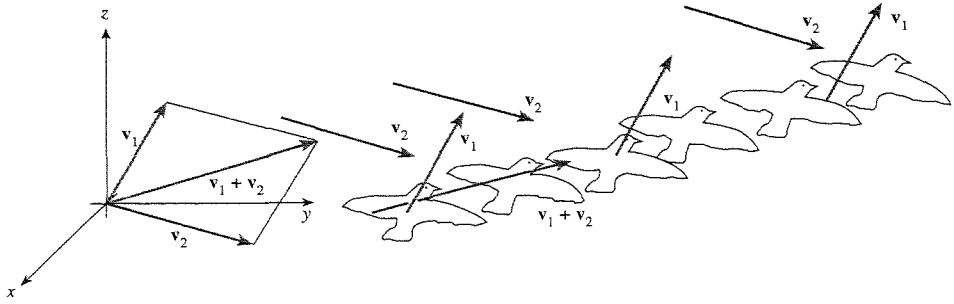


Figura 1.1.6. Interpretación física de la suma de vectores.

Para demostrar que nuestra definición geométrica de suma es consistente con la definición algebraica, probaremos que $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$. Demostraremos este resultado en el plano y dejaremos al lector la demostración en el caso del espacio tridimensional. De modo que vamos a demostrar que si $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ y $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, entonces $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$.

En la Figura 1.1.7 sea $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ el vector que termina en el punto A y sea $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ el vector que termina en el punto B. De acuerdo con la definición, el vector $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ termina en el vértice C del paralelogramo OBCA. Para comprobar que $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, basta probar que las coordenadas de C son $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$. Los lados de los triángulos OAD y BCG son paralelos, y los lados OA y BC tienen igual longitud, lo que escribimos OA = BC. Estos triángulos son semejantes, luego BG = OD; como BGFE es un rectángulo, EF = BG. Además, $OD = a_1$ y $OE = b_1$. De aquí que $EF = BG = OD = a_1$. Como OF = EF + OE, se tiene que $OF = a_1 + b_1$. Esto demuestra que la coordenada x de $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ es $a_1 + b_1$. La prueba de que la coordenada y es $a_2 + b_2$ es análoga. En este razonamiento se ha supuesto que A y B están en el primer cuadrante; en los demás casos se pueden utilizar argumentos similares.

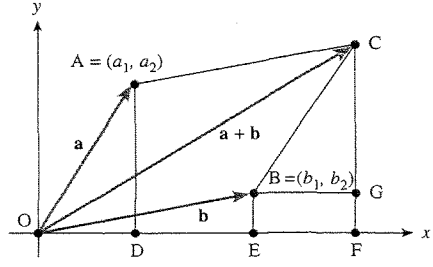


Figura 1.1.7. Construcción usada para probar que $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$.

La Figura 1.1.8(a) ilustra otra manera de ver la suma de vectores, con triángulos en lugar de paralelogramos: se traslada, sin girarlo, el segmento que representa el vector $\mathbf{b}$ para que empiece

donde termina el vector **a**. El punto donde termina este segmento trasladado es el punto donde termina el vector **a** + **b**. Obsérvese que cuando **a** y **b** son colineales, el triángulo se reduce a un segmento, como se ilustra en la Figura 1.1.8(b).

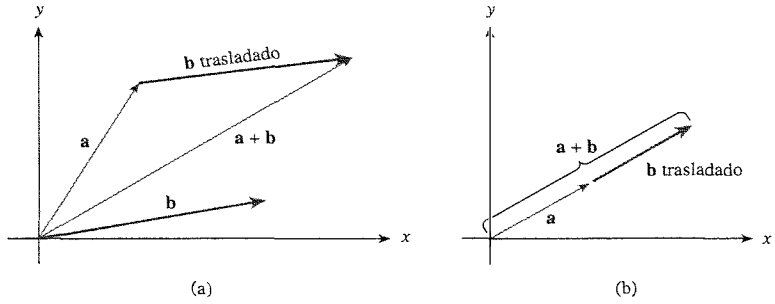


Figura 1.1.8. (a) La suma de vectores se puede visualizar usando triángulos, así como con paralelogramos. (b) El triángulo se reduce a un segmento cuando **a** y **b** son colineales.

En la Figura 1.1.8 hemos colocado **a** y **b** *final con inicio*. Esto es, el inicio de **b** está situado en el final de **a**, y el vector **a** + **b** va del inicio de **a** al final de **b**. Si hacemos esto en orden inverso, **b** + **a**, obtenemos el mismo vector recorriendo el paralelogramo por el otro camino. De acuerdo con esta figura, es útil dejar que los vectores «resbalen» o «se deslicen» manteniendo su tamaño y sentido. De hecho, vamos a considerar que dos vectores son *iguales* si tienen el mismo tamaño y sentido. Cuando se insista acerca de vectores que tienen su inicio en el origen, diremos que tenemos ***vectores fijos***. Si admitimos que los vectores empiecen en otros puntos, hablaremos de ***vectores libres*** o simplemente ***vectores***.

Vectores Los vectores (llamados también *vectores libres*) son segmentos de recta dirigidos en el [plano o] espacio, con un inicio (origen) y un final (extremo). Dos de estos segmentos que se obtengan uno de otro mediante una traslación paralela (pero sin rotación) representarán el mismo vector.

Las componentes (a_1, a_2, a_3) son las longitudes (con signo) de las proyecciones de **a** sobre los ejes coordenados; de modo equivalente, quedan definidas colocando el inicio de **a** en el origen y su final es precisamente (a_1, a_2, a_3). Escribiremos $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

La suma de dos vectores se obtiene colocándolos final con inicio y trazando el vector que va del inicio del primero al final del segundo, como se muestra en la Figura 1.1.8.

La multiplicación de vectores por un escalar tiene también una interpretación geométrica. Si α es un escalar y **a** un vector, se define $\alpha\mathbf{a}$ como el vector cuya longitud es $|\alpha|$ veces la longitud de **a** y cuyo sentido es el mismo de **a** si $\alpha > 0$ y opuesto si $\alpha < 0$. La Figura 1.1.9 lo ilustra con varios ejemplos.

Usando argumentos basados en triángulos semejantes encontramos que si $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, y α es un escalar, entonces

$$\alpha\mathbf{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3).$$

Esto es, la definición geométrica coincide con la algebraica.

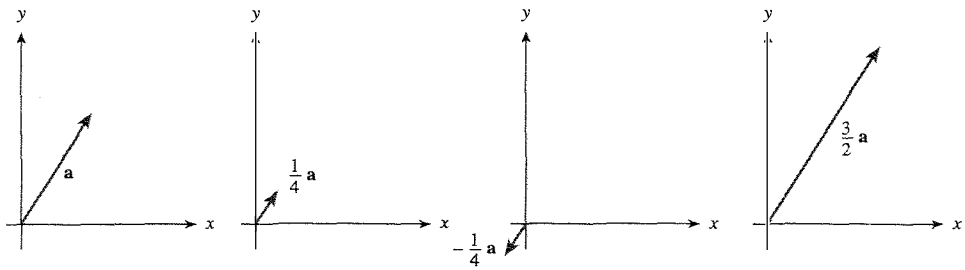


Figura 1.1.9. Algunos múltiplos escalares del vector **a**.

Dados dos vectores **a** y **b**, ¿cómo representamos el vector **b** − **a** geométricamente?, es decir, ¿cuál es la geometría de la resta de vectores? Como **a** + (**b** − **a**) = **b**, vemos que **b** − **a** es el vector que hay que sumar a **a** para obtener **b**. En vista de esto, podemos concluir que **b** − **a** es paralelo y tiene la misma longitud que el segmento que empieza en el final de **a** y termina en el final de **b** cuando **a** y **b** empiezan en el mismo punto (*véase* la Figura 1.1.10).

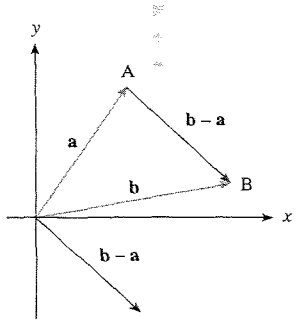


Figura 1.1.10. La geometría de la resta de vectores.

EJEMPLO 1.4 Sean **u** y **v** los vectores que aparecen en la Figura 1.1.11. Trácense los dos vectores **u** + **v** y −2**u**. ¿Cuáles son sus componentes?

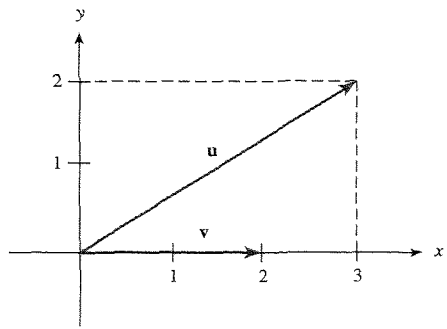


Figura 1.1.11. Hallar **u** + **v** y −2**u**.

Solución Basta colocar el inicio de **v** en el final de **u** para obtener el vector que se muestra en la Figura 1.1.12.

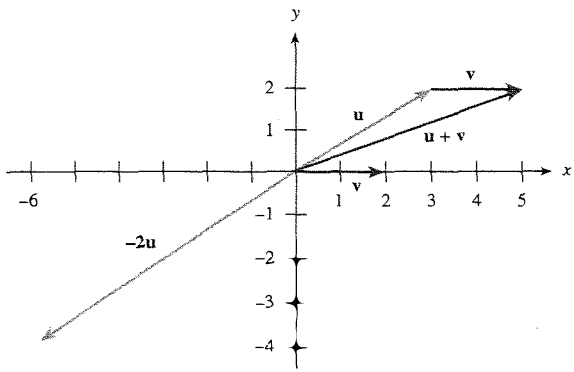


Figura 1.1.12. Cálculo de $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $-2\mathbf{u}$.

El vector $-2\mathbf{u}$, que también aparece dibujado, tiene dos veces la longitud de **u** y apunta en el sentido opuesto. De acuerdo con la figura, vemos que el vector $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ tiene componentes (5, 2) y $-2\mathbf{u}$ tiene componentes $(-6, -4)$.

EJEMPLO 1.5

a) Dibujar $-2\mathbf{v}$, donde **v** tiene como componentes $(-1, 1, 2)$.

b) Si **v** y **w** son dos vectores cualesquiera, probar que $\mathbf{v} - \frac{1}{3}\mathbf{w}$ y $3\mathbf{v} - \mathbf{w}$ son paralelos.

Solución

a) El vector $-2\mathbf{v}$ tiene dos veces la longitud de **v** pero apunta en el sentido opuesto (*véase* la Figura 1.1.13).

b) $\mathbf{v} - \frac{1}{3}\mathbf{w} = \frac{1}{3}(3\mathbf{v} - \mathbf{w})$; los vectores que son múltiplos uno del otro son paralelos.

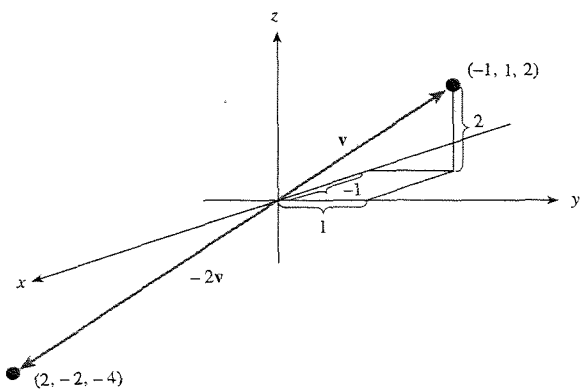


Figura 1.1.13. Multiplicación de $(-1, 1, 2)$ por -2.

Los vectores de la base canónica

Para representar vectores en el espacio es conveniente introducir tres vectores especiales sobre los ejes x, y, z:

$\mathbf{i}$: el vector de componentes (1, 0, 0),

$\mathbf{j}$: el vector de componentes (0, 1, 0),

$\mathbf{k}$: el vector de componentes (0, 0, 1).

Estos ***vectores de la base canónica*** están dibujados en la Figura 1.1.14. En el plano se tiene la base canónica $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ de componentes (1, 0) y (0, 1).

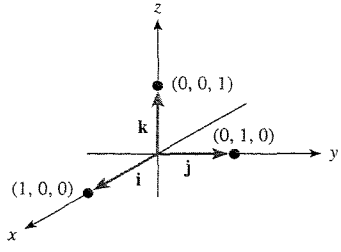


Figura 1.1.14. Los vectores de la base canónica.

Sea $\mathbf{a}$ cualquier vector y sean (a_1, a_2, a_3) sus componentes. Entonces

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k},$$

ya que el lado derecho, en componentes, está dado por

$$a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1) = (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3)$$
$$= (a_1, a_2, a_3).$$

Por tanto, cada vector se puede expresar como suma de múltiplos escalares de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$.

Los vectores de la base canónica

1. Los vectores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ son vectores unitarios a lo largo de cada uno de los ejes de coordenadas, como se muestra en la Figura 1.1.14.
2. Si $\mathbf{a}$ tiene componentes (a_1, a_2, a_3), entonces

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}.$$

EJEMPLO 1.6 Escribir el vector cuyas componentes son $(e, \pi, -\sqrt{3})$ en función de la base canónica.

Solución

Sustituyendo $a_1 = e$, $a_2 = \pi$, y $a_3 = -\sqrt{3}$ en $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ se tiene

$$\mathbf{v} = e\mathbf{i} + \pi\mathbf{j} - \sqrt{3}\mathbf{k}$$

EJEMPLO 1.7 El vector (2, 3, 2) es igual a $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y el vector $(0, -1, 4)$ es $-\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$. La Figura 1.1.15 muestra el vector $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$; el estudiante debe trazar el vector $-\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

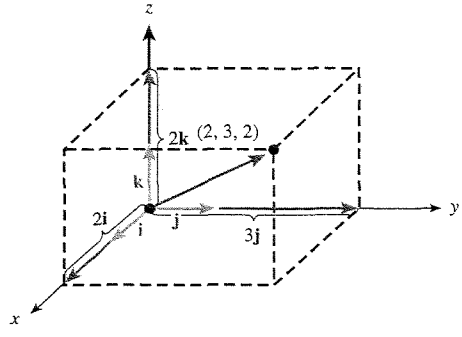


Figura 1.1.15. Representación de (2, 3, 2) en función de los vectores **i**, **j** y **k** de la base canónica.

La suma de vectores y la multiplicación por escalares pueden escribirse usando los vectores de la base canónica del siguiente modo:

$$(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) + (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) = (a_1 + b_1)\mathbf{i} + (a_2 + b_2)\mathbf{j} + (a_3 + b_3)\mathbf{k}$$

y,

$$\alpha(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) = (\alpha a_1)\mathbf{i} + (\alpha a_2)\mathbf{j} + \alpha(a_3)\mathbf{k}.$$

El vector que une dos puntos

Para emplear vectores en problemas geométricos es útil asignar a cada vector un *par* de puntos del plano o del espacio, del siguiente modo. Dados dos puntos P y P′, podemos trazar el vector **v** con inicio en P y final en P′, como se muestra en la Figura 1.1.16, donde escribimos $\overrightarrow{PP'}$ en lugar de **v**.

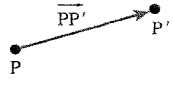


Figura 1.1.16. El vector que va de P a P′ se denota como $\overrightarrow{PP'}$.

Si $P = (x, y, z)$ y $P' = (x', y', z')$, entonces los vectores que van del origen a P y P′ son $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y $\mathbf{a}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}$, respectivamente, de modo que el vector $\overrightarrow{PP'}$ es la diferencia $\mathbf{a}' - \mathbf{a} = (x' - x)\mathbf{i} + (y' - y)\mathbf{j} + (z' - z)\mathbf{k}$. (*Véase* la Figura 1.1.17.)

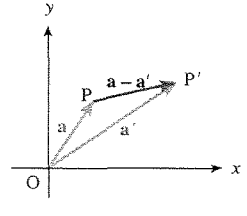


Figura 1.1.17. $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP}$.

El vector que une dos puntos Si el punto P tiene coordenadas (x, y, z) y P′ tiene coordenadas (x', y', z'), entonces el vector $\overrightarrow{PP'}$ que tiene inicio en P y final en P′ tiene componentes $(x' - x, y' - y, z' - z)$.

EJEMPLO 1.8

a) Hallar las componentes del vector que va de (3, 5) a (4, 7).

b) Sumar el vector **v** que va de $(-1, 0)$ a (2, 3) con el vector **w** que va de (2, 0) a (1, 1).

c) Multiplicar el vector **v** de (b) por 8. Si el vector resultante se representa como el vector que une (5, 6) con Q, ¿quién es Q?

Solución

a) Como en el recuadro anterior, restamos los pares ordenados: $(4, 7) - (3, 5) = (1, 2)$. Así, las coordenadas buscadas son (1, 2).

b) El vector **v** tiene componentes $(2, -3) - (-1, 0) = (3, -3)$, y **w** tiene componentes $(1, 1) - (2, 0) = (-1, 1)$. Por tanto, el vector $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ tiene componentes $(3, -3) + (-1, 1) = (2, -2)$.

c) El vector $8\mathbf{v}$ tiene componentes $8(3, -3) = (24, -24)$. Si este vector se representa mediante el vector que une (5, 6) con Q, y Q tiene coordenadas (x, y), entonces $(x, y) - (5, 6) = (24, -24)$, de modo que $(x, y) = (5, 6) + (24, -24) = (29, -18)$.

EJEMPLO 1.9 Sean $P = (-2, -1)$, $Q = (-3, -3)$ y $R = (-1, -4)$ puntos en el plano xy.

a) Trazar los vectores: **v** que une P y Q; **w** que une Q con R; **u** que une R con P.

b) ¿Cuáles son las coordenadas de **v**, **w**, y **u**?

c) ¿Cuál es el vector $\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{u}$?

Solución

a) *Véase* la Figura 1.1.18.

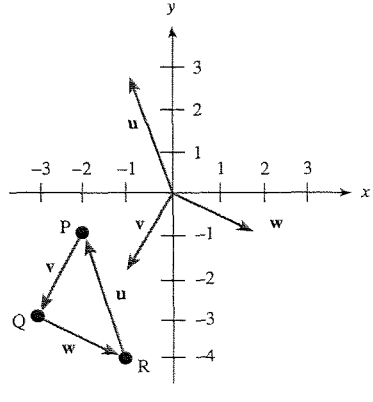


Figura 1.1.18. El vector **v** que une P con Q; **w** que une Q con R y **u** que une R con P.

ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA

b) Como $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$, $\mathbf{w} = \overrightarrow{QR}$ y $\mathbf{u} = \overrightarrow{RP}$, se tiene

$$\mathbf{v} = (-3, -3) - (-2, -1) = (-1, -2),$$
$$\mathbf{w} = (-1, -4) - (-3, -3) = (2, -1),$$
$$\mathbf{u} = -(-1, -4) + (-2, -1) = (-1, 3).$$

c) $\mathbf{v} + \mathbf{w} + \mathbf{u} = (-1, -2) + (2, -1) + (-1, 3) = (0, 0)$.

Teoremas de geometría con métodos vectoriales

Muchos de los teoremas de la geometría plana se pueden demostrar usando vectores. Éste es un ejemplo.

EJEMPLO 1.10 Utilizar vectores para probar que cada diagonal de un paralelogramo corta a la otra en su punto medio.

Solución

Sea OPQR el paralelogramo con dos lados adyacentes representados por los vectores $\mathbf{a} = \overrightarrow{OP}$ y $\mathbf{b} = \overrightarrow{OQ}$. Sea M el punto medio de la diagonal OR y N el punto medio de la otra diagonal, PQ. (*Véase* la Figura 1.1.19.)

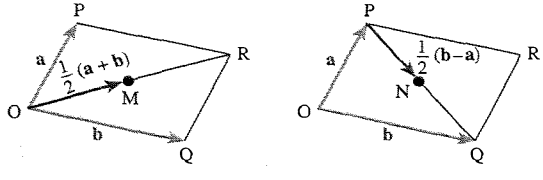


Figura 1.1.19. Hay que probar que los puntos medios M y N coinciden.

Obsérvese que $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ por la regla del paralelogramo de la suma de vectores, de modo que $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$. Por otro lado,

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \mathbf{b} - \mathbf{a}, \qquad \text{luego} \qquad \overrightarrow{PN} = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}),$$

y, por tanto,

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PN} = \mathbf{a} + \tfrac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

Puesto que $\overrightarrow{OM}$ y $\overrightarrow{ON}$ son vectores iguales, los puntos M y N coinciden, de manera que las diagonales se cortan en sus puntos medios.

Ecuaciones de rectas

Los planos y las rectas son objetos geométricos que se pueden representar mediante ecuaciones. Se postergará a la Sección 1.3 el estudio de las ecuaciones que representan planos. Sin embargo, usando la interpretación geométrica de la suma de vectores y la multiplicación por escalares, se

estudiará ahora la *ecuación de una recta l que pasa por el extremo del vector* **a** *y tiene la dirección del vector* **v** (*véase* la Figura 1.1.20).

Conforme t recorre el conjunto de los números reales los puntos de la forma $t\mathbf{v}$ son todos los múltiplos del vector **v** y, por tanto, recorren todos los puntos de la recta *que pasa por el origen* y tiene la dirección de **v**. Como cada punto de la recta l es el final de la diagonal de un paralelogramo con lados **a** y $t\mathbf{v}$ para algún valor real de t, se comprueba que todos los puntos de l son de la forma $\mathbf{a} + t\mathbf{v}$. Por tanto, la recta l se puede expresar mediante la ecuación $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$. Se dirá, en este caso, que l está expresada **paramétricamente**, con parámetro t. En $t = 0$, $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a}$. Según t va creciendo, el punto $\mathbf{l}(t)$ se mueve alejándose de **a** en el sentido que marca **v**.

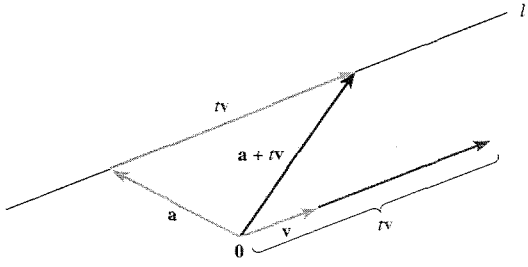


Figura 1.1.20. La recta l, dada en forma paramétrica por $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$, tiene la dirección de **v** y pasa por el extremo de **a**.

Conforme t decrece desde $t = 0$ tomando valores negativos, $\mathbf{l}(t)$ se mueve alejándose de **a** en el sentido de $-\mathbf{v}$.

Forma punto-vector director de una recta La ecuación de la recta l que pasa por el extremo de **a** y tiene la dirección del vector **v** es $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$, donde el parámetro t toma todos los valores reales. Usando coordenadas, las ecuaciones son

$$x = x_1 + at,$$
$$y = y_1 + bt,$$
$$z = z_1 + ct,$$

donde $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{v} = (a, b, c)$. Para rectas en el plano xy no es necesario escribir la componente z.

EJEMPLO 1.11 Determinar la ecuación de la recta l que pasa por el punto (1, 0, 0) y tiene la dirección de **j** (*véase* la Figura 1.1.21).

Solución

La recta deseada se puede expresar paramétricamente como $\mathbf{l}(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j}$. Usando coordenadas,

$$\mathbf{l}(t) = (1, 0, 0) + t(0, 1, 0) = (1, t, 0).$$

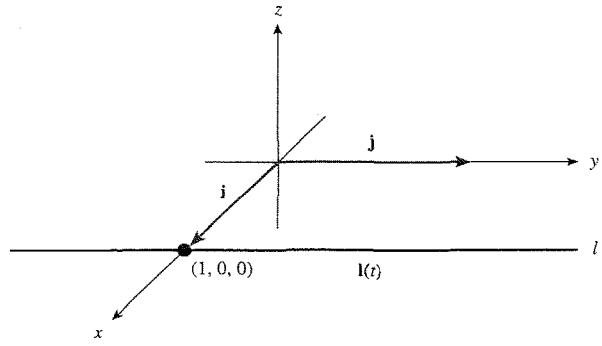


Figura 1.1.21. La recta l pasa por el extremo de $\mathbf{i}$ en la dirección de $\mathbf{j}$.

EJEMPLO 1.12

a) Encontrar las ecuaciones de la recta en el espacio que pasa por el punto $(3, -1, 2)$ y tiene dirección $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

b) Encontrar la ecuación de la recta en el plano que pasa por el punto $(1, -6)$ y tiene dirección $5\mathbf{i} - \pi\mathbf{j}$.

c) ¿Qué dirección tiene la recta $x = -3t + 2$, $y = -2(t - 1)$, $z = 8t + 2$?

Solución

a) Aquí $\mathbf{a} = (3, -1, 2) = (x_1, y_1, z_1)$ y $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, de modo que $a = 2$, $b = -3$ y $c = 4$. Entonces, las ecuaciones son

$$x = 3 + 2t, \qquad y = -1 - 3t, \qquad z = 2 + 4t.$$

b) Ahora $\mathbf{a} = (1, -6)$ y $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - \pi\mathbf{j}$, de modo que la recta buscada es

$$\mathbf{l}(t) = (1, -6) + (5t, -\pi t) = (1 + 5t, -6 - \pi t);$$

o también

$$x = 1 + 5t, \qquad y = -6 - \pi t.$$

c) Fijándonos en el recuadro anterior, construimos el vector $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ usando los coeficientes de t: $a = -3$, $b = -2$, $c = 8$. Por tanto, la dirección de la recta es $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$.

EJEMPLO 1.13 ¿Se intersecan las rectas $(x, y, z) = (t, -6t + 1, 2t - 8)$ y $(x, y, z) = (3t + 1, 2t, 0)$?

Solución

Si las rectas se intersecan, debe haber dos números t_1 y t_2 tales que los puntos correspondientes sean iguales:

$$(t_1, -6t_1 + 1, 2t_1 - 8) = (3t_2 + 1, 2t_2, 0);$$

es decir, deben satisfacer estas tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} t_1 &= 3t_2 + 1, \\ -6t_1 + 1 &= 2t_2, \\ 2t_1 - 8 &= 0. \end{aligned}$$

De la tercera ecuación, $t_1 = 4$. La primera ecuación se convierte entonces en $4 = 3t_2 + 1$ y, así, $t_2 = 1$. Hemos de comprobar si estos valores satisfacen la segunda ecuación:

$$-6t_1 + 1 \stackrel{?}{=} 2t_2.$$

Como $t_1 = 4$ y $t_2 = 1$, entonces

$$-24 + 1 \stackrel{?}{=} 2,$$

que es falso, de modo que las rectas no se intersecan.

Nótese que puede haber muchas ecuaciones para una misma recta. Algunas se pueden obtener eligiendo, en lugar de **a**, otro punto diferente de la recta y escribiendo la ecuación paramétrica de la recta que pasa por este nuevo punto y tiene la dirección **v**. Por ejemplo, el extremo de $\mathbf{a} + \mathbf{v}$ está en la recta $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$ y, por tanto, $\mathbf{l}_1(t) = (\mathbf{a} + \mathbf{v}) + t\mathbf{v}$ representa la misma recta. También se pueden obtener nuevas ecuaciones observando que si $\alpha \neq 0$, el vector $\alpha\mathbf{v}$ tiene el mismo (u opuesto) sentido que **v**. Así, $\mathbf{l}_2(t) = \mathbf{a} + t\alpha\mathbf{v}$ es otra ecuación de la recta $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$.

Por ejemplo, las ecuaciones $\mathbf{l}(t) = (1, 0, 0) + (t, t, 0)$ y $\mathbf{l}_1(s) = (0, -1, 0) + (s, s, 0)$ representan la misma recta ya que ambas tienen la misma dirección $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y ambas pasan por el punto $(1, 0, 0)$; $\mathbf{l}$ pasa por $(1, 0, 0)$ en $t = 0$ y $\mathbf{l}_1$ pasa por $(1, 0, 0)$ en $s = 1$.

Por tanto, la ecuación de una recta no está determinada de forma única, a pesar de lo cual es costumbre utilizar el término «la» ecuación. Teniendo esto en cuenta, deduzcamos la *ecuación de una recta que pasa por los extremos de dos vectores* **a** *y* **b**. Como el vector $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ es paralelo al vector que une el extremo de **a** con el de **b**, calculamos la ecuación paramétrica de la recta que pasa por **a** y tiene dirección $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ (Figura 1.1.22). Así,

$$\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}); \qquad \text{o, también,} \qquad \mathbf{l}(t) = (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}.$$

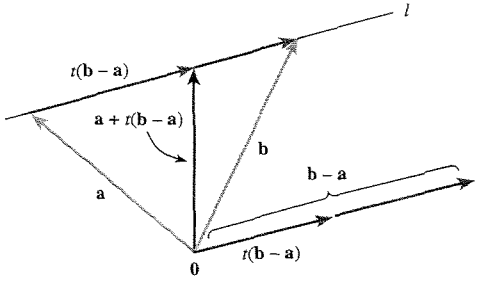


Figura 1.1.22. La recta *l*, dada en forma paramétrica por $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (1 - t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$, pasa por los extremos de **a** y **b**.

Conforme t crece de 0 a 1, $t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ empieza como el vector cero y crece en longitud (manteniendo la dirección de $\mathbf{b} - \mathbf{a}$) hasta que en $t = 1$ es el vector $\mathbf{b} - \mathbf{a}$. Así, para $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$,

según t crece de 0 a 1, el vector $\mathbf{l}(t)$ se mueve desde el extremo de $\mathbf{a}$ al extremo de $\mathbf{b}$ a lo largo del segmento que une ambos puntos.

Si $P = (x_1, y_1, z_1)$ es el extremo de $\mathbf{a}$ y $Q = (x_2, y_2, z_2)$ es el extremo de $\mathbf{b}$, entonces $\mathbf{v} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}$, de modo que las ecuaciones de la recta son

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t,$$
$$y = y_1 + (y_2 - y_1)t,$$
$$z = z_1 + (z_2 - z_1)t.$$

Eliminando t, estas ecuaciones se pueden escribir como

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Ecuación paramétrica de una recta que pasa por dos puntos La ecuación paramétrica de la recta l que pasa por los puntos $P = (x_1, y_1, z_1)$ y $Q = (x_2, y_2, z_2)$ es

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \\ z = z_1 + (z_2 - z_1)t, \end{cases}$$

donde (x, y, z) es un punto genérico de la recta l, y el parámetro t recorre todos los números reales.

EJEMPLO 1.14 Encontrar la ecuación de la recta que pasa por $(2, 1, -3)$ y $(6, -1, -5)$.

Solución

Haciendo uso del recuadro anterior, elegimos $(x_1, y_1, z_1) = (2, 1, -3)$ y $(x_2, y_2, z_2) = (6, -1, -5)$, de manera que las ecuaciones son

$$x = 2 + (6 - 2)t = 2 + 4t,$$
$$y = 1 + (-1 - 1)t = 1 - 2t,$$
$$z = -3 + (-5 - (-3))t = -3 - 2t.$$

EJEMPLO 1.15 Encontrar la ecuación de la recta que pasa por $(-1, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ (*véase* la Figura 1.1.23).

Solución

Si representamos los puntos dados como $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{k}$, tenemos

$$\mathbf{l}(t) = (1 - t)(-\mathbf{i} + \mathbf{j}) + t\mathbf{k} = -(1 - t)\mathbf{i} + (1 - t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}.$$

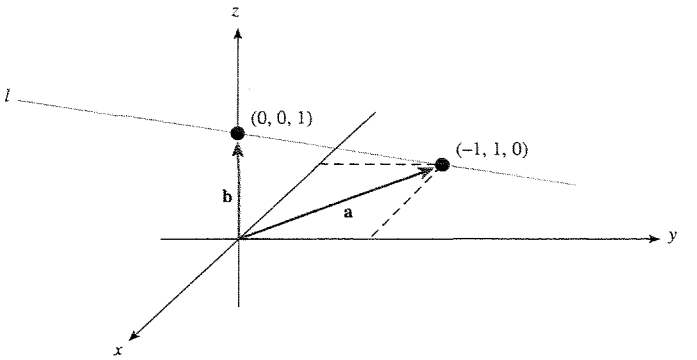


Figura 1.1.23. Forma de hallar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos.

La ecuación de esta recta se puede escribir por tanto como

$$\mathbf{l}(t) = (t - 1)\mathbf{i} + (1 - t)\mathbf{j} + t\mathbf{k},$$

o, equivalentemente, si $\mathbf{l}(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$,

$$x = t - 1, \qquad y = 1 - t, \qquad z = t.$$

La descripción de un *segmento* de recta requiere que el conjunto de valores que toma t esté restringido, como en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1.16 Encontrar la ecuación del segmento que une (1, 1, 1) con (2, 1, 2).

Solución

La *recta* que pasa por (1, 1, 1) y (2, 1, 2) se describe en forma paramétrica como $(x, y, z) = (1 + t, 1, 1 + t)$, donde t toma todos los valores reales. Cuando $t = 0$, el punto (x, y, z) es (1, 1, 1), y cuando $t = 1$, el punto (x, y, z) es (2, 1, 2). Por tanto, el punto (x, y, z) se encuentra entre (1, 1, 1) y (2, 1, 2) cuando $0 \leqslant t \leqslant 1$, de modo que el *segmento* se describe mediante las ecuaciones

$$x = 1 + t,$$

$$y = 1,$$

$$z = 1 + t,$$

junto con las desigualdades $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Además de las rectas, también podemos describir de forma paramétrica otros objetos geométricos.

EJEMPLO 1.17 Describir los puntos que están en el paralelogramo cuyos lados adyacentes son los vectores **a** y **b** con punto inicial en el origen (incluyendo los puntos que están en los lados del paralelogramo).

Solución

Observemos la Figura 1.1.24. Si P es cualquier punto dentro del paralelogramo y trazamos rectas l_1 y l_2 que pasan por P y son paralelas a los vectores **a** y **b**, respectivamente, vemos que l_1 interseca el lado del paralelogramo determinado por el vector **b** en algún punto $t\mathbf{b}$, donde $0 \leqslant t \leqslant 1$. Del mismo modo, l_2 interseca el lado determinado por el vector **a** en algún punto $s\mathbf{a}$, donde $0 \leqslant s \leqslant 1$.

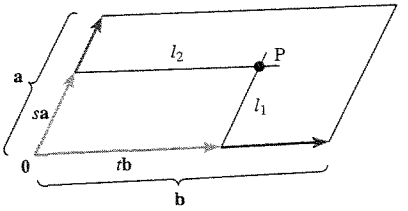


Figura 1.1.24. Descripción de los puntos que están dentro del paralelogramo formado por los vectores **a** y **b**, con vértice **0**.

Nótese que P es el final de la diagonal de un paralelogramo que tiene como lados adyacentes $s\mathbf{a}$ y $t\mathbf{b}$; por tanto, si **v** es el vector $\overrightarrow{OP}$, vemos que $\mathbf{v} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$. Así, todos los puntos que están en el paralelogramo dado son finales de vectores de la forma $s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ con $0 \leqslant s \leqslant 1$ y $0 \leqslant t \leqslant 1$. Invirtiendo los pasos anteriores vemos que todos los vectores de esta forma terminan dentro del paralelogramo.

Del mismo modo que dos rectas distintas que pasan por el origen determinan un plano que las contiene, así sucede con dos vectores que no sean paralelos. Si aplicamos el mismo razonamiento que en el Ejemplo 1.17, vemos que el plano que contiene a los dos vectores no paralelos **v** y **w** consta de todos los puntos de la forma $s\mathbf{v} + t\mathbf{w}$ donde s y t pueden tomar cualquier valor real, como se puede ver en la Figura 1.1.25.

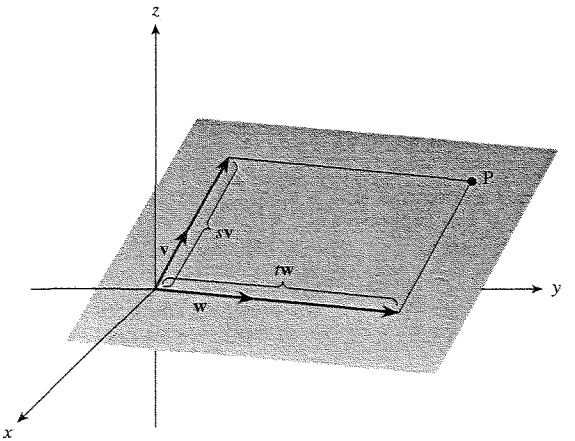


Figura 1.1.25. Descripción de los puntos P del plano determinado por los vectores **v** y **w**.

Hemos descrito los puntos de un plano por medio de dos parámetros. Por esta razón, decimos que el plano tiene dos dimensiones. Del mismo modo, se dice que una recta tiene una dimensión, ya esté en el plano, en el espacio o se trate de la recta de los números reales.

El plano que pasa por el origen y contiene a $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ se llama plano **generado por** $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. Cuando $\mathbf{v}$ es un múltiplo escalar de $\mathbf{w}$ y $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son paralelos y el plano degenera en una línea recta. Cuando $\mathbf{v} = \mathbf{w} = \mathbf{0}$ (esto es, ambos son el vector cero), obtenemos un solo punto.

Existen tres planos particulares que aparecen de forma natural en un sistema de coordenadas y que serán útiles más adelante. Al plano generado por los vectores $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ se le llama plano xy, el plano generado por $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ es el plano yz y, finalmente, el plano generado por $\mathbf{i}$ y $\mathbf{k}$ es el plano xz. Pueden verse estos planos en la Figura 1.1.26.

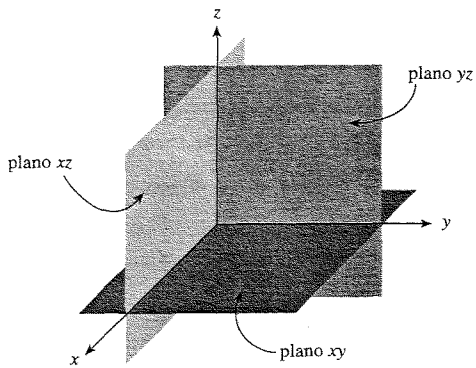


Figura 1.1.26. Los tres planos coordenados.

EJERCICIOS

Completar los cálculos en los ejercicios del 1 al 4.

1. $(-21, 23) - (?, 6) = (-25, ?)$.

2. $3(133, -0{,}33, 0) + (-399, 0{,}99, 0) = (?, ?, ?)$.

3. $(8a, -2b, 13c) = (52, 12, 11) + \frac{1}{2}(?, ?, ?)$.

4. $(2, 3, 5) - 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} = (?, ?, ?)$.

En los ejercicios del 5 al 8, dibujar los vectores dados $\mathbf{v}$ *y* $\mathbf{w}$. *En el mismo dibujo, trazar los vectores* $-\mathbf{v}$, $\mathbf{v} + \mathbf{w}$, *y* $\mathbf{v} - \mathbf{w}$.

5. $\mathbf{v} = (2, 1)$ y $\mathbf{w} = (1, 2)$.

6. $\mathbf{v} = (0, 4)$ y $\mathbf{w} = (2, -1)$.

7. $\mathbf{v} = (2, 3, -6)$ y $\mathbf{w} = (-1, 1, 1)$.

8. $\mathbf{v} = (2, 1, 3)$ y $\mathbf{w} = (-2, 0, -1)$.

9. ¿Qué restricciones deben tener x, y y z para que la terna (x, y, z) represente un punto sobre el eje y?, ¿y sobre el eje z?, ¿y en el plano xz?, ¿y en el plano yz?

10. **a)** Generalizar la construcción geométrica de la Figura 1.1.7 para demostrar que si $\mathbf{v}_1 = (x, y, z)$ y $\mathbf{v}_2 = (x', y', z')$, entonces $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (x + x', y + y', z + z')$.

b) Usando un argumento basado en triángulos semejantes, probar que $\alpha\mathbf{v} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ cuando $\mathbf{v} = (x, y, z)$.

En los ejercicios del 11 al 17, usar la notación conjuntista, la vectorial o ambas para describir los puntos que están en las siguientes configuraciones.

11. El plano generado por $\mathbf{v}_1 = (2, 7, 0)$ y $\mathbf{v}_2 = (0, 2, 7)$.

12. El plano generado por $\mathbf{v}_1 = (3, -1, 1)$ y $\mathbf{v}_2 = (0, 3, 4)$.

13. La recta que pasa por $(-1, -1, -1)$ y tiene la dirección de $\mathbf{j}$.

14. La recta que pasa por $(0, 2, 1)$ y tiene la dirección de $2\mathbf{i} - \mathbf{k}$.

15. La recta que pasa por los puntos $(-1, -1, -1)$ y $(1, -1, 2)$.

16. La recta que pasa por los puntos $(-5, 0, 4)$ y $(6, -3, 2)$.

17. El paralelogramo cuyos lados adyacentes son los vectores $\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ y $-2\mathbf{j}$.

18. Hallar los puntos de intersección de la recta $x = 3 + 2t$, $y = 7 + 8t$, $z = -2 + t$, es decir, $\mathbf{l}(t) = (3 + 2t, 7 + 8t, -2 + t)$, con los planos coordenados.

19. Demostrar que no existen puntos (x, y, z) que satisfagan $2x - 3y + z - 2 = 0$ y estén en la recta $\mathbf{v} = (2, -2, -1) + t(1, 1, 1)$.

20. Demostrar que cualquier punto de la recta $\mathbf{v} = (1, -1, 2) + t(2, 3, 1)$ satisface la ecuación $5x - 3y - z - 6 = 0$.

21. Determinar si las rectas $x = 3t + 2$, $y = t - 1$, $z = 6t + 1$, y $x = 3s - 1$, $y = s - 2$, $z = s$ se intersecan.

22. ¿Se intersecan las rectas $(x, y, z) = (t + 4, 4t + 5, t - 2)$ y $(x, y, z) = (2s + 3, s + 1, 2s - 3)$?

En los ejercicios del 23 al 25, usar métodos vectoriales para describir las configuraciones dadas.

23. El paralelepípedo con aristas $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ que salen del origen.

24. Los puntos dentro del paralelogramo con un vértice en (x_0, y_0, z_0) y con lados que salen de ese vértice iguales en tamaño y sentido a los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

25. El plano determinado por los puntos (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2).

Demostrar las afirmaciones de los ejercicios 26 a 28.

26. El segmento que une los puntos medios de dos de los lados de un triángulo es paralelo y tiene la mitad de la longitud que el otro lado.

27. Si PQR es un triángulo en el espacio y $b > 0$ es un número, existe un triángulo con lados paralelos a los de PQR y con longitudes b multiplicado por las longitudes de PQR.

28. Las medianas de un triángulo se intersecan en un punto, y este punto divide a cada mediana en razón de 2:1.

Los problemas 29 y 30 requieren algún conocimiento de notación en química.

29. Escribir la ecuación química $CO + H_2O = H_2 + CO_2$ como una ecuación con ternas ordenadas (x_1, x_2, x_3) donde x_1, x_2, x_3 son el número de átomos de carbono, hidrógeno y oxigeno, respectivamente, en cada molécula.

30. **a)** Escribir la ecuación química $pC_3H_4O_3 + qO_2 = rCO_2 + sH_2O$ como una ecuación con ternas ordenadas con coeficientes desconocidos p, q, r y s.

b) Hallar la solución positiva más pequeña para p, q, r y s.

c) Ilustrar la solución mediante un diagrama en el espacio.

31. Encontrar una recta que esté completamente contenida en el conjunto definido por la ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

1.2. Producto escalar, longitud y distancia

En esta sección y en la siguiente estudiaremos dos productos de vectores: el producto escalar y el producto vectorial. Ambos son muy útiles en algunas aplicaciones físicas y tienen interesantes interpretaciones geométricas. El primer producto que vamos a considerar se llama *producto escalar*. También se le llama a veces *producto interno*.

El producto escalar

Supongamos que tenemos dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ en $\mathbb{R}^3$ (Figura 1.2.1) y queremos determinar el ángulo entre ellos, esto es, el menor ángulo que forman $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ en el plano que ambos generan. El producto escalar nos permite hacerlo, pero antes de comprobar esto vamos a desarrollar el concepto formalmente. Sean $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$. Definimos el ***producto escalar*** de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, y lo escribimos $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, como el número real

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

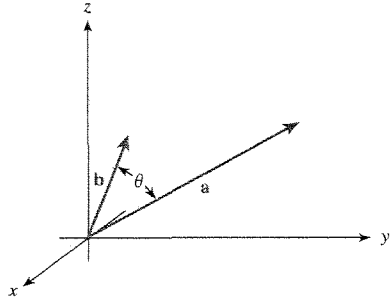


Figura 1.2.1. θ es el ángulo entre los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

Nótese que el producto escalar de dos vectores es un escalar. Algunas veces el producto escalar se escribe $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$; *por tanto,* $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ *y* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ *significan exactamente lo mismo.*

EJEMPLO 1.18

a) Si $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, calcular $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

b) Calcular $(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (3\mathbf{k} - 2\mathbf{j})$.

Solución

a) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 = 3 - 1 - 2 = 0.$

b) $(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (3\mathbf{k} - 2\mathbf{j}) = (2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (0\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k})$
$= 2 \cdot 0 - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = -5.$

Algunas propiedades del producto escalar se siguen directamente de la definición. Si **a**, **b**, y **c** son vectores en $\mathbb{R}^3$, y α y β son números reales, entonces:

i) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geqslant 0$;

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$ si y sólo si $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

ii) $\alpha\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ y $\mathbf{a} \cdot \beta\mathbf{b} = \beta(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$.

iii) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ y $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$.

iv) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$.

Para probar la primera de estas propiedades obsérvese que si $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, entonces $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$. Como a_1, a_2 y a_3 son números reales, sabemos que $a_1^2 \geqslant 0$, $a_2^2 \geqslant 0$, $a_3^2 \geqslant 0$. Así, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geqslant 0$. Además, si $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$, entonces $a_1 = a_2 = a_3 = 0$; por tanto, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ (vector cero). Las demostraciones de las demás propiedades del producto escalar se pueden obtener también fácilmente.

Se deduce del teorema de Pitágoras que la ***longitud*** del vector $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ es $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ (*véase* la Figura 1.2.2). La longitud del vector **a** se denota por $\|\mathbf{a}\|$. Esta cantidad se llama frecuentemente la ***norma*** de **a**. Como $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$, se sigue que

$$\|\mathbf{a}\| = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})^{1/2}.$$

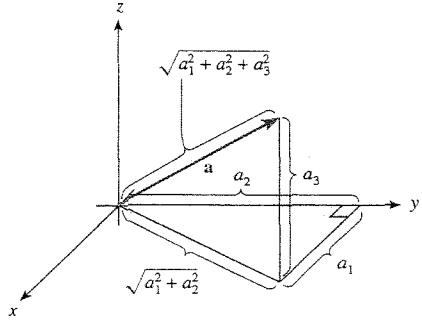


Figura 1.2.2. La longitud del vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ viene dada por la fórmula pitagórica: $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Vectores unitarios

Los vectores que tienen norma 1 se llaman ***vectores unitarios***. Por ejemplo, los vectores **i, j, k** son vectores unitarios. Nótese que para cualquier vector **a, a** / ||**a**|| es un vector unitario; cuando dividimos **a** entre ||**a**||, decimos que hemos ***normalizado*** **a**.

EJEMPLO 1.19

a) Normalizar $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \frac{1}{2}\mathbf{k}$.

b) Hallar vectores unitarios **a**, **b** y **c** en el plano, tales que $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a}$.

Solución

a) Tenemos $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (1/2)^2} = (1/2)\sqrt{53}$, de modo que la normalización de **v** es

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v} = \frac{4}{\sqrt{53}}\mathbf{i} + \frac{6}{\sqrt{53}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{53}}\mathbf{k}.$$

b) Puesto que los tres vectores deben tener longitud 1, el triángulo que tiene como lados **a**, **b** y **c** tiene que ser equilátero, como en la Figura 1.2.3. Si situamos el triángulo como en la figura, podemos tomar $\mathbf{a} = \mathbf{i}$ y entonces, necesariamente,

$$\mathbf{b} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}, \qquad \text{y} \qquad \mathbf{c} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}.$$

Se puede comprobar que efectivamente $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = \|\mathbf{c}\| = 1$ y que $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a}$.

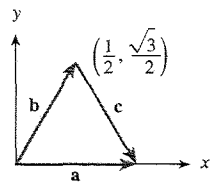


Figura 1.2.3. Los vectores **a**, **b** y **c** están representados por los lados de un triángulo equilátero.

En el plano, el vector $\mathbf{i}_\theta = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j}$ es un vector unitario que forma un ángulo θ con el eje x (*véase* la Figura 1.2.4).

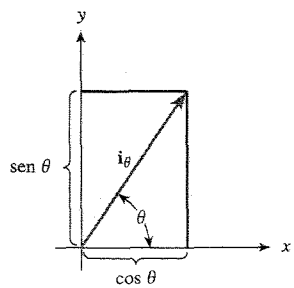


Figura 1.2.4. Las coordenadas de $\mathbf{i}_\theta$ son $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$; es un vector unitario porque $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$.

ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA

Distancia

Si **a** y **b** son vectores, hemos visto que el vector **b** − **a** es paralelo y tiene la misma longitud que el segmento que une los extremos de **a** y **b**. De aquí se tiene que la distancia entre ambos extremos es precisamente $\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$ (*véase* la Figura 1.2.5).

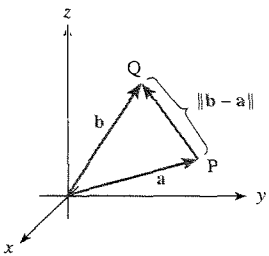


Figura 1.2.5. La distancia entre los extremos de **a** y **b** es $\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$.

Producto escalar, longitud y distancia Si $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3,$$

y la ***longitud*** de **a** es

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Para ***normalizar*** el vector **a** basta hacer

$$\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}.$$

La ***distancia entre*** los extremos de **a** y **b** es $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|$, y la ***distancia entre*** P y Q es $\|\overrightarrow{PQ}\|$.

EJEMPLO 1.20 Hallar la distancia entre el extremo del vector **i**, esto es, el punto (1, 0, 0) y el extremo del vector **j**, es decir, el punto (0, 1, 0).

Solución

$$\|\mathbf{j} - \mathbf{i}\| = \sqrt{(0-1)^2 + (1-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{2}.$$

Ángulo entre dos vectores

Ahora veremos que el producto escalar sirve efectivamente para medir el ángulo entre dos vectores.

TEOREMA 1 Sean $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ dos vectores en $\mathbb{R}^3$ y sea θ, donde $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, el ángulo que forman (Figura 1.2.6). Entonces

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ||\mathbf{a}|| \, ||\mathbf{b}|| \cos \theta.$$

Se deduce de la identidad $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ||\mathbf{a}|| \, ||\mathbf{b}|| \cos \theta$ que si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son distintos de cero, podemos expresar el ángulo que forman como:

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{||\mathbf{a}|| \, ||\mathbf{b}||}\right).$$

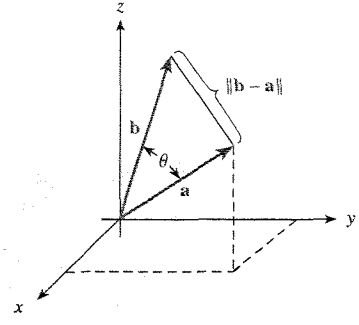


Figura 1.2.6. Los vectores **a**, **b** y el ángulo θ que forman entre ellos; la geometría del Teorema 1 y su demostración.

DEMOSTRACIÓN Si aplicamos la regla trigonométrica del coseno al triángulo que tiene un vértice en el origen y como lados adyacentes los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ (como se muestra en la figura), se sigue que

$$||\mathbf{b} - \mathbf{a}||^2 = ||\mathbf{a}||^2 + ||\mathbf{b}||^2 - 2||\mathbf{a}|| \, ||\mathbf{b}|| \cos \theta.$$

Puesto que $||\mathbf{b} - \mathbf{a}||^2 = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$, $||\mathbf{a}||^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ y $||\mathbf{b}||^2 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$, podemos escribir la ecuación anterior como

$$(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - 2||\mathbf{a}|| \, ||\mathbf{b}|| \cos \theta.$$

También podemos desarrollar $(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$ así:

$$\begin{aligned}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) &= \mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \\ &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - 2||\mathbf{a}|| \, ||\mathbf{b}|| \cos \theta.$$

Esto es,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ||\mathbf{a}|| \, ||\mathbf{b}|| \cos \theta.$$

EJEMPLO 1.21 Hallar el ángulo entre los vectores $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ (*véase* la Figura 1.2.7).

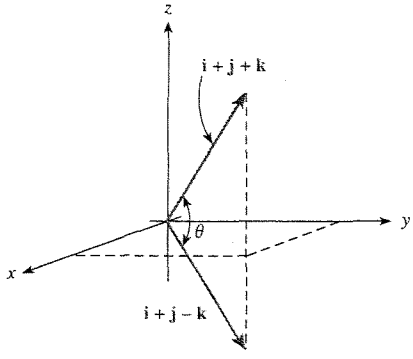


Figura 1.2.7. Cálculo del ángulo que forman $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Solución

Usando el Teorema 1, tenemos

$$(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}) = \|\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}\| \, \|\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}\| \cos\theta,$$

y así:

$$1 + 1 - 1 = (\sqrt{3})(\sqrt{3}) \cos\theta.$$

Por tanto,

$$\cos\theta = \tfrac{1}{3}.$$

Esto es,

$$\theta = \arccos(\tfrac{1}{3}) \approx 1{,}23 \text{ radianes } (71°).$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz

El Teorema 1 muestra que el producto escalar de dos vectores es el producto de sus longitudes por el coseno del ángulo que forman. Esta fórmula es a menudo muy útil en los problemas de naturaleza geométrica. Una consecuencia importante del Teorema 1 es:

COROLARIO: Desigualdad de Cauchy-Schwarz Para cualquier par de vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, se tiene

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\| \, \|\mathbf{b}\|$$

donde la igualdad se satisface si y sólo si $\mathbf{a}$ es un múltiplo escalar de $\mathbf{b}$, o alguno de ellos es $\mathbf{0}$.

DEMOSTRACIÓN Si $\mathbf{a}$ no es un múltiplo escalar de $\mathbf{b}$ entonces el ángulo θ que forman ambos vectores no es cero ni π, de modo que $|\cos\theta| < 1$ y se tiene la desigualdad; de hecho, si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son distintos de cero, se tiene la desigualdad estricta. Cuando $\mathbf{a}$ es un múltiplo escalar de $\mathbf{b}$, entonces $\theta = 0$ o π y $|\cos\theta| = 1$, y en este caso se tiene la igualdad.

EJEMPLO 1.22 Comprobar que se cumple la desigualdad de Cauchy-Schwarz para $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

Solución

El producto escalar es $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -3 + 0 + 1 = -2$, de modo que $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| = 2$. Además, $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$ y $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$, y ciertamente $2 \leqslant \sqrt{3} \cdot \sqrt{10}$ ya que $\sqrt{3} \cdot \sqrt{10} > \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3 \geqslant 2$.

Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son vectores de $\mathbb{R}^3$ distintos, no nulos, y θ es el ángulo que forman, entonces $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ si y sólo si $\cos\theta = 0$. Por tanto, *el producto escalar de dos vectores no nulos es cero si y sólo si los vectores son perpendiculares*. De este modo, el producto escalar proporciona un buen método para determinar si dos vectores son perpendiculares. Con frecuencia diremos que los vectores perpendiculares son ***ortogonales***. Los vectores de la base canónica $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ son ortogonales entre sí y tienen longitud 1; dichos sistemas de vectores se llaman ***ortonormales***. Adoptaremos la convención de que el vector cero es ortogonal a todos los vectores.

EJEMPLO 1.23 Los vectores $\mathbf{i}_\theta = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j}$ y $\mathbf{j}_\theta = -(\operatorname{sen}\theta)\mathbf{i} + (\cos\theta)\mathbf{j}$ son ortogonales porque

$$\mathbf{i}_\theta \cdot \mathbf{j}_\theta = -\cos\theta \operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\theta \cos\theta = 0$$

(*véase* la Figura 1.2.8).

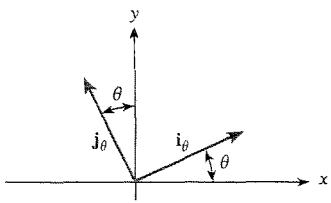


Figura 1.2.8. Los vectores $\mathbf{i}_\theta$ y $\mathbf{j}_\theta$ son ortogonales y tienen longitud 1, de modo que son ortonormales.

EJEMPLO 1.24 Sean $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ dos vectores ortogonales no nulos. Si $\mathbf{c}$ es un vector en el plano generado por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, existen escalares α y β tales que $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$. Usar el producto escalar para calcular α y β (*véase* la Figura 1.2.9).

Solución

Efectuando el producto escalar de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{c}$, tenemos

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \beta\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

Como $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son ortogonales, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, y así

$$\alpha = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}}{\|\mathbf{a}\|^2}$$

De igual modo,

$$\beta = \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}}{\|\mathbf{b}\|^2}$$

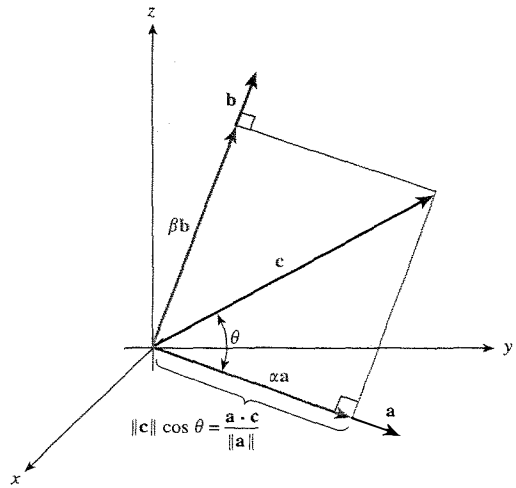


Figura 1.2.9. Geometría para calcular α y β, donde $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$.

Proyección ortogonal

Al vector $\alpha\mathbf{a}$ del ejemplo anterior se le llama **proyección de c sobre a**, y $\beta\mathbf{b}$ es la **proyección sobre b**. Formulemos esta idea de manera más general. Si **v** es un vector, y l es la recta que pasa por el origen y tiene la dirección del vector **a**, la **proyección ortogonal de v sobre a** es el vector **p** cuyo extremo se obtiene al trazar una recta perpendicular a l desde el extremo de **v**, como se muestra en la Figura 1.2.10.

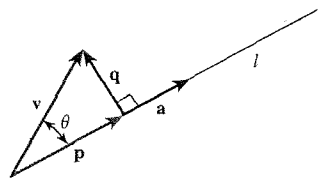


Figura 1.2.10. **p** es la proyección ortogonal de **v** sobre **a**.

Mirando el dibujo, vemos que **p** es un múltiplo de **a**, y que **v** es la suma de **p** y un vector **q** perpendicular a **a.** Por tanto,

$$\mathbf{v} = c\mathbf{a} + \mathbf{q},$$

donde $\mathbf{p} = c\mathbf{a}$ y $\mathbf{a}\cdot\mathbf{q} = 0$. Si multiplicamos por **a** escalarmente en ambos lados de la igualdad $\mathbf{v} = c\mathbf{a} + \mathbf{q}$, tenemos que $\mathbf{a}\cdot\mathbf{v} = c\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$, de modo que $c = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{v})/(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})$, y entonces

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{a}\|^2}\,\mathbf{a}.$$

La longitud de $\mathbf{p}$ es

$$\|\mathbf{p}\| = \frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}|}{\|\mathbf{a}\|^2}\|\mathbf{a}\| = \frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}|}{\|\mathbf{a}\|} = \|\mathbf{v}\|\cos\theta.$$

Proyección ortogonal La *proyección ortogonal* de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{a}$ es el vector

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}.$$

EJEMPLO 1.25 Hallar la proyección ortogonal de $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ sobre $\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$.

Solución

Llamando $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, la proyección ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{a}$ es

$$\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}\mathbf{a} = \frac{1-2}{1+4}(\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) = -\frac{1}{5}(\mathbf{i} - 2\mathbf{j})$$

(*véase* la Figura 1.2.11).

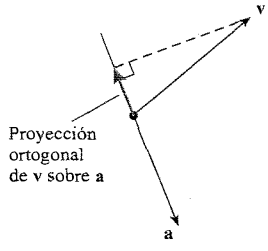


Figura 1.2.11. La proyección ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{a}$ es igual a $-\frac{1}{5}\mathbf{a}$.

La desigualdad triangular

Una aplicación importante de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, conocida como ***desigualdad triangular***, relaciona las longitudes de los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ con la de su suma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$. Geométricamente, la desigualdad triangular dice que la longitud de cualquier lado de un triángulo es menor o igual que la suma de las longitudes de los otros dos lados (*véase* la Figura 1.2.12).

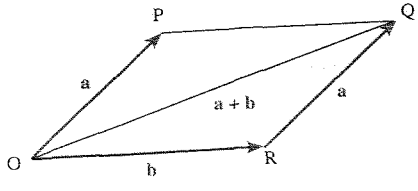


Figura 1.2.12. Esta configuración geométrica muestra que $\|\mathrm{OQ}\| \leq \|\mathrm{OR}\| + \|\mathrm{RQ}\|$ o, con notación vectorial, que $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$, que es precisamente la desigualdad triangular.

TEOREMA 2: Desigualdad triangular Para dos vectores **a** y **b** cualesquiera en el espacio,

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leqslant \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|.$$

DEMOSTRACIÓN Aunque el resultado es claro geométricamente, es útil dar una demostración usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, puesto que la prueba se puede generalizar al caso de vectores n-dimensionales. Primero elevamos el lado izquierdo al cuadrado:

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \|\mathbf{a}\|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \|\mathbf{b}\|^2.$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos

$$\|\mathbf{a}\|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \|\mathbf{b}\|^2 \leqslant \|\mathbf{a}\|^2 + 2\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\| + \|\mathbf{b}\|^2 = (\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|)^2.$$

Por tanto,

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 \leqslant (\|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|)^2;$$

haciendo la raiz cuadrada en ambos lados se obtiene el resultado.

EJEMPLO 1.26

a) Comprobar la desigualdad triangular para $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

b) Demostrar que $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leqslant \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\| + \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|$ para cualesquiera vectores **u**, **v** y **w**. Ilustrarlo con un dibujo en el que **u**, **v** y **w** tengan el mismo origen.

Solución

a) Tenemos que $\mathbf{a} + \mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, luego $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| = \sqrt{9 + 4 + 1} = \sqrt{14}$. Por otra parte, $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{2}$ y $\|\mathbf{b}\| = \sqrt{6}$, así que la desigualdad triangular asegura que $\sqrt{14} \leqslant \sqrt{2} + \sqrt{6}$. Los números confirman esta afirmación: $\sqrt{14} \approx 3{,}74$, mientras que

$$\sqrt{2} + \sqrt{6} \approx 1{,}41 + 2{,}45 = 3{,}86.$$

b) Si observamos que $\mathbf{u} - \mathbf{v} = (\mathbf{u} - \mathbf{w}) + (\mathbf{w} - \mathbf{v})$, el resultado se sigue de la desigualdad triangular al reemplazar **a** por $\mathbf{u} - \mathbf{w}$ y **b** por $\mathbf{w} - \mathbf{v}$. Geométricamente, estamos considerando el triángulo sombreado de la Figura 1.2.13.

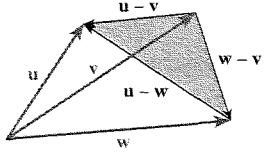


Figura 1.2.13. Donde se ilustra la desigualdad $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leqslant \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\| + \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|$.

Aplicaciones de los vectores en la física

Un ejemplo sencillo de un concepto físico que se representa mediante un vector es un desplazamiento. Supongamos que en una parte de la superficie terrestre, suficientemente pequeña para poder considerarla plana, introducimos coordenadas de modo que el eje x apunte al este, el eje y apunte al norte y la unidad de longitud sea el kilómetro. Si estamos en un punto P y queremos ir a un punto Q, el ***vector desplazamiento*** $\mathbf{d} = \overrightarrow{PQ}$ que une P con Q nos dice en qué sentido y qué distancia hemos de recorrer. Si x e y son las componentes de este vector, el desplazamiento de P a Q es «x kilómetros al este, y kilómetros al norte».

EJEMPLO 1.27 Supongamos que dos navegantes que no pueden verse entre sí, pero que pueden comunicarse por radio, quieren determinar la posición relativa de sus barcos. Explicar cómo pueden hacerlo si cada uno de ellos es capaz de determinar su vector de desplazamiento con respecto al mismo faro.

Solución

Sean P_1 y P_2 las posiciones de los barcos y sea Q la posición del faro. El desplazamiento del faro con respecto al barco i-ésimo es el vector $\mathbf{d}_i$ que une los puntos P_i con Q. El desplazamiento del segundo barco con respecto al primero es el vector $\mathbf{d}$ que une los puntos P_1 y P_2.Tenemos que $\mathbf{d} + \mathbf{d}_2 = \mathbf{d}_1$ (Figura 1.2.14), luego $\mathbf{d} = \mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2$. Esto es, el desplazamiento de un barco al otro es la diferencia entre los desplazamientos desde los barcos al faro.

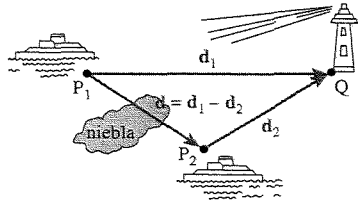


Figura 1.2.14. Se pueden usar vectores para situar objetos.

Podemos representar también la velocidad de un objeto en movimiento mediante un vector. Por ahora, sólo consideraremos objetos que se mueven con velocidad uniforme a lo largo de rectas. Supongamos, por ejemplo, que un barco cruza un lago navegando a 10 kilómetros por hora (km/h) en dirección noreste. Después de una hora de viaje el desplazamiento es $(10/\sqrt{2},\ 10/\sqrt{2}) \approx (7{,}07,\ 7{,}07)$; *véase* la Figura 1.2.15.

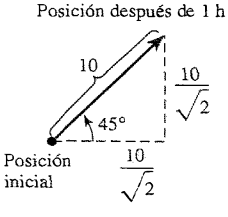


Figura 1.2.15. Si un objeto se mueve en dirección noreste a 10 km/h, su vector velocidad tiene componentes $(10/\sqrt{2},\ 10/\sqrt{2}) = 10(1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$, donde $(1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$ es el vector unidad en la dirección noreste.

El vector cuyas componentes son $(10/\sqrt{2}, 10/\sqrt{2})$ se llama *vector velocidad* del barco. En general, si un objeto se mueve a lo largo de una recta, ***su vector velocidad*** es el vector desplazamiento desde su posición en cualquier momento a su posición 1 *unidad de tiempo más tarde*. Si aparece una corriente en el lago que se mueve hacia el este a 2 km/h y el barco continúa en su dirección original con el motor a la misma potencia, su desplazamiento después de una hora tendrá como componentes $(10/\sqrt{2} + 2, 10/\sqrt{2})$; *véase* la Figura 1.2.16. Por tanto, el nuevo vector velocidad tendrá como componentes $(10/\sqrt{2} + 2, 10/\sqrt{2})$. Nótese que este vector es la suma del vector velocidad original $(10/\sqrt{2}, 10/\sqrt{2})$ y el vector velocidad de la corriente (2, 0).

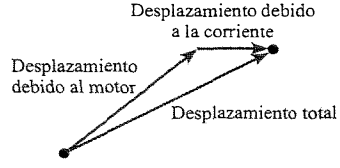


Figura 1.2.16. El desplazamiento total es la suma de los desplazamientos debidos al motor y a la corriente.

Desplazamiento y velocidad Si un objeto tiene un vector velocidad (constante) $\mathbf{v}$, en t unidades de tiempo el vector desplazamiento del objeto es $\mathbf{d} = t\mathbf{v}$; así, después de un tiempo $t = 1$, el vector desplazamiento es igual al vector velocidad (*véase* la Figura 1.2.17).

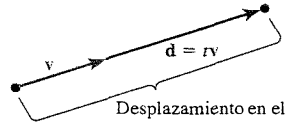


Figura 1.2.17. Desplazamiento = tiempo × velocidad.

EJEMPLO 1.28 Un pájaro vuela en línea recta con vector velocidad $10\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k}$ (en kilómetros por hora). Supongamos que (x, y) son sus coordenadas en el suelo y que z es su altura.

a) Si en cierto momento el pájaro está en la posición (1, 2, 3), ¿cuál será su situación una hora más tarde?, ¿y un minuto más tarde?

b) ¿Cuántos segundos tarda el ave en subir 10 metros?

Solución

a) El vector desplazamiento desde (1, 2, 3) después de una hora es $10\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k}$, de modo que la nueva posición es (1, 2, 3) + (10, 6, 1) = (11, 8, 4). Después de un minuto, el vector desplazamiento desde (1, 2, 3) es $\frac{1}{60}(10\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k}) = \frac{1}{6}\mathbf{i} + \frac{1}{10}\mathbf{j} + \frac{1}{60}\mathbf{k}$ y, así, la nueva posición es $(1, 2, 3) + (\frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{60}) = (\frac{7}{6}, \frac{21}{10}, \frac{181}{60})$.

b) Después de t segundos ($= t/3.600$ horas), el vector desplazamiento desde (1, 2, 3) es $(t/3.600)(10\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k}) = (t/360)\mathbf{i} + (t/600)\mathbf{j} + (t/3.600)\mathbf{k}$. El incremento en altura es la componente z, esto es, $t/3.600$. Éste será igual a 10 m($= \frac{1}{100}$ km) cuando $t/3.600 = \frac{1}{100}$, es decir, cuando $t = 36$ s.

EJEMPLO 1.29 Las fuerzas físicas tienen sentido, dirección y tamaño, por lo que pueden representarse mediante vectores. Si varias fuerzas actúan simultáneamente sobre un objeto, la fuerza resultante se representa mediante la suma de los vectores de cada una de las fuerzas. Supongamos que dos fuerzas $\mathbf{i} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{j} + \mathbf{k}$ actúan sobre un cuerpo. ¿Qué tercera fuerza $\mathbf{F}$ hay que aplicar para contrarrestar a las otras dos, esto es, para conseguir que la fuerza total sea igual a cero?

Solución

La fuerza $\mathbf{F}$ deberá escogerse de manera que $(\mathbf{i}+\mathbf{k})+(\mathbf{j}+\mathbf{k})+\mathbf{F}=\mathbf{0}$; por tanto, $\mathbf{F} = -(\mathbf{i}+\mathbf{k}) - (\mathbf{j} + \mathbf{k}) = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ (recordemos que $\mathbf{0}$ es el *vector cero*, el vector cuyas componentes son todas cero).

EJERCICIOS

1. Calcular $(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})$.

2. Calcular $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ donde $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$.

3. Hallar el ángulo entre $7\mathbf{j} + 19\mathbf{k}$ y $-2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ (aproximado al grado más cercano).

4. Calcular $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, donde $\mathbf{u} = \sqrt{3}\mathbf{i} - 315\mathbf{j} + 22\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{u}/\|\mathbf{u}\|$.

5. ¿Es $\|8\mathbf{i} - 12\mathbf{k}\| \cdot \|6\mathbf{j} + \mathbf{k}\| - |(8\mathbf{i} - 12\mathbf{k}) \cdot (6\mathbf{j} + \mathbf{k})|$ igual a cero? Explicarlo.

En los ejercicios del 6 al 11, calcular $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$, *y* $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ *para los vectores dados de* $\mathbb{R}^3$.

6. $\mathbf{u} = 15\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \pi\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

7. $\mathbf{u} = 2\mathbf{j} - \mathbf{i}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{j} + \mathbf{i}$.

8. $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

9. $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$.

10. $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 4\mathbf{j}$.

11. $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

12. Normalizar los vectores de los Ejercicios 6 a 8.

13. Hallar el ángulo que forman los vectores de los Ejercicios 9 a 11. Si es necesario, se puede expresar la respuesta en términos de arccos.

14. Hallar la proyección de $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ sobre $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

15. Hallar la proyección de $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ sobre $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

16. ¿Qué valores debe tomar el escalar b para que el vector $2\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ sea ortogonal a **a)** $-3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y **b)** $\mathbf{k}$?

17. Hallar dos vectores ortogonales a (1, 1, 1) que no sean paralelos.

18. Hallar la recta que pasa por (3, 1, -2), y que interseca y es perpendicular a la recta $x = -1 + t$, $y = -2 + t$, $z = -1 + t$. [INDICACIÓN: Si (x_0, y_0, z_0) es el punto de intersección, hallar sus coordenadas.]

19. Un barco situado en la posición (1, 0) en una carta náutica (que tiene el norte en la dirección positiva del eje y) avista una roca en la posición (2, 4). ¿Cuál es el vector que une el barco con la roca? ¿Cuál es el ángulo θ que forma este vector con la dirección norte? (A este ángulo se le llama la **orientación** de la roca desde el barco.)

20. Supongamos que el barco del Ejercicio 19 navega con rumbo norte a una velocidad de 4 nudos respecto del agua. Hay una corriente que fluye en dirección este con velocidad de 1 nudo. Las unidades de la carta son millas marinas; 1 nudo = 1 milla marina por hora.

a) Si hubiera corriente, ¿qué vector $\mathbf{u}$ representaría la velocidad del barco con respecto al fondo del mar?

b) Si el barco se dejara llevar por la corriente, ¿qué vector representaría su velocidad con respecto al fondo del mar?

c) ¿Qué vector $\mathbf{w}$ representa la velocidad total del barco?

d) ¿Dónde estará el barco después de una hora?

e) ¿Debería cambiar el capitán el rumbo del barco?

f) ¿Y si la roca fuera un iceberg?

21. Un avión se encuentra en la posición (3, 4, 5) al mediodía y viaja con una velocidad de $400\mathbf{i} + 500\mathbf{j} - \mathbf{k}$ kilómetros por hora. El piloto avista un aeropuerto en la posición (23, 29, 0).

a) ¿A qué hora pasará el avión sobre el aeropuerto? (Suponemos que la tierra es plana y que el vector $\mathbf{k}$ apunta hacia arriba.)

b) ¿Cuál será la altura del avión cuando pase sobre el aeropuerto?

22. La velocidad del viento $\mathbf{v}_1$ es de 40 kilómetros por hora (km/h) de este a oeste mientras que un avión viaja con una velocidad en el aire $\mathbf{v}_2$ de 100 km/h en dirección norte. La velocidad del avión con respecto al suelo es el vector suma $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

a) Encontrar $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

b) Hacer un dibujo a escala.

23. Una fuerza de 50 kp forma un ángulo de 50° con el eje horizontal y apunta hacia la derecha. Determinar sus componentes horizontal y vertical. Ilustrar los resultados con un dibujo.

24. Dos personas tiran horizontalmente de dos cuerdas atadas a un poste y el ángulo entre las cuerdas es de 60°. La persona A tira con una fuerza de 150 kp, mientras que la persona B lo hace con una fuerza de 110 kp.

a) La fuerza resultante es el vector que resulta de sumar ambas fuerzas. Hacer un dibujo a escala que represente gráficamente las tres fuerzas.

b) Usando trigonometría, encontrar las componentes de las dos fuerzas en un sistema de coordenadas elegido convenientemente. Hacer la suma algebraica y determinar el ángulo que la fuerza resultante forma con la fuerza ejercida por A.

25. Una masa de 1 kilogramo (1 kg) situada en el origen cuelga de dos cuerdas fijadas en los puntos (1, 1, 1) y (−1, −1, 1). Si la fuerza de la gravedad tiene la dirección del vector $-\mathbf{k}$, ¿cuál es el vector que describe la fuerza a lo largo de cada cuerda? [INDICACIÓN: Usar la simetría del problema. Un kilogramo de masa pesa 9,8 newtons (N).]

26. Supongamos que sobre un objeto que se mueve en la dirección $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ actúa una fuerza dada por el vector $2\mathbf{i} + \mathbf{j}$. Expresar esta fuerza como la suma de una fuerza en la dirección del movimiento y otra perpendicular a éste.

27. Una fuerza $\mathbf{F}$ de 6 N (newtons) forma un ángulo de $\pi/4$ radianes con el eje y, y apunta hacia la derecha. La fuerza actúa en contra del movimiento de un objeto que se mueve a lo largo de la recta que une (1, 2) con (5, 4).

a) Hallar una fórmula para el vector $\mathbf{F}$.

b) Hallar el ángulo que forman la dirección del desplazamiento $\mathbf{D} = (5 - 1)\mathbf{i} + (4 - 2)\mathbf{j}$ y la dirección de $\mathbf{F}$.

c) El ***trabajo realizado*** es $\mathbf{F} \cdot \mathbf{D}$ o, equivalentemente, $\|\mathbf{F}\| \|\mathbf{D}\| \cos\theta$. Calcular el trabajo con ambas fórmulas y compararlo.

1.3. Matrices, determinantes y el producto vectorial

En la Sección 1.2 se definió un producto de vectores que daba como resultado un escalar. En esta sección definiremos un producto de vectores que da como resultado un vector; esto es, veremos cómo a partir de dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ se puede obtener un tercer vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, llamado *producto vectorial* de $\mathbf{a}$ por $\mathbf{b}$. Este nuevo vector tendrá la agradable propiedad de que es perpendicular al plano generado (o determinado) por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. La definición del producto vectorial se basa en los conceptos de matriz y determinante que, por ese motivo, desarrollaremos primero. Una vez hecho esto, podremos estudiar las implicaciones geométricas de la estructura matemática construida.

Matrices 2 × 2

Definimos una ***matriz*** 2 × 2 como una tabla u ordenación

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

donde a_{11}, a_{12}, a_{21} y a_{22} son cuatro escalares. Por ejemplo,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}$$

son matrices 2 × 2. El ***determinante***

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

de dicha matriz es el número real definido mediante la ecuación

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1}$$

EJEMPLO 1.30

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0; \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2; \qquad \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 42 = -2.$$

Matrices 3 × 3

Una ***matriz*** 3 × 3 es una ordenación

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

donde, de nuevo, cada a_{ij} es un escalar; a_{ij} denota el elemento de la matriz que está en la fila i-ésima y en la columna j-ésima. Definimos el ***determinante*** de una matriz 3 × 3 mediante la regla

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Sería difícil memorizar la Fórmula (2) sin algún recurso mnemotécnico. La regla que hay que aprender es que recorremos la primera fila multiplicando a_{1j} por el determinante de la matriz 2 × 2 que resulta al eliminar la primera fila y la j-ésima columna, y después sumamos todo, recordando poner un signo de resta delante del término a_{12}. Por ejemplo, el determinante que hay que multiplicar en el segundo término de la Fórmula (2), a saber,

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

se obtiene tachando la primera fila y la segunda columna de la matriz 3 × 3 dada:

$$\begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 1.31

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3 + 12 - 9 = 0.$$

Propiedades de los determinantes

Una propiedad importante de los determinantes es que cambian de signo al intercambiar dos filas o dos columnas. Para determinantes 2 × 2, esto es consecuencia de la definición: para las filas, tenemos,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = -(a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}) = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}$$

y para las columnas,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}) = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}.$$

Dejamos que el lector compruebe esta propiedad para el caso 3 × 3.

Una segunda propiedad fundamental de los determinantes es que *podemos sacar como factor común escalares de cualquier fila o columna*. Para determinantes 2 × 2, esto significa

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & \alpha a_{22} \end{vmatrix} = \alpha\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{vmatrix}.$$

De manera análoga, para determinantes 3 × 3 tenemos

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \alpha a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \alpha a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

y así sucesivamente. Estos resultados se deducen de las definiciones. En particular, si cualquier fila o columna contiene únicamente ceros, el valor del determinante es cero.

Un tercer hecho fundamental acerca de los determinantes es el siguiente: *si cambiamos una fila (o columna) sumándole otra fila (respectivamente, otra columna), no cambia el valor del determinante*. Para el caso 2 × 2, esto significa que

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 + a_1 & b_2 + a_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 + a_2 & a_2 \\ b_1 + b_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 + a_2 \\ b_1 & b_1 + b_2 \end{vmatrix}.$$

Para el caso 3×3, esto significa:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + a_2 & a_2 & a_3 \\ b_1 + b_2 & b_2 & b_3 \\ c_1 + c_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

y así sucesivamente. De nuevo, esta propiedad se puede probar usando la definición de determinante.

EJEMPLO 1.32 Supongamos que

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{c}; \qquad \text{es decir, } \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = \alpha(b_1, b_2, b_3) + \beta(c_1, c_2, c_3).$$

Demostrar que

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Solución

Vamos a demostrar el caso $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. El caso $\alpha = 0 = \beta$ es trivial, y el caso en que exactamente uno de α, β sea cero es una simple modificación del caso que probamos. Usando las propiedades fundamentales de los determinantes, el determinante en cuestión es

$$\begin{vmatrix} \alpha b_1 + \beta c_1 & \alpha b_2 + \beta c_2 & \alpha b_3 + \beta c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\alpha} \begin{vmatrix} \alpha b_1 + \beta c_1 & \alpha b_2 + \beta c_2 & \alpha b_3 + \beta c_3 \\ -\alpha b_1 & -\alpha b_2 & -\alpha b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(sacando el factor $-1/\alpha$ de la segunda fila)

$$= \left(-\frac{1}{\alpha}\right)\left(-\frac{1}{\beta}\right) \begin{vmatrix} \alpha b_1 + \beta c_1 & \alpha b_2 + \beta c_2 & \alpha b_3 + \beta c_3 \\ -\alpha b_1 & -\alpha b_2 & -\alpha b_3 \\ -\beta c_1 & -\beta c_2 & -\beta c_3 \end{vmatrix}$$

(sacando el factor $-1/\beta$ de la tercera fila)

$$= \frac{1}{\alpha\beta} \begin{vmatrix} \beta c_1 & \beta c_2 & \beta c_3 \\ -\alpha b_1 & -\alpha b_2 & -\alpha b_3 \\ -\beta c_1 & -\beta c_2 & -\beta c_3 \end{vmatrix} \quad \text{(sumando la segunda fila a la primera)}$$

$$= \frac{1}{\alpha\beta} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\alpha b_1 & -\alpha b_2 & -\alpha b_3 \\ -\beta c_1 & -\beta c_2 & -\beta c_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(sumando la tercera fila a la primera).}$$

Estrechamente ligado a estas propiedades está el hecho de que *podemos desarrollar un determinante* 3×3 *recorriendo cualquier fila o columna* usando los signos del siguiente patrón:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Por ejemplo, el lector puede comprobar que podemos desarrollar «por menores» recorriendo la fila del medio:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Volvamos a calcular el segundo determinante del Ejemplo 1.31 usando esta fórmula:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = (-4)(-6) + (5)(-12) + (-6)(-6) = 0.$$

Nota Histórica

Los determinantes parecen haber sido inventados y usados por primera vez por Leibniz en 1693, en relación con las soluciones de ecuaciones lineales. Maclaurin y Cramer desarrollaron sus propiedades entre 1729 y 1750; en particular, probaron que la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

es

$$x_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad x_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad x_3 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

donde

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

lo que se conoce como **regla de Cramer.** Mientras que este método es bastante ineficaz desde el punto de vista del cálculo numérico, es muy importante en la teoría de matrices. Más tarde, Vandermonde (1772) y Cauchy (1812), trabajando con determinantes como

tema aparte que merecía especial atención, desarrollaron este campo de manera más sistemática, con contribuciones de Laplace, Jacobi y otros. A Lagrange (1775) se deben las fórmulas para volúmenes de paralelepípedos en términos de determinantes. Las estudiaremos más adelante en esta sección. A pesar de que durante el siglo diecinueve los matemáticos estudiaron matrices y determinantes, ambos temas se consideraron por separado. Para conocer toda la historia hasta 1900, *véase* T. Muir, *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development* (reimpreso por Dover, New York, 1960).

El producto vectorial

Una vez establecidas las propiedades necesarias de los determinantes y referida su historia, estamos listos para estudiar el producto vectorial.

DEFINICIÓN: El producto vectorial Supongamos que $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$. El ***producto vectorial*** o ***producto cruz*** de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ denotado por $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, se define como el vector

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k},$$

o, formalmente,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Aunque hemos definido únicamente los determinantes para matrices de números *reales*, esta expresión formal que incluye vectores es una ayuda útil para recordar el producto vectorial.

EJEMPLO 1.33 Hallar $(3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})$.

Solución

$$(3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}.$$

Algunas propiedades algebraicas del producto vectorial se deducen de la definición. Si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ son vectores, y α, β y γ escalares, entonces

i) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$

ii) $\mathbf{a} \times (\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}) = \beta(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \gamma(\mathbf{a} \times \mathbf{c})$ y $(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

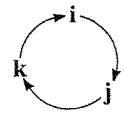
Nótese que $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{a})$, por la propiedad i). Por tanto, $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$. En particular,

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

También,

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j},$$

lo que podemos recordar permutando cíclicamente **i**, **j**, **k** de este modo:



Para dar una interpretación geométrica del producto vectorial vamos a introducir primero el producto mixto. Dados tres vectores **a**, **b** y **c**, el número real

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

se llama ***producto mixto*** de **a**, **b** y **c** (en este orden). Para obtener una fórmula de éste, sean $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, y $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$. Entonces,

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \right) \cdot (c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}) \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3.\end{aligned}$$

Éste es el desarrollo «por menores» siguiendo la tercera fila del determinante, de modo que

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Si **c** es un vector del plano generado por los vectores **a** y **b**, la tercera fila del determinante que expresa $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ es una combinación lineal de la primera y la segunda fila, y por tanto $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0$. En otras palabras, *el vector* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *es ortogonal a cualquier vector del plano generado por* **a** *y* **b**, *y en particular a ambos vectores.*

A continuación calcularemos la longitud de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Nótese que

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_1b_3 - b_1a_3)^2 + (a_1b_2 - b_1a_2)^2.\end{aligned}$$

Si desarrollamos los términos de la última expresión, podemos agruparlos para obtener

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2,$$

que es igual a

$$\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 \cos^2\theta = \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 \operatorname{sen}^2\theta$$

donde θ es el ángulo que forman $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Sacando raíces cuadradas y usando que $\sqrt{k^2} = |k|$, obtenemos que $||\mathbf{a} \times \mathbf{b}|| = ||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}||\,|\operatorname{sen}\theta|$.

Combinando estos resultados concluimos que $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es un *vector perpendicular al plano* $\mathcal{P}$ *generado por* $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, *y tiene longitud* $||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}||\,|\operatorname{sen}\theta|$. En la Figura 1.3.1 podemos ver que esta longitud es también el área del paralelogramo (con base $||\mathbf{a}||$ y altura $||\mathbf{b}\operatorname{sen}\theta||$) generado por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Existen dos vectores que satisfacen estas condiciones, pues se pueden escoger dos direcciones perpendiculares (o normales) a $\mathcal{P}$. Esto se ve claramente en la Figura 1.3.1, que muestra las dos posibilidades $\mathbf{n}_1$ y $-\mathbf{n}_1$ perpendiculares a $\mathcal{P}$, con $||\mathbf{n}_1|| = ||-\mathbf{n}_1|| = ||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}||\,|\operatorname{sen}\theta|$.

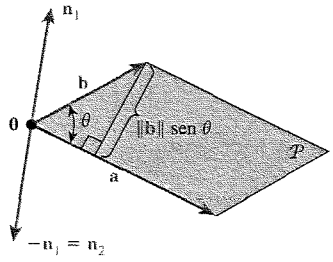


Figura 1.3.1. $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$ son los dos posibles vectores ortogonales a $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ que tienen norma $||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}||\,|\operatorname{sen}\theta|$.

¿Qué vector representa $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, $\mathbf{n}_1$ o $-\mathbf{n}_1$? La respuesta es $\mathbf{n}_1$. Calcular algunos casos sencillos como $\mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$ para comprobarlo. La siguiente «regla de la mano derecha» sirve en general para determinar la dirección de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. La *mano derecha* se coloca de tal modo que los dedos se curven de $\mathbf{a}$ hacia $\mathbf{b}$, a través del ángulo *agudo* θ que forman ambos, como se muestra en la Figura 1.3.2. Entonces el dedo pulgar apunta en la dirección de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

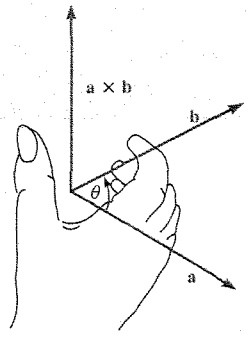


Figura 1.3.2. La regla de la mano derecha para determinar en cuál de las dos posibles direcciones apunta $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

El producto vectorial

Definición geométrica: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es el vector que satisface:

1. $||\mathbf{a} \times \mathbf{b}|| = ||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}||\operatorname{sen}\theta$, el área del paralelogramo definido por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ (θ es el ángulo formado por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$; $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$); *véase* la Figura 1.3.3.
2. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es perpendicular a $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, y la terna $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ satisface la regla de la mano derecha.

Fórmula con componentes:

$$(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \times (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}.$$

Reglas algebraicas:

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ si y sólo si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son paralelos o alguno de ellos es cero.
2. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.
3. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$.
4. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$.
5. $(\alpha\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

Tabla de multiplicación:

		Segundo factor		
	×	**i**	**j**	**k**
Primer factor	**i**	**0**	**k**	$-\mathbf{j}$
	j	$-\mathbf{k}$	**0**	**i**
	k	**j**	$-\mathbf{i}$	**0**

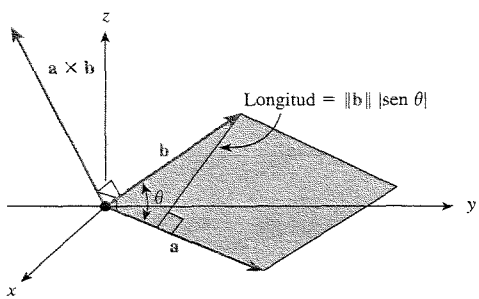


Figura 1.3.3. La longitud de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es el área del paralelogramo formado por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

EJEMPLO 1.34 Encontrar el área del paralelogramo definido por los dos vectores $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = -\mathbf{i} - \mathbf{k}$.

Solución

Calculamos el producto vectorial de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ aplicando la fórmula de las componentes o fórmula del determinante, con $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $b_1 = -1$, $b_2 = 0$, $b_3 = -1$:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = [(2)(-1) - (3)(0)]\mathbf{i} + [(3)(-1) - (1)(-1)]\mathbf{j} + [(1)(0) - (2)(-1)]\mathbf{k}$$

$$= -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Por tanto, el área es

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (2)^2} = 2\sqrt{3}.$$

EJEMPLO 1.35 Hallar un vector unitario ortogonal a los vectores $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Solución

Un vector perpendicular a $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{j} + \mathbf{k}$ es su producto vectorial, esto es, el vector

$$(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (\mathbf{j} + \mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Como $\|\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}\| = \sqrt{3}$, el vector

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

es un vector unitario perpendicular a $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

EJEMPLO 1.36 Deducir una identidad que relacione los productos escalar y vectorial a partir de las fórmulas

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \operatorname{sen} \theta \qquad \text{y} \qquad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta$$

mediante la eliminación de θ.

Solución

Que $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$ estén multiplicados por la misma expresión sugiere que podemos elevar al cuadrado ambas fórmulas y después sumar el resultado. Obtenemos

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 (\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta) = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2,$$

luego

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2.$$

Esta identidad es interesante porque establece una relación entre los productos escalar y vectorial.

La geometría de los determinantes

Usando el producto vectorial podemos obtener una interpretación geométrica de los determinantes 2×2 y 3×3. Sean $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$ dos vectores en el plano; si θ es el ángulo

que forman **a** y **b**, hemos visto que $||\mathbf{a} \times \mathbf{b}|| = ||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}||\,|\text{sen}\,\theta|$ es el área del paralelogramo cuyos lados adyacentes son **a** y **b**. El producto vectorial escrito como un determinante es

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}.$$

Por tanto, el área $||\mathbf{a} \times \mathbf{b}||$ es el valor absoluto del determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

La geometría de los determinantes 2 × 2 El valor absoluto del determinante $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ es el área del paralelogramo cuyos lados adyacentes son los vectores $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$. El signo del determinante es + cuando el ángulo que forman **a** y **b** al girar en sentido contrario a las agujas del reloj es menor que π.

EJEMPLO 1.37 Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos (1, 1), (0, 2) y (3, 2) (Figura 1.3.4).

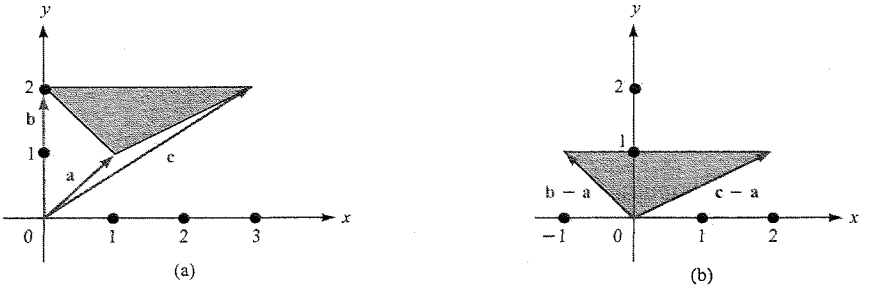


Figura 1.3.4. (a) Hallar el área A del triángulo sombreado expresando los lados como diferencias de vectores, (b) para obtener $A = ||(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})||/2$.

Solución

Sean $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$. Es claro que el triángulo cuyos vértices son los extremos de los vectores **a**, **b** y **c** tiene la misma área que el triángulo con vértices en **0**, $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ y $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ (Figura 1.3.4). De hecho, este último es simplemente una traslación del primero. Como el área del triángulo trasladado es la mitad del área del paralelogramo con lados adyacentes $\mathbf{b} - \mathbf{a} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{c} - \mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, tenemos que el área del triángulo con vértices en (1, 1), (0, 2) y (3, 2) es el valor absoluto de

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2},$$

esto es, 3/2.

Existe una interpretación de los determinantes de matrices 3×3 como volúmenes que es análoga a la interpretación de los determinantes de matrices 2×2 como áreas.

La geometría de los determinantes 3 × 3 El valor absoluto del determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

es el volumen del paralelepípedo cuyos lados adyacentes son los vectores

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \qquad \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}, \qquad \text{y} \qquad \mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}.$$

Para probar la afirmación del cuadro anterior vamos a la Figura 1.3.5 y observamos que la longitud del producto vectorial, a saber, $||\mathbf{a} \times \mathbf{b}||$, es el área del paralelogramo cuyos lados adyacentes son $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Además, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = ||\mathbf{a} \times \mathbf{b}|| \, ||\mathbf{c}|| \cos\psi$, donde ψ es el ángulo que forma $\mathbf{c}$ con la normal al plano generado por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Como el volumen del paralelepípedo con lados adyacentes $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ es el producto del área de la base por la altura $||\mathbf{a} \times \mathbf{b}|| \, ||\mathbf{c}|| \, |\cos\psi|$, se deduce que el volumen es $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$. Anteriormente vimos que $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = D$, de modo que el volumen es igual al valor absoluto de D.

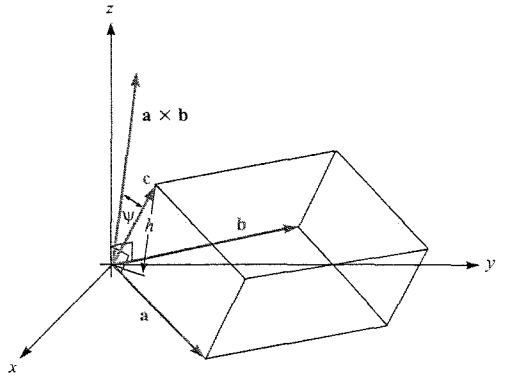


Figura 1.3.5. El volumen del paralelepípedo definido por **a**, **b**, **c** es el valor absoluto del determinante de la matriz 3×3 cuyas filas son **a**, **b** y **c**.

EJEMPLO 1.38 Hallar el volumen del paralelepípedo definido por los tres vectores $\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$, $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ y $5\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$.

Solución

El volumen es el valor absoluto de

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Si desarrollamos este determinante por menores con respecto a la segunda columna, el único término distinto de cero es

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}(1) = -11,$$

de modo que el volumen será igual a 11.

La ecuación de un plano

Sea $\mathcal{P}$ un plano en el espacio que contiene al punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y supongamos que $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ es un vector normal a ese plano (*véase* la Figura 1.3.6). Sea $P = (x, y, z)$ un punto en $\mathbb{R}^3$. Entonces $P = (x, y, z)$ está en el plano $\mathcal{P}$ si y sólo si el vector $\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$ es perpendicular a $\mathbf{n}$, esto es, $\overrightarrow{P_0P} \cdot \mathbf{n} = 0$ o, equivalentemente,

$$(A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}) \cdot [(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}] = 0.$$

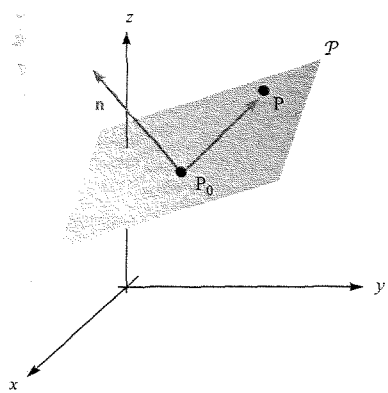


Figura 1.3.6. Los puntos P del plano que pasa por P_0 y es perpendicular a $\mathbf{n}$ satisfacen la ecuación $\overrightarrow{P_0P} \cdot \mathbf{n} = 0$.

Por tanto,

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

La ecuación de un plano en el espacio La ecuación del plano $\mathcal{P}$ que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) y tiene por vector normal $\mathbf{n} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$ es

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0;$$

esto es, $(x, y, z) \in \mathcal{P}$ si y sólo si

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

donde $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.

Los cuatro números A, B, C y D no están determinados de manera única por el plano $\mathcal{P}$. Para ver esto, nótese que (x, y, z) satisface la ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ si y sólo si satisface también

$$(\lambda A)x + (\lambda B)y + (\lambda C)z + (\lambda D) = 0$$

para cualquier constante $\lambda \neq 0$. Además, si A, B, C, D y A', B', C', D' determinan el mismo plano $\mathcal{P}$, entonces $A = \lambda A'$, $B = \lambda B'$, $C = \lambda C'$, $D = \lambda D'$ para un escalar λ. Por consiguiente, A, B, C, D están ***determinados por $\mathcal{P}$ salvo un múltiplo escalar***.

EJEMPLO 1.39 Hallar una ecuación para el plano que es perpendicular al vector $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y contiene al punto (1, 0, 0).

Solución

Usando la forma general $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, el plano es $1(x - 1) + 1(y - 0) + 1(z - 0) = 0$; esto es, $x + y + z = 1$.

EJEMPLO 1.40 Hallar una ecuación para el plano que contiene a los puntos (1, 1, 1), (2, 0, 0) y (1, 1, 0).

Solución

Método 1. Éste es un método de «fuerza bruta» que se puede usar cuando se han olvidado los métodos vectoriales. La ecuación de cualquier plano es de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$. Como los puntos (1, 1, 1), (2, 0, 0) y (1, 1, 0) están en el plano, tenemos que

$$\begin{aligned} A + B + C + D &= 0, \\ 2A \qquad\quad + D &= 0, \\ A + B \qquad\quad + D &= 0. \end{aligned}$$

Por eliminación, reducimos este sistema de ecuaciones a

$$\begin{aligned} 2A + D &= 0 \quad \text{(segunda ecuación)} \\ 2B + D &= 0 \quad (2 \times \text{tercera} - \text{segunda}) \\ C &= 0 \quad \text{(primera} - \text{tercera)}. \end{aligned}$$

Puesto que los números A, B, C y D están determinados salvo por un múltiplo escalar, podemos fijar el valor de uno de ellos, digamos $A = 1$, y entonces los otros estarán ya determinados de manera única. Obtenemos $A = 1$, $D = -2$, $B = 1$, $C = 0$. Así, una ecuación del plano que contiene a los puntos dados es $x + y - 2 = 0$.

Método 2. Sean P = (1, 1, 1), Q = (2, 0, 0), R = (1, 1, 0). Cualquier vector normal al plano ha de ser ortogonal a los vectores $\overrightarrow{QP}$ y $\overrightarrow{RP}$, que son paralelos al plano, ya que sus puntos inicial y final están en éste. Por tanto, $\mathbf{n} = \overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{RP}$ es normal al plano. Calculando el producto vectorial tenemos:

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} + \mathbf{j}.$$

Como el punto (2, 0, 0) está en el plano, concluimos que la ecuación viene dada por $(x - 2) + (y - 0) + 0 \cdot (z - 0) = 0$; esto es, $x + y - 2 = 0$.

Dos planos se llaman ***paralelos*** cuando sus vectores normales son paralelos. Así, los planos $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ y $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ son paralelos cuando $\mathbf{n}_1 = A_1\mathbf{i} + B_1\mathbf{j} + C_1\mathbf{k}$ y $\mathbf{n}_2 = A_2\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + C_2\mathbf{k}$ son paralelos; es decir, $\mathbf{n}_1 = \sigma\mathbf{n}_2$ para una constante σ. Por ejemplo, los planos

$$x - 2y + z = 0 \qquad \text{y} \qquad -2x + 4y - 2z = 10$$

son paralelos, pero los planos

$$x - 2y + z = 0 \qquad \text{y} \qquad 2x - 2y + z = 10$$

no lo son.

Distancia de un punto a un plano

Ahora, vamos a calcular la distancia de un punto $\mathrm{E} = (x_1, y_1, z_1)$ al plano $\mathcal{P}$ descrito por la ecuación $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = Ax + By + Cz + D = 0$. Para ello, consideramos el vector normal unitario

$$\mathbf{n} = \frac{A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

que es un vector de longitud 1 normal al plano. Trazamos la perpendicular desde E al plano y construimos el triángulo REQ que aparece en la Figura 1.3.7. La distancia $d = \|\overrightarrow{\mathrm{EQ}}\|$ es la longitud de la proyección de $\mathbf{v} = \overrightarrow{\mathrm{RE}}$ (el vector que va de R a E) sobre $\mathbf{n}$.

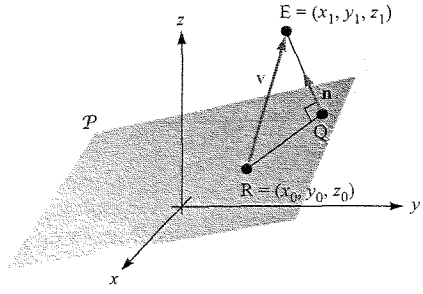


Figura 1.3.7. La geometría para determinar la distancia del punto E al plano $\mathcal{P}$.

Así,

$$\begin{aligned}\text{Distancia} = |\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}| &= |[(x_1 - x_0)\mathbf{i} + (y_1 - y_0)\mathbf{j} + (z_1 - z_0)\mathbf{k}]\cdot\mathbf{n}| \\ &= \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\end{aligned}$$

Si el plano viene dado en la forma $Ax + By + Cz + D = 0$, entonces para cualquier punto (x_0, y_0, z_0) que esté en él, $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$. Al sustituir en la fórmula anterior se tiene lo siguiente:

ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA

Distancia de un punto a un plano La distancia de (x_1, y_1, z_1) al plano $Ax+By+Cz+D=0$ es

$$\text{Distancia} = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

EJEMPLO 1.41 Calcular la distancia de Q = (2, 0, −1) al plano $3x - 2y + 8z + 1 = 0$.

Solución

Sustituimos en la fórmula del cuadro anterior los valores $x_1 = 2$, $y_1 = 0$, $z_1 = -1$ (el punto) y $A = 3$, $B = -2$, $C = 8$, $D = 1$ (el plano), para obtener

$$\text{Distancia} = \frac{|3 \cdot 2 + (-2) \cdot 0 + 8(-1) + 1|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 8^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{77}} = \frac{1}{\sqrt{77}}.$$

Nota Histórica

Los orígenes de los productos escalar y vectorial

ECUACIONES CUADRÁTICAS, ECUACIONES CÚBICAS Y NÚMEROS IMAGINARIOS. Sabemos por las tablillas de arcilla de los babilonios que esta extraordinaria civilización conocía la fórmula cuadrática que les permitía resolver (verbalmente) ecuaciones de segundo grado. Como el concepto de número negativo tuvo que esperar hasta el siglo dieciséis para ver la luz, los babilonios no tenían en cuenta soluciones negativas (ni imaginarias).

Con el Renacimiento y el descubrimiento de la ciencia antigua, los matemáticos italianos empezaron a preguntarse acerca de las soluciones de las ecuaciones cúbicas, $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números positivos.

Hacia el año 1500 Scipione del Ferro, profesor en Bolonia (la universidad europea más antigua), era capaz de resolver ecuaciones cúbicas de la forma $x^3 + bx = c$, pero mantuvo su descubrimiento en secreto. Antes de su muerte comunicó la fórmula a su sucesor, Antonio Fior, que durante un tiempo aún la mantuvo para sí. Y fue un secreto hasta que un brillante y autodidacta matemático llamado Nicolo Fontana, también conocido como Tartaglia («el tartamudo»), apareció en escena. Tartaglia proclamó que podía resolver la cúbica, y Fior se vio en la necesidad de proteger la primacía de del Ferro y así, en respuesta, desafió a Tartaglia a una competición pública.

Tartaglia fue capaz de resolver las treinta ecuaciones cúbicas propuestas por Fior. Sorprendentemente, algunos estudiosos creen que Tartaglia descubrió la fórmula para las soluciones de $x^3 + cx = d$ solamente unos días antes de que el concurso tuviera lugar.

El matemático más grande del siglo dieciséis, Girolamo Cardano (1501-1576) —un sabio renacentista, matemático, físico y adivino— publicó la primera solución de la ecuación general de la cúbica. Aunque de orígenes humildes, alcanzó (como Tartaglia) gran fama gracias al esfuerzo y a su talento natural. Cardano es el autor del primer libro de juegos de azar (marcando el inicio de la moderna teoría de la probabilidad) y

también del *Ars Magna* (el «Gran Arte») que señala el comienzo del álgebra moderna. Fue en este libro donde Cardano publicó la solución a la ecuación *general* de la cúbica $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. ¿Cómo lo consiguió?

Mientras trabajaba en su libro de álgebra y sabedor de que Tartaglia era capaz de resolver algunas formas de la cúbica, Cardano escribió a éste en 1593 para concertar un encuentro. Tras engatusarlo un poco, Tartaglia aceptó. Fue en ese encuentro cuando, a cambio de la promesa de mantenerla en secreto, Tartaglia reveló su solución, a partir de la cual Cardano fue capaz de deducir la fórmula general que después apareció en el *Ars Magna*. Sintiéndose traicionado, Tartaglia dirigió un feroz ataque contra Cardano que terminó en una pequeña comedia.

Lo que ahora nos importa es que, como consecuencia del método empleado en su solución, algo muy extraño ocurría. Consideremos la cúbica $x^3 - 15x = 4$. Su única raíz positiva es 4. Sin embargo, la fórmula de la solución de Tartaglia-Cardano produce:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \tag{1}$$

como la raíz positiva, de modo que este número ha de ser igual a 4. Pero esto es *ridículo*, porque dentro de la raíz cúbica estamos haciendo la raíz cuadrada de un número negativo —algo que en aquel tiempo era un imposible absoluto—. Esto fue una verdadera sorpresa. Más de cien años después, en 1702, cuando Leibniz, codescubridor del cálculo, mostró al gran científico holandés Christian Huygens la fórmula

$$\sqrt{6} = \sqrt{1 + \sqrt{-3}} + \sqrt{1 - \sqrt{-3}} \tag{2}$$

Huygens se quedó completamente pasmado, y comentó que esta igualdad «desafía todo el entendimiento humano». (Intente, informalmente, verificar las fórmulas (1) y (2).)

Con sentido o sin él, la fórmula de Tartaglia y Cardano forzó a los matemáticos a enfrentarse con raíces cuadradas de números negativos (o, como se llaman hoy día, *números imaginarios*). Este episodio histórico es otro ejemplo que niega la (comúnmente extendida) opinión de que la matemática la «inventan» los matemáticos. Como sucede con frecuencia, es *la propia matemática la que nos habla*.

La gestación de los números complejos. Durante más de dos siglos, números como $i = \sqrt{-1}$ fueron vistos con gran desconfianza. La raíz cuadrada de cualquier número negativo se puede escribir en términos de i; por ejemplo, $\sqrt{-a} = \sqrt{(a)(-1)} = \sqrt{a}\sqrt{-1}$. A mediados del siglo dieciocho, el matemático suizo Leonhard Euler relacionó los números universales e y π con el número imaginario i. Sea i lo que quiera que sea o signifique, se tiene necesariamente que

$$e^{\pi i} = -1,$$

esto es, e «elevado a la potencia πi» es -1. Por tanto, reflejo tal vez de algún misterio más profundo, estos números universales están conectados por una fórmula muy simple.

A comienzos del siglo diecinueve, el matemático alemán Karl Friedrich Gauss fue capaz de probar el *teorema fundamental del álgebra* que establece que cualquier polinomio de grado n tiene n raíces (alguna de las cuales, o todas, pueden ser imaginarias; es decir, las raíces tienen la forma $a + bi$ donde, como antes, $i = \sqrt{-1}$, y donde a y b son números reales).

A mediados del siglo diecinueve, el matemático francés Augustin-Louis Cauchy y el matemático alemán Bernhard Riemann desarrollaron el cálculo diferencial para funciones de una variable compleja. Un ejemplo de tales funciones es $F(z) = z^n$, donde $z = a + bi$. En este caso, la fórmula usual para la derivada, $F'(z) = nz^{n-1}$, aún es válida. Con la utilización de números imaginarios Cauchy fue capaz de calcular «integrales reales» que antes no habían podido ser calculadas. Por ejemplo, es posible demostrar que

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

y que

$$\int_0^\pi \log \operatorname{sen} x\, dx = -\pi \log 2.$$

Estos resultados fueron sorprendentes.

Resumiendo, la solución de la ecuación cúbica, el teorema fundamental del álgebra y el cálculo de integrales reales demostraron la importancia de considerar números imaginarios $a + bi$, incluso a pesar de que no estaban (al menos todavía) en *tierra firme*. ¿Existían realmente o eran simplemente fantasmas de nuestra *imaginación*, y por tanto verdaderamente *imaginarios?*

La definición de Hamilton de los números complejos. Muchos matemáticos después de Cardano realizaron importantes contribuciones a los números imaginarios (o complejos), incluyendo a Argand, Wessel y Gauss —todos los cuales los representaron geométricamente—. Sin embargo, la moderna y rigurosa definición del número complejo se debe al gran matemático irlandés William Rowan Hamilton (*véase* la Figura 1.3.8). Después de Newton, que creó el concepto de vector gracias a su invención de la noción de fuerza, Hamilton fue, sin ninguna duda, la figura más importante y singular en el desarrollo del cálculo vectorial. Fue Hamilton el que nos legó los términos *vector* y *cantidad escalar*.

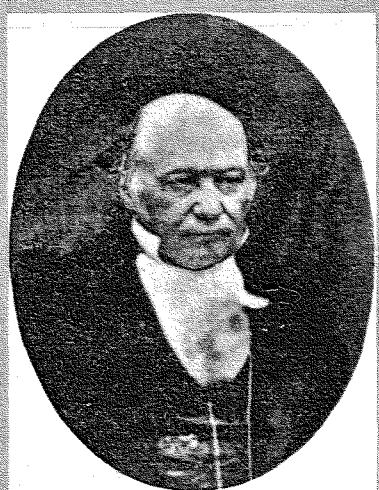


Figura 1.3.8. Sir William Rowan Hamilton (1805-1865).

William Rowan Hamilton nació en Dublin, Irlanda, la medianoche del 3 de agosto de 1805. En 1823, ingresó en el Trinity College de Dublín. Su carrera universitaria, bajo cualquier patrón, fue fenomenal. En su tercer año, el Trinity le ofreció un puesto de profesor, la Cátedra Andrew de Astronomía, y el Estado le nombró Astrónomo Real de Irlanda. Estos honores fueron otorgados por la predicción teórica de dos completamente nuevos e inesperados fenómenos ópticos, a saber, la refracción cónica interna y externa.

Hacia 1827 se interesó por los números imaginarios. Escribió que «el símbolo $\sqrt{-1}$ es absurdo, y denota una operación imposible [...]» , y se propuso situar la idea de número complejo sobre un firme fundamento lógico. Su solución consistió en definir el número complejo $a + bi$ como un punto (a, b) en el plano $\mathbb{R}^2$, como hacemos hoy día. Por tanto, el número imaginario bi para Hamilton era simplemente el punto $(0, b)$ del eje y. La diferencia entre los números complejos y el plano cartesiano estaba en que Hamilton consideraba la multiplicación formal de números complejos

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i,$$

y definió una nueva multiplicación en el plano complejo

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Por tanto, $i = \sqrt{-1}$ simplemente desaparece al convertirse en el punto $(0, 1)$, y el misterio y la confusión acerca de los números complejos desaparecen también con él.

DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS A LOS CUATERNIONES. De acuerdo con la interpretación de Hamilton, *los números complejos no son más que la extensión de los números reales a dos dimensiones.* Hamilton, sin embargo, también realizó un trabajo fundamental en mecánica y sabía bien que dos dimensiones limitaban demasiado el análisis espacial necesario para entender la física del mundo tridimensional. Por ello, Hamilton emprendió la búsqueda de un sistema de ternas; esto es, una fórmula aceptable[1] de multiplicación para puntos (a, b, c) en $\mathbb{R}^3$ o, como de hecho eran, para vectores $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$.

Hacia 1843, Hamilton comprendió que ésta era una tarea sin esperanza. Pero entonces, el 16 de octubre de 1843, Hamilton descubrió que lo que no pudo lograr para $\mathbb{R}^3$ podía conseguirlo para $\mathbb{R}^4$; descubrió los *cuaterniones*, un sistema de números completamente nuevo.

Revivamos el importante momento histórico con sus propias palabras:

> Pero el decimosexto día del mismo mes —lunes y día del Consejo de la Real Academia Irlandesa— iba caminando para asistir y presidirlo, y tu madre iba caminando conmigo, junto al Canal Real, al que quizá ella nos había conducido; y aunque me hablaba de vez en cuando, otro *soterrado* hilo de pensamiento estaba pasando por mi cabeza que me dio finalmente un *resultado*, del cual no resulta excesivo decir que comprendí *inmediatamente* su importancia. Un circuito *eléctrico* pareció *cerrarse*; y saltó la chispa, precursora (como *supe, inmediatamente*) de largos años venideros de pensamiento y trabajo definitivamente encaminados, para *mí mismo* si me era reservado, y en cualquier caso para *otros*, si me era dado vivir lo suficiente para comunicar inequívocamente el descubrimiento. Ni siquiera pude resistir el impulso —irracional,

[1] Para él, «aceptable» significaba que la multiplicación satisfacía la propiedad asociativa.

como puede que fuera— de grabar con una navaja en una piedra del puente de Broughham, según pasamos, la fórmula fundamental con los símbolos i, j, k; a saber

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1,$$

que contiene la *Solución al Problema* pero, por supuesto, como toda inscripción, hace tiempo que se ha borrado[2].

Hamilton se había dado cuenta de que la multiplicación que había estado buscando podía definirse para las cuaternas (a, b, c, d), que había denotado por

$$a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}.$$

La a se llamaba *la parte escalar* y $b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ se llamaba *parte vectorial*, lo que en realidad, como con los números complejos, representaba el punto (a, b, c, d) en $\mathbb{R}^4$. La tabla de multiplicación que introdujo fue

$$\mathbf{ij} = \mathbf{k} = -\mathbf{ji}$$
$$\mathbf{ki} = \mathbf{j} = -\mathbf{ki}$$
$$\mathbf{jk} = \mathbf{i} = -\mathbf{kj}$$
$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1.$$

Hamilton continuó creyendo *apasionadamente* en sus *cuaterniones* hasta el final de su vida. Desafortunadamente, el devenir histórico fue en otra dirección.

El primer paso que se alejaba de los cuaterniones lo dio un firme creyente en la importancia de éstos, llamado Peter Guthrie Tait, que nació en 1831 cerca de Edimburgo, Escocia. En 1860, Tait obtuvo la cátedra de Filosofía Natural en la Universidad de Edimburgo, donde permaneció hasta su muerte en 1901. En 1867, escribió su *Elementary Treatises on Quaternions*, un texto orientado hacia las aplicaciones físicas. Su tercer capítulo es el más significativo. Es aquí donde Tait consideró el producto cuaterniónico de dos vectores:

$$\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{w} = a'\mathbf{i} + b'\mathbf{j} + c'\mathbf{k}.$$

Entonces el producto $\mathbf{vw}$, según la definición de Hamilton, resulta:

$$(a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k})(a'\mathbf{i} + b'\mathbf{j} + c'\mathbf{k})$$
$$= -(aa' + bb' + cc') + (bc' - cb')\mathbf{i} + (ac' - ca')\mathbf{j} + (ab' - ba')\mathbf{k}$$

o, en forma moderna:

$$\mathbf{vw} = -(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}) + \mathbf{v} \times \mathbf{w},$$

donde $\cdot$ es el producto escalar de vectores, y $\times$ es el producto vectorial. Tait descubrió las fórmulas

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\| \cos\theta \qquad \text{y} \qquad \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\| \operatorname{sen}\theta,$$

donde θ es el ángulo formado por $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$. Además, probó que $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ era ortogonal a $\mathbf{v}$ y a $\mathbf{w}$, dando así una interpretación *geométrica* del producto cuaterniónico de dos vectores.

---

[2] *North British Review* **14** (1858): 57.

Esto comenzó el alejamiento del estudio de los cuaterniones y la vuelta a los vectores de Newton, con el producto cuaterniónico sustituido por dos productos distintos, el producto escalar y el producto vectorial.

A propósito, uno puede estar preguntándose por qué Hamilton no descubrió primero el producto vectorial, ya que es un producto en $\mathbb{R}^3$. La razón es que éste no tenía la propiedad fundamental que él buscaba —a saber, no era asociativo[3]:

$$0 = (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{k} \neq \mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{k}) = -\mathbf{k}$$

EL ALEJAMIENTO DE LOS CUATERNIONES. Los científicos responsables en última instancia de la muerte de los cuaterniones fueron James Clerk Maxwell (*véase* la Figura 1.3.9), Oliver Heaviside y Josiah Willard Gibbs, uno de los fundadores de la mecánica estadística. En la década de 1860 Maxwell formuló sus monumentales ecuaciones de electricidad y magnetismo. No se utilizó ninguna notación vectorial (no existía). En cambio, Maxwell escribió sus ecuaciones en lo que ahora llamaríamos «en forma de componentes». Hacia 1870, Tait comenzó a mantener correspondencia con Maxwell, despertando su interés por los cuaterniones.



Figura 1.3.9. James Clerk Maxwell (1831-1879).

En 1873 Maxwell publicó su colosal obra, *Treatise on Electricity and Magnetism*. Aquí (como veremos en el Capítulo 8), Maxwell formuló las ecuaciones del campo

---

[3] Curiosamente, si uno está dispuesto a vivir sin propiedad asociativa, hay otro producto de vectores en $\mathbb{R}^7$ que tiene la mayoría de las propiedades del producto vectorial; éste involucra otro sistema de números llamado los *octoniones*, que existen en $\mathbb{R}^8$. Que no existan productos vectoriales en otras dimensiones es un resultado que sale fuera del ámbito de este texto. Para más información, *véase* el *American Mathematical Monthly*, **74** (1967), pp. 188-194 y **90** (1983), pág. 697, así como J. Baez, «The Octonions», *Bulletin of the American Mathematical Society*, **39** (2002), págs. 145-206. Se puede probar que sistemas como los cuaterniones y octoniones pueden darse sólo en dimensión 1 (los reales $\mathbb{R}$), dimensión 2 (los números complejos), dimensión 4 (los cuaterniones) y dimensión 8 (los octoniones). Por otro lado, la forma «correcta» de extender el producto vectorial es introducir la noción de *formas diferenciales*, que existe en *cualquier* dimensión. Estudiaremos su construcción en la Sección 8.6.

electromagnético usando cuaterniones, motivando así que otros físicos y matemáticos se fijaran en ellos más detenidamente. Debido a este trabajo muchos han pensado que Maxwell era un defensor del «enfoque cuaterniónico» de la física. Lo cierto, sin embargo, es que Maxwell era bastante reacio a utilizar cuaterniones. De hecho, fue Maxwell quien comenzó el proceso de separar la parte *vectorial* del producto de dos cuaterniones (el producto vectorial) de la parte *escalar* (el producto escalar).

Es sabido que Maxwell estaba preocupado por el hecho de que la parte escalar del «cuadrado» de un vector ($\mathbf{vv}$) era siempre negativa ($-\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$), lo que en el caso de un vector velocidad se podría interpretar como energía cinética negativa —¡una idea inaceptable!

Fueron Heaviside y Gibbs los que dieron el empujón final alejándose de los cuaterniones. Heaviside, un investigador independiente interesado en electricidad y magnetismo, y Gibss, un profesor de física matemática en Yale, casi simultánea e independientemente, crearon nuestro moderno sistema de análisis vectorial, que acabamos de empezar a estudiar.

En 1879 Gibbs impartió un curso de análisis vectorial en Yale con aplicaciones a la electricidad y al magnetismo. Su contenido estaba claramente motivado por la aparición de las ecuaciones de Maxwell que estudiaremos en el Capítulo 8. En 1884 publicó su *Elements of Vector Analysis*, un libro en el que se desarrollaban completamente todas las propiedades de los productos escalar y vectorial. Conocedores de que gran parte de lo que Gibbs escribió se debía de hecho a Tait, sus contemporáneos no pensaban que su libro fuera muy original; sin embargo, es una de las fuentes gracias a las que el moderno análisis vectorial ha llegado a existir.

Heaviside estuvo también motivado en gran medida por el brillante trabajo de Maxwell. Su gran *Electromagnetic Theory* se publicó en tres volúmenes. El Volumen I (1893) contenía el primer tratamiento extensivo del moderno análisis vectorial.

Tenemos también una gran deuda con el libro de E. B. Wilson aparecido en 1901 *Vector Analysis: A Textbook for the Use of Students of Mathematics and Physics Founded upon the Lectures of J. Willard Gibbs*. Wilson era reticente a seguir el curso de Gibbs porque había terminado un curso de un año sobre cuaterniones en Harvard impartido por J. M. Pierce, un campeón de los métodos cuaterniónicos, pero fue obligado por un decano a añadir el curso a su programa, y así lo hizo en 1899. El editor del Yale Bicentennial Series pidió más tarde a Wilson que escribiera un libro basado en las lecciones de Gibbs. La nota histórica en la Sección 4.4. contiene una fotografía de Gibbs, y comentarios históricos adicionales sobre la divergencia y el rotacional.

EJERCICIOS

1. Comprobar que al intercambiar las dos primeras filas del determinante 3×3

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

cambia el signo del determinante.

2. Calcular los determinantes

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 36 & 18 & 17 \\ 45 & 24 & 20 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{vmatrix}$

3. Calcular $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, donde $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

4. Calcular $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, donde $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son como en el Ejercicio 3 y $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

5. Hallar el área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ del Ejercicio 3.

6. Un triángulo tiene vértices (0, 0, 0), (1, 1, 1) y (0, −2, 3). Hallar su área.

7. ¿Cuál es el volumen del paralelepípedo con lados $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $5\mathbf{i} - 3\mathbf{k}$, y $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$?

8. ¿Cuál es el volumen del paralelepípedo con lados $\mathbf{i}$, $3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, y $4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$?

En los ejercicios del 9 al 12, describir todos los vectores unitarios ortogonales a los vectores dados.

9. $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$.

10. $-5\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $7\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$.

11. $-5\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $7\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$, $\mathbf{0}$.

12. $2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $-4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$.

13. Calcular $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $\|\mathbf{u}\|$, $\|\mathbf{v}\|$ y $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, donde $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

14. Repetir el Ejercicio 13 para $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

15. Encontrar una ecuación del plano que

a) Es perpendicular a $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ y pasa por (1, 0, 0).

b) Es perpendicular a $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ y pasa por (1, 1, 1).

c) Es perpendicular a la recta $\mathbf{l}(t) = (5, 0, 2)t + (3, -1, 1)$ y pasa por (5, −1, 0).

d) Es perpendicular a la recta $\mathbf{l}(t) = (-1, -2, 3)t + (0, 7, 1)$ y pasa por (2, 4, −1).

16. Hallar una ecuación para el plano que pasa por

a) (0, 0, 0), (2, 0, −1) y (0, 4, −3).

b) (1, 2, 0), (0, 1, −2) y (4, 0, 1).

c) (2, −1, 3), (0, 0, 5) y (5, 7, −1).

17. **a)** Demostrar que dos planos paralelos o bien son idénticos o bien tienen intersección vacía.

b) ¿Cómo se intersecan dos planos que no son paralelos?

18. Hallar la intersección de los planos $x + 2y + z = 0$ y $x - 3y - z = 0$.

19. Hallar la intersección de los planos $x + (y - 1) + z = 0$, y $-x + (y + 1) - z = 0$.

20. Hallar la intersección de los dos planos cuyas ecuaciones son $3(x - 1) + 2y + (z + 1) = 0$ y $(x - 1) + 4y - (z + 1) = 0$.

21. **a)** Probar las dos identidades del triple producto vectorial

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}.$$

b) Probar que $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ si y sólo si $(\mathbf{u} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

c) Probar también que $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} + (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{u} + (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ (***identidad de Jacobi***).

22. **a)** Demostrar, sin recurrir a la geometría, que

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = -\mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v})$$
$$= -\mathbf{w} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) = -\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{w}).$$

b) Usar el apartado a) y el Ejercicio 21.a) para probar que

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u}' \times \mathbf{v}') = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}')(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}') - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}')(\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' & \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}' \\ \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} & \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' \end{vmatrix}.$$

23. Comprobar la regla de Cramer.

24. Hallar una ecuación para el plano que pasa por el punto $(2, -1, 3)$ y es perpendicular a la recta $\mathbf{v} = (1, -2, 2) + t(3, -2, 4)$.

25. Hallar una ecuación para el plano que pasa por el punto $(1, 2, -3)$ y es perpendicular a la recta $\mathbf{v} = (0, -2, 1) + t(1, -2, 3)$.

26. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, -2, -3)$ y es perpendicular al plano $3x - y - 2z + 4 = 0$.

27. Hallar una ecuación del plano que contiene las dos rectas (paralelas)

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, -2) + t(2, 3, -1) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v}_2 = (2, -1, 0) + t(2, 3, -1).$$

28. Calcular la distancia del punto $(2, 1, -1)$ al plano $x - 2y + 2z + 5 = 0$.

29. Hallar una ecuación del plano que contiene la recta $\mathbf{v} = (-1, 1, 2) + t(3, 2, 4)$ y es perpendicular al plano $2x + y - 3z + 4 = 0$.

30. Hallar una ecuación del plano que pasa por $(3, 2, -1)$ y $(1, -1, 2)$, y es paralelo a la recta $\mathbf{v} = (1, -1, 0) + t(3, 2, -2)$.

31. Repetir los Ejercicios 19 y 20 de la Sección 1.1 usando el producto escalar y lo que ya sabemos de vectores normales a planos.

32. Dados dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, ¿es cierto que las ecuaciones $\mathbf{x} \times \mathbf{a} = \mathbf{b}$ y $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|$ determinan un único vector $\mathbf{x}$? Razonar geometrica y analíticamente.

33. Calcular la distancia del plano $12x + 13y + 5z + 2 = 0$ al punto $(1, 1, -5)$.

34. Calcular la distancia al punto (6, 1, 0) del plano que pasa por el origen y es perpendicular a $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

35. **a)** En mecánica, se define el ***momento*** *M de una fuerza* **F** *con respecto a un punto O* como la magnitud de **F** multiplicada por la distancia *d* del punto *O* a la línea de acción de **F**. El ***vector momento*** **M** es el vector de magnitud *M* cuya dirección es perpendicular al plano de *O* y **F**, y cuyo sentido está determinado por la regla de la mano derecha. Probar que $\mathbf{M} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}$, donde **R** es cualquier vector de *O* a la línea de acción de **F** (*véase* la Figura 1.3.10).

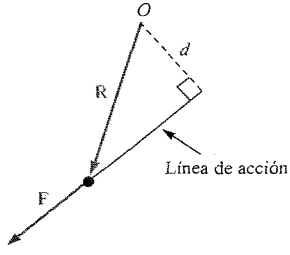


Figura 1.3.10. Momento de una fuerza.

b) Calcular el momento del vector fuerza $\mathbf{F} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ newtons con respecto al origen si la línea de acción es $x = 1 + t$, $y = 1 - t$, $z = 2t$.

36. Demostrar que el plano que pasa por los tres puntos $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ y $C = (c_1, c_2, c_3)$ está formado por los puntos $P = (x, y, z)$ dados por

$$\begin{vmatrix} a_1 - x & a_2 - y & a_3 - z \\ b_1 - x & b_2 - y & b_3 - z \\ c_1 - x & c_2 - y & c_3 - z \end{vmatrix} = 0.$$

[INDICACIÓN: Escribir el determinante como un producto mixto.]

37. Dos medios con índices de refracción n_1 y n_2 están separados por una superficie plana perpendicular al vector unitario **N**. Sean **a** y **b** vectores unitarios a lo largo de los rayos incidente y refractado, respectivamente, con el mismo sentido que dichos rayos de luz. Demostrar que $n_1(\mathbf{N} \times \mathbf{a}) = n_2(\mathbf{N} \times \mathbf{b})$ usando la *ley de Snell*, $\operatorname{sen}\theta_1 / \operatorname{sen}\theta_2 = n_2/n_1$, donde θ_1 y θ_2 son los ángulos de incidencia y refracción, respectivamente. (*Véase* la Figura 1.3.11.)

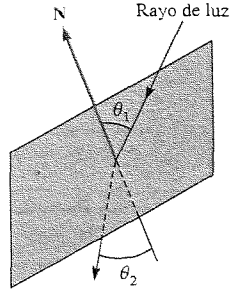


Figura 1.3.11. Ley de Snell.

38. Justificar los pasos en los siguientes cálculos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -11 \end{vmatrix} = 33 - 36 = -3.$$

39. Demostrar que sumar un múltiplo de la primera fila a la segunda fila de una matriz no cambia el determinante; esto es,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + \lambda a_1 & b_2 + \lambda b_1 & c_2 + \lambda c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

[De hecho, sumar un múltiplo de cualquier fila (columna) a otra fila (columna) de la matriz no cambia el determinante.]

1.4. Coordenadas cilíndricas y esféricas

La manera usual de representar un punto en el plano $\mathbb{R}^2$ es mediante coordenadas rectangulares (x, y); sin embargo, como seguramente aprendió el lector en cálculo elemental, las coordenadas polares en el plano pueden ser muy útiles. Como se muestra en la Figura 1.4.1, las coordenadas (r, θ) están relacionadas con (x, y) mediante las fórmulas

$$x = r\cos\theta \qquad \text{y} \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta,$$

donde usualmente tomamos $r \geqslant 0$ y $0 \leqslant \theta < 2\pi$.

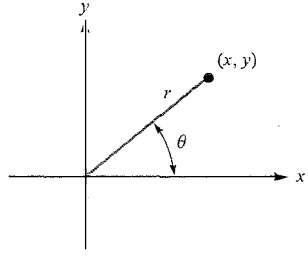


Figura 1.4.1. Las coordenadas polares de (x, y) son (r, θ).

Recomendamos a los lectores que no estén familiarizados con las coordenadas polares estudiar la sección correspondiente en su libro de cálculo. Ahora vamos a exponer dos maneras de representar puntos en el espacio distintas de las coordenadas cartesianas (x, y, z). Estos sistemas de coordenadas alternativos son particularmente adecuados para ciertos tipos de problemas, tales como el cálculo de integrales por medio de un cambio de variables.

Nota Histórica

En 1671 Isaac Newton escribió un manuscrito titulado *The Method of Fuxions and Infinite Series*, que contiene muchos usos de la geometría de coordenadas para esbozar soluciones de ecuaciones. En particular, introduce las coordenadas polares, además de otros varios sistemas de coordenadas.

En 1691, Jacob Bernoulli publicó un trabajo usando también coordenadas polares. Debido a que el manuscrito de Newton no fue publicado hasta después de su muerte en 1727, el mérito del descubrimiento de las coordenadas polares se atribuye usualmente a Bernoulli.

Coordenadas cilíndricas

DEFINICIÓN Las ***coordenadas cilíndricas*** (r, θ, z) de un punto (x, y, z) están definidas por (*véase* la Figura 1.4.2)

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta, \qquad z = z. \tag{1}$$

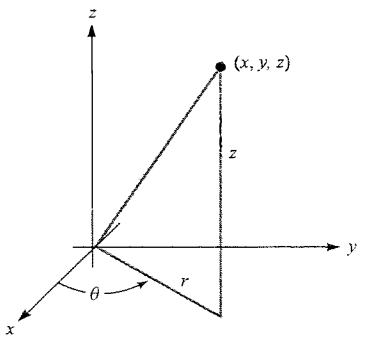


Figura 1.4.2. Representación de un punto (x, y, z) en función de sus coordenadas cilíndricas r, θ y z.

Para expresar r, θ y z en función de x, y, z, y para asegurar que θ está entre 0 y 2π, podemos escribir

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{si } x > 0 \text{ e } y \geqslant 0, \\ \pi + \arctan(y/x) & \text{si } x < 0, \\ 2\pi + \arctan(y/x) & \text{si } x > 0 \text{ e } y < 0, \end{cases} \qquad z = z,$$

donde $\arctan(y/x)$ se toma entre $-\pi/2$ y $\pi/2$. La condición $0 \leqslant \theta < 2\pi$ determina de manera única θ y $r \geqslant 0$ para cualquier x e y. Si $x = 0$, entonces $\theta = \pi/2$ para $y > 0$ y $3\pi/2$ para $y < 0$; si $x = y = 0$, θ no está definido.

En otras palabras, dado cualquier punto (x, y, z), representamos su primera y segunda coordenadas en función de las coordenadas polares y no cambiamos su tercera coordenada. La Fórmula (1) demuestra que dado (r, θ, z), la terna (x, y, z) está completamente determinada y viceversa, si restringimos θ al intervalo $[0, 2\pi)$ (a veces, conviene utilizar el intervalo $(-\pi, \pi]$) y además $r > 0$.

Para ver por qué usamos el término *coordenadas cilíndricas*, nótese que si $0 \leqslant \theta < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$ y $r = a$ es una constante positiva, entonces el lugar geométrico de estos puntos es un cilindro de radio a (*véase* la Figura 1.4.3).

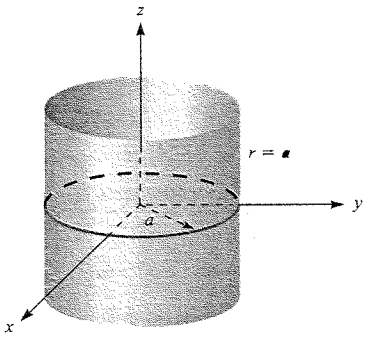


Figura 1.4.3. La gráfica de los puntos cuyas coordenadas cilíndricas satisfacen $r = a$ es un cilindro.

EJEMPLO 1.42

a) Hallar las coordenadas cilíndricas de (6, 6, 8) y dibujarlas.

b) Si un punto tiene coordenadas cilíndricas $(8, 2\pi/3, -3)$, ¿cuáles son sus coordenadas cartesianas? Dibujarlas.

Solución

Para la parte a), tenemos $r = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$ y $\theta = \arctan(6/6) = \arctan(1) = \pi/4$. Por tanto, las coordenadas cilíndricas son $(6\sqrt{2}, \pi/4, 8)$. Es el punto P de la Figura 1.4.4. Para la parte b), nótese que $2\pi/3 = \pi/2 + \pi/6$ y, entonces,

$$x = r\cos\theta = 8\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{8}{2} = -4$$

y

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta = 8\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3} = 8\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$$

Así, las coordenadas cartesianas son $(-4, 4\sqrt{3}, -3)$. Es el punto Q de dicha figura.

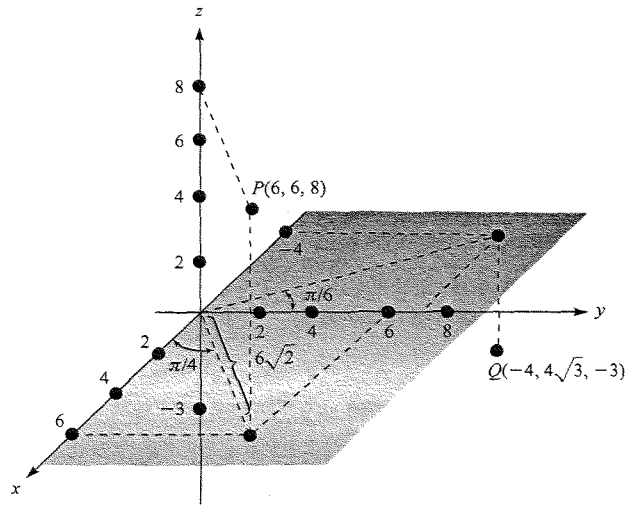


Figura 1.4.4. Ejemplos de transformación entre coordenadas cartesianas y cilíndricas.

Coordenadas esféricas

Las coordenadas cilíndricas no son la única generalización posible a tres dimensiones de las coordenadas polares. Recordemos que, en dos dimensiones, la magnitud del vector $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ (esto es, $\sqrt{x^2 + y^2}$) es la r en el sistema de coordenadas polares. Con las coordenadas cilíndricas la longitud del vector $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, a saber,

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

no es una de las coordenadas del sistema: en cambio, usamos la magnitud $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, el ángulo θ y la «altura» z.

Vamos a modificar esto introduciendo el sistema de *coordenadas esféricas*, que *usa* a ρ como coordenada. Las coordenadas esféricas son útiles con frecuencia en problemas donde hay simetría esférica (simetría relativa a un punto), mientras que las coordenadas cilíndricas se pueden utilizar cuando hay simetría cilíndrica (simetría relativa a una recta).

Dado un punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, sea

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

y representemos x e y con coordenadas polares en el plano xy:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{2}$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y θ está determinado por la Fórmula (1) [*véase* la expresión de θ según la Fórmula (1)]. La coordenada z viene dada por

$$z = \rho\cos\phi$$

donde ϕ es el ángulo (entre 0 y π, ambos inclusive) que forma el radio vector $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ con el eje positivo de la z, en el plano que contiene al vector $\mathbf{v}$ y al eje z (*véase* la Figura 1.4.5). Usando el producto escalar podemos expresar ϕ del siguiente modo:

$$\cos\phi = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}}{||\mathbf{v}||}, \qquad \text{esto es,} \qquad \phi = \arccos\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}}{||\mathbf{v}||}\right).$$

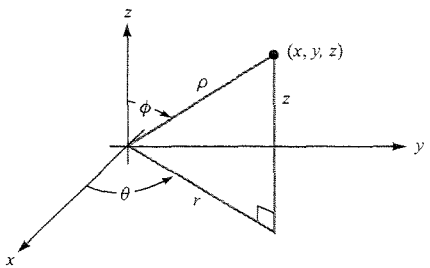


Figura 1.4.5. Coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ); la gráfica de los puntos que satisfacen $\rho = a$ es una esfera.

Tomamos como coordenadas las cantidades ρ, θ, ϕ. Dado que

$$r = \rho \operatorname{sen}\phi,$$

podemos usar la Fórmula (2) para obtener x, y, z en función de las coordenadas esféricas ρ, θ, ϕ.

DEFINICIÓN Las *coordenadas esféricas* de (x, y, z) son (ρ, θ, ϕ) y se definen como sigue:

$$x = \rho \operatorname{sen}\phi\cos\theta, \qquad y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, \qquad z = \rho\cos\phi \tag{3}$$

donde

$$\rho \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant \theta < 2\pi, \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi.$$

Nota Histórica

En 1773 Joseph Louis Lagrange estaba trabajando en la teoría gravitatoria de Newton aplicada a los elipsoides de revolución. Cuando trataba de calcular la atracción gravitatoria total de tales elipsoides se encontró con una integral que resultaba difícil de calcular. Motivado por este problema introdujo las coordenadas esféricas, que le permitieron calcular la integral. Nosotros estudiaremos el método del cambio de coordenadas en la Sección 6.2, ya que se puede aplicar a numerosas integrales múltiples, y sus aplicaciones a la gravitación en la Sección 6.3, donde veremos cómo la ley gravitatoria del inverso de los cuadrados permitió a Newton considerar masas esféricas como masas puntuales.

Las coordenadas esféricas están también estrechamente ligadas a la navegación por medio de la latitud y la longitud. Para ver la relación, observemos primero que la esfera de radio a centrada en el origen se describe mediante una ecuación muy simple en

coordenadas esféricas, a saber, $\rho = a$. Si fijamos el radio a, las coordenadas esféricas θ y ϕ son similares a la latitud y la longitud tomando el eje de la tierra como eje z. Hay diferencias, sin embargo: la longitud geográfica es $|\theta|$ y se llama longitud este u oeste dependiendo de si θ es positivo o negativo medido con respecto al meridiano de Greenwich; la latitud geográfica es $|\pi/2 - \phi|$ y se llama latitud norte o sur dependiendo de si $\pi/2 - \phi$ es positivo o negativo.

EJEMPLO 1.43

a) Calcular las coordenadas esféricas del punto $(1, -1, 1)$ y dibujarlo.

b) Calcular las coordenadas cartesianas del punto $(3, \pi/6, \pi/4)$ dado en coordenadas esféricas y dibujarlo.

c) Consideremos el punto $(2, -3, 6)$ en coordenadas cartesianas. Calcular sus coordenadas esféricas y dibujarlo.

d) Consideremos un punto dado en coordenadas esféricas $(1, -\pi/2, \pi/4)$. Calcular sus coordenadas cartesianas y dibujarlo.

Solución

a) $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3},$

$$\theta = 2\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = 2\pi + \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4},$$

$$\phi = \arccos\left(\frac{z}{\rho}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx 0{,}955 \approx 54{,}74^\circ.$$

Véase la Figura 1.4.6(a) y la expresión para θ deducida de la Fórmula (1).

b) $$x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta = 3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}},$$

$$y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta = 3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2\sqrt{2}},$$

$$z = \rho\cos\phi = 3\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Véase la Figura 1.4.6(b).

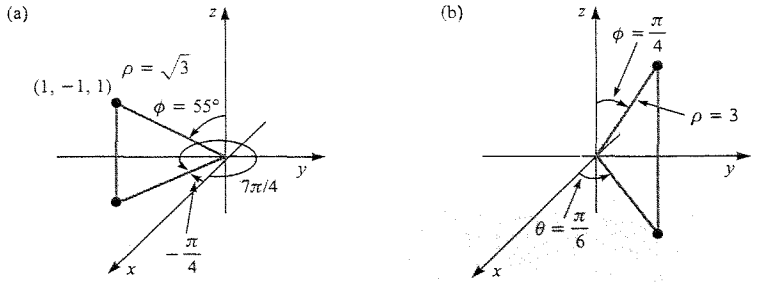


Figura 1.4.6. Cálculo de (a) las coordenadas esféricas del punto (1, −1, 1) y (b) las coordenadas cartesianas de (3, π/6, π/4).

c) $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7,$

$$\theta = 2\pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = 2\pi + \arctan\left(\frac{-3}{2}\right) \approx 5{,}3004 \text{ radianes} \approx 303{,}69°,$$

$$\phi = \arccos\left(\frac{z}{\rho}\right) = \arccos\left(\frac{6}{7}\right) \approx 0{,}541 \approx 31{,}0°.$$

Véase la Figura 1.4.7(a).

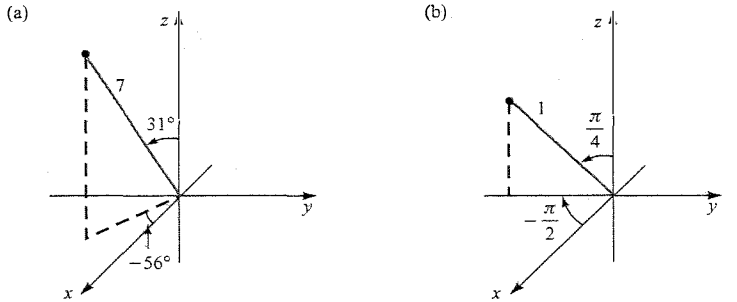


Figura 1.4.7. Cálculo de (a) coordenadas esféricas del punto (2, −3, 6) y (b) coordenadas cartesianas de (1, −π/2, π/4).

d) $$x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta = 1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot 0 = 0,$$

$$y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta = 1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(-1) = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$z = \rho \cos\phi = 1 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Véase la Figura 1.4.7(b).

EJEMPLO 1.44 Expresar a) la superficie $xz = 1$ y b) la superficie $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ en coordenadas esféricas.

Solución

De la Fórmula (3), $x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos\theta$, y $z = \rho \cos\phi$, y así la superficie $xz = 1$ de a) está formada por los puntos ρ, θ, ϕ tales que

$$\rho^2 \operatorname{sen} \phi \cos\theta \cos\phi = 1, \qquad \text{esto es,} \qquad \rho^2 \operatorname{sen} 2\phi \cos\theta = 2.$$

Para el apartado b) podemos escribir

$$x^2 + y^2 - z^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2z^2 = \rho^2 - 2\rho^2 \cos^2\phi,$$

de modo que la superficie es $\rho^2(1 - 2\cos^2\phi) = 1$; esto es, $-\rho^2 \cos(2\phi) = 1$.

Asociados a las coordenadas cilíndricas y esféricas existen vectores unitarios que se corresponden con **i**, **j** y **k** en las coordenadas rectangulares. Se muestran en la Figura 1.4.8. Por ejemplo, $\mathbf{e}_r$ es el vector unitario paralelo al plano xy que tiene dirección radial, de manera que $\mathbf{e}_r = (\cos\theta)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\theta)\mathbf{j}$. Del mismo modo, en coordenadas esféricas, $\mathbf{e}_\phi$ es el vector unitario tangente a la curva parametrizada por la variable ϕ manteniendo fijas las variables ρ y θ. Utilizaremos estos vectores unitarios más adelante cuando usemos coordenadas cilíndricas y esféricas en cálculos vectoriales.

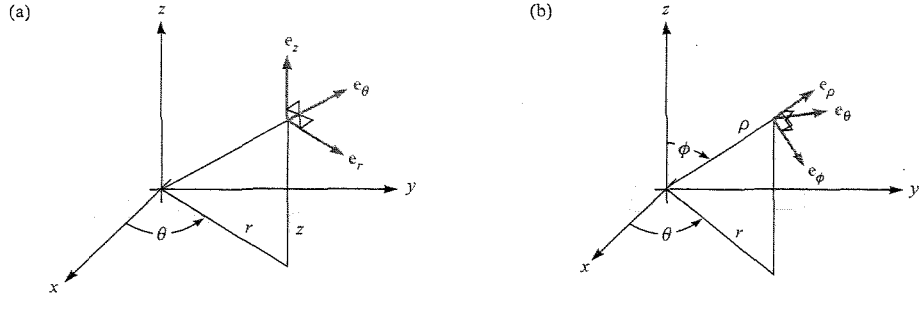


Figura 1.4.8. (a) Vectores ortonormales $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_z$ asociados con las coordenadas cilíndricas. El vector $\mathbf{e}_r$ es paralelo a la recta r. (b) Vectores ortonormales $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_\phi$ asociados con las coordenadas esféricas.

EJERCICIOS

1. a) Los siguientes puntos vienen dados en coordenadas cilíndricas; expresar cada uno en coordenadas rectangulares y esféricas: $(1, 45°, 1)$, $(2, \pi/2, -4)$, $(0, 45°, 10)$, $(3, \pi/6, 4)$, $(1, \pi/6, 0)$ y $(2, 3\pi/4, -2)$.
   b) Transformar los siguientes puntos de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas y esféricas: $(2, 1, -2)$, $(0, 3, 4)$, $(\sqrt{2}, 1, 1)$, $(-2\sqrt{3}, -2, 3)$.

2. Describir el significado geométrico de las siguientes aplicaciones en coordenadas cilíndricas:

a) $(r, \theta, z) \to (r, \theta, -z)$.

b) $(r, \theta, z) \to (r, \theta + \pi, -z)$.

c) $(r, \theta, z) \to (-r, \theta - \pi/4, z)$.

3. Describir el significado geométrico de las siguientes aplicaciones en coordenadas esféricas:

a) $(\rho, \theta, \phi) \to (\rho, \theta + \pi, \phi)$.

b) $(\rho, \theta, \phi) \to (\rho, \theta, \pi - \phi)$.

c) $(\rho, \theta, \phi) \to (2\rho, \theta + \pi/2, \phi)$.

4. **a)** Describir las superficies dadas en coordenadas cilíndricas: r = constante, θ = constante y z = constante.

b) Describir las superficies dadas en coordenadas esféricas: ρ = constante, θ = constante y ϕ = constante.

5. Demostrar que para representar cualquier punto de $\mathbb{R}^3$ mediante coordenadas esféricas basta tomar valores de θ entre 0 y 2π, valores de ϕ entre 0 y π, y valores de $\rho \geqslant 0$. ¿Son únicas estas coordenadas si admitimos que $\rho \leqslant 0$?

6. Usando coordenadas cilíndricas y los vectores ortonormales (ortogonales normalizados) $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_z$ (*véase* la Figura 1.4.8),

a) expresar cada uno de los vectores $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_z$ en función de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ y (x, y, z); y

b) calcular $\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{j}$ analíticamente, usando la parte a), y geométricamente.

7. Usando coordenadas esféricas y los vectores ortonormales (ortogonales normalizados) $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_\phi$ (*véase* la Figura 1.4.8 (b)),

a) expresar cada uno de los vectores $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_\phi$ en función de $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ y (x, y, z); y

b) calcular $\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{j}$ y $\mathbf{e}_\phi \times \mathbf{j}$ analítica y geométricamente.

8. Expresar el plano $z = x$ en coordenadas **a)** cilíndricas y **b)** esféricas.

9. Demostrar que en coordenadas esféricas:

a) ρ es la longitud de $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

b) $\phi = \arccos(\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}/\|\mathbf{v}\|)$, donde $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

c) $\theta = \arccos(\mathbf{u} \cdot \mathbf{i}/\|\mathbf{u}\|)$, donde $\mathbf{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

10. Dos superficies están descritas en coordenadas esféricas por medio de dos ecuaciones $\rho = f(\theta, \phi)$ y $\rho = -2f(\theta, \phi)$, donde $f(\theta, \phi)$ es una función de dos variables. ¿Cómo se obtiene geométricamente la segunda superficie a partir de la primera?

11. Una membrana circular en el espacio está sobre la región $x^2 + y^2 \leqslant a^2$. El valor máximo de la componente z de los puntos de la membrana es b. Supongamos que (x, y, z) es un punto de la membrana. Demostrar que ese punto expresado en coordenadas cilíndricas (r, θ, z) satisface las condiciones $0 \leqslant r \leqslant a$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $|z| \leqslant b$.

12. Un tanque que tiene forma de cilindro circular recto de radio 3 m y altura 5 m está lleno hasta la mitad de líquido y reposa de lado. Describir el espacio vacío dentro del tanque eligiendo un sistema adecuado de coordenadas cilíndricas.

13. Se va a diseñar un vibrómetro que soporte los efectos del calentamiento de su cubierta esférica de diámetro d, que debe enterrarse a una profundidad de $d/3$ en la tierra y cuya parte superior estará calentada por el sol (suponemos que la superficie terrestre es plana). El análisis de la conducción del calor requiere una descripción de la parte enterrada de la cubierta en coordenadas esféricas. Encontrarla.

14. Un cartucho de filtro de aceite es un cilindro recto circular poroso dentro del cual el aceite se difunde desde el eje hacia la superficie curvada exterior. Describir el cartucho en coordenadas cilíndricas si el diámetro del filtro es de 11,4 cm, la altura de 14,2 cm y el centro del cartucho está taladrado (a lo largo) desde arriba para permitir la entrada de un perno de $\frac{5}{8}$ cm de diámetro.

15. Describir la superficie que en coordenadas esféricas viene dada por $\rho = \cos 2\theta$.

1.5. El espacio euclídeo *n*-dimensional

Vectores en el espacio *n*-dimensional

En las Secciones 1.1 y 1.2 estudiamos los espacios $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, y dimos sus interpretaciones geométricas. Por ejemplo, un punto (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ se puede pensar como un objeto geométrico, a saber, el segmento recto dirigido o vector que sale del origen y termina en el punto (x, y, z). Por consiguiente, podemos pensar $\mathbb{R}^3$ de cualquiera de estas dos formas:

i) Algebraicamente, como un conjunto de ternas (x, y, z) donde x, y y z son números reales.

ii) Geométricamente, como un conjunto de segmentos rectos dirigidos.

Estas dos formas de ver $\mathbb{R}^3$ son equivalentes. Para una generalización, es más fácil usar la definición i). Precisamente, podemos definir $\mathbb{R}^n$, donde n es un entero positivo (posiblemente mayor que 3), como el conjunto de todas las n-tuplas ordenadas $(x_1, x_2, ..., x_n)$, donde los x_i son números reales. Por ejemplo, $(1, \sqrt{5}, 2, \sqrt{3}) \in \mathbb{R}^4$.

El conjunto $\mathbb{R}^n$ así definido se conoce como ***espacio euclídeo n-dimensional***, y sus elementos, que se denotan $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, se llaman ***vectores n-dimensionales*** o, simplemente, ***vectores***. Tomando $n = 1$, 2 o 3, obtenemos la recta, el plano y el espacio tridimensional, respectivamente.

Comenzaremos nuestro estudio del espacio euclídeo n-dimensional introduciendo varias operaciones algebraicas. Éstas son análogas a las introducidas en la Sección 1.1 para $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Las dos primeras, suma y multiplicación por escalares, se definen como sigue:

i) $(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$;

y,

ii) para cualquier número real α,

$$\alpha(x_1, x_2, ..., x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n).$$

La importancia geométrica de estas operaciones en el caso de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ ya se discutió en la Sección 1.1.

Los n vectores

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, ..., 0),\ \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, ..., 0),\ ...,\ \mathbf{e}_n = (0, 0, ..., 0, 1)$$

se llaman ***vectores de la base canónica*** de $\mathbb{R}^n$, y generalizan los tres vectores unitarios ortogonales **i**, **j**, **k** de $\mathbb{R}^3$. El vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ se puede escribir como $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$.

Para dos vectores $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ de $\mathbb{R}^3$, definimos el *producto escalar* $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ como el número real $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. Esta definición se generaliza fácilmente a $\mathbb{R}^n$; precisamente, para $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$, definimos el ***producto escalar*** de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ como $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$. En $\mathbb{R}^n$, se utiliza con frecuencia la notación $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ en lugar de $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ para el producto escalar.

Continuando la analogía con $\mathbb{R}^3$, definimos la noción de ***longitud*** o ***norma*** de un vector $\mathbf{x}$ mediante la fórmula

$$\text{Longitud de } \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Si $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son dos vectores del plano ($\mathbb{R}^2$) o del espacio ($\mathbb{R}^3$), sabemos que el ángulo entre ambos viene dado por la fórmula

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}.$$

El lado derecho de esta ecuación se puede definir en $\mathbb{R}^n$ del mismo modo que en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. Sigue representando el coseno del ángulo entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$; este ángulo está geométricamente bien definido, puesto que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ están en un subespacio bidimensional de $\mathbb{R}^n$ (el plano determinado por $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$) y nuestras ideas geométricas habituales son válidas en estos planos.

Será útil disponer de algunas propiedades algebraicas del producto escalar. Éstas se resumen en el siguiente teorema [compárense con las propiedades (i), (ii), (iii) y (iv) de la Sección 1.2].

TEOREMA 3 Para $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ y α, β números reales, se tiene:

i) $(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y})\cdot\mathbf{z} = \alpha(\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y}\cdot\mathbf{z})$.

ii) $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{y}\cdot\mathbf{x}$.

iii) $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} \geqslant 0$.

iv) $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = 0$ si y sólo si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

DEMOSTRACIÓN Cada una de las cuatro afirmaciones se puede probar mediante un cálculo sencillo. Por ejemplo, para probar la propiedad (i) escribimos:

$$\begin{aligned}(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y})\cdot\mathbf{z} &= (\alpha x_1 + \beta y_1,\ \alpha x_2 + \beta y_2,\ ...,\ \alpha x_n + \beta y_n)\cdot(z_1, z_2, ..., z_n)\\ &= (\alpha x_1 + \beta y_1)z_1 + (\alpha x_2 + \beta y_2)z_2 + \cdots + (\alpha x_n + \beta y_n)z_n\\ &= \alpha x_1z_1 + \beta y_1z_1 + \alpha x_2z_2 + \beta y_2z_2 + \cdots + \alpha x_nz_n + \beta y_nz_n\\ &= \alpha(\mathbf{x}\cdot\mathbf{z}) + \beta(\mathbf{y}\cdot\mathbf{z}).\end{aligned}$$

Las otras demostraciones son similares.

En la Sección 1.2, probamos una interesante propiedad del producto escalar conocida como desigualdad de Cauchy-Schwarz[4]. Para $\mathbb{R}^2$ la demostración requirió el uso de la ley de los cosenos. Para R^n podríamos utilizar este método, restringiendo nuestra atención a un plano en R^n. Sin embargo, también podemos dar una prueba directa, completamente algebraica.

TEOREMA 4: La desigualdad de Cauchy-Schwarz en $\mathbb{R}^n$ Sean $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ vectores de $\mathbb{R}^n$. Entonces,

$$|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \leqslant \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|.$$

DEMOSTRACIÓN Sea $a = \mathbf{y}\cdot\mathbf{y}$, y $b = -\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$. Si $a = 0$, el teorema es claramente válido porque entonces $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ y ambos lados de la desigualdad se reducen a 0. Por tanto, podemos suponer que $a \neq 0$. Por el Teorema 3 tenemos:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant (a\mathbf{x} + b\mathbf{y})\cdot(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) &= a^2\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} + 2ab\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + b^2\mathbf{y}\cdot\mathbf{y} \\ &= (\mathbf{y}\cdot\mathbf{y})^2\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} - (\mathbf{y}\cdot\mathbf{y})(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2. \end{aligned}$$

Dividiendo por $\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}$ se obtiene $0 \leqslant (\mathbf{y}\cdot\mathbf{y})(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}) - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2$, esto es, $(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2 \leqslant (\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})(\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2$. Tomando raíces cuadradas en ambos lados de esta desigualdad se llega al resultado deseado.

La desigualdad de Cauchy-Schwarz posee una consecuencia muy útil en términos de longitudes. La desigualdad triangular en $\mathbb{R}^3$ es clara geométricamente y ya se discutió en la Sección 1.2. La demostración *analítica* de la desigualdad triangular que dimos en la Sección 1.2 funciona exactamente igual en $\mathbb{R}^n$ y prueba lo siguiente:

COROLARIO: La desigualdad triangular en $\mathbb{R}^n$ Sean $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ vectores en $\mathbb{R}^n$. Entonces,

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

Si el Teorema 4 y su corolario se desarrollan algebraicamente, se convierten en las siguientes desigualdades útiles:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2};$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}.$$

[4] Algunas veces llamada desigualdad de Cauchy-Bunyakovskii-Schwarz, o simplemente desigualdad CBS, porque fue descubierta independientemente en casos particulares por el matemático francés Cauchy, el matemático ruso Bunyakovskii y el matemático alemán Schwarz.

EJEMPLO 1.45 Sea $\mathbf{x} = (1, 2, 0, -1)$ e $\mathbf{y} = (-1, 1, 1, 0)$. Comprobar para este caso el Teorema 4 y su corolario.

Solución

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\|\mathbf{y}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{3}$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 1(-1) + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-1)0 = 1$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (0, 3, 1, -1)$$

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}.$$

Calculamos $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 1 \leqslant 4{,}24 \approx \sqrt{6}\sqrt{3} = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$, lo que verifica el Teorema 4. Del mismo modo podemos comprobar su corolario:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \sqrt{11} \approx 3{,}32$$

$$\leqslant 4{,}18 = 2{,}45 + 1{,}73 \approx \sqrt{6} + \sqrt{3} = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

Por analogía con $\mathbb{R}^3$, podemos definir la noción de distancia en $\mathbb{R}^n$; a saber, si $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son puntos de $\mathbb{R}^n$, la ***distancia entre*** $\mathbf{x}$ ***e*** $\mathbf{y}$ se define como $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, la longitud del vector $\mathbf{x} - \mathbf{y}$. No intentaremos definir el producto vectorial en $\mathbb{R}^n$ excepto para $n = 3$.

Matrices generales

Para generalizar matrices 2×2 y 3×3 (*véase* la Sección 1.3) podemos considerar matrices $m \times n$ que son ordenaciones de mn números:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

También escribiremos A como $[a_{ij}]$. Definimos suma y multiplicación por un escalar componente a componente, como hicimos con los vectores. Dadas dos matrices $m \times n$, A y B, podemos sumarlas para obtener una nueva matriz $m \times n$, $C = A + B$, cuyo ij-ésimo elemento c_{ij} es la suma de a_{ij} y b_{ij}. Es claro que $A + B = B + A$.

EJEMPLO 1.46

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}$.

b) $[1 \quad 2] + [0 \quad -1] = [1 \quad 1]$.

c) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Dado un escalar λ y una matriz $m \times n$, A, podemos multiplicar A por λ para obtener una nueva matriz $m \times n$, $\lambda A = C$, cuyo elemento ij-ésimo es el producto λa_{ij}.

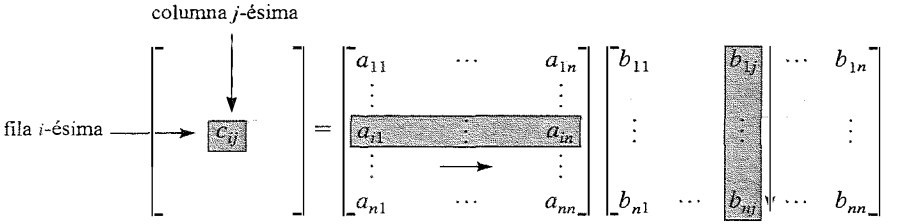
EJEMPLO 1.47

$$3\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & 15 \\ 3 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Pasamos ahora a la multiplicación de matrices. Si $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ son matrices $n \times n$, el producto $AB = C$ tiene como elementos

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},$$

que es el producto escalar de la fila i-ésima de A y la columna j-ésima de B:



EJEMPLO 1.48 Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces,

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nótese que $AB \neq BA$.

De manera análoga, podemos multiplicar una matriz $m \times n$ (m filas, n columnas) por una matriz $n \times p$ (n filas, p columnas) mediante la misma regla, para obtener una matriz $m \times p$ (m filas, p columnas). Nótese que para que AB esté definido, el número de *columnas* de A debe ser igual al número de *filas* de B.

EJEMPLO 1.49 Sean

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces,

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$

y BA no está definido.

EJEMPLO 1.50 Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = [2 \quad 2 \quad 1 \quad 2].$$

Entonces,

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 6 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad BA = [13].$$

Cualquier matriz $m \times n$, A, determina una aplicación de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ definida como sigue: sea $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; consideremos la matriz columna $n \times 1$ asociada a $\mathbf{x}$, que denotaremos *momentáneamente* como $\mathbf{x}^T$

$$\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

y multipliquemos A por $\mathbf{x}^T$ (considerada como una matriz $n \times 1$) para obtener una nueva matriz $m \times 1$:

$$A\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \mathbf{y}^T,$$

que corresponde al vector $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$[5]. Así, aun cuando pueda causar alguna confusión, escribiremos $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ como matrices columna

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

cuando se trate de multiplicación de matrices; esto es, *identificaremos* estas dos formas de escribir vectores. Por tanto, suprimiremos la T de $\mathbf{x}^T$ y consideraremos iguales $\mathbf{x}^T$ y $\mathbf{x}$.

Así, $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ «realmente» significará lo siguiente: se escribe $\mathbf{x}$ como una matriz columna, se multiplica por A, y el vector $\mathbf{y}$ tiene como componentes las de la matriz columna resultante. La regla $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ define entonces una aplicación de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. Esta aplicación es lineal, es decir, satisface

$$A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$$

$$A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha(A\mathbf{x}), \qquad \alpha \text{ un escalar},$$

como puede comprobarse fácilmente. En un curso de álgebra lineal se aprende que, recíprocamente, cualquier transformación de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ se puede representar de este modo mediante una matriz $m \times n$.

Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz $m \times n$ y $\mathbf{e}_j$ es el vector j-ésimo de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, entonces $A\mathbf{e}_j$ es un vector de $\mathbb{R}^m$ con componentes iguales a la j-ésima columna de A; esto es, la componente i-ésima de $A\mathbf{e}_j$ es a_{ij}. Simbólicamente, $(A\mathbf{e}_j)_i = a_{ij}$.

EJEMPLO 1.51 Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

entonces $\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^4$ es la aplicación definida por

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x_1 + 3x_3 \\ -x_1 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \end{bmatrix}.$$

[5] Al usar una matriz A para obtener una aplicación de vectores $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ a vectores $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ de acuerdo con la ecuación $A\mathbf{x}^T = \mathbf{y}^T$, escribimos los vectores en forma de columna $\mathbf{x}^T$ en lugar de en forma de fila $(x_1, \ldots, x_n)$. Este repentino cambio de escribir $\mathbf{x}$ en forma de columna es necesario debido a las convenciones usuales sobre multiplicación de matrices.

EJEMPLO 1.52 A continuación se ilustra lo que le sucede a un punto específico cuando se le aplica una matriz 4×3:

$$A\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 9 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \text{segunda columna de } A$$

Propiedades de las matrices

La multiplicación de matrices no es, en general, ***conmutativa***: si A y B son matrices $n \times n$ entonces, generalmente,

$$AB \neq BA,$$

como demuestran los Ejemplos 1.48, 1.49 y 1.50.

Una matriz $n \times n$ se dice ***invertible*** si existe una matriz B también $n \times n$ tal que

$$AB = BA = I_n,$$

donde

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

es la matriz identidad $n \times n$: I_n tiene la propiedad de que $I_nC = CI_n = C$ para cualquier matriz C de orden $n \times n$. Denotamos B por A^{-1} y llamamos a A^{-1} la ***inversa*** de A. La inversa, cuando existe, es única.

EJEMPLO 1.53 Si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{entonces} \quad A^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ -6 & 12 & 4 \end{bmatrix},$$

ya que $AA^{-1} = I_3 = A^{-1}A$, como se puede comprobar multiplicando las matrices.

Los métodos para calcular inversas se aprenden en álgebra lineal; en este libro no se requieren estos métodos. Si A es invertible, la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ se puede resolver y despejar $\mathbf{x}$ multiplicando ambos lados por A^{-1} para obtener $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y}$[6].

[6] De hecho, la regla de Cramer de la Sección 1.3 proporciona un método para invertir matrices. Otros más eficientes desde un punto de vista numérico, basados en métodos de eliminación, se aprenden en álgebra lineal o en cálculo numérico.

En la Sección 1.3, definimos el determinante de una matriz 3×3. Éste se puede generalizar por inducción a determinantes $n \times n$. Mostramos aquí cómo escribir el determinante de una matriz 4×4 en función de los determinantes de matrices 3×3.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

(*véase* la Fórmula (2) de la Sección 1.3; los signos se alternan: $+, -, +, -$).

Las propiedades básicas de los determinantes 3×3 que se repasaron en la Sección 1.3 son válidas para determinantes de una matriz $n \times n$. En particular, si A es una matriz $n \times n$ y B es la matriz formada al sumar un múltiplo escalar de una fila (o columna) de A a otra fila (o columna, respectivamente) de A, entonces el determinante de A es igual al determinante de B (*véase* el Ejemplo 1.54).

Un teorema básico del álgebra lineal afirma que si A es una matriz $n \times n$, A es invertible si y sólo si su determinante no es cero. Otra propiedad básica es que el determinante es multiplicativo: $\det(AB) = (\det A)(\det B)$. En este texto no utilizaremos demasiada álgebra lineal, de modo que dejaremos sin demostrar estas afirmaciones.

EJEMPLO 1.54 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Hallar $\det A$. ¿Tiene A inversa?

Solución

Al sumar $(-1) \times$ la primera columna a la tercera columna, tenemos

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Sumando $(-1) \times$ la primera columna a la tercera columna de este determinante 3×3 obtenemos

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

Así, $\det A = -2 \neq 0$ y, por tanto, A tiene inversa.

Si tenemos tres matrices A, B y C tales que los productos AB y BC están definidos, entonces los productos $(AB)C$ y $A(BC)$ también están definidos y son, de hecho, iguales (esto es, la multiplicación de matrices es *asociativa*). Llamamos a esto *triple producto* de matrices y lo denotamos por ABC.

EJEMPLO 1.55 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad B = [1 \quad 1] \qquad \text{y} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Entonces,

$$ABC = A(BC) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}[3] = \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

EJEMPLO 1.56

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nota Histórica

El fundador de la moderna geometría (en coordenadas) fue René Descartes (*véase* la Figura 1.5.1), gran físico, filósofo y matemático, además de fundador de la biología moderna.

Nacido en Touraine, Francia, en 1596, Descartes tuvo una vida fascinante. Después de estudiar leyes se estableció en París, donde desarrolló su interés por las matemáticas. En 1628, se trasladó a Holanda, donde escribió su único trabajo en matemáticas, *La Geometrie*, uno de los orígenes de la moderna geometría en coordenadas.



Figura 1.5.1. René Descartes (1596-1650).

Descartes había sido muy crítico con la geometría de los antiguos griegos, con todos sus conceptos sin definir y con sus pruebas que requerían cada vez métodos nuevos y más ingeniosos. Para Descartes esta geometría estaba tan atada a las figuras geométricas «que puede ejercitar el entendimiento sólo a condición de fatigar enormemente la imaginación». Se comprometió a explorar, en geometría, el uso del álgebra, que había sido desarrollado recientemente. El resultado fue *La Geometrie*, que hizo posible el uso de métodos analíticos y computacionales en geometría.

Recordemos que los griegos eran, como Descartes, filósofos además de matemáticos y físicos. Su respuesta a la cuestión del significado de espacio fue la «geometría euclídea». Descartes tuvo éxito «algebrizando» el modelo griego de espacio.

Gottfried Wilhelm Leibniz, cofundador (con Isaac Newton) del cálculo, estuvo también interesado en el «análisis espacial», pero no pensaba que el álgebra de Descartes llegara lo suficientemente lejos. Leibniz buscó un método directo de análisis espacial (*analisis situs*) que podría interpretarse como una llamada al desarrollo del análisis vectorial.

El 8 de septiembre de 1679 Leibniz esbozaba estas ideas en una carta a Christian Huygens:

> Sigo sin estar satisfecho con el álgebra, porque no proporciona ni los métodos más cortos ni las construcciones más hermosas en geometría. Es por lo que creo que, en lo que concierne a la geometría, necesitamos otro análisis que sea claramente geométrico o lineal y que exprese la localización (situs) directamente del mismo modo que el álgebra expresa la magnitud directamente. Y creo que he encontrado el modo y que podemos representar figuras e incluso máquinas y movimientos mediante caracteres, como el álgebra representa números o magnitudes. Te envío un ensayo que a mi parecer es importante.

En el ensayo, Leibniz describía sus ideas con gran detalle:

> He descubierto algunos elementos de un nuevo lenguaje que es completamente diferente del álgebra y que tendrá grandes ventajas para la mente a la hora de representar, exacta y fielmente a su naturaleza, incluso sin dibujos, todo aquello que depende del sentido de la percepción. El álgebra es el lenguaje para números indeterminados o magnitudes únicamente, pero no expresa situación, ángulos y movimiento directamente. Por tanto, es con frecuencia difícil analizar las propiedades de una figura mediante el cálculo, y aún más difícil encontrar demostraciones y construcciones geométricas adecuadas, incluso cuando el cálculo algebraico está terminado. Pero este nuevo lenguaje, que sigue figuras visuales, da, al mismo tiempo, la solución, la construcción y la demostración geométrica, y de un modo natural y en un solo análisis, es decir, mediante un procedimiento determinado.

Las ideas de Leibniz influyeron en Hamilton y en otros. A mediados del siglo diecinueve, Bolyai y Lobachevsky desarrollaron su geometría «no euclídea», y Gauss desarrolló una teoría de superficies curvas en el espacio tridimensional. Gauss estudió dos medidas de curvatura, la *curvatura media* y la *curvatura de Gauss*. Por ejemplo, las pompas y las películas de jabón tienen curvatura media constante, pero sólo las pompas tienen curvatura de Gauss constante. Discutiremos más adelante sobre estas ideas en la Sección 7.7.

Bernhard Riemann, posiblemente el genio matemático más grande de todos los tiempos, impartió una lección inaugural en 1854 en la Facultad de la Universidad de Gotinga titulada «Sobre las hipótesis que están en los fundamentos de la geometría». Fue este monumental trabajo el que permitiría, cincuenta años más tarde, la fundación de la teoría general de la relatividad de Einstein. Riemann, como Leibniz y los primeros griegos, estaba interesado en el espacio, especialmente en sus propiedades métricas (o de distancia).

Riemann propuso el estudio de los espacios y las superficies n-dimensionales. Demostró cómo medir la curvatura de superficies de tres, cuatro y n dimensiones e, increiblemente, demostró que para ser llamada «curva», una superficie no necesitaba «curvarse» dentro de otra cosa; la curvatura era simplemente una consecuencia de las intrínsecas «propiedades métricas del espacio». Una vez que Riemann demostró que los modelos matemáticos nos permiten pensar en espacios de cualquier dimensión, la cuestión de por qué nuestro espacio tiene tres dimensiones y no cuatro, cinco o más surge de manera natural. Sorprendentemente, nadie todavía ha sido capaz de ofrecer una explicación convincente de por qué, en el momento de la creación, el espacio se hizo tridimensional.

Hacia 1910, Albert Einstein comprendió que la gravedad podría ser explicada como una consecuencia de la curvatura de un espacio de cuatro dimensiones espacio-tiempo (materia y energía curvan el espacio y el tiempo) y, gracias a Riemann, el espacio-tiempo de Einstein no necesita estar encerrado en ningún universo ambiente. Cómo la materia y la energía curvan el espacio-tiempo es la esencia de las ecuaciones de campo de Einstein en la relatividad general. En la Sección 7.7 trataremos estas ideas de curvatura en profundidad e indicaremos alguna de las ideas que hay detrás de la relatividad general. La idea de n-dimensiones empezó también a deslizarse en las matemáticas desde otra dirección muy distinta —desde las matrices.

La definición de matriz, como un objeto abstracto aislado, se debe al matemático inglés Arthur Cayley. Cayley nació en 1821, y en 1863 fue nombrado Sedlesian Professor of Mathematics en la Universidad de Cambridge. Hacia 1855, un año después de la lección inaugural de Riemann, Cayley, en un esfuerzo por simplificar la notación en su estudio de las ecuaciones lineales (como vimos en la Sección 1.5), introdujo la idea abstracta de matriz de m columnas y n filas. Naturalmente, una matriz $1 \times n$ se puede ver como un vector en un «espacio n-dimensional».

Después de que este concepto se asentara, los matemáticos comprendieron que no se perdía demasiado al trabajar en dimensiones generales, y así el álgebra lineal moderna ya había comenzado su andadura. De nuevo, la física resultó ser el principal impulso. El álgebra lineal abstracta moderna, incluyendo espacios vectoriales abstractos, empezó a introducirse en los libros de texto a partir de la aparición en 1918 de *Space-Time-Matter*, de Hermann Weyl.

EJERCICIOS

1. Calcular el producto escalar de $\mathbf{x} = (1, -1, 0, 2) \in \mathbb{R}^4$ e $\mathbf{y} = (1, 2, 3, 4) \in \mathbb{R}^4$.

2. En $\mathbb{R}^n$ demostrar que

a) $2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$ (Esto se conoce como la ***ley del paralelogramo***.)

b) $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|\,\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$.

c) $4\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2$ (Esto se llama ***identidad de polarización***.)

Interpretar estos resultados geométricamente en términos del paralelogramo formado por $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

Comprobar que se cumplen la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad triangular para los vectores de los Ejercicios 3 al 6.

3. $\mathbf{x} = (2, 0, -1)$, $\mathbf{y} = (4, 0, -2)$.

4. $\mathbf{x} = (1, 0, 2, 6)$, $\mathbf{y} = (3, 8, 4, 1)$.

5. $\mathbf{x} = (1, -1, 1, -1, 1)$, $\mathbf{y} = (3, 0, 0, 0, 2)$.

6. $\mathbf{x} = (1, 0, 0, 1)$, $\mathbf{y} = (-1, 0, 0, 1)$.

7. Calcular AB, $\det A$, $\det B$, $\det(AB)$ y $\det(A + B)$ para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

8. Calcular AB, $\det A$, $\det B$, $\det(AB)$ y $\det(A + B)$ para

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

9. Usar inducción en k para probar que si $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\|\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_k\| \leqslant \|\mathbf{x}_1\| + \cdots + \|\mathbf{x}_k\|.$$

10. Probar, usando álgebra lineal, la ***identidad de Lagrange***: para números reales $x_1, \ldots, x_n$ y $y_1, \ldots, y_n$.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right) - \sum_{i<j} (x_i y_j - x_j y_i)^2.$$

Usar esto para dar otra demostración de la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $\mathbb{R}^n$.

11. Probar que si A es una matriz $n \times n$, entonces

a) $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$; y

b) si B es una matriz obtenida a partir de A multiplicando cualquier fila o columna por un escalar λ, entonces $\det B = \lambda \det A$.

En los ejercicios del 12 al 14, A, B y C denotan matrices n × n.

12. ¿Es cierto que $\det(A + B) = \det A + \det B$? Dar una demostración o encontrar un contraejemplo.

13. ¿Es cierto que $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$?

14. Suponiendo cierta la ley $\det(AB) = (\det A)(\det B)$, demostrar que $\det(ABC) = (\det A)(\det B)(\det C)$.

15. (Este ejercicio supone el conocimiento de la integración de funciones continuas de una variable.) Obsérvese que la demostración de la desigualdad de Cauchy-Schwarz (Teorema 4) depende únicamente de las propiedades del producto escalar enumeradas en el Teorema 1. Usar esta observación para establecer la siguiente desigualdad para funciones continuas f, g: $[0, 1] \to \mathbb{R}$:

$$\left|\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right| \leq \sqrt{\int_0^1 [f(x)]^2\,dx}\,\sqrt{\int_0^1 [g(x)]^2\,dx}.$$

Hacer esto

a) Comprobando que el espacio de funciones continuas de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial; es decir, podemos pensar en las funciones f, g en abstracto como «vectores» que se pueden sumar entre sí y multiplicar por escalares.

b) Introduciendo el producto escalar de funciones

$$f \cdot g = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

y comprobando que satisface las condiciones (i) a (iv) del Teorema 3.

16. Si A es una matriz $n \times n$ se define su traspuesta, A^T, como sigue: el elemento ij-ésimo de A^T es a_{ji}, donde a_{ij} es el ij-ésimo elemento de A. Demostrar que A^T se caracteriza por la siguiente propiedad: para cada $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^n$,

$$(A^T\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (A\mathbf{y}).$$

17. Comprobar que la inversa de

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{es} \quad \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

18. Usar la respuesta del Ejercicio 17 para demostrar que la solución del sistema

$$az + by = e$$
$$cx + dy = f$$

es

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}.$$

19. Suponiendo cierta la ley $\det(AB) = (\det A)(\det B)$, verificar que $(\det A)(\det A^{-1}) = 1$ y concluir que, si A tiene inversa, entonces $\det A \neq 0$.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 1

1. Sea $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{w} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Calcular $\mathbf{v} + \mathbf{w}$, $3\mathbf{v}$, $6\mathbf{v} + 8\mathbf{w}$, $-2\mathbf{v}$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$, $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$. Interpretar cada operación geométricamente dibujando los vectores.

2. Repetir el Ejercicio 1 con $\mathbf{v} = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{w} = -\mathbf{i} - \mathbf{k}$.

3. a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(-1, 2, -1)$ y tiene dirección $\mathbf{j}$.

b) Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(0, 2, -1)$ y $(-3, 1, 0)$.

c) Hallar la ecuación del plano perpendicular al vector $(-2, 1, 2)$ y que pasa por el punto $(-1, 1, 3)$.

4. a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(0, 1, 0)$ y tiene dirección $3\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

b) Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(0, 1, 1)$ y $(0, 1, 0)$.

c) Hallar la ecuación del plano perpendicular al vector $(-1, 1, -1)$ y que pasa por el punto $(1, 1, 1)$.

5. Calcular $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ para los siguientes conjuntos de vectores:

a) $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$; $\mathbf{w} = \mathbf{k}$.

b) $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$; $\mathbf{w} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

c) $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$; $\mathbf{w} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

6. Calcular $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ para los vectores del Ejercicio 5.

7. Hallar el coseno del ángulo que forman los vectores del Ejercicio 5.

8. Hallar el área del paralelogramo generado por los vectores del Ejercicio 5.

9. Usar notación vectorial para describir el triángulo en el espacio cuyos vértices son el origen y los extremos de los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

10. Demostrar que los tres vectores **a**, **b**, **c** están en el mismo plano que pasa por el origen si y sólo si existen escalares α, β, γ, no todos cero, tales que $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \mathbf{0}$.

11. Para los números reales a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, demostrar que

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2).$$

12. Sean **u**, **v**, **w** vectores unitarios ortogonales entre sí. Si $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w}$, demostrar que

$$\alpha = \mathbf{a}\cdot\mathbf{u}, \qquad \beta = \mathbf{a}\cdot\mathbf{v}, \qquad \gamma = \mathbf{a}\cdot\mathbf{w}.$$

Interpretar el resultado geométricamente.

13. Sean **a**, **b** dos vectores en el plano, $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, y sea λ un número real. Demostrar que el área del paralelogramo determinado por **a** y $\mathbf{b} + \lambda\mathbf{a}$ es la misma que la del paralelogramo determinado por **a** y **b**. Hacer un esbozo. Relacionar este resultado con una propiedad conocida de los determinantes.

14. Hallar el volumen del paralelepípedo determinado por los vértices (0, 1, 0), (1, 1, 1), (0, 2, 0) y (3, 1, 2).

15. Dados dos vectores distintos de cero **a** y **b** en $\mathbb{R}^3$, demostrar que el vector $\mathbf{v} = \|\mathbf{a}\|\mathbf{b} + \|\mathbf{b}\|\mathbf{a}$ biseca el ángulo que forman **a** y **b**.

16. Usar métodos vectoriales para probar que la distancia del punto (x_1, y_1) a la recta $ax + by = c$ es

$$\frac{|ax_1 + by_1 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

17. Comprobar que la dirección de $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ viene dada por la regla de la mano derecha, escogiendo **b**, **c** entre los vectores **i**, **j** y **k**.

18. a) Supongamos que $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}$ para todo **b**. Demostrar que $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$.

b) Supongamos que $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a}' \times \mathbf{b}$ para todo **b**. ¿Es cierto que $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$?

19. a) Usando métodos vectoriales demostrar que la distancia entre dos rectas no paralelas l_1 y l_2 viene dada por

$$d = \frac{|(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)\cdot(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)|}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|},$$

donde $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son dos puntos cualesquiera en l_1 y l_2, respectivamente, y $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ son las direcciones de l_1 y l_2. [INDICACIÓN: Considérese el plano que contiene a l_2 y es paralelo a l_1. Demostrar que el vector $(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)/\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|$ es normal unitario a este plano; ahora, proyectar $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ sobre esta dirección normal.]

b) Hallar la distancia entre la recta l_1 determinada por los puntos $(-1, -1, 1)$ y $(0, 0, 0)$, y la recta l_2 determinada por los puntos $(0, -2, 0)$ y $(2, 0, 5)$.

20. Demostrar que dos planos dados por las ecuaciones $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ y $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ son paralelos, y que la distancia entre ellos es

$$\frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

21. a) Demostrar que el área del triángulo en el plano con vértices (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) es el valor absoluto de

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}.$$

b) Hallar el área del triángulo con vértices $(1, 2)$, $(0, 1)$, $(-1, 1)$.

22. Transformar los siguientes puntos dados en coordenadas cartesianas a coordenadas cilíndricas y dibujarlos:

a) $(0, 3, 4)$ d) $(-1, 0, 1)$

b) $(-\sqrt{2}, 1, 0)$ e) $(-2\sqrt{3}, -2, 3)$

c) $(0, 0, 0)$

23. Transformar los siguientes puntos dados en coordenadas cilíndricas a coordenadas cartesianas y esféricas, y dibujarlos:

a) $(1, \pi/4, 1)$ d) $(2, -\pi/2, 1)$

b) $(3, \pi/6, -4)$ e) $(-2, -\pi/2, 1)$

c) $(0, \pi/4, 1)$

24. Transformar los siguientes puntos de coordenadas esféricas a cartesianas y a cilíndricas. Dibujarlos:

a) $(1, \pi/2, \pi)$ d) $(2, -\pi/2, -\pi)$

b) $(2, -\pi/2, \pi/6)$ e) $(-1, \pi, \pi/6)$

c) $(0, \pi/8, \pi/35)$

25. Reescribir la ecuación $z = x^2 - y^2$ utilizando coordenadas cilíndricas y esféricas.

26. Utilizando coordenadas esféricas, probar que

$$\phi = \arccos\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{k}}{\|\mathbf{u}\|}\right)$$

donde $\mathbf{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Dar una interpretación geométrica.

27. Verificar la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad triangular para

$$\mathbf{x} = (3, 2, 1, 0) \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = (1, 1, 1, 2).$$

28. Multiplicar las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

¿Es cierto que $AB = BA$?

29. a) Probar que si A y B son dos matrices $n \times n$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$(AB)\mathbf{x} = A(B\mathbf{x}).$$

b) ¿Qué implica la igualdad del apartado a) respecto a la relación entre la composición de las aplicaciones $\mathbf{x} \to B\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \to A\mathbf{y}$ y la multiplicación de matrices?

30. Hallar el volumen del paralelepípedo generado por los vectores

$$(1, 0, 1), \quad (1, 1, 1) \quad \text{y} \quad (-3, 2, 0).$$

31. (Para estudiantes con algún conocimiento de álgebra lineal.) Comprobar que una aplicación lineal T de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ está determinada por una matriz $n \times n$.

32. Hallar la ecuación del plano que contiene a $(3, -1, 2)$ y a la recta de ecuación $\mathbf{v} = (2, -1, 0) + t(2, 3, 0)$.

33. El trabajo W realizado al mover un objeto desde $(0, 0)$ a $(7, 2)$ sujeto a una fuerza constante $\mathbf{F}$ es $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}$, donde $\mathbf{r}$ es el vector con final en $(7, 2)$ e inicio en $(0, 0)$. Las unidades son metros y kilos.

a) Supongamos la fuerza $\mathbf{F} = 10 \cos\theta\mathbf{i} + 10 \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$. Hallar W en función de θ.

b) Supongamos que la fuerza $\mathbf{F}$ tiene una magnitud de 6 kilos y forma un ángulo de $\pi/6$ rad con la horizontal, apuntando a la derecha. Calcular W en kilos-metros.

34. Si una partícula con masa m se mueve con velocidad $\mathbf{v}$, su *momento* es $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. En un juego de canicas, una canica con masa 2 gramos (g) se tira con velocidad 2 metros por segundo (m/s), choca con dos canicas de masa 1 g cada una y queda inmóvil. Una de las canicas sale con una velocidad de 3 m/s formando un ángulo de 45° con la dirección incidente de la canica grande, como en la Figura 1.R.1. Suponiendo que el momento total antes y después de la colisión es el mismo (de acuerdo con la ley de conservación del momento), ¿con qué velocidad y ángulo se movió la segunda canica?

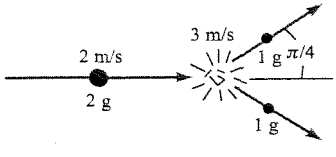


Figura 1.R.1. Momento y canicas.

35. Demostrar que para todo x, y, z,

$$\begin{vmatrix} x+2 & y & z \\ z & y+1 & 10 \\ 5 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} y & x+2 & z \\ 1 & z-x-2 & 10-z \\ 5 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

36. Demostrar que

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} \neq 0$$

si x, y y z son distintos.

37. Demostrar que

$$\begin{vmatrix} 66 & 628 & 246 \\ 88 & 435 & 24 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 68 & 627 & 247 \\ 86 & 436 & 23 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

38. Demostrar que

$$\begin{vmatrix} n & n+1 & n+2 \\ n+3 & n+4 & n+5 \\ n+6 & n+7 & n+8 \end{vmatrix}$$

tiene el mismo valor sin importar cuánto valga n. ¿Cuál es este valor?

39. El volumen de un tetraedro con aristas concurrentes $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ viene dado por $V = \frac{1}{6}\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

a) Expresar el volumen como un determinante.

b) Calcular V cuando $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$.

Usar la siguiente definición para los Ejercicios 40 y 41: sean $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_n$ *vectores en* $\mathbb{R}^3$ *desde 0 a las masas* $m_1, \ldots, m_n$. *El* ***centro de masa*** *es el vector*

$$\mathbf{c} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}.$$

40. Un tetraedro dado en coordenadas xyz tiene un vértice en (0, 0, 0) y las tres aristas concurrentes en (0, 0, 0) coinciden con los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

a) Dibujar una figura y marcar el final de los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

b) Hallar el centro de masa de cada una de las caras triangulares del tetraedro si se coloca una masa unidad en cada uno de los vértices.

41. Demostrar que para cualquier vector $\mathbf{r}$, el centro de masa de un sistema satisface

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i \|\mathbf{r}_i - \mathbf{c}\|^2 + m\|\mathbf{r} - \mathbf{c}\|^2,$$

donde $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ es la masa total del sistema.

En los ejercicios del 42 al 47, hallar un vector unitario que tenga la propiedad dada.

42. Paralelo a la recta $x = 3t + 1$, $y = 16t - 2$, $z = -(t + 2)$.

43. Ortogonal al plano $x - 6y + z = 12$.

44. Paralelo a los planos $8x + y + z = 1$ y $x - y - z = 0$.

45. Ortogonal a $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ y a $\mathbf{k}$.

46. Ortogonal a la recta $x = 2t - 1$, $y = -t - 1$, $z = t + 2$, y al vector $\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

47. Formando un ángulo de 30° con $\mathbf{i}$ y ángulos iguales con $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$.

2

Diferenciación

Me alejo con pánico y terror de las malditas funciones que no tienen derivadas.

Charles Hermite
En una carta a Thomas Jan Stieltjes.

Este capítulo extiende los principios del cálculo diferencial de funciones de una variable a funciones de varias variables. Comenzamos en la Sección 2.1 con la geometría de las funciones con valores reales y estudiamos las gráficas de estas funciones como ayuda para visulizarlas. La Sección 2.2 da las definiciones básicas relativas al límite y la continuidad. Este tema se trata con brevedad, ya que desarrollarlo completamente requiere tiempo y madurez matemática, y por lo tanto es mejor dejarlo para cursos más avanzados. Afortunadamente no es necesario llegar a comprender todos los detalles del concepto de límite para nuestros propósitos; el estudiante que encuentre dificultades en esta sección debe tenerlo en cuenta. Hay que añadir, no obstante, que la noción de límite es básica en la definición de derivada, pero no en el cálculo de la mayor parte de las derivadas en problemas específicos, como ya sabemos del cálculo de una variable. Las Secciones 2.3 y 2.5 abordan la definición de derivada y fijan algunas reglas básicas del cálculo, a saber: cómo diferenciar una suma, producto, cociente o composición. En la Sección 2.6 estudiamos derivadas direccionales y planos tangentes relacionando estas ideas con las de la Sección 2.1. Finalmente, el suplemento de Internet da algunas demostraciones técnicas.

Al generalizar el cálculo de una a varias dimensiones es conveniente, a menudo, utilizar el lenguaje del álgebra de matrices. Todo lo que necesitaremos se ha resumido en la Sección 1.5.

2.1. La geometría de las funciones con valores reales

Comenzamos nuestro estudio de funciones con valores reales desarrollando métodos para visualizarlas. En particular, presentamos las nociones de gráfica, curva de nivel y superficie de nivel de dichas funciones.

Funciones y aplicaciones

Sea f una función cuyo dominio es un subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ y con recorrido contenido en $\mathbb{R}^m$. Con esto queremos decir que a cada $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in A$, f asigna un valor $f(\mathbf{x})$, una m-tupla de $\mathbb{R}^m$. Estas funciones f se denominan ***funciones con valores vectoriales***[1] si $m > 1$, y ***funciones con valores escalares*** si $m = 1$. Por ejemplo, la función con valores escalares $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$ lleva el conjunto A de $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ de $\mathbb{R}^3$ ($n = 3$ en este caso) en $\mathbb{R}$ ($m = 1$). A veces denotamos f por medio de

$$f\colon (x, y, z) \to (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}.$$

Nótese que en $\mathbb{R}^3$ utilizamos a menudo la notación (x, y, z) en vez de (x_1, x_2, x_3). En general, la notación $\mathbf{x} \to f(\mathbf{x})$ es útil para indicar el valor al que se envía el punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Escribimos $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ para indicar que A es el dominio de f (un subconjunto de $\mathbb{R}^n$) y que el recorrido está contenido en $\mathbb{R}^m$. También usamos la expresión f aplica A *en* $\mathbb{R}^m$. Estas funciones f se llaman ***funciones de varias variables*** si $A \subset \mathbb{R}^n$, $n > 1$.

Otro ejemplo: tomamos la función con valores vectoriales $g\colon \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^2$ definida por la regla

$$g(\mathbf{x}) = g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (x_1x_2x_3x_4x_5x_6, \sqrt{x_1^2 + x_6^2}).$$

La primera coordenada del valor de g en $\mathbf{x}$ es el producto de las coordenadas de $\mathbf{x}$.

Las funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ no son solamente abstracciones matemáticas, aparecen de forma natural en problemas que se estudian en todas las ciencias. Por ejemplo, dar la temperatura T en una región A del espacio requiere una función $T\colon A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ($n = 3$, $m = 1$); es decir, $T(x, y, z)$ es la temperatura en el punto (x, y, z). Dar la velocidad de un fluido que se mueve en el espacio requiere una aplicación $\mathbf{V}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, donde $\mathbf{V}(x, y, z, t)$ es la velocidad del fluido en el punto (x, y, z) del espacio en el instante t (*véase* la Figura 2.1.1). Para dar la velocidad de reacción de una solución que contiene seis productos químicos en reacción A, B, C, D, E, F en proporciones x, y, z, w, u, v se requiere una aplicación $\sigma\colon U \subset \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$, donde $\sigma(x, y, z, w, u, v)$ da la velocidad cuando los productos químicos tienen las proporciones indicadas. Para dar el vector cardíaco (el vector que indica la magnitud y la dirección de la corriente eléctrica del corazón) en el instante t se requiere una aplicación $\mathbf{c}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \to \mathbf{c}(t)$.

---

[1] Algunos matemáticos escribirían esta f en negrita, de la forma $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, ya que la función tiene valores vectoriales. No lo hemos hecho así porque, personalmente, no nos gusta. Escribimos en negrita principalmente las aplicaciones que son campos vectoriales, definidos más adelante. La noción de función se ha desarrollado a lo largo de varios siglos, abarcando casos nuevos según aparecían. Por ejemplo, en 1667 James Gregory definió una función como «una cantidad que se obtiene de otras cantidades por una sucesión de operaciones algebraicas o por cualquier otra operación imaginable». En 1775 Euler dio la definición siguiente: «Si unas cantidades dependen de otras de forma tal que varíen siempre que las últimas se hagan variar entonces las primeras se dicen funciones de las últimas».

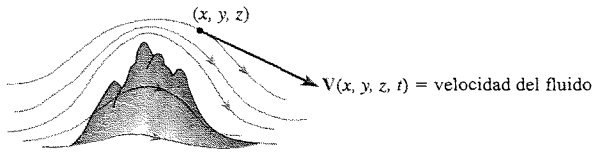


Figura 2.1.1. Un fluido en movimiento define un campo vectorial **V** que da la velocidad de las partículas del fluido en cada punto del espacio y en cada instante.

Cuando $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, decimos que f es una ***función de n variables con valores reales y dominio*** U. La razón por la cual decimos «n variables» es simplemente porque consideramos las coordenadas del punto $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ como n variables y $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ depende de estas variables. Decimos «con valores reales» porque $f(x_1, \ldots, x_n)$ es un número real. Gran parte de nuestro trabajo se llevará a cabo usando funciones con n valores reales, a las que, por tanto, prestamos gran atención.

Gráficas de funciones

Si $f\colon U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($n = 1$), la ***gráfica*** de f es el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ formado por los puntos $(x, f(x))$ del plano en los que x es un punto de U. Podemos interpretar este conjunto como una curva en $\mathbb{R}^2$. Simbólicamente escribimos

$$\text{gráfica } f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in U\},$$

donde las llaves significan «el conjunto de todos» y la barra vertical se lee como «tales que». Dibujar la gráfica de una función de una variable ayuda a visualizar el comportamiento de la función (*véase* la Figura 2.1.2). Será útil generalizar la idea de gráfica de una función a varias variables. Esto nos lleva a la siguiente definición:

DEFINICIÓN: Gráfica de una función Sea $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Definimos la ***gráfica*** de f como el subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ formado por los puntos

$$(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))$$

de $\mathbb{R}^{n+1}$ en los que $(x_1, \ldots, x_n)$ es un punto de U. Simbólicamente,

$$\text{gráfica } f = \{(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x_1, \ldots, x_n) \in U\}.$$

Para el caso $n = 1$ la gráfica es una curva en $\mathbb{R}^2$ mientras que para $n = 2$ es una superficie en $\mathbb{R}^3$ (*véase* la Figura 2.1.2). Para $n = 3$ es difícil visualizar la gráfica, ya que, como vivimos en un mundo tridimensional, nos resulta difícil imaginar conjuntos de $\mathbb{R}^4$. A fin de superar esta dificultad, presentamos la idea de conjunto de nivel.

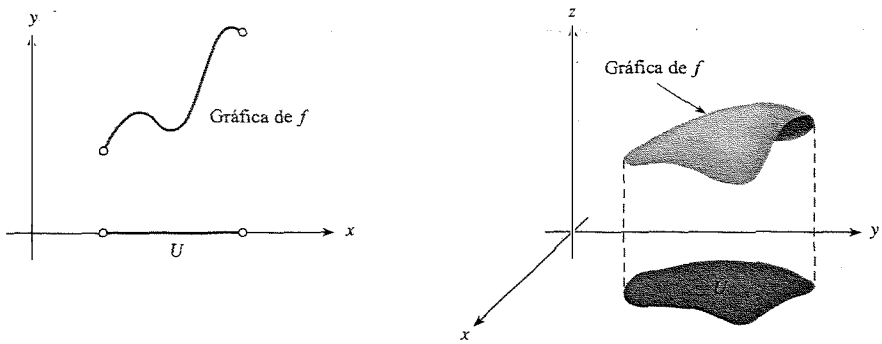


Figura 2.1.2. Las gráficas de (a) una función de una variable y (b) una función de dos variables.

Conjuntos de nivel, curvas y superficies

Supongamos que $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Un ***conjunto de nivel*** es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ en el que f es constante; por ejemplo, el conjunto en el que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ es un conjunto de nivel de f. Este conjunto sí podemos visualizarlo: es, exactamente, la esfera de radio 1 en $\mathbb{R}^3$. Formalmente, un conjunto de nivel es el conjunto de (x, y, z) tales que $f(x, y, z) = c$, donde c es una constante. El comportamiento o la estructura de una función quedan determinados en parte por la forma de sus conjuntos de nivel; en consecuencia, la comprensión de estos conjuntos nos ayuda a entender la función en cuestión. Los conjuntos de nivel resultan también útiles para entender las funciones de dos variables $f(x, y)$, en cuyo caso hablamos de ***curvas de nivel***.

La idea es similar a la que se usa para preparar mapas topográficos en los que se trazan líneas que representan altitudes constantes; caminar sobre una de estas líneas significa caminar sobre un camino horizontal. En el caso de una colina que se alza sobre el plano xy una gráfica de todas las curvas de nivel nos da una buena idea de la función $h(x, y)$ que representa la altura de la colina en cada punto (x, y) (*véase* la Figura 2.1.3).

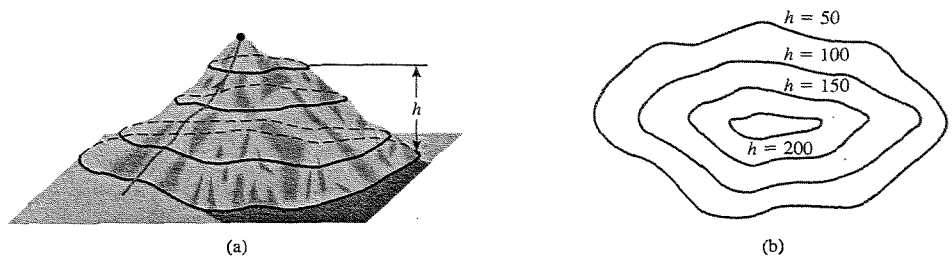


Figura 2.1.3. Las curvas de nivel de una función se definen de la misma manera que las curvas de nivel de un plano topográfico.

EJEMPLO 2.1 La función constante $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to 2$, es decir, la función $f(x, y) = 2$, tiene por gráfica el plano horizontal $z = 2$ en $\mathbb{R}^3$. La curva de nivel del valor c es vacía si $c \neq 2$, y es todo el plano si $c = 2$.

EJEMPLO 2.2 La función f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = x + y + 2$, tiene por gráfica el plano inclinado $z = x + y + 2$. Este plano interseca al plano xy ($z = 0$) en la recta $y = -x - 2$ y al eje z en el punto $(0, 0, 2)$. Para un valor $c \in \mathbb{R}$, la curva de nivel de valor c es una línea recta $y = -x + (c - 2)$; en símbolos, el conjunto

$$L_c = \{(x, y) \mid y = -x + (c - 2)\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Indicamos unas cuantas curvas de nivel de la función en la Figura 2.1.4. Esto es un plano topográfico de la función f.

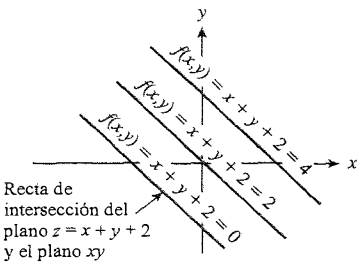


Figura 2.1.4. Las curvas de nivel de $f(x) = x + y + 2$ muestran los conjuntos sobre los que f toma un valor dado.

A partir de las curvas de nivel marcadas con el valor o «altura» de la función se puede inferir mentalmente la gráfica elevando cada curva de nivel a la altura apropiada sin estirarla, inclinarla ni deslizarla. Si se visualiza este procedimiento para todas las curvas de nivel L_c, es decir, para todos los valores $c \in \mathbb{R}$, se compondrá la gráfica de f completa, como indica el plano sombreado de la Figura 2.1.5. Si se visualiza la gráfica utilizando un número finito de curvas de nivel se construye un modelo topográfico. Si f es una función suave, su gráfica será una superficie suave y, por tanto, el modelo topográfico suavizado mentalmente da una buena idea de la gráfica.

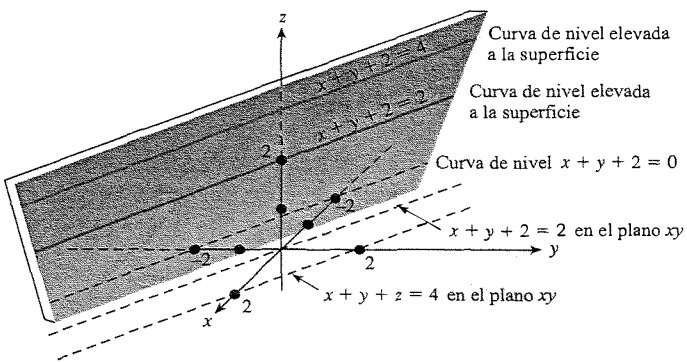


Figura 2.1.5. La relación entre las curvas de nivel de la Figura 2.1.4 con la gráfica de la función $f(x, y) = x + y + 2$, que es el plano $z = x + y + 2$.

DEFINICIÓN: Curvas y superficies de nivel Sea $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y sea $c \in \mathbb{R}$. Entonces, el ***conjunto de nivel de valor*** c se define como el conjunto de los puntos $\mathbf{x} \in U$ en los cuales $f(\mathbf{x}) = c$. Si $n = 2$, hablaremos de ***curva de nivel*** (de valor c); y si $n = 3$, hablaremos de ***superficie de nivel.*** Con símbolos, el conjunto de nivel de valor c se escribe:

$$\{\mathbf{x} \in U \mid f(\mathbf{x}) = c\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Nótese que el conjunto de nivel siempre está en el dominio de la función.

EJEMPLO 2.3 Describir la gráfica de la función cuadrática

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \to x^2 + y^2.$$

Solución

La gráfica es el ***paraboloide de revolución*** $z = x^2 + y^2$, orientado hacia arriba desde el origen y alrededor del eje z. La curva de nivel de valor c es vacía para $c < 0$; para $c > 0$ la curva de nivel de valor c es el conjunto $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = c\}$, una circunferencia de radio $\sqrt{c}$ con centro en el origen. Por tanto, elevado a la altura c sobre el plano xy, el conjunto de nivel es una circunferencia de radio $\sqrt{c}$, lo que indica la forma parabólica (*véanse* las Figuras 2.1.6 y 2.1.7).

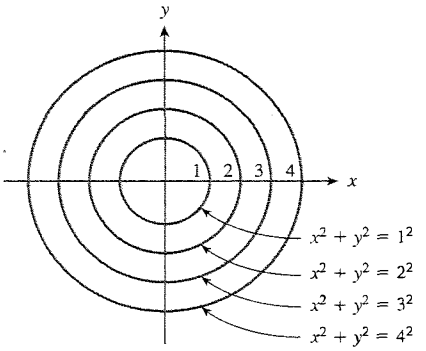


Figura 2.1.6. Algunas curvas de nivel de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$.

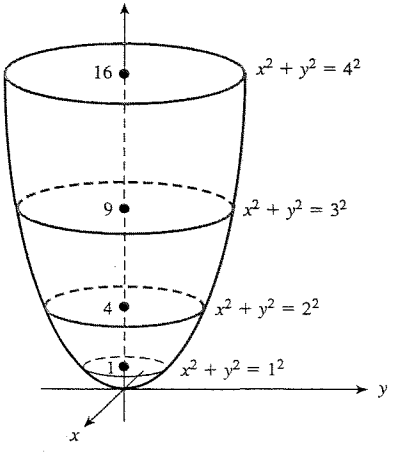


Figura 2.1.7. Las curvas de nivel de la Figura 2.1.6 elevadas a la gráfica.

El método de las secciones

Por ***sección*** de la gráfica de f entendemos la intersección de la gráfica con un plano (vertical). Por ejemplo, si P_1 es el plano xz de $\mathbb{R}^3$, definido por $y = 0$, entonces la sección de la función f del Ejemplo 2.3 es el conjunto

$$P_1 \cap \text{gráfica } f = \{(x, y, z) \mid y = 0,\ z = x^2\},$$

que es una parábola en el plano xz. De igual forma, si P_2 denota el plano yz, definido por $x = 0$, entonces la sección

$$P_2 \cap \text{gráfica } f = \{(x, y, z) \mid x = 0, z = y^2\}$$

es una parábola en el plano yz (*véase* la Figura 2.1.8). Suele ser conveniente calcular al menos una sección para complementar la información dada por los conjuntos de nivel.

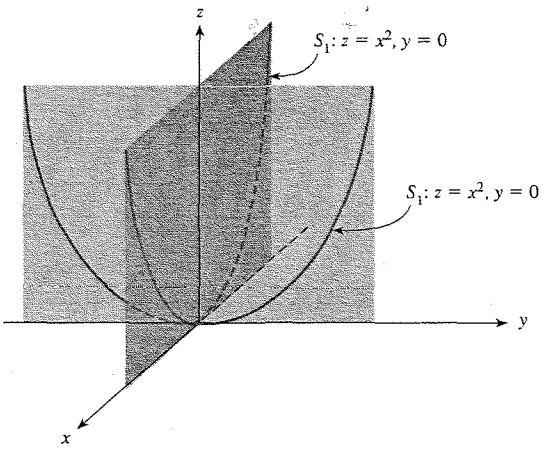


Figura 2.1.8. Dos secciones de la gráfica de $f(x, y) = x^2 + y^2$.

EJEMPLO 2.4 La gráfica de la función cuadrática

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \to x^2 - y^2$$

se llama ***paraboloide hiperbólico*** o ***silla de montar***, centrado o centrada en el origen. Dibujar su gráfica.

Solución

Para visualizar esta superficie dibujamos primeramente las curvas de nivel. Para determinar las curvas de nivel resolvemos la ecuación $x^2 - y^2 = c$. Consideramos los valores $c = 0, \pm 1, \pm 4$. Para $c = 0$ tenemos $y^2 = x^2$ o $y = \pm x$, por tanto este conjunto de nivel consiste de dos líneas rectas que pasan por el origen. Para $c = 1$ la curva de nivel es $x^2 - y^2 = 1$, o $y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$, que es una hipérbola que cruza verticalmente el eje x por los puntos $(\pm 1, 0)$ (*véase* la Figura 2.1.9). De igual forma, para $c = 4$ la curva de nivel está definida por $y = \pm\sqrt{x^2 - 4}$, que es la hipérbola que cruza verticalmente el eje x en los puntos $(\pm 2, 0)$. Para $c = -1$ obtenemos la curva $x^2 - y^2 = -1$, es decir, $x = \pm\sqrt{y^2 - 1}$, la hipérbola que cruza horizontalmente el eje y por los puntos $(0, \pm 1)$. Y para $c = -4$ se obtiene la hipérbola que pasa por $(0, \pm 2)$. Estas curvas de nivel se muestran en la Figura 2.1.9. Dado que a partir solamente de estos datos no es fácil visualizar la gráfica de f, calcularemos dos secciones como en el ejemplo previo. Para la sección por el plano xz tenemos

$$P_1 \cap \text{gráfica } f = \{(x, y, z) \mid y = 0, z = x^2\},$$

que es una parábola abriéndose hacia arriba; y por el plano yz

$$P_2 \cap \text{gráfica } f = \{(x, y, z) \mid x = 0, z = -y^2\},$$

que es una parábola abriéndose hacia abajo. Ahora puede visualizarse la gráfica levantando las curvas de nivel a las alturas apropiadas y tratando de imaginar una superficie suave que las contenga. Calculando las secciones parabólicas podemos facilitar el situarlas de forma apropiada. Este procedimiento genera la silla de montar hiperbólica que se indica en la Figura 2.1.10. Compárese ésta con las gráficas obtenidas mediante computador de la Figura 2.1.11 (nótese que se ha cambiado la orientación de los ejes).

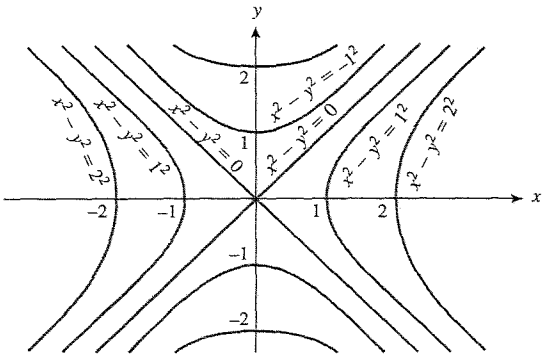


Figura 2.1.9. Curvas de nivel de la función $f(x, y) = x^2 - y^2$.

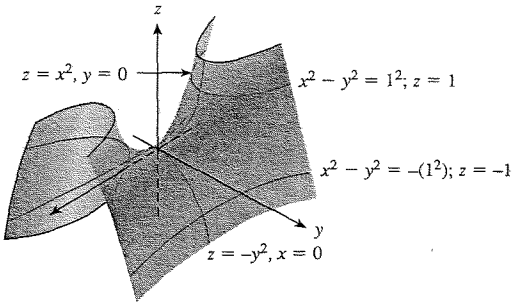


Figura 2.1.10. Algunas curvas de nivel de la gráfica de $f(x, y) = x^2 - y^2$.

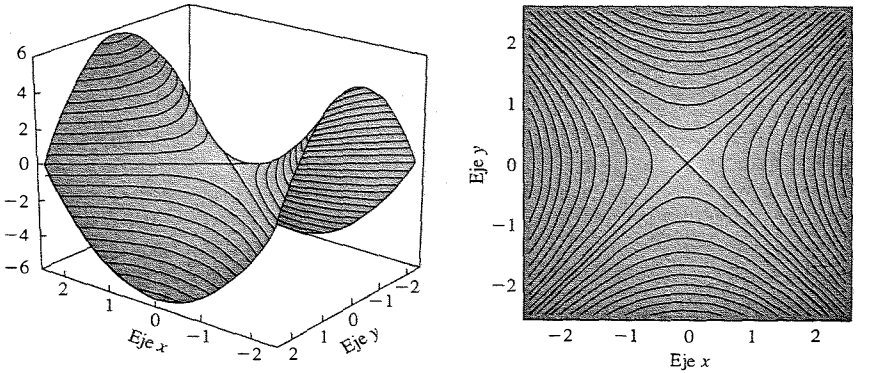


Figura 2.1.11. La gráfica de $z = x^2 - y^2$ y sus curvas de nivel.

EJEMPLO 2.5 Describir los conjuntos de nivel de la función

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \to x^2 + y^2 + z^2.$$

Solución

Éste es el análogo tridimensional del Ejemplo 2.3. En este contexto, los conjuntos de nivel son superficies en el dominio tridimensional $\mathbb{R}^3$. La gráfica, en $\mathbb{R}^4$, no puede visualizarse directamente, sin embargo se pueden calcular sus secciones.

El conjunto de nivel de valor c es el conjunto

$$L_c = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = c\},$$

que es la esfera centrada en el origen con radio $\sqrt{c}$ para $c > 0$, es un solo punto en el origen para $c = 0$, y es vacía para $c < 0$. Los conjuntos de nivel para $c = 0$, 1, 4 y 9 se indican en la Figura 2.1.12.

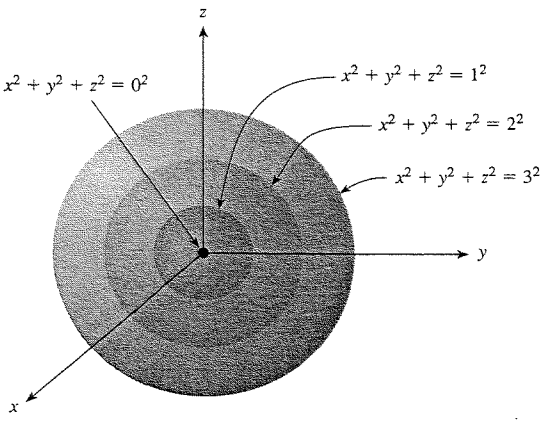


Figura 2.1.12. Algunas curvas de nivel de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

EJEMPLO 2.6 Describir la gráfica de la función $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2,$$

que es el análogo tridimensional del Ejemplo 2.4, y que también se llama ***silla de montar***.

Solución

Formalmente la gráfica de f es un subconjunto del espacio de cuatro dimensiones. Si denotamos los puntos de este espacio por (x, y, z, t), entonces la gráfica es

$$\{(x, y, z, t) \mid t = x^2 + y^2 - z^2\}.$$

Las superficies de nivel de f se definen como

$$L_c = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z^2 = c\}.$$

Para $c = 0$ se obtiene el cono $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ centrado en el eje z. Para c negativo, digamos $c = -a^2$, se obtiene $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}$, que es un hiperboloide de dos hojas alrededor del eje z, que corta al eje z en los puntos $(0, 0, \pm a)$. Para c positivo, digamos $c = b^2$, la superficie de nivel es el ***hiperboloide de revolución de una hoja*** alrededor del eje z definido por $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2 - b^2}$, que interseca el plano xy en la circunferencia de radio $|b|$. Estas superficies de nivel se representan en la Figura 2.1.13.

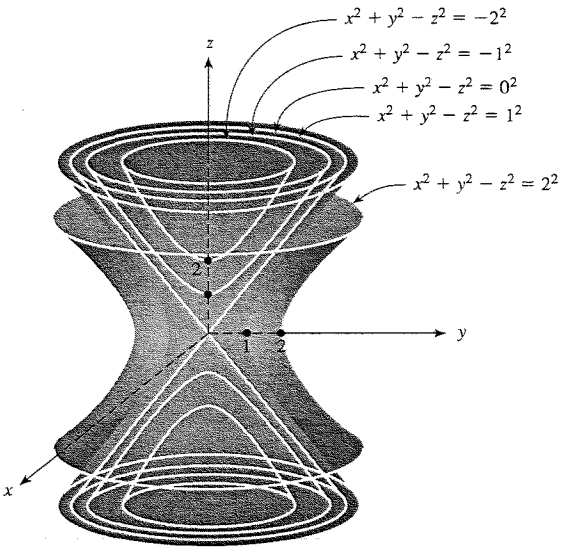


Figura 2.1.13. Algunas superficies de nivel de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.

Se puede obtener otra perspectiva de la gráfica por medio de una sección. Por ejemplo, el subespacio $S_{y=0} = \{(x, y, z, t) \mid y = 0\}$ interseca la gráfica según la sección:

$$S_{y=0} \cap \text{gráfica } f = \{(x, y, z, t) \mid y = 0,\ t = x^2 - z^2\},$$

es decir, el conjunto de puntos de la forma $(x, 0, z, x^2 - z^2)$, que se puede considerar como una superficie en el espacio xzt (*véase* la Figura 2.1.14).

Hemos visto cómo los métodos de las secciones y de los conjuntos de nivel se pueden usar para entender el comportamiento de una función y de su gráfica; estas técnicas pueden resultar muy útiles a quien desee una visualización exhaustiva de datos complicados. Para realizar este proceso existen muchos programas informáticos; mostramos los resultados de uno de estos programas en la Figura 2.1.15.

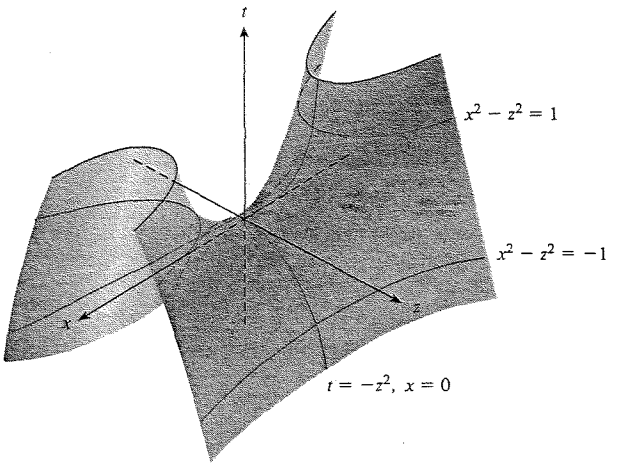


Figura 2.1.14. La sección de la gráfica de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ según el plano $y = 0$.

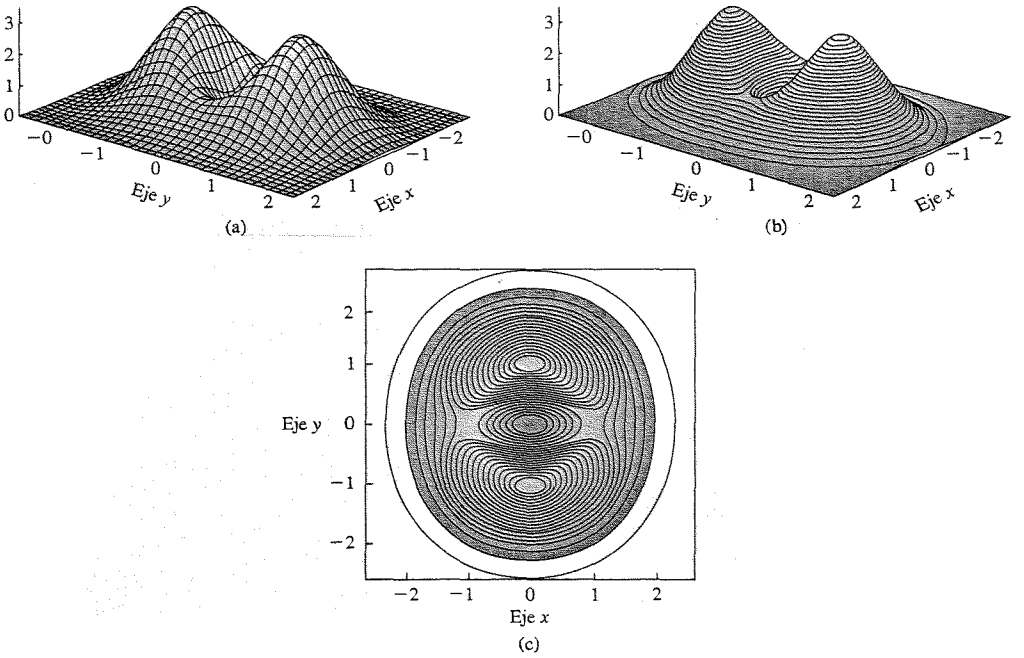


Figura 2.1.15. Gráfica generada por computador de $z = (x^2 + 3y^2)\exp(1 - x^2 - y^2)$ representada de tres formas: (a) por secciones, (b) por curvas de nivel sobre la gráfica, (c) por curvas de nivel en el plano xy.

EJERCICIOS

1. Dibujar las curvas de nivel y las gráficas de las funciones siguientes:

   a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x - y + 2$

   b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x^2 + 4y^2$

   c) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to -xy$

2. Describir, según varía c, el comportamiento de la curva de nivel $f(x, y) = c$ para cada una de las funciones:

   a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ **b)** $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ **c)** $f(x, y) = x^3 - x$

3. Para las funciones de los Ejemplos 2.2, 2.3 y 2.4 calcular la sección de la gráfica según el plano

   $$S_\theta = \{(x, y, z) \mid y = x \tan \theta\}$$

   para una *constante* dada θ. Para ello, expresar z como una función de r, donde $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$. Determinar cuál de estas funciones f tiene la propiedad de que la forma de la sección $S_\theta \cap$ gráfica es independiente de θ.

En los ejercicios del 4 al 10, trazar las curvas de nivel (en el plano xy) para la función dada f y los valores de c especificados. Dibujar la gráfica de z = f(x, y).

4. $f(x, y) = 4 - 3x + 2y$, $c = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$.

5. $f(x, y) = (100 - x^2 - y^2)^{1/2}$, $c = 0, 2, 4, 6, 8, 10$.

6. $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $c = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

7. $f(x, y) = x^2 + y^2$, $c = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

8. $f(x, y) = 3x - 7y$, $c = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$.

9. $f(x, y) = x^2 + xy$, $c = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$.

10. $f(x, y) = x/y$, $c = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3$.

En los ejercicios del 11 al 13, dibujar o describir las superficies de nivel y una sección de la gráfica de cada función.

11. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \to -x^2 - y^2 - z^2$.

12. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \to 4x^2 + y^2 + 9z^2$.

13. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \to x^2 + y^2$.

En los ejercicios del 14 al 18, describir la gráfica de cada función, calculando algunos de sus conjuntos de nivel y algunas de sus secciones.

14. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \to xy$.

15. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \to xy + yz$.

16. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \to xy + z^2$.

17. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to |y|$.

18. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to \max(|x|, |y|)$.

Dibujar o describir las superficies de $\mathbb{R}^3$ *de las ecuaciones de los ejercicios 19 al 31.*

19. $4x^2 + y^2 = 16$.

20. $x + 2z = 4$.

21. $z^2 = y^2 + 4$.

22. $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

23. $\dfrac{x}{4} = \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9}$.

24. $\dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{4} = 1 + \dfrac{x^2}{16}$.

25. $z = x^2$.

26. $y^2 + z^2 = 4$.

27. $z = \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{9}$.

28. $y^2 = x^2 + z^2$.

29. $4x^2 - 3y^2 + 2z^2 = 0$.

30. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{12} + \dfrac{z^2}{9} = 1$.

31. $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - by + 9z - b = 0$, donde b es una constante.

32. Describir, utilizando coordenadas polares, las curvas de nivel de la función definida por

$$f(x, y) = 2xy/(x^2 + y^2), \text{ si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ y } f(0, 0) = 0.$$

33. Sea $f\colon \mathbb{R}^2\backslash\{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$ la función dada en coordenadas polares por $f(r, \theta) = (\cos 2\theta)/r^2$. Dibujar algunas curvas de nivel en el plano xy. Aquí, $\mathbb{R}^2\backslash\{\mathbf{0}\} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\}$.

34. Demostrar que en la Figura 2.1.15 la «curva» de nivel $z = 3$ tiene sólo dos puntos.

2.2. Límites y continuidad

Esta sección desarrolla los conceptos de conjunto abierto, límites y continuidad; se necesitan los conjuntos abiertos para entender los límites, y los límites se necesitan, a su vez, para entender la continuidad y la diferenciabilidad.

Como en el cálculo elemental, no es necesario asimilar completamente el concepto de límite para resolver los problemas de diferenciación. Por esta razón, el profesor puede tratar el material que sigue con grados variables de rigor. El estudiante debe consultar con el profesor la profundidad de comprensión requerida.

Conjuntos abiertos

Comenzamos definiendo qué es un disco abierto para formular el concepto de conjunto abierto. Sea $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y sea r un número real positivo. Se define ***disco abierto*** (o ***bola abierta***) de radio r y centro $\mathbf{x}_0$ como el conjunto de puntos $\mathbf{x}$ tales que $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r$. Este conjunto se denota por $D_r(\mathbf{x}_0)$, y es el conjunto de puntos $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$ cuya distancia a $\mathbf{x}_0$ es menor que r. Nótese que incluimos solamente aquellos $\mathbf{x}$ para los que se verifica la desigualdad *estricta*. El disco $D_r(\mathbf{x}_0)$ está ilustrado en la Figura 2.2.1 para $n = 1, 2, 3$. En el caso $n = 1$ y $x_0 \in \mathbb{R}$, el disco abierto $D_r(x_0)$

es el intervalo abierto $(x_0 - r, x_0 + r)$, formado por los números $x \in \mathbb{R}$ que están *estrictamente* entre $x_0 - r$ y $x_0 + r$. En el caso $n = 2$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$, $D_r(\mathbf{x}_0)$ es el «interior» del disco de radio r centrado en $\mathbf{x}_0$. En el caso $n = 3$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, $D_r(\mathbf{x}_0)$ es la parte «interior» de la bola de radio r centrada en $\mathbf{x}_0$.

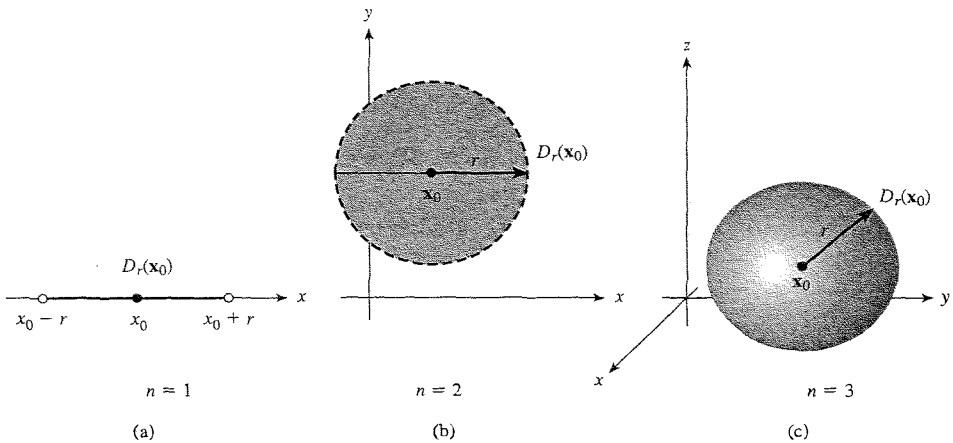


Figura 2.2.1. Cómo son los discos $D_r(\mathbf{x}_0)$ en (a) una, (b) dos, (c) tres dimensiones.

DEFINICIÓN: Conjuntos abiertos Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ (es decir, sea U un subconjunto de $\mathbb{R}^n$). Llamamos a U ***conjunto abierto*** si para todo punto $\mathbf{x}_0$ en U existe $r > 0$ tal que $D_r(\mathbf{x}_0)$ está contenido dentro de U; simbólicamente escribimos $D_r(\mathbf{x}_0) \subset U$ (*véase* la Figura 2.2.2).

El número $r > 0$ puede depender de $\mathbf{x}_0$, y por lo general r decrecerá cuando $\mathbf{x}_0$ se aproxime al «borde» de U. Intuitivamente, un conjunto U es abierto cuando los puntos de la «frontera» de U no pertenecen a U. En la Figura 2.2.2, la línea discontinua *no* está incluida en U.

Convendremos en que el conjunto vacío $\varnothing$ (el conjunto que no tiene elementos) es abierto.

Hemos definido disco abierto y conjunto abierto. Por la elección que hemos hecho de los términos parece que un disco abierto debería ser un conjunto abierto. Si se piensa un poco se ve que este hecho requiere demostración. El teorema que sigue lo prueba.

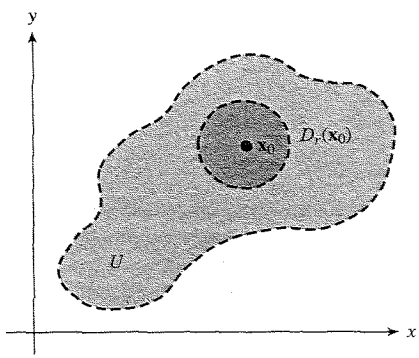
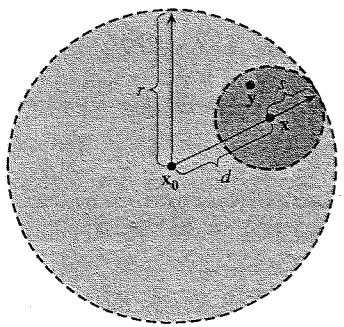


Figura 2.2.2. Un conjunto abierto U es aquel que contiene completamente algún disco $D_r(\mathbf{x}_0)$ para cada uno de sus puntos $\mathbf{x}_0$.

TEOREMA 1 Para todo $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y para todo $r > 0$, $D_r(\mathbf{x}_0)$ es un conjunto abierto.

DEMOSTRACIÓN Sea $\mathbf{x} \in D_r(\mathbf{x}_0)$, es decir, sea $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r$. Según la definición de conjunto abierto, debemos hallar un $s > 0$ tal que $D_s(\mathbf{x}) \subset D_r(\mathbf{x}_0)$. Si miramos la Figura 2.2.3, observamos que $s = r - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ es una elección razonable; nótese que $s > 0$, pero que s es tanto menor cuanto más cerca está $\mathbf{x}$ del borde de $D_r(\mathbf{x}_0)$.



$d = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$
$s = r - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$

Figura 2.2.3. La geometría de la demostración de que un disco abierto es un conjunto abierto.

Para demostrar que $D_s(\mathbf{x}) \subset D_r(\mathbf{x}_0)$ sea $\mathbf{y} \in D_s(\mathbf{x})$; es decir, sea $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < s$. Queremos demostrar que también $\mathbf{y} \in D_r(\mathbf{x}_0)$. Demostrarlo, dada la definición de r-disco, es lo mismo que demostrar que $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| < r$. Esto lo hacemos utilizando la desigualdad triangular para vectores de $\mathbb{R}^n$:

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| = \|(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < s + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = r.$$

Así, $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| < r$.

El ejemplo siguiente ilustra ciertas técnicas útiles para determinar si un conjunto es abierto.

EJEMPLO 2.7 Demostrar que $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ es un conjunto abierto.

Solución

El conjunto está representado en la Figura 2.2.4.

Intuitivamente, este conjunto es abierto ya que ninguno de los puntos de la «frontera», $x = 0$, está contenido en el conjunto. Un razonamiento de este tipo será, con frecuencia, suficiente cuando uno se ha acostumbrado al concepto de conjunto abierto; sin embargo, al principio deben darse más detalles. Para demostrar que A es abierto mostramos que para todo punto $(x, y) \in A$ existe $r > 0$ tal que $D_r(x, y) \subset A$. Si $(x, y) \in A$, entonces $x > 0$. Se elige $r = x$. Si $(x_1, y_1) \in D_r(x, y)$, tenemos que

$$|x_1 - x| = \sqrt{(x_1 - x)^2} \leq \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} < r = x,$$

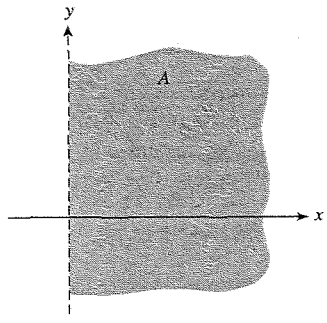


Figura 2.2.4. Demostrar que A es abierto.

y por tanto $x_1 - x < x$ y $x - x_1 < x$. La última desigualdad implica que $x_1 > 0$, es decir, $(x_1, y_1) \in A$. Por tanto $D_r(x, y) \subset A$ es abierto (*véase* la Figura 2.2.5).

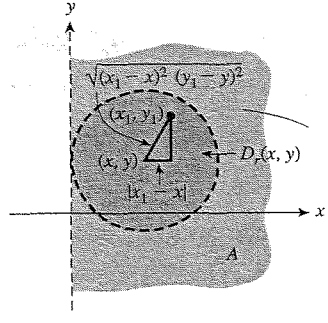


Figura 2.2.5. Construcción de un disco alrededor de un punto de A que está completamente contenido en A.

Es útil dar un nombre especial a un conjunto abierto que contiene a un punto $\mathbf{x}$, ya que esta idea aparece con frecuencia en el estudio de límites y continuidad. Así, por ***entorno*** de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se entiende un conjunto abierto U que contiene al punto $\mathbf{x}$. Por ejemplo, para todo $r > 0$, $D_r(\mathbf{x}_0)$ es un entorno del punto $\mathbf{x}_0$. El conjunto A del Ejemplo 2.7 es un entorno del punto $\mathbf{x}_0 = (3, -10)$.

Frontera

Introducimos ahora el concepto de punto frontera, que mencionamos en el Ejemplo 2.7.

DEFINICIÓN: Punto frontera Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se llama ***punto frontera*** de A si todo entorno de $\mathbf{x}$ contiene al menos un punto de A y al menos un punto que no está en A.

En esta definición el mismo $\mathbf{x}$ puede estar o no estar en A; si $\mathbf{x} \in A$, entonces $\mathbf{x}$ es un punto frontera si todo entorno de $\mathbf{x}$ contiene al menos un punto que *no* está en A (ya contiene un punto de A: el propio $\mathbf{x}$). De forma análoga, si $\mathbf{x}$ no está en A, éste es un punto frontera si todo entorno de $\mathbf{x}$ contiene al menos un punto de A.

Nos interesarán particularmente los puntos frontera de los conjuntos abiertos. La definición de conjunto abierto implica que ningún punto de un conjunto abierto A es un punto frontera de A. Por tanto, *un punto* $\mathbf{x}$ *es punto frontera de un conjunto abierto* A *si y solamente si* $\mathbf{x}$ *no es un punto de* A *y todo entorno de* $\mathbf{x}$ *tiene intersección no vacía con* A.

Lo anterior expresa en términos precisos la idea intuitiva de que un punto frontera de A es un punto que está en el «borde» de A. En muchos ejemplos es obvio cuáles son los puntos frontera.

EJEMPLO 2.8

a) Sea $A = (a, b)$ un intervalo de $\mathbb{R}$. Entonces los puntos frontera de A son los puntos a y b. La Figura 2.2.6 y la definición lo muestran con claridad [se pedirá al lector que lo demuestre en el Ejercicio 20c) de esta sección].

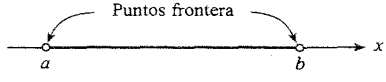


Figura 2.2.6. Los puntos frontera del intervalo (a, b).

b) Sea $A = D_r(x_0, y_0)$ un r-disco con centro (x_0, y_0) en el plano. La frontera está formada por los puntos (x, y) tales que $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ (Figura 2.2.7).

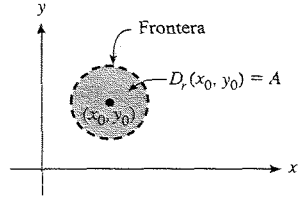


Figura 2.2.7. La frontera de A está formada por los puntos en el borde de A.

c) Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$. Entonces la frontera de A está formada por todos los puntos del eje y (el estudiante debe hacer un esquema).

d) Sea A el disco $D_r(\mathbf{x}_0)$ menos el punto $\mathbf{x}_0$ (un disco «perforado» con centro $\mathbf{x}_0$). Entonces $\mathbf{x}_0$ es un punto frontera de A.

Límites

Ponemos ahora nuestra atención en el concepto de límite. *En toda la discusión siguiente el dominio de definición de la función* f *será un conjunto abierto* A. Nos interesa hallar el límite de f cuando $\mathbf{x} \in A$ se aproxima, bien a un punto de A, bien a un punto frontera de A.

El lector debe apreciar el hecho de que el concepto de límite es una herramienta básica y útil para el análisis de funciones: nos permite estudiar derivadas, y por tanto máximos y mínimos, asíntotas, integrales impropias y otras características importantes de las funciones, y además es útil en las series infinitas y en las sucesiones. Daremos una teoría de límites de funciones de varias variables que incluye la teoría para funciones de una variable como caso particular.

En el cálculo de una variable, el estudiante ha visto la noción de $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ para una función $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de un subconjunto A de los números reales en los números reales. Intuitivamente significa que cuando x se acerca más y más a x_0, los valores de $f(x)$ se acercan más y más a (el valor límite) l. Para fundamentar matemáticamente esta idea intuitiva usualmente se introduce, bien el «método de los épsilon (ε) y delta (δ)», bien el «método de los entornos». Para las funciones de varias variables se hace lo mismo. En lo que sigue desarrollamos el método de los entornos para estudiar límites. El método épsilon-delta se deja como estudio opcional al final de esta sección.

DEFINICIÓN: Límite Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, donde A es un conjunto abierto. Sea $\mathbf{x}_0$ un punto de A o un punto frontera de A, y sea N un entorno de $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Decimos que f ***finaliza en N cuando $\mathbf{x}$ tiende a $\mathbf{x}_0$*** si existe un entorno U de $\mathbf{x}_0$ tal que $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x} \in U$ y $\mathbf{x} \in A$ implica $f(\mathbf{x}) \in N$. (El significado geométrico de esta definición se ilustra en la Figura 2.2.8; nótese que no es necesario que el punto $\mathbf{x}_0$ pertenezca a A, de forma que $f(\mathbf{x}_0)$ no está necesariamente definido). Decimos que $f(\mathbf{x})$ ***tiende a*** $\mathbf{b}$ cuando $\mathbf{x}$ tiende a $\mathbf{x}_0$, o simbólicamente

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b} \qquad \text{o} \qquad f(\mathbf{x}) \to \mathbf{b} \qquad \text{cuando} \qquad \mathbf{x} \to \mathbf{x}_0,$$

si, dado *cualquier* entorno N de $\mathbf{b}$, f finaliza en N cuando $\mathbf{x}$ tiende a $\mathbf{x}_0$ (es decir, «$f(\mathbf{x})$ está cerca de $\mathbf{b}$ si $\mathbf{x}$ está cerca de $\mathbf{x}_0$»). Puede ocurrir que cuando $\mathbf{x}$ tiende a $\mathbf{x}_0$, $f(\mathbf{x})$ no se aproxime a ningún número en particular. En este caso decimos que $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ ***no existe***.

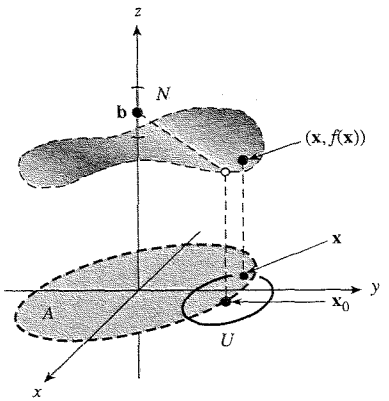


Figura 2.2.8. Límites por entornos: si $\mathbf{x}$ pertenece a U entonces $f(\mathbf{x})$ pertenecerá a N (el circulito blanco indica que el punto no está sobre la gráfica). En la figura, $f: A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\} \to \mathbb{R}$ (la línea discontinua no está en la gráfica de f).

Por tanto, siempre que hablemos del concepto de $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(x)$, supondremos que $\mathbf{x}_0$ bien pertenece a un conjunto abierto en el que f está definida, bien está en la frontera de este conjunto.

Una de las razones por las que insistimos en que $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ en la definición de límite es la que podemos recordar del cálculo de una variable en el que queremos definir la derivada $f'(x_0)$ de una función f en el punto x_0 por medio de

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

y esta expresión no está definida para $x = x_0$.

EJEMPLO 2.9

a) Este ejemplo muestra una función para la que no existe el límite en un punto. Consideramos la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

El $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe ya que existen puntos x_1 tan cerca como se quiera de 0 para los que $f(x_1) = 1$ y también puntos x_2 tan cerca como se quiera de 0 para los que $f(x_2) = -1$; es decir, no hay un único número al que f se acerque cuando x se acerca a 0 (*véase* la Figura 2.2.9). Si f se restringe al dominio $(0, 1)$ o al dominio $(-1, 0)$, entonces el límite sí que existe. ¿Puede el lector decir por qué?

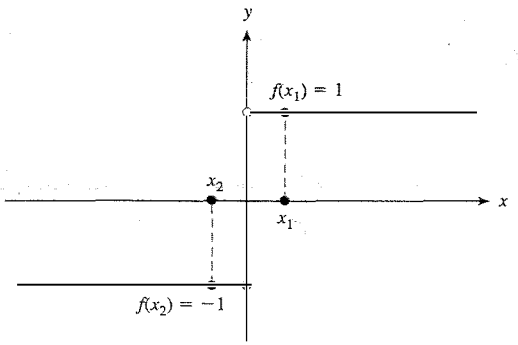


Figura 2.2.9. El límite de esta función cuando $x \to 0$ no existe.

b) Este ejemplo muestra una función cuyo límite existe pero cuyo valor límite no es igual al valor de la función en el punto en el que se toma el límite. Definimos $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por medio de

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Ciertamente $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, ya que para todo entorno U de 0, $x \in U$ y $x \neq 0$ se tiene que $f(x) = 0$. En la Figura 2.2.10 se ve que f se acerca a 0 cuando $x \to 0$; no nos importa que f tome un valor distinto en 0.

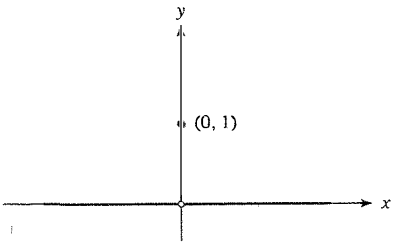


Figura 2.2.10. El límite de esta función cuando $x \to 0$ es cero.

EJEMPLO 2.10 Usar la definición para verificar el «obvio» $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, donde $\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Solución

Sea f la función definida por $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, y sea N un entorno cualquiera de $\mathbf{x}_0$. Tenemos que demostrar que $f(\mathbf{x})$ finaliza en N cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$. Según la definición debemos hallar un entorno U de $\mathbf{x}_0$ con la propiedad de que si $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ y $\mathbf{x} \in U$, entonces $f(\mathbf{x}) \in N$. Tomamos $U = N$. Si $\mathbf{x} \in U$, entonces $x \in N$; dado que $\mathbf{x} = f(\mathbf{x})$ se sigue que $f(\mathbf{x}) \in N$. Por tanto hemos demostrado que $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. De igual forma tenemos que

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} x = x_0, \qquad \text{etc.}$$

En lo que sigue el estudiante puede suponer, sin demostración, la validez de los límites del cálculo de una variable. Por ejemplo, se podrá usar que $\lim_{x \to 1} \sqrt{x} = \sqrt{1} = 1$ y que $\lim_{\theta \to 0} \operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen} 0 = 0$.

EJEMPLO 2.11 Este ejemplo muestra otro caso en el que el límite no puede simplemente «leerse» de la función. Hallar $\lim_{x \to 1} g(x)$ donde

$$g\colon x \to \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}.$$

Solución

Esta función se representa en la Figura 2.2.11(a).

Vemos que $g(1)$ no está definido ya que la división por cero no está definida; sin embargo, si multiplicamos el numerador y el denominador de $g(x)$ por $\sqrt{x} + 1$, hallamos que para todo x en el dominio de g se tiene que

$$g(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = \sqrt{x} + 1, \qquad x \neq 1.$$

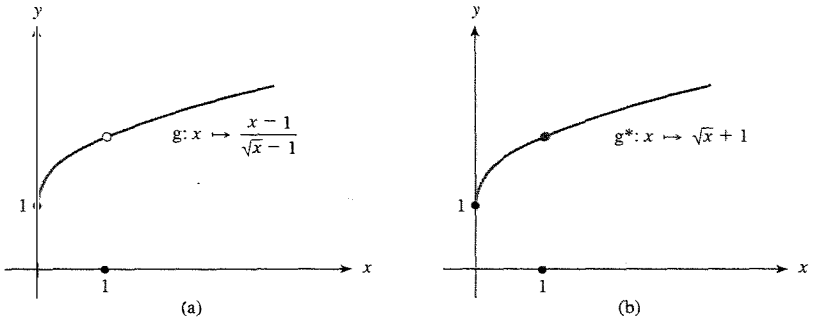


Figura 2.2.11. Estás dos gráficas son iguales excepto en que en la parte (a) g no está definida en $x = 1$, mientras que en la parte (b) g^* está definida para todo $x \geqslant 0$.

La expresión $g^*(x) = \sqrt{x} + 1$ está definida y toma el valor 2 en $x = 1$; del cálculo de una variable $g^*(x) \to 2$ cuando $x \to 1$. Pero dado que $g^*(x) = g(x)$ para todo $x \geqslant 0$, $x \neq 1$, tenemos forzosamente que $g(x) \to 2$ cuando $x \to 1$.

En breve estudiaremos otros ejemplos con dos variables.

Propiedades de los límites

Para hablar con propiedad de *el* límite tendremos que demostrar que f no puede tener *más de un* límite cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$. Intuitivamente esta propiedad es clara y ahora la enunciamos formalmente (*véase* la demostración en el suplemento de Internet).

TEOREMA 2: Unicidad del límite

Si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_1$ y $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}_2$, entonces $\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2$.

Para llevar a cabo operaciones prácticas con límites nos hacen falta algunas reglas como, por ejemplo, que el límite de una suma es igual a la suma de los límites. Estas reglas se recogen en el siguiente teorema (*véase* la demostración en el suplemento de Internet del Capítulo 2).

TEOREMA 3: Propiedades de los límites Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g: A \subset \mathbb{R}^n \to R^m$, $\mathbf{x}_0$ un punto de A o de la frontera de A, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}$; entonces

i) Si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, entonces $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} cf(\mathbf{x}) = c\mathbf{b}$, donde $cf: A \to \mathbb{R}^m$ se define como $\mathbf{x} \to c(f(\mathbf{x}))$.

ii) Si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})=\mathbf{b}_1$ y $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})=\mathbf{b}_2$, entonces $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (f+g)(\mathbf{x})=\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2$, donde $(f+g)\colon A\to\mathbb{R}^m$ se define como $\mathbf{x}\to f(\mathbf{x})+g(\mathbf{x})$.

iii) Si $m=1$, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})=b_1$, y $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})=b_2$, entonces $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (fg)(\mathbf{x})=b_1b_2$, donde $(fg)\colon A\to\mathbb{R}$ se define como $\mathbf{x}\to f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$.

iv) Si $m=1$, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})=b\neq 0$ y $f(\mathbf{x})\neq 0$ para todo $\mathbf{x}\in A$, entonces $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} 1/f(\mathbf{x})=1/b$, donde $1/f\colon A\to\mathbb{R}$ se define como $\mathbf{x}\to 1/f(\mathbf{x})$.

v) Si $f(\mathbf{x})=(f_1(\mathbf{x}),\ldots,f_m(\mathbf{x}))$ donde $f_i\colon A\to\mathbb{R}$, $i=1,\ldots,m$, son las componentes de la función f, entonces $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})=\mathbf{b}=(b_1,\ldots,b_m)$ si y solamente si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_i(\mathbf{x})=b_i$ para cada $i=1,\ldots,m$.

Estos resultados debieran ser intuitivamente claros. Por ejemplo, la regla ii) dice que si $f(\mathbf{x})$ está cerca de $\mathbf{b}_1$ y $g(\mathbf{x})$ está cerca de $\mathbf{b}_2$ cuando $\mathbf{x}$ está cerca de $\mathbf{x}_0$, entonces $f(\mathbf{x})+g(\mathbf{x})$ está cerca de $\mathbf{b}_1+\mathbf{b}_2$ cuando $\mathbf{x}$ está cerca de $\mathbf{x}_0$. El ejemplo siguiente muestra cómo se usa.

EJEMPLO 2.12 Sea $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(x, y)\to x^2+y^2+2$. Calcular el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x, y).$$

Solución

Aquí f es la suma de las tres funciones $(x, y)\to x^2$, $(x, y)\to y^2$, y $(x, y)\to 2$. El límite de una suma es la suma de los límites y el límite de un producto es el producto de los límites (Teorema 3). Por tanto, usando el hecho de que $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x=x_0$ (Ejemplo 2.10), obtenemos

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x^2=\left(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x\right)\left(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x\right)=x_0^2$$

y, por el mismo razonamiento, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y^2=y_0^2$. En consecuencia

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x, y)=0^2+1^2+2=3.$$

Funciones continuas

En el cálculo de una variable aprendimos que la idea de función continua se basa en la noción intuitiva de una función cuya gráfica es una curva sin fracturas, es decir, una curva que no tiene *saltos*, o la curva que trazaría una partícula en movimiento o la punta de un lápiz deslizándose por el papel sin levantarse.

Para realizar un análisis detallado de las funciones necesitamos conceptos más precisos que la vaga noción recién enunciada. Un ejemplo puede aclarar estas ideas. Considérese la función concreta $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=-1$ si $x\leqslant 0$ y $f(x)=1$ si $x>0$. La gráfica de f se

muestra en la Figura 2.2.12(a). El pequeño círculo abierto denota que el punto (0, 1) *no* está en la gráfica de f. Claramente, la gráfica de f se rompe en $x = 0$. Considérese también la función g: $x \to x^2$. Ésta es la función dibujada en la Figura 2.2.12(b). La gráfica de g no se rompe en ningún punto.

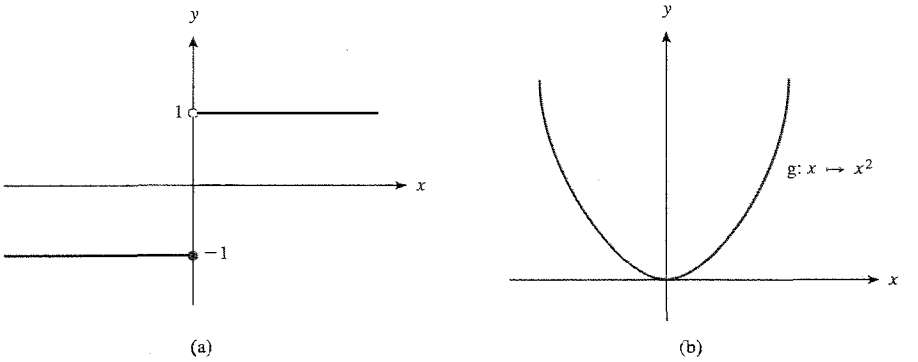


Figura 2.2.12. La función f en la parte (a) no es continua ya que su valor salta cuando x cruza el punto 0, mientras que la función g en la parte (b) es continua.

Si se examinan ejemplos de funciones como f cuyas gráficas se rompen en algún punto x_0, y funciones como g cuyas gráficas no se rompen, se ve que la principal diferencia entre ellas es que para una función como g los valores de $g(x)$ se acercan a $g(x_0)$ cuando x se acerca más y más a x_0. La misma idea funciona para funciones de varias variables. Pero la noción de «más y más cerca» no es suficiente como definición matemática; por tanto formularemos estos conceptos en términos de límites.

Dado que la condición de $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$ significa que $f(\mathbf{x})$ está cerca de $f(\mathbf{x}_0)$ cuando $\mathbf{x}$ está cerca de $\mathbf{x}_0$, vemos que la condición de límite ciertamente coincide con el requisito de la no rotura de la gráfica de f (*véase* la Figura 2.2.13 en la que se ilustra el caso f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$). El caso de varias variables es más fácil de visualizar si tratamos con funciones de valores reales de la forma f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. En este caso podemos visualizar f dibujando su gráfica, que consiste en los puntos (x, y, z) en $\mathbb{R}^3$ con $z = f(x, y)$. La continuidad de f significa, por tanto, que su gráfica no tiene «fracturas» (*véase* la Figura 2.2.14).

DEFINICIÓN: Continuidad Sea f: $A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función dada con dominio A. Sea $\mathbf{x}_0 \in A$. Decimos que f es ***continua*** en $\mathbf{x}_0$ si y solamente si

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0).$$

Si decimos solamente que f es ***continua***, queremos decir que f es continua en cada punto $\mathbf{x}_0$ de A. Si f no es continua en $\mathbf{x}_0$, decimos que f es ***discontinua*** en $\mathbf{x}_0$. Si f es discontinua en algún punto de su dominio decimos que f es ***discontinua***.

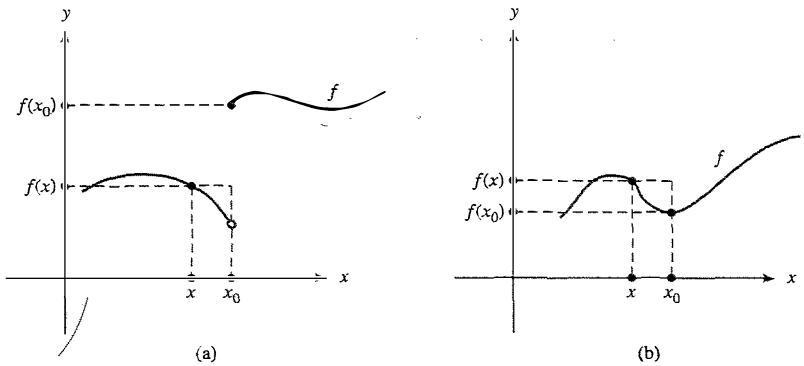


Figura 2.2.13. (a) Función discontinua en la que $\lim_{x \to x_0} f(x)$ no existe. (b) Función continua en la que el límite existe y es igual a $f(x_0)$.

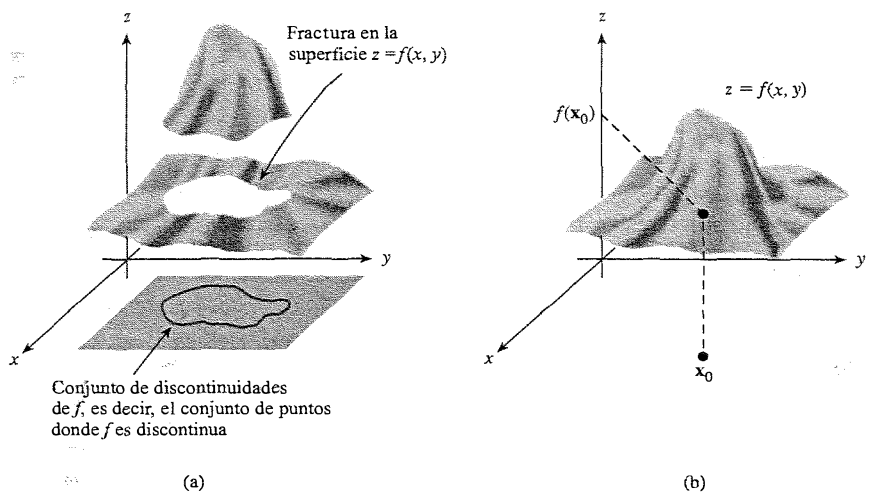


Figura 2.2.14. (a) Una función discontinua de dos variables. (b) Una función continua.

EJEMPLO 2.13 Cualquier polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ es continuo de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. De hecho, por el Teorema 3 y el Ejemplo 2.10,

$$\lim_{x \to x_0} (a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = \lim_{x \to x_0} a_0 + \lim_{x \to x_0} a_1x + \cdots + \lim_{x \to x_0} a_nx^n$$
$$= a_0 + a_1x_0 + \cdots + a_nx_0^n,$$

ya que el límite de un producto es el producto de los límites, lo que da

$$\lim_{x \to x_0} x^n = \left(\lim_{x \to x_0} x \right)^n = x_0^n.$$

EJEMPLO 2.14 Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$. Entonces f es continua ya que, por los teoremas del límite y el Ejemplo 2.10,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} xy = \left(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x\right)\left(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y\right) = x_0y_0.$$

Se puede ver por el mismo método que cualquier polinomio $p(x, y)$ (por ejemplo, $p(x, y) = 3x^2 - 6xy^2 + y^3$) en x e y es continuo.

EJEMPLO 2.15 La función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant 0 \text{ o } y \leqslant 0 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

no es continua en (0, 0) o en cualquier punto en la parte positiva del eje x o en la parte positiva del eje y. De hecho, si $(x_0, y_0) = \mathbf{u}$ es uno de estos puntos (es decir, $x_0 = 0$ e $y_0 \geqslant 0$, o $y_0 = 0$ y $x_0 \geqslant 0$) y $\delta > 0$, existen puntos $(x, y) \in D_\delta(\mathbf{u})$, un entorno de $\mathbf{u}$, con $f(x, y) = 1$ y puntos $(x, y) \in D_\delta(\mathbf{u})$ con $f(x, y) = 0$. Por tanto no es cierto que $f(x, y) \to f(x_0, y_0) = 1$ cuando $(x, y) \to (x_0, y_0)$.

Para demostrar que una función es continua podemos utilizar los teoremas del límite (*véase* el Teorema 3 y el Ejemplo 2.13). Si transcribimos esos resultados en términos de continuidad, ello nos conducirá al siguiente teorema:

TEOREMA 4: Propiedades de las funciones continuas Supongamos que

$$f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \qquad g\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

y sea c un número real.

i) Si f es continua en $\mathbf{x}_0$ también lo es cf, donde $(cf)(\mathbf{x}) = c[f(\mathbf{x})]$.

ii) Si f y g son continuas en $\mathbf{x}_0$ también lo es $f + g$, donde la suma de f y g se define como $(f + g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$.

iii) Si f y g son continuas en $\mathbf{x}_0$ y $m = 1$ entonces la función producto fg, definida por $(fg)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$, es continua en $\mathbf{x}_0$.

iv) Si $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua en $\mathbf{x}_0$ y no se anula en A entonces el cociente $1/f$ es continuo en $\mathbf{x}_0$, donde $(1/f)(\mathbf{x}) = 1/f(\mathbf{x})$.

v) Si $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))$, entonces f es continua en $\mathbf{x}_0$ si y solamente si cada una de las funciones con valores reales $f_1, \ldots, f_m$ es continua en $\mathbf{x}_0$.

Frecuentemente se usa una variante de iv): si $f(\mathbf{x}_0) \neq 0$ y f es continua, entonces $f(\mathbf{x}) \neq 0$ en un entorno de $\mathbf{x}_0$ y, por tanto, $1/f$ está definida en ese entorno y $1/f$ es continua en $\mathbf{x}_0$.

EJEMPLO 2.16 Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \to (x^2y, (y + x^3)/(1 + x^2))$. Demostrar que f es continua.

Solución

Para verlo, por la propiedad v) del Teorema 4 es suficiente mostrar que cada componente es continua. Como hemos mencionado, cualquier polinomio de dos variables es continuo; por tanto, la aplicación $(x, y) \to x^2y$ es continua. Dado que $1 + x^2$ es continua y distinta de cero sabemos, por la propiedad iv), que $1/(1 + x^2)$ es continua; así que $(y + x^3)/(1 + x^2)$ es el producto de dos funciones continuas y, por iii), continuo.

Razonamientos similares se aplican a ejemplos como la función $\mathbf{c}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{c}(t) = (t^2, 1, t^3/(1 + t^2))$ para mostrar que también son funciones continuas.

Composición

A continuación estudiemos la *composición*, otra operación básica que se puede realizar con funciones. Si g aplica A en B y f aplica B en C, la ***composición de*** g ***con*** f, o de f sobre g, que se denota por $f \circ g$, aplica A en C y lleva $\mathbf{x} \to f(g(\mathbf{x}))$ (*véase* la Figura 2.2.15). Por ejemplo, sen (x^2) es la composición de $x \to x^2$ con $y \to \text{sen}\, y$.

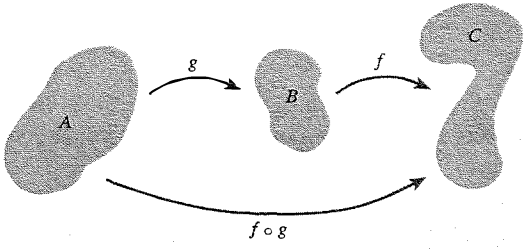


Figura 2.2.15. La composición de f sobre g.

TEOREMA 5: Continuidad de la composición Sea g: $A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y sea f: $B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$. Supongamos que $g(A) \subset B$, de forma que $f \circ g$ está definida en A. Si g es continua en $\mathbf{x}_0 \in A$ y f es continua en $\mathbf{y}_0 = g(\mathbf{x}_0)$, entonces $f \circ g$ es continua en $\mathbf{x}_0$.

La intuición que hay tras esto es fácil; la demostración formal en el suplemento de Internet sigue un esquema similar. Intuitivamente, debemos demostrar que al acercarse $\mathbf{x}$ a $\mathbf{x}_0$, $f(g(x))$ se aproxima a $f(g(x_0))$. Pero cuando x se acerca a x_0, $g(\mathbf{x})$ se aproxima a $g(\mathbf{x}_0)$ (por la continuidad de g en $\mathbf{x}_0$); y al acercarse $g(\mathbf{x})$ a $g(\mathbf{x}_0)$, $f(g(\mathbf{x}))$ se acerca a $f(g(\mathbf{x}_0))$ (por la continuidad de f en $g(\mathbf{x}_0)$).

EJEMPLO 2.17 Sea $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{30} + \text{sen}\, z^3$. Probar que f es continua.

Solución

Podemos escribir f como suma de dos funciones $(x^2 + y^2 + z^2)^{30}$ y sen z^3, por tanto es suficiente demostrar que cada una de ellas es continua. La primera es la composición de $(x, y, z) \to (x^2 + y^2 + z^2)$ con $u \to u^{30}$ y la segunda, la composición de $(x, y, z) \to z^3$ con $u \to \text{sen}\, u$, y por tanto obtenemos la continuidad por el Teorema 5.

Límites en términos de ϵ y δ

Enunciamos ahora un teorema (demostrado en el suplemento de Internet del Capítulo 2) que da una formulación útil de la noción de límite en términos de épsilons y deltas, y que a menudo se toma como *definición* de límite. De hecho, ésta es otra forma de hacer precisa la formulación intuitiva «$f(\mathbf{x})$ se acerca a $\mathbf{b}$ cuando $\mathbf{x}$ se acerca a $\mathbf{x}_0$». Como ayuda para entender esta formulación el lector debe estudiarla en cada uno de los ejemplos ya presentados.

TEOREMA 6 Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y sea $\mathbf{x}_0$ un punto de A o un punto frontera de A. Entonces $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ si y solamente si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $\mathbf{x} \in A$ que satisface $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ se tiene que $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}\| < \varepsilon$ (*véase* la Figura 2.2.16).

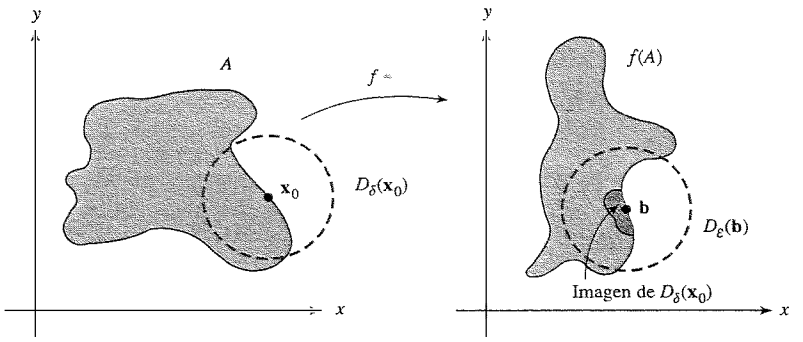


Figura 2.2.16. La geometría de la definición ε-δ del límite.

A fin de ilustrar la metodología de la técnica épsilon-delta del Teorema 6, estudiamos los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 2.18 Demostrar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$ usando el método ε-δ.

Solución

Nótese que si $\delta > 0$, $\|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ implica

$$|x - 0| = |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta.$$

Por tanto, si $\|(x, y) - (0, 0)\| < \delta$, entonces $|x - 0|$ también es menor que δ. Dado $\varepsilon > 0$ debemos hallar $\delta > 0$ (que, por lo general, dependerá de ε) con la propiedad de que $0 < \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta$ implique $|x - 0| < \varepsilon$. ¿Cómo elegiremos nuestro δ? Del cálculo que precede vemos que si elegimos $\delta = \varepsilon$, entonces $\|(x, y) - (0, 0)\| < \delta$ implica que $|x - 0| < \varepsilon$, lo que demuestra que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$. Dado $\varepsilon > 0$ también podríamos haber tomado $\delta = \varepsilon/2$ o $\varepsilon/3$, pero es suficiente con hallar un solo δ que satisfaga los requisitos de la definición de límite.

EJEMPLO 2.19 Considerar la función

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}.$$

Aun cuando f no está definida en (0, 0), determinar si $f(x, y)$ se aproxima a algún número cuando (x, y) se aproxima a (0, 0).

Solución

Del cálculo de una variable o por la regla de l'Hôpital sabemos que

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} = 1.$$

Por tanto, es razonable conjeturar que

$$\lim_{\mathbf{v} \to (0,0)} f(\mathbf{v}) = \lim_{\mathbf{v} \to (0,0)} \frac{\operatorname{sen} \|\mathbf{v}\|^2}{\|\mathbf{v}\|^2} = 1.$$

De hecho, dado que $\lim_{\alpha \to 0} (\operatorname{sen} \alpha)/\alpha = 1$, para $\varepsilon > 0$ podemos hallar $\delta > 0$, $0 < \delta < 1$, tal que $0 < |\alpha| < \delta$ implica que $|(\operatorname{sen} \alpha)/\alpha - 1| < \varepsilon$. Si $0 < \|\mathbf{v}\| < \delta$, entonces $0 < \|\mathbf{v}\|^2 < \delta^2 < \delta$, y por tanto

$$|f(\mathbf{v}) - 1| = \left| \frac{\operatorname{sen} \|\mathbf{v}\|^2}{\|\mathbf{v}\|^2} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Así, $\lim_{\mathbf{v} \to (0,0)} f(\mathbf{v}) = 1$. Si representamos gráficamente $[\operatorname{sen}(x^2 + y^2)]/(x^2 + y^2)$ en el computador obtenemos una gráfica que de hecho se comporta bien cerca de (0, 0) (Figura 2.2.17).

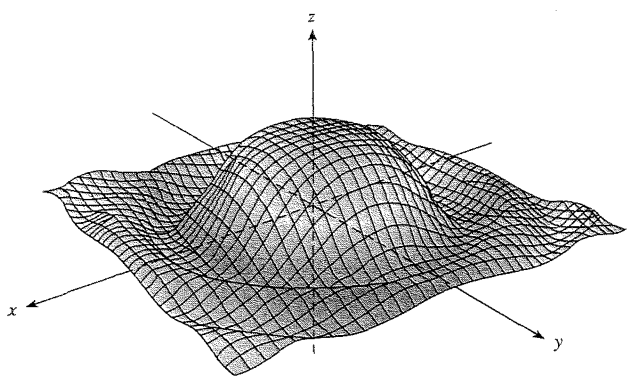


Figura 2.2.17. Gráfica de la función $f(x, y) = [\operatorname{sen}(x^2 + y^2)]/(x^2 + y^2)$.

EJEMPLO 2.20 Demostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Solución

Tenemos que demostrar que $x^2/\sqrt{x^2+y^2}$ es pequeño cuando (x, y) está cerca del origen. Para hacerlo utilizamos la desigualdad siguiente:

$$0 \leqslant \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{(ya que } y^2 \geqslant 0\text{)}$$

$$= \sqrt{x^2+y^2}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, elegimos $\delta = \varepsilon$. Entonces $\|(x, y) - (0, 0)\| = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$, y por tanto $\|(x, y) - (0, 0)\| < \delta$ implica que

$$\left|\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \sqrt{x^2+y^2} = \|(x, y) - (0, 0\| < \delta = \varepsilon.$$

Por tanto se cumplen las condiciones del Teorema 6 y se comprueba el valor del límite.

EJEMPLO 2.21

a) ¿Existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2/(x^2+y^2)$?

[*Véase* la Figura 2.2.18(a).]

b) Demostrar que [*véase* la Figura 2.2.18(b)]

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} = 0.$$

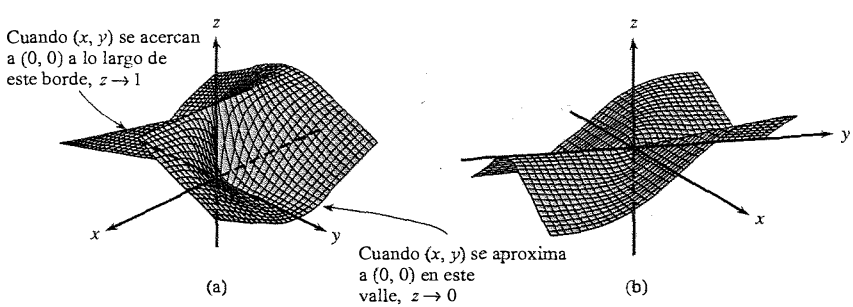


Figura 2.2.18. (a) La función $z = x^2/(x^2+y^2)$ no tiene límite en (0, 0). (b) La función $z = (2x^2y)/(x^2+y^2)$ tiene límite 0 en (0, 0).

Solución

a) Si el límite existe, $x^2/(x^2 + y^2)$ debe aproximarse a un valor determinado, llamémoslo a, cuando (x, y) se aproxima a $(0, 0)$. En particular, si (x, y) se aproxima al origen a lo largo de un trayectoria dada, entonces $x^2/(x^2 + y^2)$ debe aproximarse al valor límite a. Si (x, y) se aproxima a $(0, 0)$ a lo largo de la recta $y = 0$, el valor límite es, claramente, 1 (póngase $y = 0$ en la expresión precedente y se obtendrá $x^2/x^2 = 1$). Si (x, y) se aproxima a $(0, 0)$ a lo largo de la recta $x = 0$, el valor límite es

$$\lim_{y \to 0} \frac{0^2}{0^2 + y^2} = 0 \neq 1.$$

Por tanto, no existe $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} x^2/(x^2 + y^2)$.

b) Nótese que

$$\left| \frac{2x^2y}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{2x^2y}{x^2} \right| = 2|y|.$$

Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, elíjase $\delta = \varepsilon/2$; entonces $0 < ||(x, y) - (0, 0)|| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ implica que $|y| < \delta$ y por tanto

$$\left| \frac{2x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| < 2\delta = \varepsilon.$$

Utilizar la notación ε-δ nos lleva a la siguiente reformulación de la definición de continuidad.

TEOREMA 7 Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada. Entonces f es continua en $\mathbf{x}_0 \in A$ si y solamente si para todo número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que:

$$\mathbf{x} \in A \quad \text{y} \quad ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| < \delta \quad \text{implica} \quad ||f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)|| < \varepsilon.$$

La demostración es casi inmediata. Nótese que en el Teorema 6 insistimos en que $0 < ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||$, es decir, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$. Esta condición *no* se impone aquí; de hecho la conclusión del Teorema 7 es ciertamente válida cuando $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, y por tanto no hay necesidad de excluir este caso. Aquí nos importa el valor de f en $\mathbf{x}_0$; queremos que, en los puntos próximos, f sea cercana a *este* valor.

EJERCICIOS

En los ejercicios siguientes el lector puede suponer que las funciones exponencial, seno y coseno son continuas y puede utilizar con libertad técnicas del cálculo de una variable, como la regla de l'Hôpital. Demostrar que los subconjuntos del plano de los ejercicios 1 a 4 son abiertos:

1. $A = \{(x, y) \mid -1 < x < 1, \ -1 < y < 1\}$.
2. $B = \{(x, y) \mid y > 0\}$.

3. $C = \{(x, y) \mid 2 < x^2 + y^2 < 4\}$.

4. $D = \{(x, y) \mid x \neq 0 \text{ y } y \neq 0\}$.

5. Calcular los límites:

a) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} x^3y$.

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$.

c) $\lim_{h\to 0} \dfrac{e^h - 1}{h}$.

6. Calcular los límites siguientes:

a) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} e^x y$.

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$.

c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}$.

7. Calcular los límites siguientes:

a) $\lim_{x\to 3} (x^2 - 3x + 5)$.

b) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x$.

c) $\lim_{h\to 0} \dfrac{(x + h)^2 - x^2}{h}$.

8. Calcular, si existen, los límites siguientes:

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x + y)^2 - (x - y)^2}{xy}$.

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen} xy}{y}$.

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$.

9. Calcular, si existen, los límites siguientes:

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{xy} - 1}{y}$.

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\cos(xy) - 1}{x^2y^2}$.

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2 + y^2 + 2}$.

10. Calcular, si existen, los límites siguientes:

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{xy}}{x + 1}$.

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\cos x - 1 - (x^2/2)}{x^4 + y^4}$.

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x - y)^2}{x^2 + y^2}$.

11. Calcular, si existen, los límites siguientes:

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen} xy}{xy}$.

b) $\lim_{(x, y, z)\to(0, 0, 0)} \dfrac{\operatorname{sen}(xyz)}{xyz}$.

c) $\lim_{(x, y, z)\to(0, 0, 0)} f(x, y, z)$, donde $f(x, y, z) = (x^2 + 3y^2)/(x + 1)$.

12. Calcular, si existen, los límites siguientes:

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 2x - 2x}{x^3}$.

b) $\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \dfrac{\operatorname{sen} 2x - 2x + y}{x^3 + y}$.

c) $\lim_{(x, y, z)\to(0, 0, 0)} \dfrac{2x^2 y \cos z}{x^2 + y^2}$

13. Calcular, si existe, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$, en los casos siguientes:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to |x|$, $x_0 = 1$.

b) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \to \|\mathbf{x}\|$, con $\mathbf{x}_0$ arbitrario.

c) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \to (x^2, e^x)$, $x_0 = 1$.

d) $f\colon \mathbb{R}^2\backslash\{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \to (\operatorname{sen}(x - y), e^{x(y+1)} - x - 1)/\|(x, y)\|$, $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$.

14. Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ el disco unidad abierto $D_1(0, 0)$ con el punto $\mathbf{x}_0 = (1, 0)$ añadido, y sea $f\colon A \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \to f(\mathbf{x})$ la función constante $f(\mathbf{x}) = 1$. Demostrar que $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = 1$.

15. Si $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son continuas, demostrar que las funciones

$$f^2 g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \mathbf{x} \to [f(\mathbf{x})]^2 g(\mathbf{x})$$

y,

$$f^2 + g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \to [f(\mathbf{x})]^2 + g(\mathbf{x})$$

son continuas.

16. **a)** Demostrar que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to (1 - x)^8 + \cos(1 + x^3)$ es continua.

b) Demostrar que la aplicación $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^2 e^x/(2 - \operatorname{sen} x)$ es continua.

17. **a)** ¿Puede hacerse $[\operatorname{sen}(x + y)]/(x + y)$ continua definiéndola adecuadamente en $(0, 0)$?

b) ¿Puede hacerse $xy/(x + y)$ continua definiéndola adecuadamente en $(0, 0)$?

c) Demostrar que $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to ye^x + \operatorname{sen} x + (xy)^4$ es continua.

18. Utilizando bien ε y δ, bien coordenadas esféricas, demostrar que

$$\lim_{(x, y, z)\to(0, 0, 0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} = 0.$$

19. Utilizar la formulación ε-δ del los límites para demostrar que $x^2 \to 4$ cuando $x \to 2$. Dar otra demostración utilizando el Teorema 3.

20. **a)** Demostrar que para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $s < t$, $D_s(\mathbf{x}) \subset D_t(\mathbf{x})$.

b) Demostrar que si U y V son entornos de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ entonces también lo son $U \cap V$ y $U \cup V$.

c) Demostrar que los puntos frontera de un intervalo abierto $(a, b) \subset \mathbb{R}$ son los puntos a y b.

21. Supóngase que $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ están en $\mathbb{R}^n$ y que $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. Demostrar que existe una función continua $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $f(\mathbf{x}) = 1$, $f(\mathbf{y}) = 0$ y, para todo $\mathbf{z}$ en $\mathbb{R}^n$, $0 \leqslant f(\mathbf{z}) \leqslant 1$.

22. Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y sea $\mathbf{x}_0$ un punto frontera de A. Decimos que $\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \infty$ si para todo $N > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ y $\mathbf{x} \in A$ implican que $f(\mathbf{x}) > N$.

a) Demostrar que $\lim_{x \to 1} (x - 1)^{-2} = \infty$.

b) Demostrar que $\lim_{x \to 0} 1/|x| = \infty$. ¿Es cierto que $\lim_{x \to 0} 1/x = \infty$?

c) Demostrar que $\lim_{(x,y) \to (0,0)} 1/(x^2 + y^2) = \infty$.

23. Sea $b \in \mathbb{R}$ y $f: \mathbb{R} \setminus [b] \to \mathbb{R}$ una función. Escribimos $\lim_{x \to b-} f(x) = L$ y decimos que L es el ***límite por la izquierda*** de f en b si, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $x < b$ y $0 < |x - b| < \delta$ implican que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

a) Formular una definición de ***límite por la derecha***, o $\lim_{x \to b+} f(x)$.

b) Hallar $\lim_{x \to 0-} 1/(1 + e^{1/x})$ y $\lim_{x \to 0+} 1/(1 + e^{1/x})$.

c) Dibujar la gráfica de $1/(1 + e^{1/x})$.

24. Probar que f es continua en $\mathbf{x}_0$ si y solamente si

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| = 0.$$

25. Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ que, para constantes K y α positivas, satisface $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leqslant K\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^\alpha$ para todos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ en A. Demostrar que f es continua (las funciones que verifican la propiedad anterior se llaman ***continuas Hölder*** o, si $\alpha = 1$, ***continuas Lipschitz***).

26. Demostrar que $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua en todos los puntos si y solamente si la imagen inversa de todo conjunto abierto es abierta.

27. **a)** Hallar un número concreto $\delta > 0$ tal que si $|a| < \delta$ entonces $|a^3 + 3a^2 + a| < 1/100$.

b) Hallar un número concreto $\delta > 0$ tal que si $x^2 + y^2 < \delta^2$ entonces

$$|x^2 + y^2 + 3xy + 180xy^5| < 1/10.000.$$

2.3. Diferenciación

En la Sección 2.1 estudiamos algunos métodos para dibujar la gráfica de una función. Utilizando solamente estos métodos puede resultar imposible obtener suficiente información para captar incluso las características generales de una función complicada. Sabemos del cálculo elemental que la idea de derivada nos puede ayudar mucho en esta tarea; por ejemplo, nos permite localizar máximos y mínimos, y cuantificar el cambio. La derivada tiene también muchas otras aplicaciones, como el estudiante habrá descubierto en cálculo elemental.

Intuitivamente sabemos, a partir del trabajo realizado en la Sección 2.2, que función continua es aquella que no tiene «fracturas» en su gráfica. Una función diferenciable de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$

debería ser tal que no solamente no tuviera fracturas en su gráfica sino que también tuviera un plano tangente bien definido en cada punto. Por tanto tendrá que carecer de bruscos dobleces, esquinas o picos en su gráfica (*véase* la Figura 2.3.1). En otras palabras, la gráfica tendrá que ser *suave*.

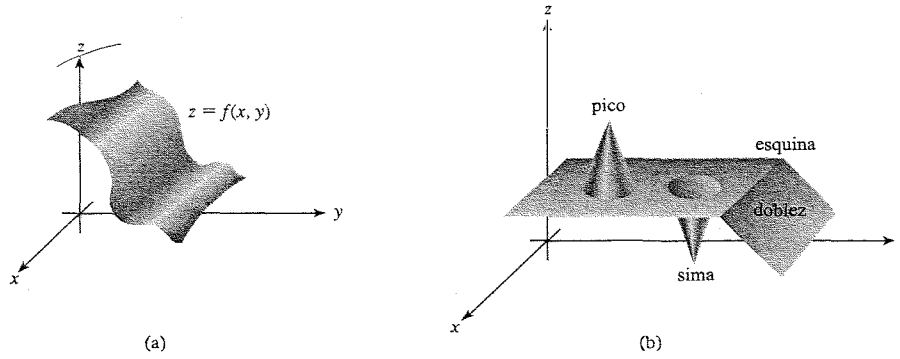


Figura 2.3.1. (a) Una gráfica suave y (b) una no suave.

Derivadas parciales

Para hacer precisas estas ideas necesitamos una definición de lo que queremos decir con la frase «$f(x_1, \ldots, x_n)$ es diferenciable en $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$»; de hecho, esta definición no es tan simple como pudiera pensarse. Para ese fin comenzamos con la noción de *derivada parcial*. Esta noción descansa únicamente en nuestro conocimiento del cálculo de una variable (un repaso rápido de la definición de derivada en algún libro de cálculo de una variable es aconsejable en este punto).

DEFINICIÓN: Derivadas parciales Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y supóngase que $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función con valores reales. Entonces $\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n$, las ***derivadas parciales*** de f respecto de la primera, segunda, ..., n-ésima variable, son las funciones con valores reales de n variables que, en el punto $(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{x}$, se definen como

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_j + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h},$$

si los límites existen, donde $1 \leqslant j \leqslant n$ y $\mathbf{e}_j$ es el vector j-ésimo de la base canónica definido por $\mathbf{e}_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, con el 1 en la posición j-ésima (*véase* la Sección 1.5). El dominio de la función $\partial f/\partial x_j$ es el conjunto de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ para los que el límite existe.

En otra palabras, $\partial f/\partial x_j$ es la derivada de f respecto de la variable x_j, con las otras variables fijas. Si $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, a menudo utilizaremos la notación $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$ en vez de $\partial f/\partial x_1$, $\partial f/\partial x_2$, $\partial f/\partial x_3$. Si $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, entonces podemos escribir

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)),$$

de forma que podemos hablar de las derivadas parciales de cada componente; por ejemplo, $\partial f_m/\partial x_n$ es la derivada parcial de la componente m-ésima respecto de x_n, la variable n-ésima.

EJEMPLO 2.22 Si $f(x, y) = x^2y + y^3$, hallar $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$.

Solución

Para hallar $\partial f/\partial x$ fijamos y (piénsese que es un número, digamos 1) y diferenciamos solamente respecto de x; esto da

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d(x^2y + y^3)}{dx} = 2xy.$$

De forma análoga, para hallar $\partial f/\partial y$ fijamos x y diferenciamos solamente respecto de y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d(x^2y + y^3)}{dy} = x^2 + 3y^2.$$

Para indicar que una derivada parcial debe evaluarse en un punto particular, por ejemplo en (x_0, y_0), escribimos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0, y=y_0} \qquad \text{o} \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)}.$$

Cuando escribamos la variable dependiente como $z = f(x, y)$, escribiremos a veces $\partial z/\partial x$ en vez de $\partial f/\partial x$. Estrictamente, esto es un abuso de notación, pero es práctica común el utilizar estas dos notaciones de forma indistinta.

EJEMPLO 2.23 Si $z = \cos xy + x \cos y = f(x, y)$, hallar las dos derivadas parciales $(\partial z/\partial x)(x_0, y_0)$ y $(\partial z/\partial y)(x_0, y_0)$.

Solución

Fijamos primero y_0 y diferenciamos respecto de x, para obtener

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) &= \left.\frac{d(\cos xy_0 + x \cos y_0)}{dx}\right|_{x=x_0} \\ &= (-y_0 \operatorname{sen} xy_0 + \cos y_0)|_{x=x_0} \\ &= -y_0 \operatorname{sen} x_0y_0 + \cos y_0.\end{aligned}$$

De forma análoga, si fijamos x_0 y diferenciamos respecto de y, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) &= \left.\frac{d(\cos x_0 y + x_0 \cos y)}{dy}\right|_{y=y_0} \\ &= (-x_0 \operatorname{sen} x_0 y - x_0 \operatorname{sen} y)|_{y=y_0} \\ &= -x_0 \operatorname{sen} x_0 y_0 - x_0 \operatorname{sen} y_0.\end{aligned}$$

EJEMPLO 2.24 Hallar $\partial f/\partial x$ si $f(x, y) = xy/\sqrt{x^2 + y^2}$.

Solución

Por la regla del cociente,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y\sqrt{x^2 + y^2} - xy(x/\sqrt{x^2 + y^2})}{x^2 + y^2} = \frac{y(x^2 + y^2) - x^2 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Una definición de diferenciabilidad que requiera únicamente la existencia de derivadas parciales resulta ser insuficiente; muchos resultados típicos, como la regla de la cadena para funciones de varias variables, no se verificarían, como muestra el Ejemplo 2.25. Más adelante veremos cómo arreglar esta situación.

EJEMPLO 2.25 Sea $f(x, y) = x^{1/3}y^{1/3}$. Por definición,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0,$$

y, de forma análoga, $(\partial f/\partial y)(0, 0) = 0$ (¡no hay indeterminaciones!). Es necesario utilizar la definición original de derivada parcial ya que las funciones $x^{1/3}$ y $y^{1/3}$ no son diferenciables en el origen. Supóngase que restringimos f a la recta $y = x$ y obtenemos $f(x, x) = x^{2/3}$ (*véase* la Figura 2.3.2). Podemos considerar la sustitución $y = x$ como la composición $f \circ g$ de la función g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, definida por $g(x) = (x, x)$, y f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = x^{1/3}y^{1/3}$.

Por tanto, la composición $f \circ g$ viene dada por $(f \circ g)(x) = x^{2/3}$. Cada componente de g es diferenciable en x, y f tiene derivadas parciales en (0, 0), pero $f \circ g$ *no es diferenciable* en $x = 0$ en el sentido del cálculo de una variable. En otras palabras, *la composición de f con g no es diferenciable* en contraste con el cálculo de una variable, donde la composición de funciones diferenciables *es* diferenciable. Más adelante daremos una definición de diferenciabilidad que tiene la agradable consecuencia de que la composición de funciones diferenciables *es* diferenciable.

Hay otra razón para no estar contentos con la mera existencia de derivadas parciales de $f(x, y) = x^{1/3}y^{1/3}$: no existe plano tangente a la gráfica, de forma razonable alguna, en (0, 0). El plano xy es tangente a la gráfica a lo largo de los ejes x e y, ya que f tiene pendiente cero en (0, 0) a lo largo de estos ejes; es decir, $\partial f/\partial x = 0$ y $\partial f/\partial y = 0$ en (0, 0). Por tanto, si hay plano tangente éste debe ser el plano xy. Sin embargo, como es evidente en la Figura 2.3.2, el plano xy

no es tangente a la gráfica en otras direcciones, ya que la gráfica tiene una arruga muy acusada y por tanto el plano xy no puede decirse que sea tangente a la gráfica de f.

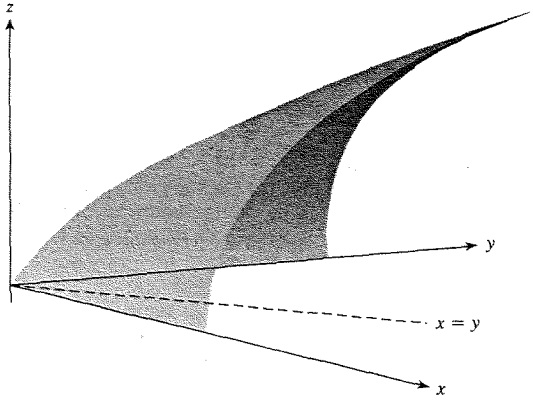


Figura 2.3.2. La parte de la gráfica de $x^{1/3}y^{1/3}$ en el primer cuadrante.

La aproximación lineal

A fin de «motivar» nuestra definición de diferenciabilidad calculemos cuál tendría que ser la ecuación del plano tangente a la gráfica de f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to f(x, y)$ en (x_0, y_0) si f fuera suficientemente suave. En $\mathbb{R}^3$ un plano no vertical tiene ecuación de la forma

$$z = ax + by + c.$$

Si éste fuera el plano tangente a la gráfica de f, las pendientes a lo largo de los ejes x e y tendrían que ser iguales a $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$, las variaciones de f respecto de x e y; por tanto, $a = \partial f/\partial x$, $b = \partial f/\partial y$ (evaluadas en (x_0, y_0)). Finalmente, podemos determinar la constante c utilizando que $z = f(x_0, y_0)$ cuando $x = x_0$, $y = y_0$. Así, se obtiene la ***aproximación lineal***:

$$z = f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right](y - y_0), \tag{1}$$

que debe ser la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en (x_0, y_0), si f es «suficientemente suave» (*véase* la Figura 2.3.3).

Nuestra definición de diferenciabilidad significará que, en efecto, el plano definido por la aproximación lineal (1) es una «buena» aproximación de f cerca de (x_0, y_0). Para hacerse una idea de lo que se debe entender por una buena aproximación volvamos por un momento al cálculo de una variable. Si f es diferenciable en el punto x_0, entonces sabemos que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Si $x = x_0 + \Delta x$, reescribamos lo anterior como

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

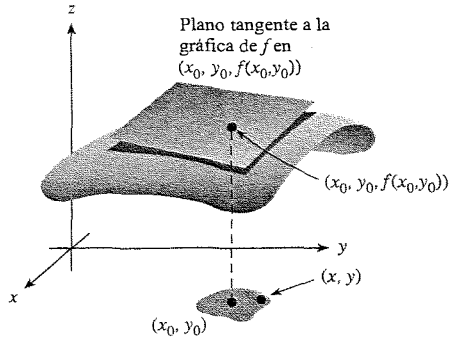


Figura 2.3.3. Para los puntos (x, y) que están cerca de (x_0, y_0), la gráfica del plano tangente está cerca de la gráfica de f.

Utilizando el límite trivial $\lim_{x \to x_0} f'(x_0) = f'(x_0)$ podemos reescribir la ecuación precedente como

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f'(x_0);$$

es decir,

$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right] = 0;$$

es decir,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Por tanto, la recta tangente en $(x_0, f(x_0))$ con pendiente $f'(x_0)$ está cerca de f en el sentido de que la diferencia entre $f(x)$ y $l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, la ecuación de la recta tangente, tiende a cero cuando x tiende a x_0, incluso dividida por $x - x_0$. Ésta es la noción de «buena aproximación» que vamos a adaptar para las funciones de varias variables, con la recta tangente reemplazada por el plano tangente (*véase* la Ecuación (1), dada anteriormente).

Diferenciabilidad de funciones de dos variables

Con la ayuda de la aproximación lineal estamos listos para definir la noción de deferenciabilidad.

DEFINICIÓN: Diferenciabilidad, dos variables Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Decimos que f es ***diferenciable*** en (x_0, y_0) si $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ existen en (x_0, y_0), y, además,

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0) - \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right](y - y_0)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} \to 0 \qquad (2)$$

cuando $(x, y) \to (x_0, y_0)$. Esta ecuación expresa lo que queremos decir cuando decimos que

$$f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right](y - y_0)$$

es una ***buena aproximación*** de la función f.

No siempre es fácil utilizar esta definición para ver si f es diferenciable, pero será fácil de usar otro criterio que daremos en breve en el Teorema 9.

El plano tangente

Hemos usado la noción informal de plano tangente a la gráfica de una función para motivar nuestra definición de diferenciabilidad. Ahora estamos preparados para adoptar una definición formal de plano tangente.

DEFINICIÓN: Plano tangente Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$. El plano de $\mathbb{R}^3$ definido por la ecuación

$$z = f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right](y - y_0),$$

se llama ***plano tangente*** de la gráfica de f en el punto (x_0, y_0).

EJEMPLO 2.26 Calcular el plano tangente a la gráfica de $z = x^2 + y^4 + e^{xy}$ en el punto $(1, 0, 2)$.

Solución

Utilícese la Fórmula (1) con $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, y $z_0 = f(x_0, y_0) = 2$. Las derivadas parciales son

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + ye^{xy} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 + xe^{xy}.$$

En $(1, 0, 2)$ estas derivadas parciales son 2 y 1 respectivamente, por tanto, por la Fórmula (1), el plano tangente es

$$z = 2(x - 1) + 1(y - 0) + 2, \qquad \text{es decir,} \qquad z = 2x + y.$$

Escribamos como $\mathbf{D}f(x_0, y_0)$ la matriz fila

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right],$$

de forma que la definición de diferenciabilidad afirma que

$$f(x_0, y_0) + \mathbf{D}f(x_0, y_0)\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$$

$$= f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right](y - y_0) \tag{3}$$

es nuestra buena aproximación de f cerca del punto (x_0, y_0). Como anteriormente, «buena» se toma en el sentido de que la Expresión (3) difiere de $f(x, y)$ en algo pequeño multiplicado por $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Decimos que la Expresión (3) es la ***mejor aproximación lineal*** de f cerca de (x_0, y_0).

Diferenciabilidad: El caso general

Ahora estamos preparados para dar una definición de diferenciabilidad de funciones f de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ utilizando la discusión precedente como motivación. La derivada $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ de $f = (f_1, \ldots, f_m)$ en un punto $\mathbf{x}_0$ es una matriz $\mathbf{T}$ cuyos elementos son $t_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$ evaluadas en $\mathbf{x}_0$[2].

DEFINICIÓN: Diferenciable, *n* variables, *m* funciones Sea U un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$ y sea $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función dada. Decimos que f es ***diferenciable*** en $\mathbf{x}_0 \in U$ si las derivadas parciales de f existen en $\mathbf{x}_0$ y, además,

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0, \tag{4}$$

donde $\mathbf{T} = \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ es la matriz $m \times n$ con elementos $\partial f_i / \partial x_j$ evaluadas en $\mathbf{x}_0$, y $\mathbf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ es el producto de $\mathbf{T}$ por $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ (visto como matriz columna). Llamamos a $\mathbf{T}$ la ***derivada*** de f en $\mathbf{x}_0$.

Aquí siempre denotaremos la derivada $\mathbf{T}$ de f en $\mathbf{x}_0$ por $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$, aunque en algunos libros se denota por $df(\mathbf{x}_0)$ y se refieren a ella como la ***diferencial*** de f. En el caso en el que $m = 1$ la matriz $\mathbf{T}$ es simplemente el vector fila

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}$$

(algunas veces, cuando haya posibilidad de confusión, separaremos los elementos por comas). Además, si $n = 2$ y se pone esta expresión en la Ecuación (4), resulta que las condiciones (2)

[2] Resulta que solamente es necesario postular la existencia de una matriz que dé la mejor aproximación lineal cerca de $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ ya que, de hecho, esta matriz es necesariamente la matriz cuyo ij-ésimo elemento es $\partial f_i / \partial x_j$ (véase el Capítulo 2 del suplemento de Internet).

y (4) coinciden; por tanto, si ponemos $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, una función con valores reales f de n variables es diferenciable en un punto $\mathbf{x}_0$ si

$$\lim_{\mathbf{h}\to 0} \frac{1}{\|\mathbf{h}\|} \left| f(\mathbf{x}_0 - \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) h_j \right| = 0,$$

ya que

$$\mathbf{Th} = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0).$$

En el caso general en el que f está definida sobre un conjunto de $\mathbb{R}^n$ con valores en $\mathbb{R}^m$, la derivada es la matriz $m \times n$ dada por

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

donde las $\partial f_i/\partial x_j$ se evalúan en $\mathbf{x}_0$. La matriz $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ se llama, con propiedad, ***matriz de las derivadas parciales de*** f ***en*** $\mathbf{x}_0$.

EJEMPLO 2.27 Calcular las matrices de derivadas parciales para las funciones:

a) $f(x, y) = (e^{x+y} + y, y^2 x)$.

b) $f(x, y) = (x^2 + \cos y, ye^x)$.

c) $f(x, y, z) = (ze^x, -ye^z)$.

Solución

a) Aquí $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se define por medio de $f_1(x, y) = e^{x+y} + y$, y de $f_2(x, y) = y^2 x$; por tanto, $\mathbf{D}f(x, y)$ es la matriz 2×2

$$\mathbf{D}f(x, y) = \begin{bmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} + 1 \\ y^2 & 2xy \end{bmatrix}.$$

b) Tenemos que

$$\mathbf{D}f(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & -\operatorname{sen} y \\ ye^x & e^x \end{bmatrix}.$$

c) En este caso

$$\mathbf{D}f(x, y, z) = \begin{bmatrix} ze^x & 0 & e^x \\ 0 & -e^z & -ye^z \end{bmatrix}.$$

Gradientes

Para funciones con valores reales utilizamos una terminología especial para la derivada.

DEFINICIÓN: Gradiente Considérese el caso especial $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. En este caso $\mathbf{D}f(\mathbf{x})$ es una matriz $1 \times n$:

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}\right].$$

Podemos formar el vector correspondiente $(\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n)$, llamado ***gradiente*** de f y denotado por ∇f o grad f.

A partir de la definición vemos que, para $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathbf{k},$$

mientras que para $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j}.$$

El significado geométrico del gradiente se discutirá en la Sección 2.6. En términos del producto escalar podemos escribir la derivada de f como

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x})(\mathbf{h}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}.$$

EJEMPLO 2.28 Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xe^y$. Entonces

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (e^y, xe^y, 0).$$

EJEMPLO 2.29 Si $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está definida por $(x, y) \to e^{xy} + \operatorname{sen} xy$, entonces

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= (ye^{xy} + y\cos xy)\mathbf{i} + (xe^{xy} + x\cos xy)\mathbf{j} \\ &= (e^{xy} + \cos xy)(y\mathbf{i} + x\mathbf{j}).\end{aligned}$$

En el cálculo de una variable se demuestra que si f es diferenciable entonces f es continua. El Teorema 8 establece que este resultado es también cierto para funciones diferenciables de varias variables. Como sabemos, hay muchas funciones de una variable que son continuas pero no diferenciables, como $f(x) = |x|$. Antes de enunciar el resultado vamos a dar un ejemplo de una función de dos variables cuyas *derivadas parciales existen en un punto pero no es continua en ese punto.*

EJEMPLO 2.30 Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \text{ o si } y = 0 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Dado que f es constante en los ejes x e y, sobre los que es igual a 1,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Pero f no es continua en (0, 0), ya que no existe $\lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y)$.

Algunos teoremas básicos

El primero de estos teoremas básicos relaciona la diferenciabilidad y la continuidad.

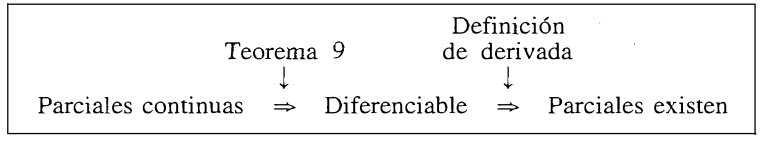
TEOREMA 8 Sea $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable en $\mathbf{x}_0 \in U$. Entonces f es continua en $\mathbf{x}_0$.

Este resultado es muy razonable, ya que «diferenciabilidad» significa que hay suficiente suavidad como para tener plano tangente, que es más fuerte que ser simplemente continua. Consúltese el Capítulo 2 del suplemento de Internet para ver una demostración formal.

Como hemos visto, usualmente es fácil decidir cuándo las derivadas parciales de una función existen utilizando lo que sabemos del cálculo de una variable. Sin embargo, la definición de diferenciabilidad parece más bien complicada y la condición de aproximación requerida en la Ecuación (4) puede parecer, y a veces lo es, difícil de verificar. Afortunadamente existe un criterio sencillo, que se da en el teorema siguiente, que nos dice cuándo una función es diferenciable.

TEOREMA 9 Sea $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Supongamos que todas las derivadas parciales $\partial f_i / \partial x_j$ de f existen y son continuas en un entorno de un punto $\mathbf{x} \in U$. Entonces f es diferenciable en $\mathbf{x}$.

Damos la demostración en el Capítulo 2 del suplemento de Internet. Obsérvese la siguiente jerarquía:



Cada uno de los enunciados recíprocos, obtenidos invirtiendo una implicación cualquiera, es falso (como contraejemplo al recíproco de la primera implicación utilícese $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(1/x)$, $f(0) = 0$; para la segunda, *véase* el Ejemplo 1 en el Capítulo 2 del suplemento de Internet o utilícese el Ejemplo 2.25 de esta sección).

Se dice que una función es de ***clase*** C^1 si sus derivadas parciales existen y son continuas; por tanto, el Teorema 9 dice que *toda función* C^1 *es diferenciable*.

EJEMPLO 2.31 Sea

$$f(x, y) = \frac{\cos x + e^{xy}}{x^2 + y^2}.$$

Demostrar que f es diferenciable en todos los puntos $(x, y) \neq (0, 0)$.

Solución

Obsérvese que las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2)(ye^{xy} - \operatorname{sen} x) - 2x(\cos x + e^{xy})}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(x^2 + y^2)xe^{xy} - 2y(\cos x + e^{xy})}{(x^2 + y^2)^2}$$

son continuas excepto cuando $x = 0$ e $y = 0$ (por los resultados de la Sección 2.2). Por tanto, f es diferenciable por el Teorema 9.

En el suplemento de Internet demostramos que $f(x, y) = xy/\sqrt{x^2 + y^2}$ (con $f(0, 0) = 0$) es continua, tiene derivadas parciales en (0, 0) y aun así *no* es diferenciable en ese punto (*véase* la Figura 2.3.4). Por el Teorema 9, sus derivadas parciales no pueden ser continuas en (0, 0).

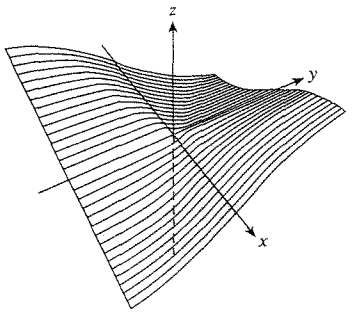


Figura 2.3.4. Esta función no es diferenciable en (0, 0) ya que está «arrugada».

EJERCICIOS

1. Hallar $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ si

a) $f(x, y) = xy$.

b) $f(x, y) = e^{xy}$.

c) $f(x, y) = x \cos x \cos y$.

d) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \log (x^2 + y^2)$.

2. Evaluar las derivadas parciales $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ de las funciones dadas en los puntos indicados.

a) $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$; $(0, 0)$, $(a/2, a/2)$.

b) $z = \log \sqrt{1 + xy}$; $(1, 2)$, $(0, 0)$.

c) $z = e^{ax} \cos (bx + y)$; $(2\pi/b, 0)$.

3. En cada uno de los casos que siguen hallar las derivadas parciales $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$.

a) $w = xe^{x^2+y^2}$.

b) $w = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$.

c) $w = e^{xy} \log (x^2 + y^2)$.

d) $w = x/y$.

e) $w = \cos (ye^{xy}) \operatorname{sen} x$.

4. Demostrar que cada una de las funciones siguientes es diferenciable en cada punto de su dominio de definición. Decidir cuáles de ellas son C^1.

a) $f(x, y) = \dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$.

b) $f(x, y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$.

c) $f(r, \theta) = \frac{1}{2} r \operatorname{sen} 2\theta$, $r > 0$.

d) $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

e) $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$.

5. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^3$ en $(3, 1, 10)$.

6. Para cada una de las funciones del Ejercicio 1 calcular respectivamente el plano tangente a su gráfica en el punto indicado.

a) $(0, 0)$. **b)** $(0, 1)$. **c)** $(0, \pi)$. **d)** $(0, 1)$.

7. Calcular la matriz de derivadas parciales de las funciones siguientes:

a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x, y)$.

b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (xe^y + \cos y, x, x + e^y)$.

c) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x + e^z + y, yx^2)$.

d) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (xye^{xy}, x \operatorname{sen} y, 5xy^2)$.

8. Hallar la matriz de derivadas parciales de

a) $f(x, y) = (e^x, \operatorname{sen} xy)$.

b) $f(x, y, z) = (x - y, y + z)$.

c) $f(x, y) = (x + y, x - y, xy)$.

d) $f(x, y, z) = (x + z, y - 5z, x - y)$.

9. ¿Dónde corta el eje z al plano tangente a $z = e^{x-y}$ en $(1, 1, 1)$?

10. ¿Por qué deben llamarse «tangentes» en $(0, 0)$ las gráficas de $f(x, y) = x^2 + y^2$ y de $g(x, y) = -x^2 - y^2 + xy^3$?

11. Sea $f(x, y) = e^{xy}$. Demostrar que $x(\partial f/\partial x) = y(\partial f/\partial y)$.

12. Utilizar la aproximación lineal para aproximar una función adecuada $f(x, y)$ y a partir de ella estimar:

a) $(0{,}99e^{0{,}02})^8$.

b) $(0{,}99)^3 + (2{,}01)^3 - 6(0{,}99)(2{,}01)$.

c) $\sqrt{(4{,}01)^2 + (3{,}98)^2 + (2{,}02)^2}$.

13. Calcular el gradiente de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x, y, z) = x \exp(-x^2 - y^2 - z^2)$ (Nótese que $\exp u = e^u$.)

b) $f(x, y, z) = \dfrac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$.

c) $f(x, y, z) = z^2 e^x \cos y$.

14. Hallar el plano tangente en $(1, 0, 1)$ para cada una de las funciones del Ejercicio 13.

15. Hallar la ecuación del plano tangente a $z = x^2 + 2y^3$ en $(1, 1, 3)$.

16. Calcular $\nabla h(1, 1, 1)$ si $h(x, y, z) = (x + z)e^{x-y}$.

17. Sea $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Calcular $\nabla f(0, 0, 1)$.

18. Evaluar el gradiente de $f(x, y, z) = \log(x^2 + y^2 + z^2)$ en $(1, 0, 1)$.

19. Describir todas las funciones continuas Hölder con $\alpha > 1$ (*véase* el Ejercicio 25, Sección 2.2). [INDICACIÓN: ¿Cuál es la derivada de una función de este tipo?]

20. Supóngase que $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación lineal. ¿Cuál es la derivada de f?

2.4. Introducción a trayectorias y curvas

Introducimos en esta sección algunos de los métodos básicos de la geometría y del cálculo de trayectorias en el plano y en el espacio. Serán éstos un ingrediente importante de la regla de la cadena que se trata en la sección siguiente. Volveremos a estudiar más propiedades de las trayectorias en el Capítulo 4.

Trayectorias y curvas

A menudo imaginamos una curva como una línea trazada en un papel, como una línea recta, una circunferencia o una sinusoide. Es útil imaginar matemáticamente una curva C como el conjunto de valores de una función que lleva un intervalo de números reales en el plano o en el espacio. Llamaremos a una aplicación de este tipo una ***trayectoria***. Normalmente denotaremos una trayectoria por $\mathbf{c}$. La imagen C de un camino coincide entonces con la curva que vemos en el papel (*véase* la Figura 2.4.1). A menudo representamos por t la variable independiente y la imaginamos como el *tiempo*, de forma que $\mathbf{c}(t)$ es la posición en el instante t de una partícula en movimiento, que ***traza*** una curva al variar t. Decimos también que $\mathbf{c}$ ***parametriza*** a C. Estrictamente hablando debemos distinguir entre $\mathbf{c}(t)$ como *punto* del espacio y como vector con base en el origen.

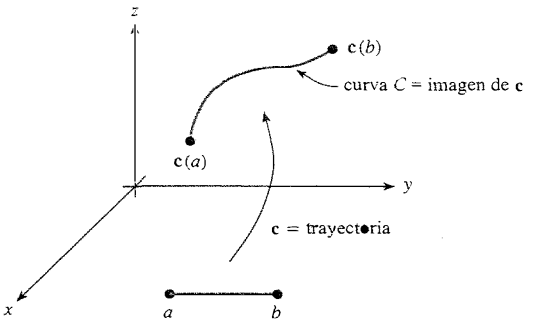


Figura 2.4.1. La aplicación $\mathbf{c}$ es la trayectoria; su imagen C es la curva que «vemos».

EJEMPLO 2.32 La recta L en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0) con la dirección del vector $\mathbf{v}$ es la imagen de la trayectoria

$$\mathbf{c}(t) = (x_0, y_0, z_0) + t\mathbf{v}$$

con $t \in \mathbb{R}$ (*véase* la Figura 2.4.2). Por tanto, nuestra noción de curva incluye las rectas como casos especiales.

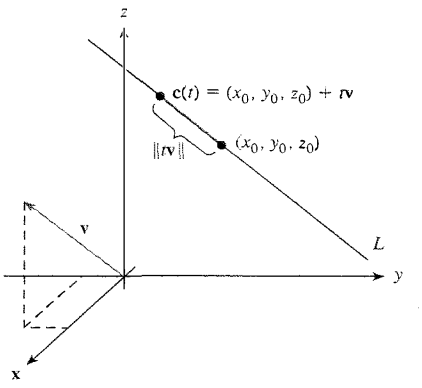


Figura 2.4.2. L es la recta del espacio que pasa por (x_0, y_0, z_0) con dirección $\mathbf{v}$; su ecuación es $\mathbf{c}(t) = (x_0, y_0, z_0) + t\mathbf{v}$.

EJEMPLO 2.33 La circunferencia unidad C: $x^2 + y^2 = 1$ en el plano es la imagen de la trayectoria

$$\mathbf{c}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \qquad \mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

(*véase* la Figura 2.4.3). La circunferencia unidad también es la imagen del camino $\tilde{\mathbf{c}}(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t)$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$. Por tanto, trayectorias diferentes pueden parametrizar la misma curva.

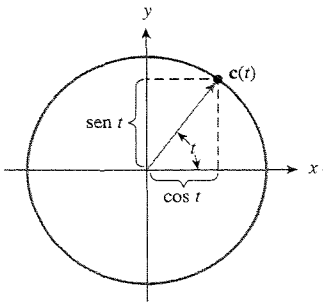


Figura 2.4.3. $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ es una trayectoria cuya imagen C es la circunferencia unidad.

Trayectorias y curvas Una ***trayectoria*** en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $\mathbf{c}$: $[a, b] \to \mathbb{R}^n$; es una ***trayectoria en el plano*** si $n = 2$ y una ***trayectoria en el espacio*** si $n = 3$. La colección C de puntos $\mathbf{c}(t)$ cuando t recorre $[a, b]$ se llama ***curva***, y $\mathbf{c}(a)$ y $\mathbf{c}(b)$ son sus ***extremos***. Se dice que el camino $\mathbf{c}$ parametriza la curva C. Decimos también que $\mathbf{c}(t)$ traza C al variar t.

Si $\mathbf{c}$ es un camino en $\mathbb{R}^3$, podemos escribir $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ y llamamos a $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ las ***funciones componentes*** de $\mathbf{c}$. Las funciones componentes en $\mathbb{R}^2$ o, en general, en $\mathbb{R}^n$ se definen de forma similar.

EJEMPLO 2.34 La trayectoria $\mathbf{c}(t) = (t, t^2)$ traza un arco de parábola. Esta curva coincide con la gráfica de $f(x) = x^2$ (*véase* la Figura 2.4.4).

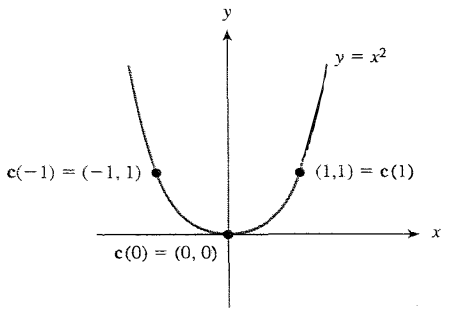


Figura 2.4.4. La imagen de $\mathbf{c}(t) = (t, t^2)$ es la parábola $y = x^2$.

EJEMPLO 2.35 Un disco de radio R rueda hacia la derecha con velocidad v sobre una recta. Utilizar métodos vectoriales para hallar la trayectoria $\mathbf{c}(t)$ de un punto del disco que inicialmente se encuentra a distancia r bajo el centro.

Solución

Colocamos el disco en el plano xy con su centro inicialmente en $(0, R)$ de forma que la posición del centro en el instante t la describe el camino $\mathbf{C}(t) = (vt, R)$ (*véase* la Figura 2.4.5).

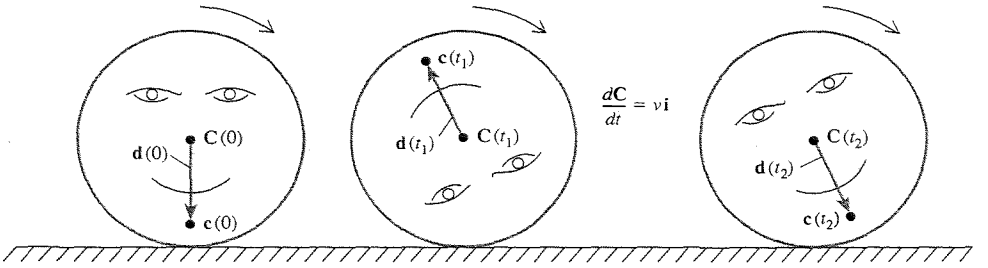


Figura 2.4.5. El vector $\mathbf{d}(t)$ apunta desde el centro de la rueda, $\mathbf{C}(t)$, a la posición $\mathbf{c}(t)$ de un punto del disco y gira en el sentido de las agujas del reloj al moverse el disco hacia la derecha.

La posición del punto $\mathbf{c}(t)$ *respecto del centro* la da el vector $\mathbf{d}(t) = \mathbf{c}(t) - \mathbf{C}(t)$, que tiene valor inicial $-r\mathbf{j}$ y rota en el sentido de las agujas del reloj. La velocidad de rotación es tal que el disco da una vuelta completa cuando el centro se ha desplazado la distancia $2\pi R$ (igual a la longitud de la circunferencia del disco). Esto lleva un tiempo de $2\pi R/v$, de forma que la velocidad angular de la rueda, $d\theta/dt$, es v/R. Dado que la rotación tiene lugar en el sentido de las agujas del reloj, la función vectorial $\mathbf{d}(t)$ es de la forma

$$\mathbf{d}(t) = r\left(\cos\left[-\frac{v}{R}t + \theta\right]\mathbf{i} + \operatorname{sen}\left[-\frac{v}{R}t + \theta\right]\mathbf{j}\right)$$

para un ángulo inicial dado θ. Dado que $\mathbf{d}(0) = -r\mathbf{j}$, tenemos que $\cos\theta = 0$ y que $\operatorname{sen}\theta = -1$, por tanto $\theta = -\pi/2$, y entonces

$$\mathbf{d}(t) = r\left(\cos\left[-\frac{v}{R}t - \frac{\pi}{2}\right]\mathbf{i} + \operatorname{sen}\left[-\frac{v}{R}t - \frac{\pi}{2}\right]\mathbf{j}\right).$$

Usando que $\cos(\varphi - \pi/2) = \operatorname{sen}\varphi$ y que $\operatorname{sen}(\varphi - \pi/2) = -\cos\varphi$, juntamente con $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ y $\operatorname{sen}(-\varphi) = -\operatorname{sen}\varphi$, obtenemos:

$$\mathbf{d}(t) = r\left(-\operatorname{sen}\frac{vt}{R}\mathbf{i} - \cos\frac{vt}{R}\mathbf{j}\right).$$

Finalmente la trayectoria $\mathbf{c}(t)$ se obtiene sumando las componentes de la función vectorial $\mathbf{d}(t)$ a las coordenadas del camino $\mathbf{C}(t)$; el resultado es:

$$\mathbf{c}(t) = \left(vt - r\,\text{sen}\,\frac{vt}{R},\ R - r\cos\frac{vt}{R} \right).$$

En el caso especial $v = R = r = 1$, obtenemos $\mathbf{c}(t) = (t - \text{sen}\,t,\ 1 - \cos t)$. La curva imagen C de este camino $\mathbf{c}$ se muestra en la Figura 2.4.6; se llama ***cicloide***.

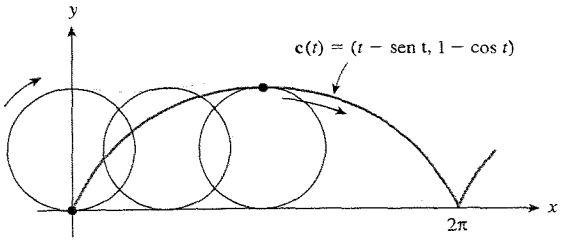


Figura 2.4.6. La curva que traza un punto del borde de una circunferencia que rueda se llama *cicloide*.

El ejemplo anterior consideraba la trayectoria que traza un punto que no está en el borde de un disco que rueda sobre una recta. Cuando el disco rueda sobre una circunferencia la curva resultante se llama ***epiciclo***. Éstos son los epiciclos de los que se habla en la teoría tolemaica, en la introducción. Si el disco está fuera de la circunferencia y el punto está sobre el borde la curva se llama epicicloide, y cuando el disco está en el interior de la circunferencia se trata de una hipocicloide. Un ejemplo de esta última se muestra en la Figura 2.4.7.

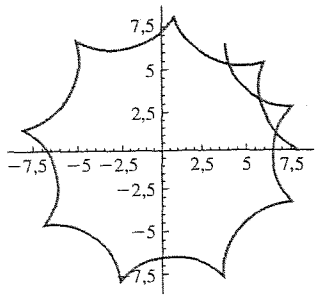


Figura 2.4.7. Ejemplo de una hipocicloide.

Nota Histórica

El matemático francés Blaise Pascal estudió la cicloide en 1649 para distraerse mientras sufría una afección dental. Al desaparecer el dolor pensó que era una señal de que a Dios no le desagradaban sus pensamientos. Los resultados de Pascal indujeron a otros matemáticos a investigar esta curva y en consecuencia hallaron numerosas propiedades destacables. Una de ellas la descubrió el holandés Christian Huygens, que la usó para construir un péndulo de reloj «perfecto».

Velocidad y tangente a una trayectoria

Si imaginamos a $\mathbf{c}(t)$ como la curva trazada por una partícula y a t como el tiempo, es razonable definir el vector velocidad como sigue.

DEFINICIÓN: Vector velocidad Si $\mathbf{c}$ es una trayectoria y es diferenciable decimos que $\mathbf{c}$ es una trayectoria ***diferenciable***. La ***velocidad*** de $\mathbf{c}$ en el instante t se define como[3]:

$$\mathbf{c}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{c}(t+h) - \mathbf{c}(t)}{h}.$$

Normalmente trazamos el vector $\mathbf{c}'(t)$ con origen en el punto $\mathbf{c}(t)$. La ***rapidez*** de la trayectoria $\mathbf{c}(t)$ es $s = \|\mathbf{c}'(t)\|$, la longitud del vector velocidad. Si $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$ está en $\mathbb{R}^2$, se tiene

$$\mathbf{c}'(t) = (x'(t), y'(t)) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}$$

y, si $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ está en $\mathbb{R}^3$, entonces

$$\mathbf{c}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}.$$

Aquí $x'(t)$ es la derivada en una variable dx/dt. Si interpretamos los límites de vectores como límites componente a componente, las fórmulas que dan el vector velocidad se obtienen de la definición de derivada. Sin embargo, el límite puede interpretarse también en el sentido vectorial. En la Figura 2.4.8 vemos que $[\mathbf{c}(t+h) - \mathbf{c}(t)]/h$ aproxima la tangente a la trayectoria cuando $h \to 0$.

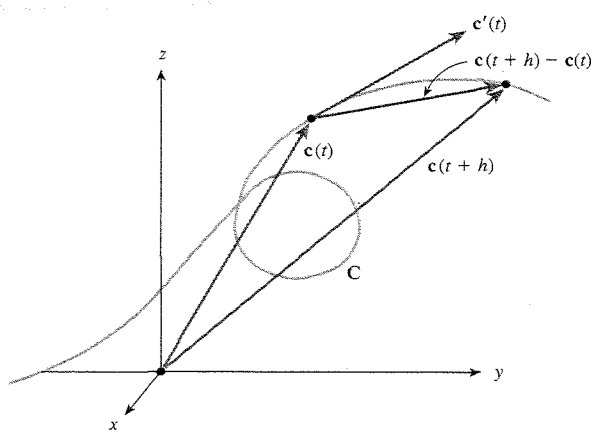


Figura 2.4.8. El vector $\mathbf{c}'(t)$ es tangente a la trayectoria $\mathbf{c}(t)$.

[3] Si t es el extremo de un intervalo, se deben tomar, como en el cálculo de una variable, límites por la derecha o por la izquierda.

Vector tangente La velocidad $\mathbf{c}'(t)$ es un vector tangente a la trayectoria $\mathbf{c}(t)$ en el instante t. Si C es una curva trazada por $\mathbf{c}$ y si $\mathbf{c}'(t)$ no es igual a $\mathbf{0}$, entonces $\mathbf{c}'(t)$ es un vector tangente a la curva C en el punto $\mathbf{c}(t)$.

Si imaginamos la derivada $\mathbf{Dc}(t)$ como una matriz, ésta será un vector columna con elementos $x'(t)$, $y'(t)$ y $z'(t)$; por tanto, esta derivada es consistente con nuestra noción anterior.

EJEMPLO 2.36 Calcular el vector tangente a la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (t, t^2, e^t)$ en el punto $t = 0$.

Solución

Resulta que $\mathbf{c}(t) = (1, 2t, e^t)$ y en $t = 0$ obtenemos el vector tangente $(1, 0, 1)$.

EJEMPLO 2.37 Describir la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$. Hallar el vector velocidad en el punto de la curva imagen cuando $t = \pi/2$.

Solución

Para un t dado, el punto $(\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$ está sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ en el plano xy. Por tanto, el punto $(\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ está t unidades sobre el punto $(\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$ si t es positivo y $-t$ unidades por debajo de $(\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$ si t es negativo. Cuando t crece $(\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ se enrolla alrededor del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con la coordenada z creciente. La curva que traza se llama ***hélice*** y aparece dibujada en la Figura 2.4.9. En $t = \pi/2$, $\mathbf{c}'(\pi/2) = (-\operatorname{sen} \pi/2, \cos \pi/2, 1) = (-1, 0, 1) = -\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

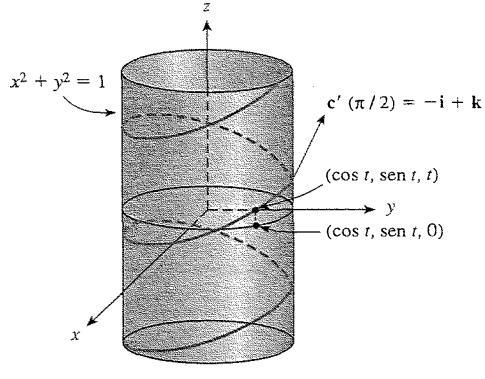


Figura 2.4.9. La hélice $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ se enrolla sobre el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

EJEMPLO 2.38 La trayectoria cicloidal de una partícula en el borde de un disco de radio R que se mueve con velocidad v está definida por $\mathbf{c}(t) = (vt - R \operatorname{sen}(vt/R), R - R\cos(vt/R))$ (*véase* el Ejemplo 2.35). Hallar la velocidad $\mathbf{c}'(t)$ de la partícula como una función de t. ¿Cuándo es la velocidad igual a cero? ¿Es el vector velocidad vertical en algún momento?

Solución

Para hallar la velocidad derivamos:

$$\mathbf{c}'(t) = \left(\frac{d}{dt}\left(vt - R\,\text{sen}\,\frac{vt}{R}\right), \frac{d}{dt}\left(R - R\cos\frac{vt}{R}\right)\right)$$

$$= \left(v - v\cos\frac{vt}{R}, v\,\text{sen}\,\frac{vt}{R}\right).$$

En notación vectorial, $\mathbf{c}'(t) = (v - v\cos(vt/R))\mathbf{i} + (v\,\text{sen}\,(vt/R))\mathbf{j}$. La componente en la dirección de $\mathbf{i}$ es $v(1 - \cos(vt/R))$, que vale cero cuando vt/R es un múltiplo entero de 2π. Para dichos valores de t, sen (vt/R) también es igual a cero, por tanto los únicos instantes en los que la velocidad es cero son $t = 2\pi nR/v$ para cualquier entero n. En estos instantes, $\mathbf{c}(t) = (2\pi nR, 0)$, de forma que el punto en movimiento está tocando el suelo. Estos instantes ocurren tras intervalos de tiempo de $2\pi R/v$ (más frecuentemente para discos pequeños así como para discos que ruedan rápidamente).

El vector velocidad nunca es vertical ya que su componente horizontal solamente se anula cuando también lo hace la vertical.

La Figura 2.4.10 muestra algunos de los vectores velocidad superpuestos sobre la trayectoria cicloidal de la Figura 2.4.6.

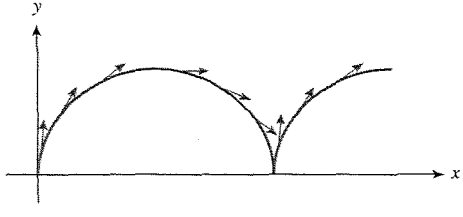


Figura 2.4.10. Vectores velocidad de la curva trazada por un punto en el borde de un disco que rueda.

Recta tangente

La recta tangente a una trayectoria en un punto es la recta que pasa por el punto con la dirección del vector tangente. Usando la forma punto-vector de la ecuación de una recta obtenemos la ecuación paramétrica de la recta tangente.

Recta tangente a una trayectoria Si $\mathbf{c}(t)$ es una trayectoria y $\mathbf{c}'(t_0) \neq \mathbf{0}$, la ecuación de su *recta tangente* en el punto $\mathbf{c}(t_0)$ es:

$$\mathbf{l}(t) = \mathbf{c}(t_0) + (t - t_0)\mathbf{c}'(t_0).$$

Si C es la curva que traza $\mathbf{c}$, entonces la recta que traza l es la recta tangente a la curva C en $\mathbf{c}(t_0)$.

Nótese que hemos escrito la ecuación de tal forma que $\boldsymbol{l}$ pasa por el punto $\mathbf{c}(t_0)$ en el instante $t = t_0$ (y no en $t = 0$) (*véase* la Figura 2.4.11).

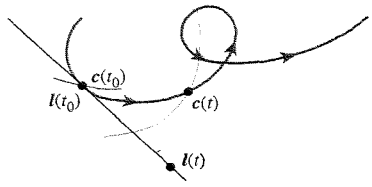


Figura 2.4.11. La recta tangente a una trayectoria.

EJEMPLO 2.39 Una trayectoria en $\mathbb{R}^3$ pasa por el punto (3, 6, 5) en el instante $t = 0$ con vector tangente $\mathbf{i} - \mathbf{j}$. Hallar la ecuación de la recta tangente.

Solución

La ecuación de la recta tangente es

$$\boldsymbol{l}(t) = (3, 6, 5) + t(\mathbf{i} - \mathbf{j}) = (3, 6, 5) + t(1, -1, 0) = (3 + t, 6 - t, 5).$$

En coordenadas $(x, y, z,)$, la recta tangente es $x = 3 + t$, $y = 6 - t$, $z = 5$.

Desde el punto de vista de la física, podemos interpretar el movimiento sobre la recta tangente como la trayectoria que seguiría una partícula sobre la curva si se la liberase en un determinado instante.

EJEMPLO 2.40 Supóngase que una partícula sigue la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (e^t, e^{-t}, \cos t)$ hasta que se sale por la tangente en el instante $t = 1$. ¿Dónde estará en el instante $t = 3$?

Solución

El vector velocidad es $(e^t, -e^{-t}, -\operatorname{sen} t)$, que en instante $t = 1$ es el vector $(e, -1/e, -\operatorname{sen} 1)$. La partícula está en $(e, 1/e, \cos 1)$ en el instante $t = 1$. La ecuación de la recta tangente es $\boldsymbol{l}(t) = (e, 1/e, \cos 1) + (t - 1)(e, 1/e, -\operatorname{sen} 1)$. En el instante $t = 3$ la posición sobre esta recta es:

$$\boldsymbol{l}(3) = \left(e, \frac{1}{e}, \cos 1\right) + 2\left(e, -\frac{1}{e}, -\operatorname{sen} 1\right) = \left(3e, -\frac{1}{e}, \cos 1 - 2\operatorname{sen} 1\right)$$

$$\cong (8{,}155, -0{,}368, -1{,}143).$$

EJERCICIOS

Dibujar las curvas que son imagen de las trayectorias de los Ejercicios 1 a 4.

1. $x = \operatorname{sen} t$, $y = 4\cos t$, donde $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

2. $x = 2\operatorname{sen} t$, $y = 4\cos t$, donde $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

3. $\mathbf{c}(t) = (2t - 1, t + 2, t)$.

4. $\mathbf{c}(t) = (-t, 2t, 1/t)$, donde $1 \leqslant t \leqslant 3$.

En los Ejercicios 5 a 8 determinar el vector velocidad de la trayectoria dada.

5. $\mathbf{c}(t) = 6t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$.

6. $\mathbf{c}(t) = (\operatorname{sen} 3t)\mathbf{i} + (\cos 3t)\mathbf{j} + 2t^{3/2}\mathbf{k}$.

7. $\mathbf{r}(t) = (\cos^2 t, 3t - t^3, t)$.

8. $\mathbf{r}(t) = (4e^t, 6t^4, \cos t)$.

En los Ejercicios 9 a 12 calcular el vector tangente a la trayectoria dada.

9. $\mathbf{c}(t) = (e^t, \cos t)$.

10. $\mathbf{c}(t) = (3t^2, t^3)$.

11. $\mathbf{c}(t) = (t\operatorname{sen} t, 4t)$.

12. $\mathbf{c}(t) = (t^2, e^2)$.

13. ¿Cuándo es *horizontal* el vector velocidad de un punto en el borde de un disco que rueda? ¿Cuál es la velocidad en ese instante?

14. Si la posición en el instante t de una partícula en el espacio es $(6t, 3t^2, t^3)$, ¿cuál es su vector velocidad en el instante $t = 0$?

En los Ejercicios 15 y 16 determinar la ecuación de la recta tangente a la trayectoria dada para el valor de t especificado.

15. $(\operatorname{sen} 3t, \cos 3t, 2t^{5/2})$; $t = 1$.

16. $(\cos^2 t, 3t - t^3, t)$; $t = 0$.

En los Ejercicios 17 a 20 suponer que una partícula que sigue la trayectoria $\mathbf{c}(t)$ *se sale por la tangente en el instante* $t = t_0$. *Calcular la posición de la partícula en el instante* t_1 *dado.*

17. $\mathbf{c}(t) = (t^2, t^3 - 4t, 0)$, donde $t_0 = 2$, $t_1 = 3$.

18. $\mathbf{c}(t) = (e^t, e^{-t}, \cos t)$, donde $t_0 = 1$, $t_1 = 2$.

19. $\mathbf{c}(t) = (4e^t, 6t^4, \cos t)$, donde $t_0 = 0$, $t_1 = 1$.

20. $\mathbf{c}(t) = (\operatorname{sen} e^t, t, 4 - t^3)$, donde $t_0 = 1$, $t_1 = 2$.

2.5. Propiedades de la derivada

En el cálculo elemental se aprende a derivar sumas, productos, cocientes y funciones compuestas. Generalizamos ahora estas ideas a las funciones de varias variables, poniendo especial atención en cómo derivar funciones compuestas. La regla para derivar las composiciones, llamada *regla de la cadena*, adquiere, para las funciones de varias variables, una forma más profunda que para las funciones de una variable.

Si f es una función con valores reales de una variable, escrita como $z = f(y)$, e y es una función de x, escrita como $y = f(x)$, entonces z será una función de x por sustitución, es decir, $z = f(g(x))$, y tendremos la familiar regla de la cadena:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = f'(g(x))g'(x).$$

Si f es una función con valores reales de las tres variables u, v, y w, escrita en la forma $f(u, v, w)$, y las variables u, v, w son a su vez funciones de x, $u = g(x)$, $v = h(x)$, $w = k(x)$, entonces sustituyendo $g(x)$, $h(x)$ y $k(x)$ por u, v y w obtenemos z como función de x: $z = f(g(x), h(x), k(x))$. La regla de la cadena en este caso se traduce en:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dx}.$$

Uno de los propósitos de esta sección es explicar este tipo de fórmulas en detalle.

Sumas, productos, cocientes

Estas reglas funcionan de igual forma que en el cálculo de una variable.

TEOREMA 10: Sumas, productos, cocientes

i) **Regla de la multiplicación por una constante.** Sea $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y sea c un número real. Entonces $h(\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x})$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y

$$\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = c\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) \qquad \text{(igualdad de matrices)}.$$

ii) **Regla de la suma.** Sean $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciables en $\mathbf{x}_0$. Entonces $h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y

$$\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{D}g(\mathbf{x}_0) \qquad \text{(suma de matrices)}.$$

iii) **Regla del producto.** Sean $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciables en $\mathbf{x}_0$ y sea $h(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})f(\mathbf{x})$. Entonces $h\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y

$$\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = g(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0).$$

(nótese que cada miembro de esta ecuación es una matriz $1 \times n$; en el Ejercicio 29 del final de esta sección se presenta una regla del producto más general).

iv) Regla del cociente. Con las mismas hipótesis que en la regla iii), sea $h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x})$ y supóngase que g nunca se anula en U. Entonces h es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y

$$\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = \frac{g(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)}{[g(\mathbf{x}_0)]^2}$$

DEMOSTRACIÓN Las demostraciones de las reglas i) a iv) siguen casi exactamente las mismas líneas que en el caso de una variable pero con una notación ligeramente diferente. Demostraremos las reglas i) y ii), y dejaremos las demostraciones de las reglas iii) y iv) como Ejercicio 25 de esta sección.

i) Para demostrar que $\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0) = c\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ tenemos que demostrar que

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\|h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}_0) - c\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0,$$

es decir, que

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\|cf(\mathbf{x}) - cf(\mathbf{x}_0) - c\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0,$$

(*véase* la Ecuación (4) de la Sección 2.3). Esto es obviamente cierto ya que f es diferenciable y la constante c puede sacarse como factor común (*véase* el Teorema 3.i) de la Sección 2.2).

ii) La desigualdad triangular nos permite escribir

$$\frac{\|h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}_0) - [\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)](\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}$$

$$= \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - [\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)](\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) - [\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)](\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}$$

$$\leq \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - [\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)](\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} + \frac{\|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) - [\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)](\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|},$$

expresión en la que cada término tiende a 0 cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$, de lo que se sigue la regla ii).

EJEMPLO 2.41 Verificar la fórmula para $\mathbf{D}h$ en la regla iv) del Teorema 10 para

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \qquad \text{y} \qquad g(x, y, z) = x^2 + 1.$$

Solución

En este caso

$$h(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + 1},$$

de forma que derivando directamente:

$$\mathbf{D}h(x, y, z) = \left[\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z}\right] = \left[\frac{(x^2 + 1)2x - (x^2 + y^2 + z^2)2x}{(x^2 + 1)^2}, \frac{2y}{x^2 + 1}, \frac{2z}{x^2 + 1}\right]$$

$$= \left[\frac{2x(1 - y^2 - z^2)}{(x^2 + 1)^2}, \frac{2y}{x^2 + 1}, \frac{2z}{x^2 + 1}\right].$$

Por la regla iv) obtenemos

$$\mathbf{D}h = \frac{g\mathbf{D}f - f\mathbf{D}g}{g^2} = \frac{(x^2 + 1)[2x, 2y, 2z] - (x^2 + y^2 + z^2)[2x, 0, 0]}{(x^2 + 1)^2},$$

que es igual a lo obtenido directamente.

La regla de la cadena

Como hemos mencionado anteriormente, es en la derivación de funciones compuestas donde nos encontramos con variaciones sustanciales de la fórmula del cálculo de una variable. Sin embargo, si utilizamos la notación **D**, es decir, la notación matricial para las derivadas, la regla de la cadena para funciones de varias variables parece similar a la de la regla para una variable.

TEOREMA 11: Regla de la cadena Sean $U_Z \subset_Z \mathbb{R}^n$ y $V_Z \subset_Z \mathbb{R}^m$ conjuntos abiertos. Sean g: $U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y f: $V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ funciones tales que g lleva U en V de forma que $f \circ g$ está definida. Supóngase que g es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y que f es diferenciable en $\mathbf{y}_0 = g(\mathbf{x}_0)$. Entonces $f \circ g$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y

$$\mathbf{D}(f \circ g)(\mathbf{x}_0) = \mathbf{D}f(\mathbf{y}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0). \tag{1}$$

El miembro de la derecha es la matriz producto de $\mathbf{D}f(\mathbf{y}_0)$ y $\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)$.

Daremos ahora una demostración de la regla de la cadena *bajo la hipótesis adicional de que las derivadas parciales de f son continuas*. Demostramos el caso general a través de dos casos particulares que son importantes por sí mismos (la demostración completa del Teorema 11 sin la hipótesis adicional de la continuidad se da en el suplemento de Internet, Capítulo 2).

Primer caso especial de la regla de la cadena

Supóngase que $\mathbf{c}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ es una trayectoria diferenciable y que f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Sea $h(t) = f(\mathbf{c}(t)) = f(x(t), y(t), z(t))$, donde $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Entonces

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}. \tag{2}$$

Es decir:

$$\frac{dh}{dt} = \nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t),$$

donde $\mathbf{c}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.

Éste es el caso especial del Teorema 11 en el que tomamos $\mathbf{c} = g$, y f una función con valores reales, y $m = 3$. Nótese que

$$\nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) = \mathbf{D}f(\mathbf{c}(t))\mathbf{D}\mathbf{c}(t),$$

donde el producto en el miembro izquierdo es el producto escalar de vectores mientras que el producto en el miembro derecho es una multiplicación de matrices en la que hemos tomado $\mathbf{D}f(\mathbf{c}(t))$ como matriz *fila* y $\mathbf{D}\mathbf{c}(t)$ como matriz *columna*. Los vectores $\nabla f(\mathbf{c}(t))$ y $\mathbf{c}'(t)$ tienen las mismas coordenadas que sus equivalentes matriciales; el cambio en la notación indica el cambio de matrices a vectores.

DEMOSTRACIÓN DE LA ECUACIÓN (2) Por definición,

$$\frac{dh}{dt}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0}.$$

Sumando y restando dos términos escribimos

$$\frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} = \frac{f(x(t),\ y(t),\ z(t)) - f(x(t_0),\ y(t_0),\ z(t_0))}{t - t_0}$$

$$= \frac{f(x(t),\ y(t),\ z(t)) - f(x(t_0),\ y(t),\ z(t))}{t - t_0}$$

$$+ \frac{f(x(t_0),\ y(t),\ z(t)) - f(x(t_0),\ y(t_0),\ z(t))}{t - t_0}$$

$$+ \frac{f(x(t_0),\ y(t_0),\ z(t)) - f(x(t_0),\ y(t_0),\ z(t_0))}{t - t_0}.$$

Ahora utilizamos el *teorema del valor medio* del cálculo de una variable, que dice: *si* g: $[a, b] \to \mathbb{R}$ *es continua y diferenciable en el intervalo abierto* (a, b), *entonces existe un punto* c *en* (a, b) *tal que* $g(b) - g(a) = g'(c)(b - a)$. Aplicando lo anterior a f como función de x, podemos afirmar que, para algún c entre x y x_0,

$$f(x, y, z) - f(x_0, y, z) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(c, y, z)\right](x - x_0).$$

De la misma manera, hallamos que

$$\frac{h(t)-h(t_0)}{t-t_0}=\left[\frac{\partial f}{\partial x}(c,\,y(t),\,z(t))\right]\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}+\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0),\,d,\,z(t))\right]\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}$$
$$+\left[\frac{\partial f}{\partial z}(x(t_0),\,y(t_0),\,e)\right]\frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0},$$

donde c, d y e están entre $x(t)$ y $x(t_0)$, entre $y(t)$ e $y(t_0)$, y entre $z(t)$ y $z(t_0)$ respectivamente. Tomando el límite cuando $t\to t_0$, usando la continuidad de las derivadas parciales $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$ y el hecho de que c, d y e convergen a $x(t_0)$, $y(t_0)$ y $z(t_0)$ respectivamente, obtenemos la Fórmula (2).

Segundo caso especial de la regla de la cadena

Sea $f\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ y sea $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$. *Escribimos*

$$g(x,\,y,\,z)=(u(x,\,y,\,z),\,v(x,\,y,\,z),\,w(x,\,y,\,z))$$

y definimos $h\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ por medio de

$$h(x,\,y,\,z)=f(u(x,\,y,\,z),\,v(x,\,y,\,z),\,w(x,\,y,\,z)).$$

En este caso la regla de la cadena dice que

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial h}{\partial x} & \dfrac{\partial h}{\partial y} & \dfrac{\partial h}{\partial z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} & \dfrac{\partial f}{\partial w}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z}\\[2mm] \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z}\end{bmatrix}. \tag{3}$$

En este caso especial hemos tomado, para concretar, $n=m=3$ y $p=1$ y, por simplicidad, $U=\mathbb{R}^3$ y $V=\mathbb{R}^3$, y hemos escrito explícitamente el producto de matrices $[\mathbf{D}f(\mathbf{y}_0)][\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)]$ (en donde no se han escrito los puntos $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{y}_0$ en las matrices).

DEMOSTRACIÓN DEL SEGUNDO CASO ESPECIAL DE LA REGLA DE LA CADENA Por definición, $\partial h/\partial x$ se obtiene derivando h respecto de x, dejando y y z fijas. Pero entonces $(u(x,\,y,\,z),\,v(x,\,y,\,z),\,z(x,\,y,\,z))$ puede considerarse como un vector función de una sola variable x. El primer caso especial se ajusta a esta situación y, tras renombrar las variables, produce

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}. \tag{3'}$$

De forma análoga,

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} \tag{3''}$$

y,

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}. \tag{3'''}$$

Estas ecuaciones son exactamente lo que se obtendría al multiplicar las matrices de la Ecuación (3).

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 11 El caso general de la Ecuación (1) puede demostrarse en dos pasos. Primero, la Ecuación (2) se generaliza a m variables; es decir, para $f(x_1, ..., x_m)$ y $\mathbf{c}(t) = (x_1, ..., x_m)$ se tiene

$$\frac{dh}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt},$$

donde $h(t) = f(x_1(t), ..., x_m(t))$. En segundo lugar, el resultado obtenido en el primer paso se usa para obtener la fórmula

$$\frac{\partial h_j}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial y_k}\frac{\partial y_k}{\partial x_i},$$

donde $f = (f_1, ..., f_p)$ es una función vectorial de las variables $y_1, ..., y_m$; $g(x_1, ..., x_n) = (y_1(x_1, ..., x_n), ..., y_m(x_1, ..., x_n))$; y $h_j(x_1, ..., x_n) = f_j(y_1(x_1, ..., x_n), ..., y_m(x_1, ..., x_n))$ (utilizar la letra y tanto para la función como para las variables es un abuso de notación, pero es útil para recordar la fórmula). Esta fórmula es equivalente a la Fórmula (1) una vez que en ésta se han multiplicado las matrices.

La forma de la regla de la cadena se verá mejor una vez que el estudiante haya resuelto unos cuantos ejemplos más. Por ejemplo:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(u(x, y), v(x, y), w(x, y), z(x, y)) = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x},$$

con una fórmula análoga para $\partial f/\partial y$.

La regla de la cadena nos puede ayudar a entender la relación entre la geometría de la aplicación $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y la geometría de curvas de $\mathbb{R}^2$ (se puede hacer afirmaciones análogas acerca de $\mathbb{R}^3$ o, en general, de $\mathbb{R}^n$). Si $\mathbf{c}(t)$ es una trayectora en el plano entonces, como vimos en la Sección 2.4, $\mathbf{c}'(t)$ representa el vector tangente (o vector velocidad) a la trayectoria $\mathbf{c}(t)$. Sea

ahora $\mathbf{p}(t) = f(\mathbf{c}(t))$, donde $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. *La trayectoria* $\mathbf{p}$ representa la imagen mediante la aplicación f de la trayectoria $\mathbf{c}(t)$. La regla de la cadena da el vector tangente a $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{p}'(t) = \underbrace{\mathbf{D}f(\mathbf{c}(t))}_{\text{matriz}} \underbrace{\mathbf{c}'(t)}_{\text{vector columna}}$$

multiplicación de matrices

En otras palabras, *la matriz derivada de f aplica el vector tangente (o vector velocidad) de una trayectoria* $\mathbf{c}$ *sobre el vector tangente (o vector velocidad) de la correspondiente trayectoria imagen* $\mathbf{p}$ (*véase* la Figura 2.5.1). Por tanto, la función f es una aplicación entre puntos, mientras que la derivada de f es una aplicación entre vectores tangentes a curvas, evaluada en cada punto del dominio de definición sobre el vector tangente en ese punto.

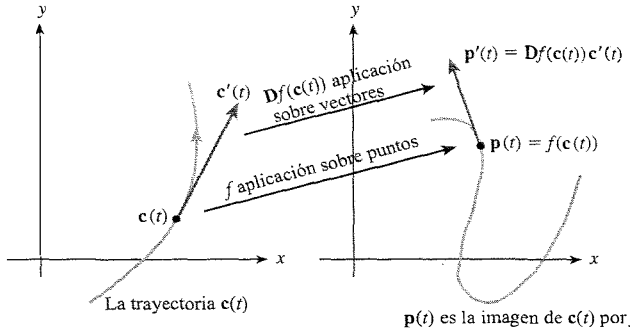


Figura 2.5.1. La matriz derivada produce una aplicación sobre vectores tangente.

EJEMPLO 2.42 Verificar la regla de la cadena en la forma dada por la Fórmula (3′) para

$$f(u, v, w) = u^2 + v^2 - w$$

donde

$$u(x, y, z) = x^2y, \qquad v(x, y, z) = y^2, \qquad w(x, y, z) = e^{-xz}.$$

Solución

Ahora

$$\begin{aligned} h(x, y, z) &= f(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)) \\ &= (x^2y)^2 + y^4 - e^{-xz} = x^4y^2 + y^4 - e^{-xz}. \end{aligned}$$

Por tanto, derivando directamente,

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 4x^3y^2 + ze^{-xz}.$$

Por otro lado, usando la regla de la cadena,

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} = 2u(2xy) + 2v \cdot 0 + (-1)(-ze^{-xz})$$
$$= (2x^2y)(2xy) + ze^{-xz},$$

que coincide con la ecuación precedente.

EJEMPLO 2.43 Dadas $g(x, y) = (x^2 + 1, y^2)$ y $f(u, v) = (u + v, u, v^2)$, calcular la derivada de $f \circ g$ en el punto $(x, y) = (1, 1)$ usando la regla de la cadena.

Solución

Las matrices de derivadas parciales son:

$$\mathbf{D}f(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2v \end{bmatrix} \quad y \quad \mathbf{D}g(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{bmatrix}.$$

Nótese que, cuando $(x, y) = (1, 1)$, $g(x, y) = (u, v) = (2, 1)$. Por tanto

$$\mathbf{D}(f \circ g)(1, 1) = \mathbf{D}f(2, 1)\mathbf{D}g(1, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

es la derivada pedida.

EJEMPLO 2.44 Dados $f(x, y)$ y el cambio de variables $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ (coordenadas polares), dar una fórmula para $\partial f/\partial\theta$.

Solución

Por la regla de la cadena

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

es decir

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -r\,\text{sen}\,\theta\,\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}.$$

EJEMPLO 2.45 Sean $f(x, y) = (\cos y + x^2, e^{x+y})$ y $g(u, v) = (e^{u^2}, u - \operatorname{sen} v)$.

a) Dar una fórmula para $f \circ g$.

b) Calcular $\mathbf{D}(f \circ g)(0, 0)$ por medio de la regla de la cadena.

Solución

a) Tenemos

$$\begin{aligned}(f \circ g)(u, v) &= f(e^{u^2}, u - \operatorname{sen} v)\\ &= (\cos(u - \operatorname{sen} v) + e^{2u^2}, e^{e^{u^2} + u - \operatorname{sen} v}).\end{aligned}$$

b) Por la regla de la cadena,

$$\mathbf{D}(f \circ g)(0, 0) = [\mathbf{D}f(g(0, 0))][\mathbf{D}g(0, 0)] = [\mathbf{D}f(1, 0)][\mathbf{D}g(0, 0)].$$

Ahora bien,

$$\mathbf{D}g(0, 0) = \begin{bmatrix} 2ue^{u^2} & 0 \\ 1 & -\cos v \end{bmatrix}_{(u, v) = (0, 0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{D}f(1, 0) = \begin{bmatrix} 2x & -\operatorname{sen} y \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{bmatrix}_{(x, y) = (1, 0)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ e & e \end{bmatrix}.$$

Recuérdese que $\mathbf{D}f$ se evalúa en $g(0, 0)$, ¡no en $(0, 0)$!). Por tanto,

$$\mathbf{D}(f \circ g)(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ e & e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e & -e \end{bmatrix}.$$

EJEMPLO 2.46 Sea $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable, con $f = (f_1, \ldots, f_m)$, y sea $g(\mathbf{x}) = \operatorname{sen}[f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x})]$. Calcular $\mathbf{D}g(\mathbf{x})$.

Solución

Por la regla de la cadena, $\mathbf{D}g(\mathbf{x}) = \cos[f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x})]\mathbf{D}h(\mathbf{x})$, donde $h(\mathbf{x}) = [f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x})] = f_1^2(\mathbf{x}) + \cdots + f_m^2(\mathbf{x})$. Entonces:

$$\mathbf{D}h(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial h}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2f_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \cdots + 2f_m \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & 2f_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} + \cdots + 2f_m \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix},$$

que puede escribirse $2f(\mathbf{x})\mathbf{D}f(\mathbf{x})$, donde consideramos que f es una matriz fila:

$$f[f_1 \quad \cdots \quad f_m] \qquad \text{y} \qquad \mathbf{D}f = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Por tanto, $\mathbf{D}g(\mathbf{x}) = 2[\cos(f(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x}))]f(\mathbf{x})\mathbf{D}f(\mathbf{x})$.

EJERCICIOS

1. Si $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable, demostrar que $\mathbf{x} \mapsto f^2(\mathbf{x}) + 2f(\mathbf{x})$ también es diferenciable y calcular su derivada en función de $\mathbf{D}f(\mathbf{x})$.

2. Demostrar que las siguientes funciones son diferenciables y hallar sus derivadas en un punto cualquiera:

   a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to 2$.

   b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x + y$.

   c) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to 2 + x + y$.

   d) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x^2 + y^2$.

   e) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to e^{xy}$.

   f) $f: U \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, donde $U = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

   g) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x^4 - y^4$.

3. Dar la regla de la cadena para cada una de las funciones siguientes y justificar en cada caso la respuesta por medio del Teorema 11.

   a) $\partial h/\partial x$, donde $h(x, y) = f(x, u(x, y))$.

   b) dh/dx, donde $h(x) = f(x, u(x), v(x))$.

   c) $\partial h/\partial x$, donde $h(x, y, z) = f(u(x, y, z), v(x, y), w(x))$.

4. Verificar la regla de la cadena para $\partial h/\partial x$, donde $h(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$ y

$$f(u, v) = \frac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2}, \qquad u(x, y) = e^{-x-y}, \qquad v(x, y) = e^{xy}.$$

5. Verificar el primer caso especial de la regla de la cadena para la composición $f \circ \mathbf{c}$ en cada uno de los casos siguientes:

   a) $f(x, y) = xy$, $\mathbf{c}(t) = (e^t, \cos t)$.

   b) $f(x, y) = e^{xy}$, $\mathbf{c}(t) = (3t^2, t^3)$.

c) $f(x, y) = (x^2 + y^2)\log\sqrt{x^2 + y^2}$, $\mathbf{c}(t) = (e^t, e^{-t})$.

d) $f(x, y) = x\exp(x^2 + y^2)$, $\mathbf{c}(t) = (t, -t)$.

6. ¿Cuál es el vector velocidad para cada uno de los caminos $\mathbf{c}(t)$ del Ejercicio 5?

7. Sean $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciables. Demostrar que

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f.$$

8. Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciable. Tras hacer el cambio de variables:

$$x = \rho\cos\theta\,\text{sen}\,\phi, \qquad y = \rho\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi, \qquad z = \rho\cos\phi$$

(coordenadas esféricas) en $f(x, y, z)$, calcular $\partial f/\partial\rho$, $\partial f/\partial\theta$, y $\partial f/\partial\phi$ en función de $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, y $\partial f/\partial z$.

9. Sean $f(u, v) = (\tan(u - 1) - e^v, u^2 - v^2)$ y $g(x, y) = (e^{x-y}, x - y)$. Calcular $f \circ g$ y $\mathbf{D}(f \circ g)(1, 1)$.

10. Sean $f(u, v, w) = (e^{u-w}, \cos(v + u) + \text{sen}(u + v + w))$ y $g(x, y) = (e^x, \cos(y - x), e^{-y})$. Calcular $f \circ g$ y $\mathbf{D}(f \circ g)(0, 0)$.

11. Hallar $(\partial/\partial s)(f \circ T)(1, 0)$, donde $f(u, v) = \cos u\,\text{sen}\,v$ y $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se define como $T(s, t) = (\cos(t^2 s), \log\sqrt{1 + s^2})$.

12. Supóngase que la temperatura en el punto (x, y, z) del espacio es $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Una partícula sigue la hélice circular $\sigma(t) = (\cos t, \text{sen}\,t, t)$ y sea $T(t)$ su temperatura en el instante t.

a) Calcular $T'(t)$.

b) Hallar el valor aproximado de la temperatura en el instante $t = (\pi/2) + 0{,}01$.

13. Supongamos que un pato nada sobre la circunferencia $x = \cos t$, $y = \text{sen}\,t$, y que la temperatura del agua la da la fórmula $T = x^2e^y - xy^3$. Hallar dT/dt, el cambio de la temperatura por unidad de tiempo que el pato notaría:

a) Por medio de la regla de la cadena.

b) Expresando T en función de t y derivando.

14. Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una aplicación lineal de forma que (por el Ejercicio 20 de la Sección 2.3) $\mathbf{D}f(\mathbf{x})$ es la matriz de f. Comprobar directamente la validez de la regla de la cadena para aplicaciones lineales.

15. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $(x, y) \to (e^{x+y}, e^{x-y})$. Sea $\mathbf{c}(t)$ una trayectoria con $\mathbf{c}(0) = (0, 0)$ y $\mathbf{c}'(0) = (1, 1)$. ¿Cuál es el vector tangente a la imagen por f de $\mathbf{c}(t)$ en $t = 0$?

16. Sea $f(x, y) = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$. Hallar $\nabla f(x, y)$.

17. **a)** Sea $y(x)$ la función definida implícitamente por $G(x, y(x)) = 0$, donde G es una función dada de dos variables. Demostrar que si $y(x)$ y G son diferenciables, entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial G/\partial x}{\partial G/\partial y} \qquad \text{si} \qquad \frac{\partial G}{\partial y} \neq 0.$$

b) Obtener una fórmula análoga a la de la parte (a) si y_1, y_2 se definen implícitamente por

$$G_1(x, y_1(x), y_2(x)) = 0,$$
$$G_2(x, y_1(x), y_2(x)) = 0.$$

c) Sea y la función definida implícitamente por

$$x^2 + y^2 + e^y = 0.$$

Calcular dy/dx en función de x e y.

18. Los textos de termodinámica[4] usan la relación

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right) = -1.$$

Explicar el significado de esta ecuación y demostrar que es cierta. [INDICACIÓN: Comenzar con una relación $F(x, y, z) = 0$ que define $x = f(y, z)$, $y = g(x, z)$ y $z = h(x, y)$, y derivar implícitamente.]

19. La ecuación de estado de Dieterici para un gas es:

$$P(V - b)e^{a/RVT} = RT,$$

donde a, b y R son constantes. Considerar el volumen V como función de la temperatura T y de la presión P, y demostrar que:

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \left(R + \frac{a}{TV}\right) \Big/ \left(\frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}\right).$$

20. Este ejercicio da otro ejemplo del hecho de que la regla de la cadena no se puede aplicar si f no es diferenciable. Considérese la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Demostrar que:

a) $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ existen en $(0, 0)$.

b) Si $\mathbf{g}(t) = (at, bt)$ para constantes a, b, entonces $f \circ \mathbf{g}$ es diferenciable y $(f \circ \mathbf{g})'(0) = ab^2/(a^2 + b^2)$, pero $\nabla f(0, 0) \cdot \mathbf{g}'(0) = 0$.

21. Demostrar que si $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0 \in U$, entonces existe un entorno V de $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ y una función $R_1\colon V \to \mathbb{R}$ tal que para todo $\mathbf{h} \in V$ tenemos $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in U$,

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + [\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)]\mathbf{h} + R_1(\mathbf{h})$$

y

$$\frac{R_1(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad \mathbf{h} \to \mathbf{0}.$$

22. Supóngase que $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y que $0 \leqslant r_1 < r_2$. Demostrar que existe una función $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $f(\mathbf{x}) = 0$ si $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \geqslant r_2$; $0 < f(\mathbf{x}) < 1$ si $r_1 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r_2$; y $f(\mathbf{x}) = 1$ si $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leqslant r_1$. [INDICACIÓN: Aplicar un polinomio cúbico que verifique $g(r_1^2) = 1$ y $g(r_2^2) = g'(r_2^2) = g'(r_1^2) = 0$ a $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2$ cuando $r_1 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r_2$.]

---

[4] *Véase* S. M. Binder, «Mathematical Methods in Elementary Thermodynamics», *J. Chem. Educ.* 43 (1966): 85-92. Un conocimiento adecuado de la derivación parcial puede ser muy útil en las aplicaciones; por ejemplo, *véase* M. Feinberg, «Constitutive Equation for Ideal Gas Mixtures and Ideal Solutions as Consequences of Simple Postulates», *Chem. Eng. Sci.* 32 (1977): 75-85.

23. Hallar una aplicación $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 que transforme el vector $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ con origen en (0, 0, 0) en el vector $\mathbf{i} - \mathbf{j}$ con origen en (1, 1, 0), y que transforme $\mathbf{k}$ con origen en (1, 1, 0) en $\mathbf{k} - \mathbf{i}$ con origen en (0, 0, 0).

24. ¿Qué es incorrecto en el razonamiento siguiente? Supóngase $w = f(x, y, z)$ y $z = g(x, y)$. Por la regla de la cadena

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Por tanto, $0 = (\partial w/\partial z)(\partial z/\partial x)$, y entonces $\partial w/\partial z = 0$ o $\partial z/\partial x = 0$, lo que en general es absurdo.

25. Demostrar las reglas iii) y iv) del Teorema 10. [INDICACIÓN: Utilizar los mismos trucos de sumar y restar que en el caso de una variable y del Teorema 8.]

26. Demostrar que $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable si y solamente si cada una de sus m componentes $h_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable. [INDICACIÓN: Utilizar la función proyección sobre cada coordenada y la regla de la cadena para obtener una de las implicaciones y tener en cuenta que

$$\left[\frac{\|h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}h(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}\right]^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} [h_i(\mathbf{x}) - h_i(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}h_i(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)]^2}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2}$$

para obtener la otra.]

27. Utilizar la regla de la cadena y derivación bajo el signo integral, es decir,

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x, y)\,dy = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,dy,$$

para demostrar que

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(x, y)\,dy = f(x, x) + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,dy.$$

28. ¿Para qué enteros $p > 0$ es

$$f(x) = \begin{cases} x^p \operatorname{sen}(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

diferenciable? ¿Para qué valor o valores de p es la derivada continua?

29. Supóngase que $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\mathbf{g}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ son diferenciables. Demostrar que la función producto $h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ es diferenciable, y que si $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{y}$ están en $\mathbb{R}^n$, entonces $[\mathbf{D}h(\mathbf{x}_0)]\mathbf{y} = f(\mathbf{x}_0)\{[\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)]\mathbf{y}\} + \{[\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)]\mathbf{y}\}g(\mathbf{x}_0)$.

2.6. Gradientes y derivadas direccionales

En la Sección 2.1 estudiamos las gráficas de las funciones con valores reales. Ahora retomamos este estudio usando los métodos del cálculo. Concretamente, se usarán gradientes para obtener una fórmula del plano tangente a una superficie de nivel.

Gradientes en $\mathbb{R}^3$

Recordemos la definición.

DEFINICIÓN: El gradiente Si $f: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es diferenciable, el gradiente de f en (x, y, z) es el vector del espacio dado por

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Este vector también se denota por $\nabla f(x, y, z)$. Por tanto, ∇f es exactamente la matriz de la derivada $\mathbf{D}f$ escrita como vector.

EJEMPLO 2.47 Sea $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$ la distancia desde $\mathbf{0}$ a (x, y, z). Entonces

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = \frac{\mathbf{r}}{r},$$

donde $\mathbf{r}$ es el punto (x, y, z). Por tanto, ∇f es un vector unitario en la dirección de (x, y, z).

EJEMPLO 2.48 Si $f(x, y, z) = xy + z$, entonces

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (y, x, 1).$$

Supóngase que $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función con valores reales. Sean $\mathbf{v}$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ vectores fijos, y considérese la función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definida por $t \to f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})$. El conjunto de puntos de la forma $\mathbf{x} + t\mathbf{v}$, $t \in \mathbb{R}$, es la recta L que pasa por el punto $\mathbf{x}$ y es paralela al vector $\mathbf{v}$ (*véase* la Figura 2.6.1).

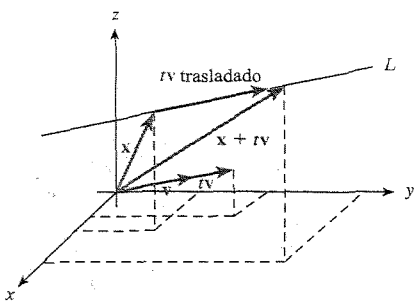


Figura 2.6.1. La ecuación de L es $\mathbf{l}(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{v}$.

Derivadas direccionales

La función $t \to f(x + t\mathbf{v})$ representa la función f restringida a la recta L. Por ejemplo, si un pájaro vuela siguiendo esta recta con velocidad $\mathbf{v}$, de forma que $\mathbf{x} + t\mathbf{v}$ es su posición en el instante t, y si f representa la temperatura como función de la posición, entonces $f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})$ es la temperatura en el instante t. Podemos preguntarnos: ¿con qué velocidad cambian los valores de f sobre la recta L en el punto $\mathbf{x}$? Dado que la variación de una función la da una derivada, podemos decir que la respuesta a esta pregunta es el valor de la derivada de esta función de t en $t = 0$ (cuando $t = 0$, $\mathbf{x} + t\mathbf{v}$ se reduce a $\mathbf{x}$). Ésta sería la derivada de f en el punto $\mathbf{x}$ en la dirección de L, es decir, de $\mathbf{v}$. Podemos formalizar este concepto como sigue.

DEFINICIÓN: Derivadas direccionales Si $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, la ***derivada direccional*** de f en $\mathbf{x}$ según el vector $\mathbf{v}$ es

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})\Big|_{t=0}$$

si ésta existe.

En la definición de derivada direccional normalmente elegimos como $\mathbf{v}$ un vector *unitario*. En este caso nos movemos en la dirección $\mathbf{v}$ con rapidez uno y nos referimos a $d/dt\, f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})|_{t=0}$ como la ***derivada direccional de f en la dirección*** $\mathbf{v}$.

Ahora razonamos sobre por qué se elige un *vector unitario* en la definición de derivada direccional. Supongamos que f mide la temperatura en grados y que nos interesa la velocidad con la que cambia la temperatura cuando nos movemos en una determinada dirección. Si medimos la distancia en metros entonces la variación de la temperatura se medirá en grados por metro. Supongamos, por simplicidad, que la temperatura cambia a un ritmo constante —digamos dos grados por metro— cuando nos movemos en una dirección dada $\mathbf{v}$ comenzando en $\mathbf{x}$. Por tanto, cuando nos adelantemos un metro, la temperatura cambiará dos grados. Es decir:

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{v}) - f(\mathbf{x}) = 2.$$

Una relación de este tipo solamente se verificará cuando $\mathbf{v}$ sea un vector unitario reflejando el hecho de que nos adelantamos *un* metro. Con más generalidad, la definición de derivada direccional sólo medirá verdaderamente la variación de f respecto de la distancia a lo largo de una recta en una dirección dada si $\mathbf{v}$ es un vector unitario.

A partir de la definición podemos ver que la derivada direccional también puede definirse por medio de la fórmula

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{h}.$$

TEOREMA 12 Si $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es diferenciable entonces todas las derivadas direccionales existen. La derivada direccional en $\mathbf{x}$ en la dirección $\mathbf{v}$ es igual a:

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x})\mathbf{v} = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x})\right] v_1 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x})\right] v_2 + \left[\frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x})\right] v_3,$$

donde $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

DEMOSTRACIÓN Sea $\mathbf{c}(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{v}$, de forma que $f(\mathbf{x} + t\mathbf{v}) = f(\mathbf{c}(t))$. Por el primer caso especial de la regla de la cadena, $(d/dt)f(\mathbf{c}(t)) = \nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)$. Sin embargo, $\mathbf{c}(0) = \mathbf{x}$ y $\mathbf{c}'(0) = \mathbf{v}$, y por tanto

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})\bigg|_{t=0} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v},$$

como se pedía demostrar.

Nótese que no es necesario utilizar rectas al calcular la variación de f en una dirección determinada $\mathbf{v}$. De hecho, para una trayectoria $\mathbf{c}(t)$ general, con $\mathbf{c}(0) = \mathbf{x}$ y $\mathbf{c}'(0) = \mathbf{v}$, por la regla de la cadena tenemos:

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{c}(t))\bigg|_{t=0} = \nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)\bigg|_{t=0} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}.$$

EJEMPLO 2.49 Sea $f(x, y, z) = x^2 e^{-yz}$. Calcular la variación de f por unidad de longitud en la dirección del vector unitario

$$\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad \text{en el punto} \qquad (1, 0, 0).$$

Solución

La variación requerida es, utilizando el Teorema 12,

$$\nabla f \cdot \mathbf{v} = (2xe^{-yz}, -x^2 ze^{-yz}, -x^2 ye^{-yz}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

que en el punto (1, 0, 0) es

$$(2, 0, 0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Direcciones de máximo crecimiento

También podemos obtener del Teorema 12 el significado geométrico del gradiente:

TEOREMA 13 Supóngase que $\nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$. Entonces $\nabla f(\mathbf{x})$ apunta en la dirección en la cual f crece más rápidamente.

DEMOSTRACIÓN Si $\mathbf{n}$ es un vector unitario, la variación de f en la dirección $\mathbf{n}$ la da $\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = \|\nabla f(\mathbf{x})\| \cos\theta$, donde θ es el ángulo entre $\mathbf{n}$ y $\nabla f(\mathbf{x})$. El máximo se alcanza para $\theta = 0$; es decir, cuando $\mathbf{n}$ y ∇f son paralelos (cuando $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ esta variación es 0 para todo $\mathbf{n}$).

En otras palabras, si deseamos movernos en la dirección en la que f crece más rápidamente, debemos hacerlo en la dirección $\nabla f(\mathbf{x})$. De forma análoga, si deseamos movernos en la dirección en la cual f *decrece* más rápidamente, debemos hacerlo en la dirección $-\nabla f(\mathbf{x})$.

EJEMPLO 2.50 Desde el punto (0, 1), ¿en qué dirección crece $f(x, y) = x^2 - y^2$ más rápidamente?

Solución

El gradiente es

$$\nabla f = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j},$$

y por tanto en (0, 1) es:

$$\nabla f|_{(0,1)} = -2\mathbf{j}.$$

Por el Teorema 13, f crece lo más rápidamente en la dirección $-\mathbf{j}$ (¿puede ver el lector por qué esta respuesta es consistente con la Figura 2.1.9?).

Gradientes y planos tangentes a los conjuntos de nivel

Hallamos ahora la relación entre el gradiente de una función f y sus superficies de nivel. El gradiente apunta en la dirección en la cual los valores de f cambian más rápidamente, mientras que una superficie de nivel está en las direcciones en las que no cambia en absoluto. Si f se comporta razonablemente bien, el gradiente y la superficie de nivel serán perpendiculares.

TEOREMA 14: El gradiente es normal a las superficies de nivel Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una aplicación de clase C^1 y sea (x_0, y_0, z_0) un punto de la superficie de nivel S definida por $f(x, y, z) = k$, para una constante k. Entonces $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ es normal a la superficie de nivel en el sentido siguiente: si $\mathbf{v}$ es el vector tangente en $t = 0$ de una trayectoria $\mathbf{c}(t)$ en S con $\mathbf{c}(0) = (x_0, y_0, z_0)$, entonces $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{v} = 0$ (*véase* la Figura 2.6.2).

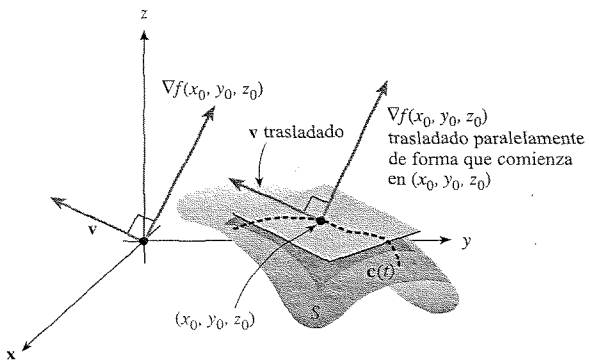


Figura 2.6.2. Significado geométrico del gradiente: ∇f es ortogonal a la superficie S sobre la cual f es constante.

DEMOSTRACIÓN Sea $\mathbf{c}(t)$ un punto de S; entonces $f(\mathbf{c}(t)) = k$. Sea $\mathbf{v}$ como en las hipótesis; entonces $\mathbf{v} = \mathbf{c}'(0)$. Por tanto, el hecho de que $f(\mathbf{c}(t))$ sea constante en t y la regla de la cadena dan:

$$0 = \frac{d}{dt} f(\mathbf{c}(t))\Big|_{t=0} = \nabla f(\mathbf{c}(0)) \cdot \mathbf{v}.$$

Si estudiamos la conclusión del Teorema 14 vemos que es razonable *definir* el plano tangente a S como el plano ortogonal al gradiente.

DEFINICIÓN: Planos tangentes a superficies de nivel Sea S la superficie que está formada por aquellos (x, y, z) tales que $f(x, y, z) = k$, para k constante. El ***plano tangente*** a S en el punto (x_0, y_0, z_0) de S se define por medio de la ecuación

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \tag{1}$$

si $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$. Es decir, el plano tangente es el conjunto de puntos (x, y, z) que satisfacen la Ecuación (1).

Esto extiende la definición de plano tangente a la gráfica de una función que dimos anteriormente (*véase* el Ejercicio 11 al final de esta sección).

EJEMPLO 2.51 Calcular la ecuación del plano tangente a la superficie definida por $3xy + z^2 = 4$ en $(1, 1, 1)$.

Solución

En este caso $f(x, y, z) = 3xy + z^2$ y $\nabla f = (3y, 3x, 2z)$, que en $(1, 1, 1)$ es el vector $(3, 3, 2)$. Por tanto, el plano tangente es

$$(3, 3, 2) \cdot (x - 1, y - 1, z - 1) = 0;$$

es decir,

$$3x + 3y + 2z = 8.$$

En el Teorema 14 y en la definición que lo sigue, podríamos haber trabajado tanto en dos dimensiones como en tres. Por tanto, si tenemos $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y consideramos una *curva* de nivel

$$C = \{(x, y) \mid f(x, y) = k\},$$

entonces $\nabla f(x_0, y_0)$ es perpendicular a C en cualquier punto (x_0, y_0) de C. De la misma manera, la recta tangente a C en (x_0, y_0) tiene por ecuación

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0 \tag{2}$$

si $\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$; es decir, la recta tangente es el conjunto de puntos (x, y) que satisfacen la Ecuación (2) (*véase* la Figura 2.6.3).

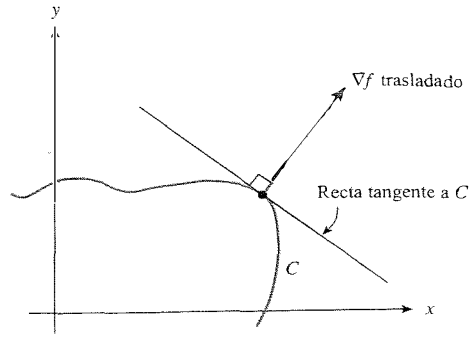


Figura 2.6.3. En el plano, el gradiente ∇f es ortogonal a la curva $f =$ constante.

El campo vectorial gradiente

A menudo nos referimos a ∇f como un ***campo vectorial gradiente***. La palabra «campo» significa que ∇f asigna un vector a cada punto en el dominio de f. En la Figura 2.6.4 describimos el gradiente ∇f no por medio de su gráfica que, si f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, sería un subconjunto de $\mathbb{R}^6$, es decir, el conjunto de pares $(\mathbf{x}, \nabla f(\mathbf{x}))$, sino representando $\nabla f(\mathrm{P})$, para cada punto P como un vector que parte del punto P, no del origen. Como en una gráfica, este método de representación de ∇f contiene el punto P y el valor $\nabla f(\mathrm{P})$ en la misma figura.

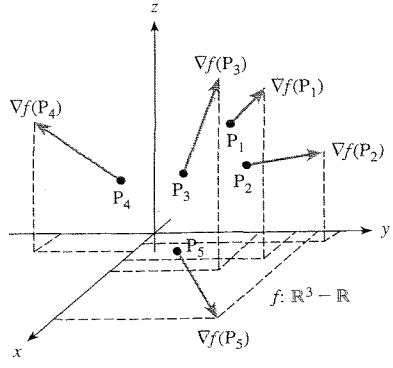


Figura 2.6.4. El gradiente ∇f de una función f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$; en cada punto P_i, $\nabla f(\mathrm{P}_i)$ es un vector que parte de P_i.

El campo vectorial gradiente tiene un importante significado geométrico. Muestra la dirección en la que f crece más rápidamente y la dirección que es ortogonal a todas las superficies de nivel (o, en el plano, curvas) de f. Que muestra las dos cosas al mismo tiempo es muy plausible. Para verlo imaginemos una montaña como se muestra en la Figura 2.6.5(a). Sea h la función altitud, una función de dos variables. Si trazamos las curvas de nivel de h éstas son simplemente las curvas de nivel topográficas de la montaña. Podemos imaginarlas como trayectorias de nivel sobre la montaña (*véase* la Figura 2.6.5(b)). Una cosa debe ser obvia para cualquiera que haya hecho senderismo: para llegar a la cima de la montaña lo más rápidamente posible debemos caminar perpendicularmente a las curvas de nivel[5]. Esto es consistente con los Teoremas

[5] Esta discusión supone que se camina a la misma velocidad en todas las direcciones. Por supuesto, los montañeros saben que esto no es necesariamente cierto.

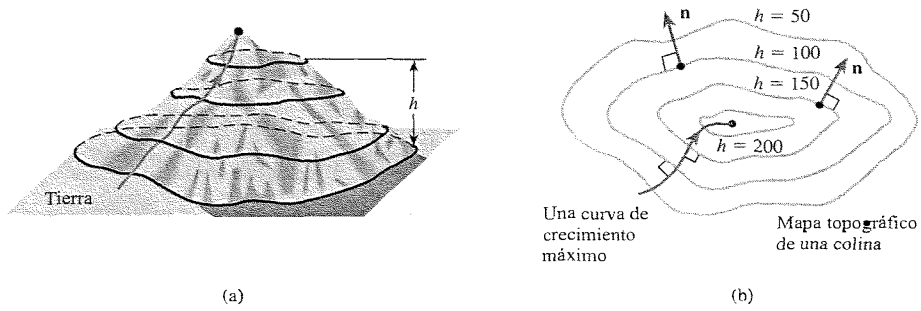


Figura 2.6.5. Ilustración física de los dos hechos: (a) ∇f es la dirección de máximo crecimiento de f, y (b) ∇f es ortogonal a todas las curvas de nivel.

13 y 14 que establecen que la dirección de máximo crecimiento (el gradiente) es ortogonal a las curvas de nivel.

EJEMPLO 2.52 La fuerza gravitatoria sobre una unidad de masa m en (x, y, z) producida por una masa M en el origen de $\mathbb{R}^3$ es, según la ley de gravitación de Newton

$$\mathbf{F} = -\frac{GmM}{r^2}\mathbf{n},$$

donde G es constante; $r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ es la distancia de (x, y, z) al origen; y $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ el vector unitario en la dirección de $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, que es el vector posición desde el origen a (x, y, z).

Nótese que $\mathbf{F} = \nabla(GmM/r) = -\nabla V$, es decir, $\mathbf{F}$ es el opuesto del gradiente del potencial gravitatorio $V = -GmM/r$. Esto se puede verificar como en el Ejemplo 2.47. Nótese que $\mathbf{F}$ está orientado hacia el origen. Además, las superficies de nivel de V son esferas. El campo vectorial gradiente $\mathbf{F}$ es normal a estas esferas, lo que confirma el resultado del Teorema 14.

EJEMPLO 2.53 Hallar un vector unitario que sea perpendicular a la superficie S, dada por $z = x^2y^2 + y + 1$, en el punto $(0, 0, 1)$.

Solución

Sea $f(x, y, z) = x^2y^2 + y + 1 - z$ y considérese la superficie de nivel definida por $f(x, y, z) = 0$. Dado que éste es el conjunto de puntos (x, y, z) que cumplen $z = x^2y^2 + y + 1$, vemos que este conjunto de nivel coincide con la superficie S. El gradiente es

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} = 2xy^2\mathbf{i} + (2x^2y + 1)\mathbf{j} - \mathbf{k},$$

y por tanto

$$\nabla f(0, 0, 1) = \mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Este vector es perpendicular a S en $(0, 0, 1)$ y, por tanto, para hallar un vector normal unitario $\mathbf{n}$ dividimos este vector por su longitud para obtener

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla f(0, 0, 1)}{\|\nabla f(0, 0, 1)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{j} - \mathbf{k}).$$

EJEMPLO 2.54 Se consideran dos conductores, uno cargado positivamente y el otro negativamente. Se establece un potencial eléctrico entre ellos. Este potencial es una función ϕ: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (un ejemplo de un campo *escalar*). El campo eléctrico está dado por $\mathbf{E} = -\nabla\phi$. Sabemos, por el Teorema 14, que $\mathbf{E}$ es perpendicular a las superficies de nivel de ϕ. Estas superficies de nivel se llaman ***superficies equipotenciales***, ya que el potencial es constante sobre ellas (*véase* la Figura 2.6.6).

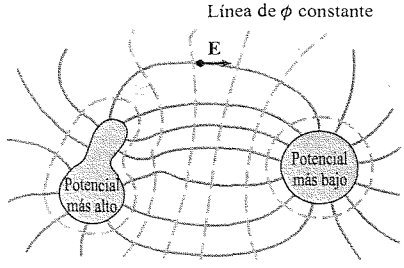


Figura 2.6.6. Las superficies equipotenciales (las líneas de puntos) son ortogonales al campo de fuerzas eléctrico $\mathbf{E}$.

EJERCICIOS

1. Demostrar que la derivada direccional de $f(x, y, z) = z^2x + y^3$ en $(1, 1, 2)$ en la dirección $(1/\sqrt{5})\mathbf{i} + (2/\sqrt{5})\mathbf{j}$ es $2\sqrt{5}$.

2. Calcular las derivadas direccionales de las siguientes funciones en los puntos y direcciones indicados:

   a) $f(x, y) = x + 2xy - 3y^2$, $(x_0, y_0) = (1, 2)$, $\mathbf{v} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$.

   b) $f(x, y) = \log\sqrt{x^2 + y^2}$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$, $\mathbf{v} = (1/\sqrt{5})(2\mathbf{i} + \mathbf{j})$.

   c) $f(x, y) = e^x \cos(\pi y)$, $(x_0, y_0) = (0, -1)$, $\mathbf{v} = -(1/\sqrt{5})\mathbf{i} + (2/\sqrt{5})\mathbf{j}$.

   d) $f(x, y) = xy^2 + x^3y$, $(x_0, y_0) = (4, -2)$, $\mathbf{v} = (1/\sqrt{10})\mathbf{i} + (3/\sqrt{10})\mathbf{j}$.

3. Calcular las derivadas direccionales de las funciones siguientes en los puntos indicados y según un vector unitario en una dirección *paralela* al vector dado en cada caso.

   a) $f(x, y) = x^y$, $(x_0, y_0) = (e, e)$, $\mathbf{d} = 5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$.

   b) $f(x, y, z) = e^x + yz$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$, $\mathbf{d} = (1, -1, 1)$.

   c) $f(x, y, z) = xyz$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 1)$, $\mathbf{d} = (1, 0, -1)$.

4. Hallar los planos tangentes a las superficies siguientes en los puntos indicados:

a) $x^2 + 2y^2 + 3xz = 10$, en el punto $(1, 2, \frac{1}{3})$.

b) $y^2 - x^2 = 3$, en el punto $(1, 2, 8)$.

c) $xyz = 1$, en el punto $(1, 1, 1)$.

5. Hallar la ecuación del plano tangente a cada superficie $z = f(x, y)$ en el punto indicado:

a) $z = x^3 + y^3 - 6xy$, en el punto $(1, 2, -3)$.

b) $z = (\cos x)(\cos y)$, en el punto $(0, \pi/2, 0)$.

c) $z = (\cos x)(\operatorname{sen} y)$, en el punto $(0, \pi/2, 1)$.

6. Calcular el gradiente ∇f para cada una de las funciones siguientes:

a) $f(x, y, z) = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

b) $f(x, y, z) = xy + yz + xz$.

c) $f(x, y, z) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$.

7. Para las funciones del Ejercicio 6, ¿cuál es la dirección de máximo crecimiento en $(1, 1, 1)$?

8. Demostrar que el vector normal unitario a la superficie $x^3y^3 + y - z + 2 = 0$ en $(0, 0, 2)$ es $\mathbf{n} = (1/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k})$.

9. Hallar el vector normal unitario a la superficie $\cos(xy) = e^z - 2$ en $(1, \pi, 0)$.

10. Verificar los Teoremas 13 y 14 para $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

11. Demostrar que la definición que sigue al Teorema 14 da, como caso especial, la fórmula del plano tangente a la gráfica de $f(x, y)$ si se considera la gráfica como una superficie de nivel de $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ (*véase* la Sección 2.3).

12. Sea $f(x, y) = -(1 - x^2 - y^2)^{1/2}$ si (x, y) verifica $x^2 + y^2 < 1$. Demostrar que el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es ortogonal al vector con componentes $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Interpretar esto geométricamente.

13. Para las siguientes funciones $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $\mathbf{g}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, hallar ∇f y $\mathbf{g}'$, y evaluar $(f \circ \mathbf{g})'(1)$.

a) $f(x, y, z) = xz + yz + xy$, $\mathbf{g}(t) = (e^t, \cos t, \operatorname{sen} t)$.

b) $f(x, y, z) = e^{xyz}$, $\mathbf{g}(t) = (6t, 3t^2, t^3)$.

c) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)\log\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\mathbf{g}(t) = (e^t, e^{-t}, t)$.

14. Calcular la derivada direccional de f en las direcciones dadas $\mathbf{v}$ y en los puntos dados P.

a) $f(x, y, z) = xy^2 + y^2z^3 + z^3x$, $\mathrm{P} = (4, -2, -1)$, $\mathbf{v} = 1/\sqrt{14}(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$.

b) $f(x, y, z) = x^{yz}$, $\mathrm{P} = (e, e, 0)$, $\mathbf{v} = \frac{12}{13}\mathbf{i} + \frac{3}{13}\mathbf{j} + \frac{4}{13}\mathbf{k}$.

15. Sean $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y $r = \|\mathbf{r}\|$. Demostrar que

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

16. El capitán Ralph tiene problemas cerca de la cara iluminada de Mercurio. La temperatura del casco de su nave cuando se encuentra en el punto (x, y, z) es de $T(x, y, z) = e^{-x^2-2y^2-3z^2}$, donde, x, y, z se miden en metros. En este momento está en $(1, 1, 1)$.

a) ¿En qué dirección debe moverse para que la temperatura baje lo más rápidamente posible?

b) Si la nave vuela a e^8 metros por segundo, ¿a qué velocidad bajará la temperatura cuando se desplace en esa dirección?

c) Desafortunadamente el metal del casco se fracturará si se enfría a una velocidad mayor de $\sqrt{14}e^2$ grados por segundo. Describir el conjunto de direcciones según las cuales puede desplazarse para bajar la temperatura a un ritmo inferior al límite permitido.

17. Una función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se dice *independiente de la segunda variable* si existe una función $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) = g(x)$ para todo x en $\mathbb{R}$. En este caso, calcular ∇f en función de g'.

18. Sean f y g funciones de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$. Supóngase que f es diferenciable y $\nabla f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\mathbf{x}$. Demostrar que las esferas con centro en el origen están contenidas en los conjuntos de nivel de f; es decir, f es constante en dichas esferas.

19. Una función $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se llama función *par* si $f(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^n$. Si f es diferenciable y par, hallar $\mathbf{D}f$ en el origen.

20. Supóngase que una montaña tiene forma de paraboloide elíptico $z = c - ax^2 - by^2$, donde a, b y c son constantes positivas, x e y son las coordenadas este-oeste y norte-sur en el mapa, y z es la altitud sobre el nivel del mar (x, y, z se miden en metros). En el punto $(1, 1)$, ¿en qué dirección crece la altitud más rápidamente? Si una canica se soltara en $(1, 1)$, ¿en qué dirección comenzaría a rodar?

21. Un ingeniero quiere construir un ferrocarril que suba a la montaña del Ejercicio 20. Si lo dirigiera directamente a la cima tendría demasiada pendiente para la potencia de la máquina. En el punto $(1, 1)$, ¿en qué direcciones podría tenderse la vía de forma que subiera con una pendiente de un 3% —es decir, un ángulo cuya tangente sea 0,03? (hay dos posibilidades). Esbozar un esquema de la situación indicando las dos posibles direcciones con una pendiente del 3% en $(1, 1)$.

22. En electrostática, la fuerza $\mathbf{P}$ de atracción entre dos partículas de cargas opuestas es $\mathbf{P} = k(\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|)$ (*Ley de Coulomb*), donde k es una constante y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Demostrar que $\mathbf{P}$ es el gradiente de $f = -k/\|\mathbf{r}\|$.

23. El potencial electrostático V generado por dos filamentos infinitos y paralelos con densidades lineales de carga λ y $-\lambda$ es $V = (\lambda/2\pi\varepsilon_0)\ln(r_2/r_1)$, donde $r_1^2 = (x - x_0)^2 + y^2$ y $r_2^2 = (x + x_0)^2 + y^2$. Suponemos que los filamentos están en la dirección z y que atraviesan el plano xy en $(-x_0, 0)$ y $(x_0, 0)$. Hallar $\nabla V(x, y)$.

24. Para cada una de las siguientes funciones hallar los valores máximo y mínimo que la función f alcanza a lo largo de la trayectoria $\mathbf{c}(t)$:

a) $f(x, y) = xy$; $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$; $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

b) $f(x, y) = x^2 + y^2$; $\mathbf{c}(t) = (\cos t, 2 \operatorname{sen} t)$; $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

25. Supongamos que una partícula sale despedida de la superficie $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ desde el punto $(1, 1, \sqrt{3})$ según la normal a la superficie, dirigida hacia el plano xy, en el instante $t = 0$, con una velocidad de 10 unidades por segundo. ¿Cuándo y dónde cruzará el plano xy?

26. Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y considérese $\mathbf{D}f(x, y, z)$ como una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$. Demostrar que el núcleo (es decir, el conjunto de vectores que se transforman en cero) de $\mathbf{D}f$ es el plano de $\mathbb{R}^3$ ortogonal a ∇f.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 2

1. Describir las gráficas de

a) $f(x, y) = 3x^2 + y^2$. **b)** $f(x, y) = xy + 3x$.

2. Describir algunas superficies de nivel y secciones adecuadas de las gráficas de

a) $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2$.

b) $f(x, y, z) = x^2$.

c) $f(x, y, z) = xyz$.

3. Calcular la derivada $\mathbf{D}f(\mathbf{x})$ de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = (x^2y, e^{-xy})$.

b) $f(x) = (x, x)$.

c) $f(x, y, z) = e^x + e^y + e^z$.

d) $f(x, y, z) = (x, y, z)$.

4. Supóngase que $f(x, y) = f(y, x)$ para todo (x, y). Demostrar que

$$(\partial f/\partial x)(a, b) = (\partial f/\partial y)(b, a).$$

5. Sea $f(x, y) = (1 - x^2 - y^2)^{1/2}$. Demostrar que el plano tangente a la gráfica de f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es ortogonal al vector $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Dar una interpretación geométrica.

6. Sean $F(u, v)$ y $u = h(x, y, z)$, $v = k(x, y, z)$ funciones dadas (diferenciables) con valores reales y sea $f(x, y, z)$ definida por $f(x, y, z) = F(h(x, y, z), k(x, y, z))$. Escribir una fórmula para el gradiente de f en términos de las derivadas parciales de F, h y k.

7. Hallar una ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ para

a) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x - y + 2$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

b) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x^2 + 4y^2$, $(x_0, y_0) = (2, -1)$.

c) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to xy$, $(x_0, y_0) = (-1, -1)$.

d) $f(x, y) = \log(x + y) + x\cos y + \arctan(x + y)$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

e) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

f) $f(x, y) = xy$, $(x_0, y_0) = (2, 1)$.

8. Calcular una ecuación del plano tangente a las superficies siguientes en los puntos indicados.

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $(1, 1, 1)$.

b) $x^3 - 2y^3 + z^3 = 0$, $(1, 1, 1)$.

c) $(\cos x)(\cos y)e^z = 0$, $(\pi/2, 1, 0)$.

d) $e^{xyz} = 1$, $(1, 1, 0)$.

9. Dibujar algunas curvas de nivel de las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = 1/xy$.

b) $f(x, y) = x^2 - xy - y^2$.

10. Considérese una función temperatura $T(x, y) = x \operatorname{sen} y$. Dibujar unas cuantas curvas de nivel. Calcular ∇T y explicar su significado.

11. Hallar los límites siguientes si existen:

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\cos xy - 1}{x}$.

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{|(x+y)/(x-y)|}$, $x \neq y$.

12. Calcular las derivadas parciales primeras y los gradientes de las funciones siguientes:

a) $f(x, y, z) = xe^z + y\cos x$.

b) $f(x, y, z) = (x + y + z)^{10}$.

c) $f(x, y, z) = (x^2 + y)/z$.

13. Calcular $\dfrac{\partial}{\partial x}[x \exp(1 + x^2 + y^2)]$.

14. Sea $y(x)$ una función diferenciable definida implícitamente por $F(x, y(x)) = 0$. Por el Ejercicio 17(a) de la Sección 2.5 sabemos que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}.$$

Considérese la superficie $z = F(x, y)$ y supóngase que F es creciente como función de x y como función de y; es decir, $\partial F/\partial x > 0$ y $\partial F/\partial y > 0$. Considerando la gráfica y el plano $z = 0$, demostrar que para z fijado en $z = 0$, y debe *decrecer* cuando x crece, y x debe *decrecer* cuando y crece. ¿Concuerda esto con el signo menos en la fórmula de dx/dy?

15. **a)** Considérese la gráfica de la función $f(x, y)$ (Figura 2.R.1(a)). Sea (x_0, y_0) un punto sobre la curva C, de forma que $\nabla f(x_0, y_0)$ es perpendicular a dicha curva. Demostrar que el plano tangente a la gráfica es el plano que: (i) contiene a la recta perpendicular a $\nabla f(x_0, y_0)$ que está sobre el plano horizontal $z = f(x_0, y_0)$ y (ii) tiene pendiente $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$ respecto del plano xy (por *pendiente* de un plano P respecto del plano xy entendemos la tangente del ángulo θ, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, entre $\mathbf{p}$, la normal a P hacia arriba, y el vector unidad $\mathbf{k}$).

b) Usar este método para ver que el plano tangente a la gráfica de $f(x, y) = (x + \cos y)x^2$ en $(1, 0, 2)$ es como se esboza en la Figura 2.R.1(b).

16. Hallar el plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^2$ en el punto $(1, -2, 5)$. Explicar el significado geométrico del gradiente de $f(x, y) = x^2 + y^2$ para esta superficie (*véase* el Ejercicio 15).

17. ¿En qué dirección es igual a cero la derivada direccional de $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ en $(1, 1)$.

18. Hallar la derivada direccional de la función dada en el punto dado y en la dirección del vector dado.

a) $f(x, y, z) = e^x \cos(yz)$, $p_0 = (0, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (2, 1, -2)$.

b) $f(x, y, z) = xy + yz + zx$, $p_0 = (1, 1, 2)$, $\mathbf{v} = (10, -1, 2)$.

19. Hallar el plano tangente y la recta normal al hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 18$ en $(3, 5, -4)$.

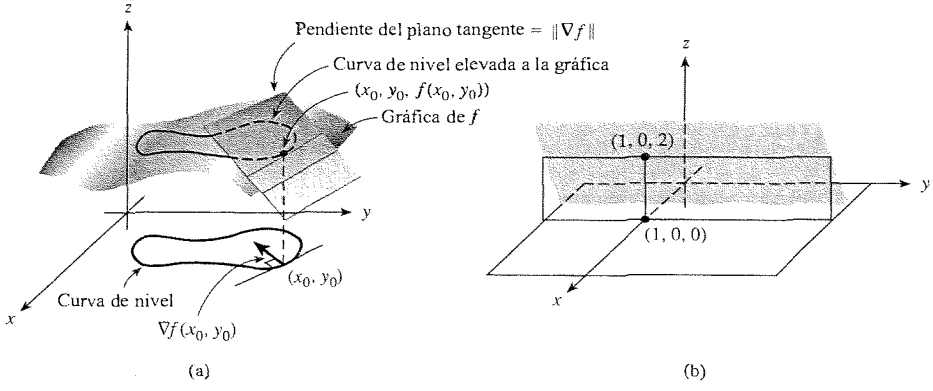


Figura 2.R.1. (a) La relación entre el gradiente de una función y el plano tangente a la gráfica (Ejercicio 15(a)). (b) Ejemplo concreto del plano para el Ejercicio 15(b).

20. Sea $(x(t), y(t))$ una trayectoria en el plano, $0 \leqslant t \leqslant 1$, y sea $f(x, y)$ una función de clase C^1 en dos variables. Suponer que $(dx/dt)\, f_x + (dy/dt)\, f_y \leqslant 0$. Demostrar que $f(x(1), y(1)) \leqslant f(x(0), y(0))$.

21. Un insecto se encuentra en un medio tóxico. El nivel de toxicidad lo da $T(x, y) = 2x^2 - 4y^2$. El insecto está en $(-1, 2)$. ¿En qué dirección debe moverse para reducir la toxicidad lo más rápidamente posible?

22. Hallar la dirección en la cual la función $w = x^2 + xy$ crece más rápidamente en el punto $(-1, 1)$. ¿Cuál es la magnitud de ∇w en este punto? Interpretar geométricamente esta magnitud.

23. Sea f una función definida en un conjunto abierto S en $\mathbb{R}^n$. Decimos que f es ***homogénea de grado*** p sobre S si $f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^p f(\mathbf{x})$ para todo real λ y todo $\mathbf{x}$ en S para los que $\lambda \mathbf{x} \in S$.

a) Si una función de este tipo es diferenciable en $\mathbf{x}$, demostrar que $\mathbf{x} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) = p f(\mathbf{x})$. Esto se conoce como ***teorema de Euler*** para funciones homogéneas [INDICACIÓN: para $\mathbf{x}$ fijo, definir $g(\lambda) = f(\lambda \mathbf{x})$ y calcular $g'(1)$.]

b) Hallar p y comprobar el teorema de Euler para la función $f(x, y, z) = x - 2y - \sqrt{xz}$ en la región donde $xz > 0$.

24. Si $z = [f(x, y)]/y$ (donde f es diferenciable e $y \neq 0$), demostrar que se verifica la identidad $z + y(\partial z/\partial x) + y(\partial z/\partial y) = 0$.

25. Dada $z = f((x + y)/(x - y))$ donde f es una función C^1, demostrar que

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

26. Sea f una función con derivadas parciales $\partial f(\mathbf{x})/\partial x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ en cada $\mathbf{x}$ de un conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$. Si f tiene una máximo local o un mínimo local en el punto $\mathbf{x}_0$ de U, demostrar que $\partial f(\mathbf{x}_0)/\partial x_i = 0$ para cada i.

27. Considérense las funciones definidas en $\mathbb{R}^2$ por medio de las fórmulas siguientes:

i) $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$.

ii) $f(x, y) = x^2y^2/(x^2 + y^4)$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$.

a) En cada caso, demostrar que las derivadas parciales $\partial f(x, y)/\partial x$ y $\partial f(x, y)/\partial y$ existen para todo (x, y) de $\mathbb{R}^2$, y calcular estas derivadas explícitamente en función de x e y.

b) Explicar por qué las funciones descritas en (i) y (ii) son o no son diferenciables en $(0, 0)$.

28. Calcular el vector gradiente $\nabla f(x, y)$ en todos los puntos (x, y) de $\mathbb{R}^2$ para cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = x^2y^2 \log(x^2 - y^2)$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$.

b) $f(x, y) = xy \operatorname{sen}[1/(x^2 + y^2)]$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(0, 0) = 0$.

29. Hallar las derivadas direccionales de las funciones siguientes en el punto $(1, 1)$ en la dirección $(\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$:

a) $f(x, y) = x \arctan(x/y)$.

b) $f(x, y) = \cos(\sqrt{x^2 + y^2})$.

c) $f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$.

30. **a)** Sea $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$. Hallar: $\|\mathbf{u}\|$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, y un vector con la misma dirección que $\mathbf{u}$ pero de longitud unidad.

b) Hallar la razón de variación de $e^{xy} \operatorname{sen}(xyz)$ en la dirección $\mathbf{u}$ en el punto $(0, 1, 1)$.

31. Denótese por $h(x, y) = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ la altura de una montaña sobre el punto (x, y). ¿En qué dirección, a partir de $(1, 0)$, se debe comenzar a caminar para ascender de la forma más rápida?

32. Calcular una ecuación del plano tangente a la gráfica de

$$f(x, y) = \frac{e^x}{x^2 + y^2}$$

en $x = 1$, $y = 2$.

33. **a)** Dar un enunciado cuidadoso de la forma general de la regla de la cadena.

b) Sean $f(x, y) = x^2 + y$ y $\mathbf{h}(u) = (\operatorname{sen} 3u, \cos 8u)$. Sea $g(u) = f(\mathbf{h}(u))$. Calcular dg/du en $u = 0$ *tanto* de forma directa *como* usando la regla de la cadena.

34. **a)** Esbozar las curvas de nivel de $f(x, y) = -x^2 - 9y^2$ para $c = 0, -1, -10$.

b) Sobre este esbozo, trazar ∇f en $(1, 1)$. Discutirlo.

35. En el instante $t = 0$ una partícula sale despedida de la superficie $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ en el punto $(1, 1, 1)$, en una dirección normal a la superficie a la velocidad de 10 unidades por segundo. ¿En qué instante atraviesa la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 103$?

36. ¿En que punto (o puntos) de la superficie del Ejercicio 35 es el vector normal paralelo a la línea $x = y = z$?

37. Calcular $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ si

$$z = \frac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2}, \qquad u = e^{-x-y}, \qquad v = e^{xy}.$$

a) Por sustitución y cálculo directo.

b) Por la regla de la cadena.

38. Calcular las derivadas parciales como en el Ejercicio 37 si $z = uv$, $u = x + y$, y $v = x - y$.

39. ¿Qué falla en el razonamiento siguiente? Supóngase que $w = f(x, y)$ y $y = x^2$. Por la regla de la cadena

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial w \partial y}{\partial y \partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + 2x\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Por tanto, $0 = 2x(\partial w/\partial y)$, y entonces $\partial w/\partial y = 0$. Buscar un ejemplo explícito que muestre que esto es ciertamente incorrecto.

40. Un barco navega con rumbo nordeste a 20 km/h. Suponiendo que la temperatura baja a razón de 0,2 °C/km en dirección norte y 0,3 °C/km en dirección este, ¿cuál es la razón a la que cambia la temperatura que se observa en el barco?

41. Usar la regla de la cadena para hallar una fórmula para $(d/dt)\exp[f(t)g(t)]$.

42. Usar la regla de la cadena para hallar una fórmula para $(d/dt)(f(t)^{g(t)})$.

43. Comprobar la regla de la cadena para la función $f(x, y, z) = [\ln(1 + x^2 + 2z^2)]/(1 + y^2)$ y la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (t, 1 - t^2, \cos t)$.

44. Comprobar la regla de la cadena para la función $f(x, y) = x^2/(2 + \cos y)$ y la trayectoria $x = e^t$, $y = e^{-t}$.

45. Supóngase que $u(x, t)$ satisface la ecuación diferencial $u_t + uu_x = 0$ y que x, como función $x = f(t)$ de t, satisface $dx/dt = u(x, y)$. Demostrar que $u(f(t), t)$ es constante en t.

46. El desplazamiento en el instante t de la posición horizontal sobre una recta x de una cuerda de violín es $u = \text{sen}(x - 6t) + \text{sen}(x + 6t)$. Calcular la velocidad de la cuerda en $x = 1$ cuando $t = \frac{1}{3}$.

47. La ***ley de los gases perfectos*** $PV = nRT$ relaciona una constante R, el número n de moles del gas, el volumen V, la temperatura en grados Kelvin T y la presión P.

a) Demostrar que cada una de las variables n, P, T, V es función de las otras y determinar explícitamente las fórmulas que las definen.

b) Calcular $\partial V/\partial T$, $\partial T/\partial P$, $\partial P/\partial V$ y demostrar que su producto es igual a -1.

48. La ***temperatura potencial*** θ se define en función de la temperatura T y de la presión p por

$$\theta = T\left(\frac{1.000}{p}\right)^{0,286}$$

La temperatura y la presión se pueden considerar como funciones de la posición (x, y, z) en la atmósfera y también del tiempo t.

a) Hallar fórmulas para $\partial\theta/\partial x$, $\partial\theta/\partial y$, $\partial\theta/\theta z$, $\partial\theta/\partial t$ en función de las derivadas parciales de T y p.

b) La condición $\partial\theta/\partial z < 0$ se considera como atmósfera inestable, ya que lleva a grandes desplazamientos verticales de paquetes de aire a partir de un solo ímpetu hacia arriba o hacia abajo. Los meteorólogos usan la fórmula

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{\theta}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{g}{C_p}\right)$$

donde $g = 32{,}2$ y C_p es una constante positiva. ¿Cómo varía verticalmente la temperatura en una atmósfera inestable?

49. El volumen específico V, la presión P y la temperatura T de un gas de van der Waals están relacionados por $P = RT/(V - \beta) - \alpha/V^2$, donde α, β y R son constantes.

a) Explicar por qué dos cualesquiera de V, P y T pueden considerarse variables independientes que determinan la tercera variable.

b) Hallar $\partial T/\partial P$, $\partial P/\partial V$, $\partial V/\partial T$. Identificar qué variables son constantes e interpretar el sentido físico de cada derivada parcial.

c) Comprobar que $(\partial T/\partial P)(\partial P/\partial V)(\partial V/\partial T) = -1$ (¡no $+1$!).

50. La altitud h del volcán Mauna Loa en Hawaii se describe (aproximadamente) por la función $h(x, y) = 2{,}59 - 0{,}00024y^2 - 0{,}00065x^2$, donde h es la altitud en millas sobre el nivel del mar, y x e y miden las distancias en millas este-oeste y norte-sur desde la cima de la montaña. En $(x, y) = (-2, -4)$:

a) ¿A qué velocidad crece la altitud en la dirección $(1, 1)$ (es decir, en la dirección nordeste)? Expresar la respuesta en millas de altitud por milla horizontal recorrida.

b) ¿En qué dirección se encuentra el camino de máxima pendiente positiva?

51. **a)** ¿En qué dirección es la derivada direccional de $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ en $(1, 1)$ igual a cero?

b) ¿Y en un punto arbitrario (x_0, y_0) del primer cuadrante?

c) Describir las curvas de nivel de f. En particular, estudiarlas en función del resultado del apartado (b).

52. **a)** Demostrar que la curva $x^2 - y^2 = c$, para *cualquier* valor de c, satisface la ecuación diferencial $dy/dx = x/y$.

b) Trazar algunas de las curvas $x^2 - y^2 = c$, digamos para $c = \pm 1$. En varios puntos (x, y) a lo largo de estas curvas, dibujar un segmento corto de pendiente x/y; comprobar que estos segmentos parecen ser tangentes a la curva. ¿Qué sucede en $y = 0$? ¿Qué sucede cuando $c = 0$?

53. Supóngase que f es una función diferenciable de una variable y que la función $u = g(x, y)$ se define como

$$u = g(x, y) = xyf\left(\frac{x + y}{xy}\right).$$

Demostrar que u satisface una ecuación diferencial (parcial) de la forma:

$$x^2\frac{\partial u}{\partial x} - y^2\frac{\partial u}{\partial y} = G(x, y)u$$

y hallar la función $G(x, y)$.

54. **a)** Sea F una función de una variable y f una función de dos variables. Demostrar que el vector gradiente de $g(x, y) = F(f(x, y))$ es paralelo al vector gradiente de $f(x, y)$.

b) Sean $f(x, y)$ y $g(x, y)$ funciones tales que $\nabla f = \lambda \nabla g$ para cierta función $\lambda(x, y)$. ¿Qué relación hay entre las curvas de nivel de f y g? Explicar por qué podría existir una función F tal que $g(x, y) = F(f(x, y))$.

3

Derivadas de orden superior: máximos y mínimos

Todo lo superfluo disgusta a Dios y a la Naturaleza.
Todo lo que disgusta a Dios y a la Naturaleza es perverso.

Dante Alighieri, ca. 1300

... a saber, puesto que la forma de todo el Universo es la más perfecta y, de hecho, está diseñada por el creador más sabio, nada ocurrirá en el mundo sin que salga a relucir, de alguna manera, una regla máxima o mínima.

Leonhard Euler

En el cálculo de una variable, para saber si una función $f(x)$ tiene un máximo o un mínimo local se utiliza a menudo la segunda derivada. Buscamos puntos críticos x_0, esto es, puntos x_0 para los cuales $f'(x_0) = 0$, y estudiamos el signo de la derivada segunda $f''(x_0)$ en ellos. Si $f''(x_0) < 0$, $f(x_0)$ es un máximo local de f; si $f''(x_0) > 0$, $f(x_0)$ es un mínimo local de f; si $f''(x_0) = 0$, el criterio falla.

Este capítulo extiende estos métodos a funciones de varias variables con valores reales. Comenzamos en la Sección 3.1 con el estudio de las derivadas parciales iteradas y de orden superior, y en la Sección 3.2 examinamos el teorema de Taylor para funciones de varias variables; este teorema se usa en la Sección 3.3 para deducir criterios que permiten detectar máximos, mínimos y puntos de silla. Como sucede con las funciones de una variable, estos métodos ayudan a visualizar la forma de una función.

En la Sección 3.4 estudiamos el problema de maximizar una función con valores reales sometida a condiciones adicionales, también conocidas como restricciones. Por ejemplo, podríamos

querer maximizar $f(x, y, z)$ restringiéndonos a aquellos (x, y, z) que están en la esfera unidad, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. En la Sección 3.5 se presenta un teorema técnico (el teorema de la función implícita) útil en el estudio de restricciones. También será útil más adelante cuando estudiemos superficies.

3.1. Derivadas parciales iteradas

En el capítulo anterior se obtuvo información considerable sobre la derivada de una aplicación y se investigó la geometría asociada con la derivada de funciones con valores reales mediante el uso del gradiente. En esta sección pasamos a estudiar las derivadas de orden superior, con el fin de probar la igualdad de las «derivadas parciales segundas cruzadas» de una función. Comenzamos definiendo la nomenclatura necesaria.

Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Recordemos que esto significa que $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ y $\partial f/\partial z$ existen y son continuas. Si estas derivadas, a su vez, tienen derivadas parciales continuas, diremos que f es de **clase** C^2, o que es **dos veces diferenciable con continuidad**. Así mismo, que f sea de clase C^3, significa que f tiene derivadas parciales iteradas de tercer orden continuas, y así sucesivamente. A continuación damos algunos ejemplos de cómo se escriben las derivadas de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \text{etc.}$$

Evidentemente, el proceso se puede repetir para las derivadas de tercer orden, y así sucesivamente. Si f es función sólo de x e y, y $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ son diferenciables con continuidad, al tomar las derivadas parciales segundas obtenemos las cuatro funciones

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Todas ellas reciben el nombre de **derivadas parciales iteradas**, mientras que $\partial^2 f/\partial x \partial y$ y $\partial^2 f/\partial y \partial x$ se llaman **derivadas parciales cruzadas**.

EJEMPLO 3.1 Hallar las derivadas parciales segundas de $f(x, y) = xy + (x + 2y)^2$.

Solución

Las primeras parciales son

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + 2(x + 2y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 4(x + 2y).$$

Ahora derivamos cada una de estas expresiones con respecto a x e y:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 8,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 5, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 5.$$

EJEMPLO 3.2 Hallar las derivadas parciales segundas de $f(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 y$.

Solución

Procedemos como en el Ejemplo 3.1:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \operatorname{sen}^2 y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \cos y = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2y;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \operatorname{sen} x \cos 2y;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \cos x \operatorname{sen} 2y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2 \cos x \operatorname{sen} y \cos y = \cos x \operatorname{sen} 2y.$$

EJEMPLO 3.3 Sea $f(x, y, z) = e^{xy} + z \cos x$. Entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy} - z \operatorname{sen} x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \cos x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = -\operatorname{sen} x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -\operatorname{sen} x, \qquad \text{etc.}$$

Las derivadas parciales cruzadas son iguales

En todos estos ejemplos observamos que los pares de derivadas parciales cruzadas, tales como $\partial^2 f/\partial x \partial y$ y $\partial^2 f/\partial y \partial x$, o $\partial^2 f/\partial z \partial x$ y $\partial^2 f/\partial x \partial z$, son iguales. Es un hecho fundamental y quizás sorprendente que *esto siempre es así para funciones* C^2. Lo probaremos en el siguiente teorema en el caso de funciones $f(x, y)$ de dos variables, pero la demostración se puede extender fácilmente a funciones de n variables.

TEOREMA 1: Igualdad de las derivadas parciales cruzadas Si $f(x, y)$ es de clase C^2 (es dos veces diferenciable con continuidad), entonces las derivadas parciales cruzadas son iguales; esto es,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

DEMOSTRACIÓN Consideramos la siguiente expresión (*véase* la Figura 3.1.1):

$$S(\Delta x, \Delta y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0).$$

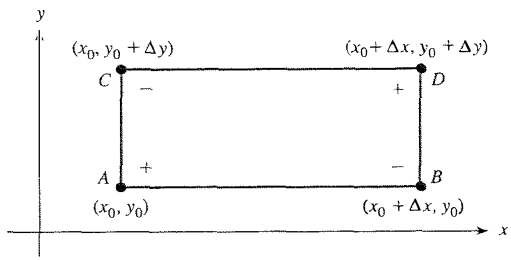


Figura 3.1.1. Álgebra que subyace en la igualdad de las derivadas parciales cruzadas: escribir la diferencia de diferencias de dos maneras.

Manteniendo y_0 y Δy fijos, definimos

$$g(x) = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0),$$

de forma que $S(\Delta x, \Delta y) = g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)$, *lo cual expresa S como una diferencia de diferencias*. Por el teorema del valor medio para funciones de una variable, $g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)$ es igual a $g'(\bar{x})\Delta x$ para algún $\bar{x}$ entre x_0 y $x_0 + \Delta x$. Por tanto,

$$S(\Delta x, \Delta y) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0 + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0)\right]\Delta x.$$

Si aplicamos el teorema del valor medio una vez más, tenemos que existe un $\bar{y}$ entre y_0 y $y_0 + \Delta y$ tal que

$$S(\Delta x, \Delta y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\bar{x}, \bar{y})\Delta x \Delta y.$$

Dado que $\partial^2 f/\partial y \partial x$ es continua, se sigue que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)} \frac{1}{\Delta x \Delta y}[S(\Delta x, \Delta y)].$$

Si observamos que S es simétrica en Δx y Δy, podemos mostrar de forma similar que $\partial^2 f/\partial x \partial y$ viene dada por *la misma fórmula límite*, lo que prueba el resultado.

Nota Histórica

La igualdad de las derivadas parciales cruzadas es uno de los resultados más importantes del cálculo de varias variables. Reaparecerá más adelante en este libro en varias ocasiones, cuando estudiemos identidades vectoriales.

En la siguiente nota histórica, examinaremos el papel desempeñado por las derivadas parciales en la formulación de muchas de las ecuaciones fundamentales que gobiernan fenómenos físicos. Uno de los gigantes de esta época fue Leonhard Euler (1707-1783), quien desarrolló las ecuaciones de la mecánica de fluidos que llevan su nombre —las ecuaciones de Euler—. Fue en relación con la deducción de estas ecuaciones cuando descubrió, alrededor de 1734, la igualdad de las derivadas parciales cruzadas. Euler tenía por aquel entonces 27 años.

En el Ejercicio 11 se pide al lector deducir, a partir del Teorema 1, que para una función C^3 de x, y y z,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x}, \qquad \text{etc.}$$

En otras palabras, podemos calcular las derivadas parciales iteradas en el orden que deseemos.

EJEMPLO 3.4 Verificar la igualdad de las derivadas parciales segundas cruzadas para la función

$$f(x, y) = xe^y + yx^2.$$

Solución

Aquí

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y + 2xy, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^y + x^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^y + 2x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^y + 2x,$$

y por lo tanto tenemos que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

A veces se usa la notación f_x, f_y, f_z para las derivadas parciales $f_x = \partial f/\partial x$, y así sucesivamente. Con esta notación, escribimos $f_{xy} = (f_x)_y$, de manera que la igualdad de las derivadas parciales cruzadas se denota por $f_{xy} = f_{yx}$. Obsérvese que $f_{xy} = \partial^2 f/\partial y \partial x$, de forma que el orden de x e y se invierte en las dos notaciones; afortunadamente, la igualdad de las derivadas parciales cruzadas hace que esta ambigüedad potencial sea irrelevante. El siguiente ejemplo ilustra esta notación con subíndices.

EJEMPLO 3.5 Sea

$$z = f(x, y) = e^x \operatorname{sen} xy$$

y escribimos $x = g(s, t)$, $y = h(x, t)$ para ciertas funciones g y h. Sea

$$k(s, t) = f(g(s, t), h(s, t)).$$

Calcular k_{st}.

Solución

Por la regla de la cadena,

$$k_s = f_x g_s + f_y h_s = (e^x \operatorname{sen} xy + ye^x \cos xy)g_s + (xe^x \cos xy)h_s.$$

Derivando con respecto a t, usando la regla del producto, obtenemos

$$k_{st} = (f_x)_t g_s + f_x(g_s)_t + (f_y)_t h_s + f_y(h_s)_t.$$

Aplicando nuevamente la regla de la cadena a $(f_x)_t$ y $(f_y)_t$ se tiene

$$(f_x)_t = f_{xx}g_t + f_{xy}h_t \qquad (f_y)_t = f_{yx}g_t + f_{yy}h_t,$$

de manera que k_{st} pasa a ser

$$\begin{aligned} k_{st} &= (f_{xx}g_t + f_{xy}h_t)g_s + f_x g_{st} + (f_{yx}g_t + f_{yy}h_t)h_s + f_y h_{st} \\ &= f_{xx}g_t g_s + f_{xy}(h_t g_s + h_s g_t) + f_{yy}h_t h_s + f_x g_{st} + f_y h_{st}. \end{aligned}$$

Obsérvese que esta última fórmula es simétrica en (s, t), verificándose la igualdad $k_{st} = k_{ts}$. Al calcular f_{xx}, f_{xy} y f_{yy} se obtiene

$$\begin{aligned} k_{st} = {} & (e^x \operatorname{sen} xy + 2ye^x \cos xy - y^2 e^x \operatorname{sen} xy) g_t g_s \\ & + (xe^x \cos xy + e^x \cos xy - xye^x \operatorname{sen} xy)(h_t g_s + h_s g_t) \\ & - (x^2 e^x \operatorname{sen} xy) h_t h_s + (e^x \operatorname{sen} xy + ye^x \cos xy) g_{st} + (xe^x \cos xy) h_{st}, \end{aligned}$$

donde se entiende que $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$.

Nota Histórica

Algunas ecuaciones en derivadas parciales

> La Filosofía [Naturaleza] está escrita en ese vasto libro que está siempre abierto ante nuestros ojos —me refiero al Universo— pero no lo podemos entender si antes no aprendemos el lenguaje y nos familiarizamos con los símbolos en que está escrito. El libro está escrito en lenguaje matemático, y los símbolos son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin cuya ayuda es imposible comprender una sola palabra del mismo; sin los cuales vagabundeamos en vano por un oscuro laberinto.
>
> *Galileo*

Esta cita ilustra la creencia griega, también popular en tiempos de Galileo, de que la mayor parte de la naturaleza se podría describir por medio de las matemáticas. A finales del siglo diecisiete este pensamiento se vio espectacularmente reforzado cuando Newton usó su ley de gravitación para deducir las tres leyes de Kepler del movimiento celeste (*véase* la Sección 4.1), para explicar las mareas y para mostrar que la tierra estaba achatada por los polos. El impacto de esta filosofía sobre las matemáticas fue considerable, y muchos matemáticos intentaron «matematizar» la naturaleza. Hasta qué punto impregnan las matemáticas las ciencias físicas hoy en día (y, de forma creciente, la economía, la biología y las ciencias sociales) es el testamento del éxito de dichos intentos. A su vez, los intentos de matematizar la naturaleza han llevado a menudo a nuevos descubrimientos matemáticos.

Muchas leyes de la naturaleza se describieron en término bien de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs, ecuaciones que involucran las derivadas de una función de una sola variable, como las leyes del movimiento de los planetas), bien de ecuaciones en derivadas parciales (EDPs), esto es, ecuaciones que involucran derivadas parciales de funciones. Con el fin de dar al lector una cierta perspectiva histórica y ofrecer una motivación para el estudio de las derivadas parciales, presentamos una breve descripción de tres de las más famosas ecuaciones en derivadas parciales: la ecuación del calor, la ecuación del potencial (o ecuación de Laplace) y la ecuación de ondas. (En la Sección 8.5 se da más información sobre algunas EDPs.)

LA ECUACIÓN DEL CALOR. A comienzos del siglo diecinueve el matemático francés Joseph Fourier (1768-1830) se embarcó en el estudio de la ecuación del calor. El flujo de calor tiene aplicaciones obvias tanto en problemas industriales como científicos: una comprensión mejor del mismo haría posible, por ejemplo, fundir los metales de manera más eficiente y permitiría a los científicos determinar la temperatura de un cuerpo si conocieran la temperatura en su frontera, así como conocer aproximadamente la temperatura en el interior de la Tierra.

Supongamos que un cuerpo homogéneo $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ (Figura 3.1.2) se representa por alguna región en el espacio tridimensional. Denotemos por $T(x, y, z, t)$ la temperatura del cuerpo en el punto (x, y, z, t), en el instante t. Fourier probó, basándose en principios físicos (que se describen en la Sección 8.5), que T debe satisfacer la ecuación en derivadas parciales denominada **ecuación del calor**,

$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial T}{\partial t}, \tag{1}$$

donde k es una constante cuyo valor depende de la conductividad del material que constituye el cuerpo.

Fourier utilizó esta ecuación para resolver problemas de conducción de calor. De hecho, sus investigaciones sobre las soluciones de la Ecuación (1) le condujeron al descubrimiento de las *series de Fourier*.

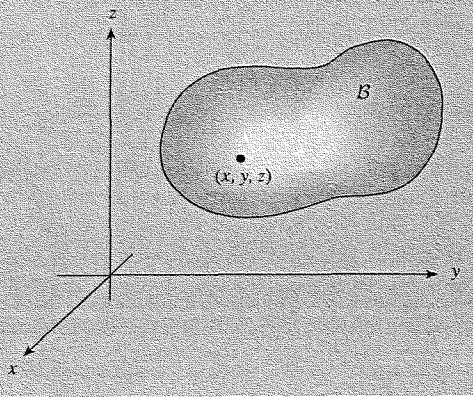


Figura 3.1.2. Cuerpo homogéneo en el espacio.

LA ECUACIÓN DEL POTENCIAL. Consideremos el potencial gravitacional V (llamado con frecuencia potencial newtoniano) de una masa m en un punto (x, y, z) debido a una masa M situada en el origen. Este potencial viene dado por $V = -GmM/r$, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Como veremos en el próximo capítulo (*véase* también el Ejercicio 23), el potencial V satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{2}$$

en todas partes salvo en el origen. Esta ecuación se conoce como ***ecuación de Laplace***. Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) había trabajado en la atracción gravitacional de masas no puntuales y fue el primero en considerar la Ecuación (2) en relación con la atracción gravitacional. Dio argumentos (que más tarde se vio que eran incorrectos) por los que la Ecuación (2) tenía que cumplirse para cualquier cuerpo y cualquier punto, tanto si estaba dentro como fuera de ese cuerpo.

Sin embargo, Laplace no fue la primera persona en escribir la Ecuación (2). La ecuación del potencial aparece por vez primera en uno de los principales trabajos de Euler en 1752, *Principios del movimiento de los fluidos*, en el que dedujo la ecuación del potencial en relación con el movimiento de fluidos (incompresibles). Euler hizo notar que no tenía la menor idea sobre cómo resolver la Ecuación (2). Más tarde, Poisson mostró que si (x, y, z) está en el interior de un cuerpo atractor, entonces V satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\rho, \tag{3}$$

donde ρ es la densidad de masa del cuerpo atractor. La Ecuación (3) se conoce hoy en día como ***ecuación de Poisson***. Poisson fue también el primero en señalar la importancia de esta ecuación en problemas que involucran campos eléctricos. Obsérvese que si la temperatura T es constante en el tiempo, entonces la Ecuación del calor (1) se reduce a la Ecuación de Laplace (2).

Las ecuaciones de Poisson y Laplace son fundamentales en muchas áreas además de la mecánica de fluidos, los campos gravitacionales y los campos electrostáticos; por ejemplo, son útiles para estudiar películas de jabón y cristales líquidos (*véase The Parsimonious Universe: Shape and Form in the Natural World*, por S. Hildebrandt y A. Tromba, Springer-Verlag, Nueva York/Berlín, 1995).

LA ECUACIÓN DE ONDAS. La ecuación de ondas lineal en el espacio tiene la forma

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \tag{4}$$

La ecuación de ondas unidimensional

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \tag{4'}$$

fue deducida alrededor de 1727 por Johann Bernoulli II y muchos años después por Jean Le Rond d'Alembert en su estudio de cómo determinar el movimiento de una cuerda vibrante (como por ejemplo una cuerda de violín). Se encontró utilidad a la Ecuación (4) tanto en el estudio de cuerpos en vibración como en elasticidad. Como veremos en la Sección 8.5 al considerar las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo, esta ecuación surge también en el estudio de la propagación de radiación electromagnética y ondas sonoras.

EJEMPLO 3.6 La ecuación en derivadas parciales $u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$, conocida como ***ecuación de Korteweg-de Vries*** (para abreviar, KdV), describe el movimiento de ondas acuáticas en un canal poco profundo.

a) Muéstrese que para cualquier constante positiva c la función

$$u(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2 [\tfrac{1}{2}(x - ct)\sqrt{c}]$$

es una solución de la ecuación de Korteweg-de Vries. (Esta solución representa una «joroba» de agua que viaja por el canal y recibe el nombre de ***solitón*** [1].)

b) ¿Cómo dependen de c la forma y la velocidad del solitón?

Solución

a) Calculamos u_t, u_x, u_{xx} y u_{xxx} usando la regla de la cadena y la formula de derivación $(d/dx)\operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$ del cálculo de una variable. Tomando $\alpha = \frac{1}{2}(x - ct)\sqrt{c}$,

$$u_t = 6c \operatorname{sech} \alpha \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{sech} \alpha = -6c \operatorname{sech}^2 \alpha \tanh \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial t}$$

$$= 3c^{5/2} \operatorname{sech}^2 \alpha \tanh \alpha = c^{3/2} u \tanh \alpha.$$

Así mismo,

$$u_x = -6c \operatorname{sech}^2 \alpha \tanh \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

$$= -3c^{3/2} \operatorname{sech}^2 \alpha \tanh \alpha = -\sqrt{c} u \tanh \alpha,$$

y por tanto $u_t + cu_x = 0$ y

$$u_{xx} = -\sqrt{c}\left[u_x \tanh \alpha + u(\operatorname{sech}^2 \alpha)\frac{\sqrt{c}}{2}\right] = -\sqrt{c}\,(\tanh \alpha)u_x - \frac{u^2}{6}$$

$$= c(\tanh^2 \alpha)u - \frac{u^2}{6} = c(1 - \operatorname{sech}^2 \alpha)u - \frac{u^2}{6}$$

$$= cu - \frac{u^2}{3} - \frac{u^2}{6} = cu - \frac{u^2}{2}.$$

[1] Los solitones fueron observados por vez primera por J. Scott Russell alrededor de 1840 en unos canales para barcazas cerca de Edimburgo. Presentó sus resultados en *Trans. R. Soc. Edinburgh* **14** (1840): 47-109.

Así pues,

$$u_{xxx} = cu_x - uu_x; \qquad \text{es decir,} \qquad u_{xxx} + uu_x = cu_x.$$

Por tanto,

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = u_t + cu_x = 0.$$

b) La velocidad del solitón es c, puesto que $u(x + ct, t) = u(x, 0)$. El solitón es más alto y más estrecho cuanto mayor es c. Su forma en el instante $t = 10$ se muestra en la Figura 3.1.3.

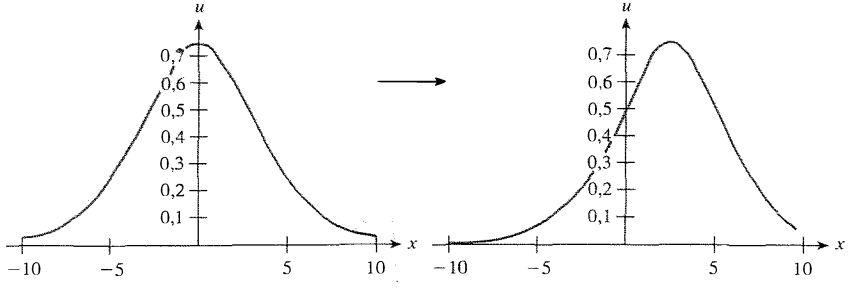


Figura 3.1.3. Gráfica de $u(x, t) = 3\,\text{sech}^2(\sqrt{c}(x - ct)/2$ para $c = \frac{1}{4}$ en los tiempos (a) $t = 0$ y (b) $t = 10$.

EJERCICIOS

En los Ejercicios 1 a 6 se pide calcular las derivadas parciales segundas $\partial^2 f/\partial x^2$, $\partial^2 f/\partial x \partial y$, $\partial^2 f/\partial y \partial x$, $\partial^2 f/\partial y^2$ para cada una de las siguientes funciones. Verificar el Teorema 1 en cada caso.

1. $f(x, y) = 2xy/(x^2 + y^2)^2$, en la región donde $(x, y) \neq (0, 0)$.
2. $f(x, y, z) = e^z + (1/x) + xe^{-y}$, en la región donde $x \neq 0$.
3. $f(x, y) = \cos(xy^2)$.
4. $f(x, y) = e^{-xy^2} + y^3x^4$.
5. $f(x, y) = 1/(\cos^2 x + e^{-y})$.
6. $f(x, y) = \log(x - y)$.
7. Calcular $\partial^2 z/\partial x^2$, $\partial^2 z/\partial x \partial y$, $\partial^2 z/\partial y \partial x$, y $\partial^2 z/\partial y^2$ para
   a) $z = 3x^2 + 2y^2$.
   b) $z = (2x^2 + 7x^2y)/3xy$, en la región donde $x \neq 0$ e $y \neq 0$.

8. Hallar todas las derivadas parciales segundas de

a) $z = \operatorname{sen}(x^2 - 3xy)$.

b) $z = x^2y^2e^{2xy}$.

9. Hallar f_{xy}, f_{yz}, f_{zx} y f_{xyz} para

$$f(x, y, z) = x^2y + xy^2 + yz^2.$$

10. Sea $z = x^4y^3 - x^8 + y^4$.

a) Calcular $\partial^3 z/\partial y\,\partial x\,\partial x$, $\partial^3 z/\partial x\,\partial y\,\partial x$ y $\partial^3 z/\partial x\,\partial x\,\partial y$ (también denotada por $\partial^3 z/\partial x^2\partial y$).

b) Calcular $\partial^3 z/\partial x\,\partial y\,\partial y$, $\partial^3 z/\partial y\,\partial x\,\partial y$ y $\partial^3 z/\partial y\,\partial y\,\partial x$ (también denotada por $\partial^3 z/\partial y^2\partial x$).

11. Utilizar el Teorema 1 para probar que, si $f(x, y, z)$ es de clase C^3, entonces

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial y\,\partial z\,\partial x}.$$

12. Verificar que

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial z\,\partial y\,\partial x}$$

para $f(x, y, z) = ze^{xy} + yz^3x^2$.

13. Comprobar que $f_{xzw} = f_{zwx}$ para $f(x, y, z, w) = e^{xyz}\operatorname{sen}(xw)$.

14. Si $f(x, y, z, w)$ es de clase C^3, demostrar que $f_{xzw} = f_{zwx}$.

15. Evaluar todas las derivadas parciales primeras y segundas de las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = x\arctan(x/y)$.

b) $f(x, y) = \cos\sqrt{x^2 + y^2}$.

c) $f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$.

16. Sea $w = f(x, y)$ una función de dos variables y sean $x = u + v$, $y = u - v$. Demostrar que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

17. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^2 y sea $\mathbf{c}(t)$ una curva C^2 en $\mathbb{R}^2$. Escribir una fórmula para la derivada segunda $(d^2/dt^2)((f \circ \mathbf{c})(t))$ utilizando dos veces la regla de la cadena.

18. Sea $f(x, y, z) = e^{xz}\tan(yz)$ y sean $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$, $z = k(s, t)$. Definimos la función $m(s, t) = f(g(s, t), h(s, t), k(s, t))$. Hallar una fórmula para m_{st} utilizando la regla de la cadena y verificar que es simétrica en s y t.

19. Se dice que una función $u = f(x, y)$ es una **función armónica** si tiene derivadas parciales segundas continuas y éstas satisfacen la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Demostrar que la función $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ es armónica.

20. ¿Cuáles de las siguientes funciones son armónicas? (*Véase* el Ejercicio 19.)

a) $f(x, y) = x^2 - y^2$.

b) $f(x, y) = x^2 + y^2$.

c) $f(x, y) = xy$.

d) $f(x, y) = y^3 + 3x^2y$.

e) $f(x, y) = \operatorname{sen} x \cosh y$.

f) $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y$.

21. Sean f y g funciones de clase C^2 de una variable. Definimos $\phi = f(x - t) + g(x + t)$.

a) Demostrar que ϕ satisface la ecuación de ondas $\partial^2\phi/\partial t^2 = \partial^2\phi/\partial x^2$.

b) Esbozar la gráfica de ϕ frente a t y x, si $f(x) = x^2$ y $g(x) = 0$.

22. **a)** Comprobar que la función $g(x, t) = 2 + e^{-t} \operatorname{sen} x$ satisface la ecuación del calor: $g_t = g_{xx}$ (aquí $g(x, t)$ representa la temperatura en un hilo metálico en el punto x en el instante t).

b) Esbozar la gráfica de g para $t \geqslant 0$. [INDICACIÓN: Considerar las secciones por los planos $t = 0$, $t = 1$ y $t = 2$.]

c) ¿Qué sucede con $g(x, t)$ cuando $t \to \infty$? Interpretar este límite en términos del comportamiento del calor en el hilo.

23. Demostrar que el potencial newtoniano $V = -GmM/r$ satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{para} \qquad (x, y, z) \neq (0, 0, 0).$$

24. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2), & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(*véase* la Figura 3.1.4).

a) Si $(x, y) \neq (0, 0)$, calcular $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$.

b) Demostrar que $(\partial f/\partial x)(0, 0) = 0 = (\partial f/\partial y)(0, 0)$.

c) Demostrar que $(\partial^2 f/\partial x \partial y)(0, 0) = 1$, $(\partial^2 f/\partial y \partial x)(0, 0) = -1$.

d) ¿Qué ha fallado? ¿Por qué no son iguales las derivadas parciales cruzadas?

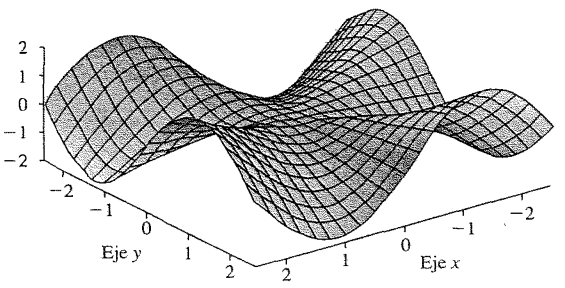


Figura 3.1.4. Gráfica de la función del Ejercicio 24.

3.2. El teorema de Taylor

Cuando introdujimos la derivada en el Capítulo 2, vimos que la *aproximación lineal* de una función desempeñaba un papel esencial, tanto por una razón geométrica —encontrar la ecuación del plano tangente— como por una razón analítica —encontrar valores aproximados de las funciones—. El teorema de Taylor trata la importante cuestión de encontrar *aproximaciones cuadráticas y de orden superior.*

El teorema de Taylor es una herramienta central para encontrar aproximaciones numéricas de funciones y, como tal, desempeña un papel importante en muchas áreas de la matemática aplicada y computacional. En la próxima sección lo utilizaremos para obtener el criterio de la derivada segunda para máximos y mínimos de funciones de varias variables.

La estrategia empleada para probar el teorema de Taylor es reducirlo al caso de una variable evaluando la función de varias variables a lo largo de rectas de la forma $\mathbf{l}(t) = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}$ que parten del punto $\mathbf{x}_0$ con dirección $\mathbf{h}$. Por lo tanto, nos resultará útil comenzar por un repaso del teorema de Taylor del cálculo de una variable.

El teorema de Taylor para una variable

Cuando uno recuerda teoremas de cursos anteriores, es útil preguntarse las siguientes cuestiones básicas: ¿Qué es lo esencial del teorema? ¿Cuáles son las ideas clave de la prueba? ¿Entiendo mejor el resultado esta segunda vez?

El principal objetivo del teorema de Taylor de una variable es encontrar aproximaciones a una función cerca de un punto dado que sean precisas con un orden mayor que el de la aproximación lineal. La idea clave de la prueba es utilizar el *teorema fundamental del cálculo* seguido de una *integración por partes*. Sin más que recordar estas ideas básicas es posible reconstruir toda la demostración. Razonar de esta forma nos ayudará a organizar todas las piezas que es necesario ensamblar para dominar las aproximaciones de Taylor de funciones de una y varias variables.

Para una función suave $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de una variable, el teorema de Taylor afirma que:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \frac{f''(x_0)}{2} h^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + R_k(x_0, h), \tag{1}$$

donde

$$R_k(x_0, h) = \int_{x_0}^{x_0 + h} \frac{(x_0 + h - \tau)^k}{k!} f^{k+1}(\tau)\, d\tau$$

es el resto. Para h pequeño, este resto es pequeño hasta orden k, en el sentido de que

$$\lim_{h \to 0} \frac{R_k(x_0, h)}{h^k} = 0. \tag{2}$$

En otras palabras, $R_k(x_0, h)$ es pequeño comparado con la cantidad, ya de por sí pequeña, h^k.

Lo que precede es el enunciado formal del teorema de Taylor. ¿Qué podemos decir de la demostración? Como prometimos, empezamos con el teorema fundamental del cálculo, escrito en la forma:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} f'(\tau)\, d\tau.$$

A continuación, escribimos $d\tau = -d(x_0 + h - \tau)$ e integramos por partes[2] para obtener:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \int_{x_0}^{x_0+h} f''(\tau)(x_0 + h - \tau)\, d\tau,$$

que es la **fórmula de Taylor de primer orden**. Integrando por partes otra vez:

$$\begin{aligned}
&\int_{x_0}^{x_0+h} f''(\tau)(x_0 + h - \tau)\, d\tau \\
&\quad = -\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_0+h} f''(\tau)\, d(x_0 + h - \tau)^2 \\
&\quad = \frac{1}{2} f''(x_0)h^2 + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_0+h} f'''(\tau)(x_0 + h - \tau)^2\, d\tau,
\end{aligned}$$

que, una vez sustituido en la fórmula precedente, da la ***fórmula de Taylor de segundo orden***:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2} f''(x_0)h^2 + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_0+h} f'''(\tau)(x_0 + h - \tau)^2\, d\tau.$$

Éste es el teorema de Taylor para $k = 2$.

El teorema de Taylor para k general se obtiene por medio de sucesivas integraciones por partes. La Fórmula (2), que dice que $R_k(x_0, h)/h^k \to 0$ cuando $h \to 0$, se puede interpretar de la siguiente manera. Para τ en el intervalo $[x_0, x_0 + h]$, tenemos que $|x_0 + h - \tau| \leqslant |h|$ y $f^{k+1}(\tau)$, puesto que $f^{k+1}(\tau)$ es continua, está acotada; pongamos que $|f^{k+1}(\tau)| \leqslant M$. Entonces:

$$|R_k(x_0, h)| = \left| \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(x_0 + h - \tau)^k}{k!} f^{k+1}(\tau)\, d\tau \right| \leqslant \frac{|h|^{k+1}}{k!} M$$

y, en particular, $|R_k(x_0, h)/h^k| \leqslant |h|M/k! \to 0$ cuando $h \to 0$.

---

[2] Recordemos que la integración por partes (la regla de derivación del producto leída al revés) dice que

$$\int_a^b u\, dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\, du.$$

Aquí tomamos $u = f'(\tau)$ y $v = x_0 + h - \tau$.

El teorema de Taylor para varias variables

El siguiente objetivo de esta sección es probar un teorema análogo que sea válido para funciones de varias variables. Ya conocemos una versión de primer orden, esto es, cuando $k = 1$. En efecto, si $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y definimos

$$R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - [\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)](\mathbf{h}),$$

de manera que

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + [\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)](\mathbf{h}) + R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}),$$

entonces, por la definición de diferenciabilidad,

$$\frac{|R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad \mathbf{h} \to 0,$$

es decir, $R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})$ se anula hasta primer orden en $\mathbf{x}_0$. Resumiendo, tenemos:

TEOREMA 2: Fórmula de Taylor de primer orden Sea $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en $\mathbf{x}_0 \in U$. Entonces,

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}),$$

donde $R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})/\|\mathbf{h}\| \to 0$ cuando $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ en $\mathbb{R}^n$.

La versión de segundo orden es como sigue:

TEOREMA 3: Fórmula de Taylor de segundo orden Sea $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con derivadas parciales continuas de tercer orden[3]. Entonces se puede escribir

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) + R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}),$$

donde $R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})/\|\mathbf{h}\|^2 \to 0$ cuando $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$, y la segunda suma es sobre todo i y j entre 1 y n (de manera que hay n^2 términos).

[3] Para probar el teorema tal como lo hemos enunciado basta con que f sea de clase C^2, pero para tener una forma conveniente para el resto supondremos que f es de clase C^3.

Nótese que este resultado se puede escribir en forma matricial como

$$f(\mathbf{h}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{1}{2}(h_1, \ldots, h_n)\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix},$$

$$+ R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}),$$

donde las derivadas de f se evalúan en $\mathbf{x}_0$.

En el transcurso de la demostración del Teorema 3 obtendremos una útil fórmula explícita para el resto, como en el teorema de una sola variable.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 3 Sea $g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})$ con $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{h}$ fijos, que es una función C^3 de t. Ahora aplicamos el teorema de Taylor de una variable (1) a g, con $k = 2$, para obtener

$$\left.\begin{aligned} g(1) &= g(0) + g'(0) + \frac{g''(0)}{2!} + R_2, \\ \text{donde} \qquad R_2 &= \int_0^1 \frac{(t-1)^2}{2!}\, g'''(t)\, dt. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Por la regla de la cadena,

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})\mathbf{h}_i; \qquad g''(t) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})h_i h_j,$$

y

$$g'''(t) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})h_i h_j h_k.$$

Escribiendo $R_2 = R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})$ hemos probado, por tanto:

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathrm{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) + R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}),$$

donde

$$R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \int_0^1 \frac{(t-1)^2}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) h_i h_j h_k \, dt. \tag{4}$$

El integrando es una función continua de t y, en consecuencia, está acotado por una constante positiva C en un pequeño entorno de $\mathbf{x}_0$ (puesto que tiene que estar próximo a su valor en $\mathbf{x}_0$). Obsérvese también que $|h_i| \leqslant \|\mathbf{h}\|$, para $\|\mathbf{h}\|$ pequeño y que, por tanto,

$$|R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})| \leqslant \|\mathbf{h}\|^3 C.$$

En particular,

$$\frac{|R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|^2} \leqslant \|\mathbf{h}\| C \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad \mathbf{h} \to \mathbf{0},$$

como se pide en el teorema.

La demostración del Teorema 2 se sigue de forma análoga de la fórmula de Taylor (1) con $k = 1$. Un argumento semejante para R_1 demuestra que $|R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})|/\|\mathbf{h}\| \to 0$ cuando $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$, aunque esto también se obtiene directamente de la definición de diferenciabilidad.

Formas del resto En el Teorema 2,

$$R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) h_i h_j \, dt = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{c}_{ij}) h_i h_j, \tag{5}$$

donde $\mathbf{c}_{ij}$ es un punto del segmento que une $\mathbf{x}_0$ con $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$.

En el Teorema 3,

$$R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \int_0^1 \frac{(t-1)^2}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) h_i h_j h_k \, dt$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\mathbf{c}_{ijk}) h_i h_j h_k, \tag{5'}$$

donde $\mathbf{c}_{ijk}$ es un punto del segmento que une $\mathbf{x}_0$ con $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$.

Las fórmulas que involucran a $\mathbf{c}_{ij}$ y $\mathbf{c}_{ijk}$ (llamadas «formas de Lagrange del resto»), se obtienen haciendo uso del *segundo teorema del valor medio para integrales*. Este teorema dice que

$$\int_a^b h(t) g(t) \, dt = h(c) \int_a^b g(t) \, dt,$$

siempre que h y g sean continuas, y $g \geqslant 0$ en $[a, b]$; aquí c es algún número entre a y b [4]. Esto se aplica en la Fórmula (5) para la forma explícita del resto con $h(t) = (\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j)(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})$ y $g(t) = 1 - t$.

La fórmula de Taylor de tercer orden es:

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)$$

$$+ \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^{n} h_i h_j h_k \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\mathbf{x}_0) + R_3(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}),$$

donde $R_3(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})/\|\mathbf{h}\|^3 \to 0$ cuando $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$, y así sucesivamente. La fórmula general se puede probar por inducción, utilizando el método de demostración que acabamos de ver.

EJEMPLO 3.7 Calcular la fórmula de Taylor de segundo orden para la función $f(x, y) = \operatorname{sen}(x + 2y)$, en un entorno del punto $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$.

Solución

Obsérvese que

$$f(0, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \cos(0 + 2 \cdot 0) = 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 2\cos(0 + 2 \cdot 0) = 2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0.$$

Así pues,

$$f(\mathbf{h}) = f(h_1, h_2) = h_1 + 2h_2 + R_2(\mathbf{0}, \mathbf{h}),$$

donde

$$\frac{R_2(\mathbf{0}, \mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|^2} \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad \mathbf{h} \to \mathbf{0}.$$

---

[4] *Demostración:* Si $g = 0$, el resultado está claro, por lo que podemos suponer que $g \neq 0$; por tanto, podemos asumir $\int_a^b g(t)\,dt > 0$. Sean M y m los valores máximo y mínimo de h, alcanzados en t_M y t_m, respectivamente. Puesto que $g(t) \geqslant 0$,

$$m \int_a^b g(t)\,dt \leqslant \int_a^b h(t)g(t)\,dt \leqslant M \int_a^b g(t)\,dt.$$

Así pues, $\left(\int_a^b h(t)g(t)\,dt\right) \Big/ \left(\int_a^b g(t)\,dt\right)$ está entre $m = h(t_m)$ y $M = h(t_M)$ y, por consiguiente, por el teorema de los valores intermedios, es igual a $h(c)$ para algún punto intermedio c.

EJEMPLO 3.8 Calcular la fórmula de Taylor de segundo orden para $f(x, y) = e^x \cos y$ alrededor del punto $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

Solución

Aquí

$$f(0, 0) = 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 1, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = -1, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0,$$

y por tanto

$$f(\mathbf{h}) = f(h_1, h_2) = 1 + h_1 + \tfrac{1}{2}h_1^2 - \tfrac{1}{2}h_2^2 + R_2(\mathbf{0}, \mathbf{h}),$$

donde

$$\frac{R_2(\mathbf{0}, \mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|^2} \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad \mathbf{h} \to \mathbf{0}.$$

En el caso de funciones de una variable se puede desarrollar $f(x)$ en una serie infinita de potencias, llamada ***serie de Taylor***,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)h^2}{2} + \cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)h^k}{k!} + \cdots,$$

siempre y cuando se pueda probar que $R_k(x_0, h) \to 0$ cuando $k \to \infty$. Análogamente, para funciones de varias variables los términos anteriores se sustituyen por los correspondientes que involucran derivadas parciales, como hemos visto en el Teorema 3. De nuevo, se puede representar una función tal por su serie de Taylor siempre que se pueda probar que $R_k \to 0$ cuando $k \to \infty$. Este punto se examina con mayor profundidad en el Ejercicio 7.

EJEMPLO 3.9 Encontrar las aproximaciones de Taylor de primer y segundo orden a $f(x, y) = \operatorname{sen}(xy)$ en el punto $(x_0, y_0) = (1, \pi/2)$.

Solución

En este caso:

$$f(x_0, y_0) = \operatorname{sen}(x_0 y_0) = \operatorname{sen}(\pi/2) = 1,$$

$$f_x(x_0, y_0) = y_0 \cos(x_0 y_0) = \frac{\pi}{2}\cos(\pi/2) = 0,$$

$$f_y(x_0, y_0) = x_0 \cos(x_0 y_0) = \cos(\pi/2) = 0,$$

$$f_{xx}(x_0, y_0) = -y_0^2 \operatorname{sen}(x_0 y_0) = -\frac{\pi^2}{4}\operatorname{sen}(\pi/2) = -\pi^2/4,$$

$$f_{xy}(x_0, y_0) = \cos(x_0 y_0) - x_0 y_0 \operatorname{sen}(x_0 y_0) = -\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}(\pi/2) = -\pi/2,$$

$$f_{yy}(x_0, y_0) = -x_0^2 \operatorname{sen}(x_0 y_0) = -\operatorname{sen}(\pi/2) = -1.$$

Así, la aproximación lineal (de primer orden) es

$$\begin{aligned} l(x, y) &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \\ &= 1 + 0 + 0 = 1, \end{aligned}$$

y la aproximación de segundo orden (o cuadrática) es

$$\begin{aligned} g(x, y) &= 1 + 0 + 0 + \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi^2}{4}\right)(x - 1)^2 + \left(-\frac{\pi}{2}\right)(x - 1)\left(y - \frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}(-1)\left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{\pi^2}{8}(x - 1)^2 - \frac{\pi}{2}(x - 1)\left(y - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(y - \frac{\pi}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Véase la Figura 3.2.1.

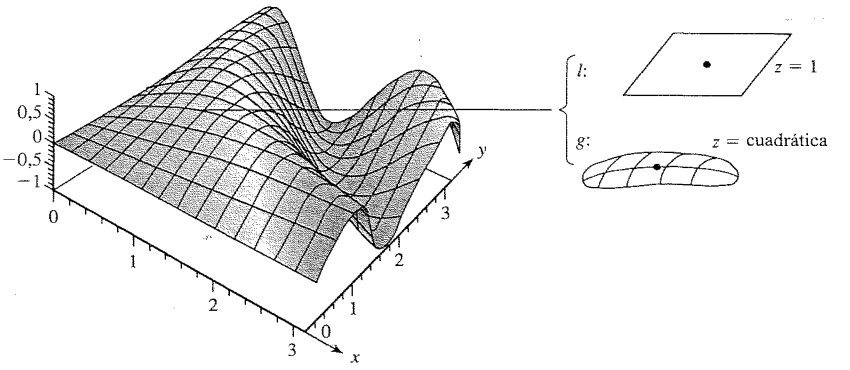


Figura 3.2.1. Las aproximaciones lineal y cuadrática a $z = \text{sen}(xy)$ cerca de $(1, \pi/2)$.

EJEMPLO 3.10 Hallar las aproximaciones lineal y cuadrática a la expresión $(3{,}98 - 1)^2/(5{,}97 - 3)^2$. Comparar con el valor exacto.

Solución

Sea $f(x, y) = (x - 1)^2/(y - 3)^2$. La expresión deseada es parecida a $f(4, 6) = 1$. Para encontrar las aproximaciones, derivamos:

$$f_x = \frac{2(x - 1)}{(y - 3)^2}, \qquad f_y = \frac{-2(x - 1)^2}{(y - 3)^3}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{-4(x - 1)}{(y - 3)^3}, \qquad f_{xx} = \frac{2}{(y - 3)^2}, \qquad f_{yy} = \frac{6(x - 1)^2}{(y - 3)^4}.$$

En el punto de aproximación, tenemos

$$f_x(4, 6) = \frac{2}{3}, \qquad f_y = -\frac{2}{3}, \qquad f_{xy} = f_{yx} = -\frac{4}{9}, \qquad f_{xx} = \frac{2}{9}, \qquad f_{yy} = \frac{2}{3}.$$

La aproximación lineal es entonces

$$1 + \frac{2}{3}(-0{,}02) - \frac{2}{3}(-0{,}03) = 1{,}00666.$$

La aproximación cuadrática es

$$1 + \frac{2}{3}(-0{,}02) - \frac{2}{3}(-0{,}03) + \frac{2}{9}\frac{(-0{,}02)^2}{2} - \frac{4}{9}(-0{,}02)(-0{,}03) + \frac{2}{3}\frac{(-0{,}03)^2}{2}$$

$$= 1{,}00674.$$

El valor «exacto» utilizando una calculadora es 1,00675.

EJERCICIOS

En cada uno de los ejercicios del 1 al 6, determinar la fórmula de Taylor de segundo orden para la función dada alrededor del punto x_0, y_0.

1. $f(x, y) = (x + y)^2$, donde $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

2. $f(x, y) = 1/(x^2 + y^2 + 1)$, donde $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

3. $f(x, y) = e^{x+y}$, donde $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

4. $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}\cos(xy)$, donde $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

5. $f(x, y) = \operatorname{sen}(xy) + \cos(xy)$, donde $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

6. $f(x, y) = e^{(x-1)^2}\cos y$, donde $x_0 = 1$, $y_0 = 0$.

7. (Difícil.) Una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se llama ***analítica*** si

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \cdots + \frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k + \cdots$$

(esto es, la serie del segundo miembro converge y es igual a $f(x + h)$).

a) Supongamos que f satisface la siguiente condición: en cualquier intervalo cerrado $[a, b]$ existe una constante M tal que para todo $k = 1, 2, 3, \ldots$, $|f^{(k)}(x)| \leqslant M^k$ para todo $x \in [a, b]$. Probar que f es analítica.

b) Sea

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases}.$$

Demostrar que f es una función C^∞, pero que f no es analítica.

c) Dar una definición de función analítica de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. Generalizar la demostración de la parte a) a esta clase de funciones.

d) Desarrollar $f(x, y) = e^{x+y}$ en serie de potencias alrededor de $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

3.3. Extremos de funciones con valores reales

Nota Histórica

Como vimos en la introducción histórica del libro, los antiguos griegos buscaron matematizar la naturaleza y encontrar, como en el modelo tolemaico del movimiento planetario, las leyes matemáticas que gobiernan el Universo. Con la vuelta al estudio del mundo griego durante el Renacimiento, se retomó este punto de vista y se reanudó la búsqueda de estas leyes. En particular surgió la cuestión de si existía *una* ley, un principio matemático que gobernara y sustituyera a todos los demás, un principio que el Creador habría utilizado en Su Grandioso Diseño del Universo.

Principio de Maupertuis. En 1774 el científico francés Pierre-Louis de Maupertuis (*véase* la Figura 3.3.1) propuso su gran esquema del mundo. El «principio metafísico» de Maupertuis consiste en suponer que la naturaleza siempre opera con la mayor economía posible. Dicho brevemente, las leyes físicas son consecuencia de un principio de «economía de medios»; la naturaleza siempre actúa de tal manera que minimiza alguna cantidad a la que Maupertuis llamó *acción*. La acción no es nada más que el gasto energético a lo largo del tiempo, o «energía × tiempo». En las aplicaciones, el tipo de energía cambia en cada caso. Por ejemplo, los sistemas físicos con frecuencia intentan «reacomodarse» para tener una energía mínima —como un balón que rueda de la cumbre de una montaña a un valle, o la irregular Tierra primordial adoptando una forma más parecida a la de una esfera; otro ejemplo es el de la forma esférica de las pompas de jabón, que está conectado con el hecho de que las superficies esféricas son las de menor área entre las que encierran un volumen dado.

Enunciamos el principio de Maupertuis formalmente como: *la naturaleza siempre minimiza la acción*. Maupertuis vio en este principio una expresión de la sabiduría del Supremo Ser, de Dios, de acuerdo con el cual todo en la naturaleza se lleva a cabo de la manera más económica. Escribió lo siguiente:

ASU - ESTADO - CONCEPCION DEL URUGUAY



Figura 3.3.1. Pierre-Louis de Maupertuis (1698-1759).

> Qué satisfacción para el espíritu humano que, al contemplar estas leyes que contienen el principio del movimiento y el reposo de todos los cuerpos del Universo, encuentra la prueba de la existencia de Aquel que gobierna el mundo.

Maupertuis creía que había descubierto la Ley Divina Fundamental, el secreto mismo de la Creación, pero realmente no fue él la primera persona en proponer este principio.

En 1707, Leibniz escribió el principio de mínima acción en una carta a Johann Bernoulli, que permaneció perdida hasta 1913, cuando fue descubierta en la biblioteca alemana de Gotha. Para Leibniz, este principio era una consecuencia natural de su gran tratado filosófico *Ensayos de teodicea*, en el que argumentaba que Dios puede pensar en todos los mundos posibles, pero que sólo desearía crear el mejor de entre ellos; por consiguiente, nuestro mundo es necesariamente *el mejor de los mundos posibles*.

La acción, tal y como fue definida por Leibniz, estaba motivada por el siguiente razonamiento, expuesto en su carta. Pensemos en un excursionista que camina por una senda, y consideremos cómo describir su acción. Si viaja dos kilómetros en una hora, diríamos que ha realizado el doble de acción que si hubiera viajado dos kilómetro en dos horas; sin

embargo, también diríamos que ha llevado a cabo el doble de acción al viajar dos kilómetros en dos horas de la que hubiera realizado de haber viajado un kilómetro en una hora. Poniendo todo junto, nuestro excursionista, al viajar dos kilómetros en una hora, realiza cuatro veces más acción que si viajara un kilómetro en una hora.

Utilizando esta idea intuitiva, Maupertuis definió acción como el producto de la distancia, la velocidad y la masa:

$$\text{Acción} = \text{Masa} \times \text{Distancia} \times \text{Velocidad}.$$

La masa se incluye en esta definición para tener en cuenta la mochila del excursionista.

Por otra parte, de acuerdo con Leibniz, la energía cinética E viene dada por la fórmula:

$$E = \frac{1}{2} \times \text{Masa} \times (\text{Velocidad})^2.$$

Dado que la velocidad es la distancia partida por el tiempo, la acción tiene dimensiones físicas de

$$\text{Energía} \times \text{Tiempo}.$$

PRINCIPIO DE MÍNIMA ACCIÓN. En los 250 años siguientes a que Maupertuis lo formulara, su *principio de mínima acción* ha resultado ser una «base teórica» para la ley de Newton de la gravitación, las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo, la ecuación de Schrödinger de la mecánica cuántica y la ecuación del campo de Einstein de la relatividad general.

Max Planck, uno de los mayores científicos de la era moderna y descubridor de la «cuantización» de la naturaleza, fue también un profundo creyente en el diseño matemático del Universo. El 19 de junio de 1922, en el «día de Leibniz» en Berlín, sólo unos pocos años después de la Primera Guerra Mundial, con su terrible carnicería, Planck pronunció una conferencia en honor de ese gran sabio.

Lo que sigue son algunos extractos de las observaciones de Planck:

> Los *Ensayos de teodicea* culminan con la afirmación de que cualquier cosa que sucede en nuestro mundo, desde lo más grande hasta lo más pequeño, tanto en la naturaleza como en la vida espiritual, está regulado para siempre por la Razón Divina, y de tal modo que nuestro mundo es el mejor de todos los mundos posibles.
>
> ¿Mantendría Leibniz esta afirmación todavía hoy, a la vista del sufrimiento actual, a la vista del amargo fracaso de los muchos esfuerzos desinteresados, a la vista del innegable hecho de que la supuesta armonía entre los hombres parece hoy en día más lejos de alcanzarse que nunca? Sin duda, responderíamos afirmativamente, incluso aunque no supiéramos que Leibniz trabajó sin cesar hasta su muerte a pesar de su destino adverso y de disgustos de todo tipo, y difícilmente nos equivocaremos al suponer que fueron precisamente los *Ensayos de teodicea* los que le dieron apoyo y consuelo

en los días más penosos de su vida. Esto es de nuevo un ejemplo conmovedor de la antigua verdad de que nuestros principios más profundos y sagrados están firmemente arraigados en lo más hondo de nuestra alma, independientemente de nuestra experiencia en el mundo exterior.

La ciencia moderna, en particular bajo la influencia del desarrollo de la noción de causalidad, se ha alejado mucho del punto de vista teleológico de Leibniz. La ciencia ha abandonado la suposición de un motivo especial, anticipatorio, y considera cada suceso del mundo natural y espiritual, al menos en principio, como reducible a estados previos. Pero todavía observamos un hecho, especialmente en la ciencia más exacta, que, al menos en este contexto, es de lo más sorprendente. La física actual, en la medida en que está organizada teóricamente, está gobernada completamente por un sistema de ecuaciones diferenciales espacio-temporales que establecen que cada proceso en la naturaleza está totalmente determinado por los sucesos que acaecen en su entorno temporal y espacial inmediato. Este rico sistema de ecuaciones diferenciales, aunque difieren en el detalle, puesto que se refieren a procesos mecánicos, eléctricos, magnéticos y térmicos, está ahora completamente contenido en una única afirmación, *el principio de mínima acción*. Éste, en breve, afirma que, de todos los posibles procesos, los únicos que en efecto ocurren son aquellos que implican un gasto de acción mínimo. Como se puede ver, sólo hace falta un pequeño paso para reconocer en la preferencia por la menor cantidad de acción los designios de la Razón Divina, y descubrir así una parte del ordenamiento teleológico del universo de Leibniz[5].

En la física moderna el principio de mínima acción desempeña un papel relativamente menor. No encaja demasiado bien en el marco de las teorías actuales. Por supuesto, se admite que es un enunciado correcto; y, sin embargo, frecuentemente no sirve como fundamento de la teoría, sino como un apéndice verdadero pero superfluo, puesto que la física teórica actual está adaptada completamente al principio de los efectos locales infinitesimales, y considera las extensiones a espacios y tiempos mayores como una complicación innecesaria y antieconómica del método. Por consiguiente, la física se inclina a considerar el principio de mínima acción más como una curiosidad formal y accidental que como un pilar del conocimiento físico.

Se puede decir mucho más sobre la historia del principio de mínima acción, sobre el que volveremos en la Sección 4.1.

[5] Para más información y más detalles históricos, consúltese el libro de S. Hildebrandt y A. J. Tromba, *The Parsimonious Universe: Shape and Form in the Natural World*, Springer-Verlag, Nueva York/Berlín, 1995.

Máximos y mínimos de funciones de *n* variables

Como muestran los comentarios anteriores, para Leibniz, Euler y Maupertuis, y también para gran parte de la ciencia moderna, todo en la naturaleza es consecuencia de algún principio de

máximo o mínimo. Para elaborar unas ideas tan grandiosas —y también otras más prácticas— de forma efectiva, antes es necesario aprender las técnicas para encontrar máximos y mínimos de funciones de n variables.

Puntos de extremo

Entre las características geométricas básicas de la gráfica de una función se encuentran sus puntos de extremo, en los que la función alcanza su mayor y menor valor. En esta sección obtendremos un método para determinar estos puntos. De hecho, el método encuentra también puntos de extremo locales. Éstos son puntos en los que la función alcanza un valor máximo o mínimo respecto a los puntos cercanos. Comenzamos definiendo los términos empleados.

DEFINICIÓN Si f: $U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función escalar dada, se dice que un punto $\mathbf{x}_0 \in U$ es un **punto de mínimo local** de f si existe un entorno V de $\mathbf{x}_0$ tal que para todos los puntos $\mathbf{x}$ de V, $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$ (*véase* la Figura 3.3.2). Análogamente, $\mathbf{x}_0 \in U$ es un **punto de máximo local** si existe un entorno V de $\mathbf{x}_0$ tal que $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$ para todo $\mathbf{x} \in V$. El punto $\mathbf{x}_0 \in U$ es un ***punto de extremo local*** o ***relativo*** si es punto de mínimo local o de máximo local. Un punto $\mathbf{x}_0$ es un ***punto crítico*** de f si, o bien f *no es diferenciable* en $\mathbf{x}_0$, o bien $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. Si un punto crítico no es punto de extremo local, se dice que es un **punto de silla**[6].

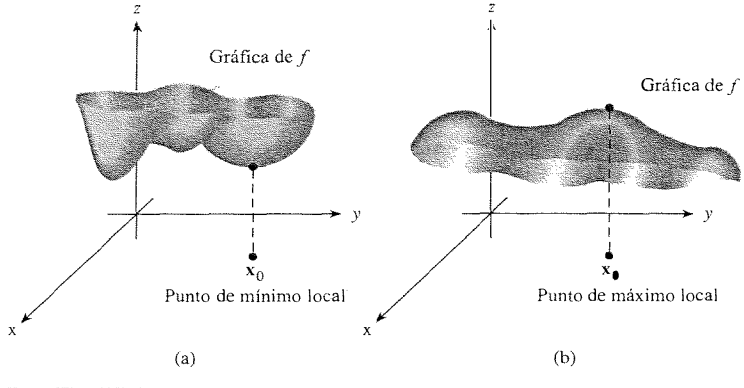


Figura 3.3.2. Puntos de (a) mínimo local y (b) máximo local para una función de dos variables.

Condición de la derivada primera para puntos de extremo local

La búsqueda de los puntos de extremo está basada en el hecho siguiente, que debería conocerse del cálculo de una variable (caso $n = 1$): todo punto de extremo es un punto crítico.

[6] El término «punto de silla» no siempre se usa con esta generalidad; examinaremos los puntos de silla con más detalle en el desarrollo posterior.

TEOREMA 4: Condición de la derivada primera para puntos de extremo local Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, la función $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable y $\mathbf{x}_0 \in U$ es un punto de extremo local, entonces $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, es decir, $\mathbf{x}_0$ es un punto crítico de f.

DEMOSTRACIÓN Supongamos que f alcanza un máximo local en $\mathbf{x}_0$. Entonces para cualquier $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ la función $g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})$ tiene un máximo local en $t = 0$. Por consiguiente, el cálculo de una variable nos dice que $g'(0) = 0$[7]. Por otra parte, por la regla de la cadena,

$$g'(0) = [\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)]\mathbf{h}.$$

Así pues, $[\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)]\mathbf{h} = 0$ para todo $\mathbf{h}$, de modo que $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. El caso en que f alcanza un mínimo local en $\mathbf{x}_0$ es completamente análogo.

Si recordamos que $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ significa que todas las componentes de $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ son cero, podemos reformular el resultado del Teorema 4: si $\mathbf{x}_0$ es un punto de extremo local, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n;$$

esto es, cada derivada parcial es cero en $\mathbf{x}_0$. En otras palabras, $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, donde ∇f es el gradiente de f.

Si queremos hallar lo puntos de extremo o los puntos de extremo local de una función, según el Teorema 4 debemos buscar entre los puntos críticos. En ocasiones es posible decidir si efectivamente son puntos de extremo o puntos de extremo local por inspección, pero lo común es utilizar criterios (que desarrollaremos más adelante) análogos al criterio de la derivada segunda del cálculo de una variable.

EJEMPLO 3.11 Hallar los puntos de máximo y de mínimo de la función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + y^2$. (Ignorar el hecho de que este ejemplo se puede resolver por inspección.)

Solución

En primer lugar identificamos los puntos críticos de f resolviendo las dos ecuaciones $\partial f/\partial x = 0$ y $\partial f/\partial y = 0$, para x e y. Pero

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y,$$

de modo que el único punto crítico es el origen (0, 0), donde el valor de la función es cero. Dado que $f(x, y) \geq 0$, este punto es un punto de mínimo relativo —de hecho, un punto de mínimo absoluto o global— de f. Puesto que (0, 0) es el único punto crítico, no hay puntos de máximo.

[7] Recordemos la demostración del cálculo de una variable: como $g(0)$ es un máximo local, $g(t) \leq g(0)$ para $t > 0$ pequeño, de modo que $g(t) - g(0) \leq 0$, y por tanto $g'(0) = \lim_{t \to 0^+} (g(t) - g(0))/t \leq 0$, donde $\lim_{t \to 0^+}$ denota el límite cuando $t \to 0$, $t > 0$. Para $t < 0$ pequeño, tendríamos de manera análoga $g'(0) = \lim_{t \to 0^-} g(t) - g(0))/t \geq 0$. Por consiguiente, $g'(0) = 0$.

EJEMPLO 3.12 Consideramos la función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x^2 - y^2$. Ignorando por el momento que esta función tiene un punto de silla y ningún punto de extremo, aplicar el método del Teorema 4 para localizar los puntos de extremo.

Solución

Como en el Ejemplo 3.11, vemos que f sólo tiene un punto crítico, el origen, y que el valor de f en él es cero. Si examinamos los valores de f en puntos próximos al origen, vemos que $f(x, 0) \geqslant f(0, 0)$ y $f(0, y) \leqslant f(0, 0)$, con desigualdades estrictas cuando $x \neq 0$ y $y \neq 0$. Dado que x o y pueden tomarse arbitrariamente pequeños, el origen no puede ser ni un punto de mínimo relativo ni un punto de máximo relativo (por lo tanto, es un punto de silla). Por consiguiente, esta función no puede tener puntos de extremo relativo (*véase* la Figura 3.3.3).

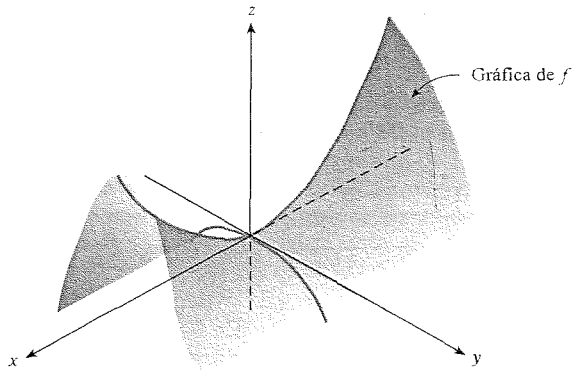


Figura 3.3.3. Una función de dos variables con un punto de silla.

EJEMPLO 3.13 Hallar todos los puntos críticos de $z = x^2y + y^2x$.

Solución

Derivando, obtenemos que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + y^2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + x^2.$$

Igualando las derivadas parciales a cero,

$$2xy + y^2 = 0, \qquad 2xy + x^2 = 0.$$

Restando, obtenemos $x^2 = y^2$. Así, $x = \pm y$. Sustituyendo $x = \pm y$ en la primera de las dos ecuaciones anteriores, encontramos que

$$2y^2 + y^2 = 3y^2 = 0,$$

de modo que $y = 0$ y por tanto $x = 0$. Si $x = -y$, entonces

$$-2y^2 + y^2 = -y^2 = 0,$$

de manera que $y = 0$ y por consiguiente $x = 0$. Así pues, el único punto crítico es (0, 0). Para $x = y$, $z = 2x^3$, que es tanto positivo como negativo para x cerca de cero. Por lo tanto, (0, 0) no es punto de extremo relativo.

EJEMPLO 3.14 Obsérvese la Figura 3.3.4, una gráfica dibujada con computador de la función $z = 2(x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$. ¿Dónde están los puntos críticos?

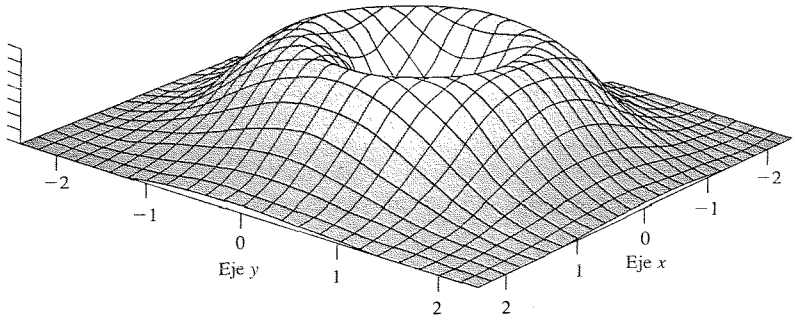


Figura 3.3.4. El volcán: $z = 2(x^2 + y^2)\exp(-x^2 - y^2)$.

Solución

Dado que $z = 2(x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}$, tenemos que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x(e^{-x^2-y^2}) + 2(x^2 + y^2)e^{-x^2-y^2}(-2x)$$
$$= e^{-x^2-y^2}[4x - 4x(x^2 + y^2)]$$
$$= 4x(e^{-x^2-y^2})(1 - x^2 - y^2)$$

y,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y(e^{-x^2-y^2})(1 - x^2 - y^2).$$

Ambas se anulan si $x = y = 0$ o si $x^2 + y^2 = 1$. Esto es consistente con la figura: los puntos del borde del cráter son puntos de máximo y el origen es un punto de mínimo.

Criterio de la derivada segunda para puntos de extremo local

El resto de la sección está dedicado a obtener un criterio, basado en la derivada segunda, para decidir si un punto crítico es un punto de extremo relativo. En el caso particular $n = 1$, nuestro criterio se reducirá a la conocida condición del cálculo de una variable: si $f''(x_0) > 0$, el punto es de mínimo y si $f''(x_0) < 0$, es de máximo. Sin embargo, en el caso general la derivada segunda es un objeto matemático bastante complicado. Para enunciar nuestro criterio, introducimos

una versión de la derivada segunda llamada hessiana, que a su vez está relacionada con las formas cuadráticas. Las ***formas cuadráticas*** son funciones g: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ del tipo

$$g(h_1, \ldots, h_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j$$

donde $[a_{ij}]$ es una matriz $n \times n$. En términos de multiplicación de matrices, podemos escribir

$$g(h_1, \ldots, h_n) = [h_1, \ldots, h_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}.$$

Por ejemplo, si $n = 3$,

$$g(h_1, h_2, h_3) = h_1^2 - 2h_1h_2 + h_3^2 = [h_1h_2h_3] \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

es una forma cuadrática.

Si queremos, podemos suponer que $[a_{ij}]$ es simétrica; de hecho, g no cambia si reemplazamos $[a_{ij}]$ por la matriz simétrica $[b_{ij}]$, donde $b_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$, pues $h_ih_j = h_jh_i$ y la suma es sobre todo i y j. La *naturaleza cuadrática* de g se refleja en la identidad

$$g(\lambda h_1, \ldots, \lambda h_n) = \lambda^2 g(h_1, \ldots, h_n),$$

que se deduce de la definición.

Ahora estamos preparados para definir las funciones hessianas (llamadas así en honor de Ludwig Otto Hesse, quien las introdujo en 1844).

DEFINICIÓN Supongamos que f: $U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tiene derivadas de segundo orden continuas $(\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j)(\mathbf{x}_0)$, para $i, j = 1, \ldots, n$, en el punto $\mathbf{x}_0 \in U$. La ***hessiana de*** f ***en*** $\mathbf{x}_0$ es la forma cuadrática definida por:

$$\begin{aligned} Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) h_i h_j \\ &= \frac{1}{2} (h_1, \ldots, h_n) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nótese que, por la igualdad de las derivadas parciales cruzadas, la matriz de las derivadas segundas es simétrica.

Esta función se usa, por lo común, en puntos críticos $\mathbf{x}_0 \in U$. En este caso, $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, de manera que la fórmula de Taylor (*véase* el Teorema 3, Sección 3.2) se puede escribir de la forma

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) + R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}).$$

Así, *en un punto crítico la hessiana es igual al primer término no constante de la serie de Taylor de f.*

Una forma cuadrática $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dice ***definida positiva*** si $g(\mathbf{h}) \geqslant 0$ para todo $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ y $g(\mathbf{h}) = 0$ sólo para $\mathbf{h} = \mathbf{0}$. De manera análoga, g es ***definida negativa*** si $g(\mathbf{h}) \leqslant 0$ y $g(\mathbf{h}) = 0$ sólo para $\mathbf{h} = \mathbf{0}$. Obsérvese que si $n = 1$, $Hf(x_0)(h) = \frac{1}{2}f''(x_0)h^2$, que es definida positiva si y sólo si $f''(x_0) > 0$.

TEOREMA 5: Criterio de la derivada segunda para extremos locales Si $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es de clase C^3, $\mathbf{x}_0 \in U$ es un punto crítico de f, y la forma cuadrática hessiana $Hf(\mathbf{x}_0)$ es definida positiva, entonces $\mathbf{x}_0$ es un punto de mínimo relativo de f. Análogamente, si $Hf(\mathbf{x}_0)$ es definida negativa, entonces, $\mathbf{x}_0$ es un punto de máximo relativo.

En realidad probaremos que los extremos obtenidos con este criterio son *estrictos*. Un punto de máximo relativo $\mathbf{x}_0$ se dice que es ***estricto*** si $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}_0)$ para $\mathbf{x}$ próximo a $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$. Los puntos de mínimo relativo estricto se definen de forma análoga. El teorema también es válido si f es tan sólo C^2; hemos supuesto que f es C^3 por simplicidad.

La demostración del Teorema 5 requiere del teorema de Taylor y el siguiente resultado de álgebra lineal.

LEMA 1 Si $B = [b_{ij}]$ es un matriz real $n \times n$, y si la forma cuadrática asociada

$$H: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (h_1, \ldots, h_n) \to \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} h_i h_j$$

es definida positiva, entonces existe una constante $M > 0$ tal que para todo $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$,

$$H(\mathbf{h}) \geqslant M\|\mathbf{h}\|^2.$$

DEMOSTRACIÓN Para $\|\mathbf{h}\| = 1$, tomamos $g(\mathbf{h}) = H(\mathbf{h})$. Entonces g es una función continua de $\mathbf{h}$ para $\|\mathbf{h}\| = 1$ y por tanto alcanza su valor mínimo, digamos M[8]. Como H es cuadrática, tenemos

$$H(\mathbf{h}) = H\left(\frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}\|\mathbf{h}\|\right) = \mathbf{H}\left(\frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}\right)\|\mathbf{h}\|^2 = g\left(\frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}\right)\|\mathbf{h}\|^2 \geqslant M\|\mathbf{h}\|^2$$

para cualquier $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$. (El resultado es válido de manera obvia si $\mathbf{h} = \mathbf{0}$.)

[8] Aquí usamos, sin demostración, un teorema análogo al del cálculo de una variable que afirma que toda función continua en un intervalo $[a, b]$ alcanza su máximo y su mínimo; *véase* Teorema 7.

Nótese que la forma cuadrática asociada con la matriz simétrica $\frac{1}{2}(\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j)$ es exactamente la hessiana.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 5 Recordemos que si $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es de clase C^3 y $\mathbf{x}_0 \in U$ es un punto crítico, el teorema de Taylor se puede expresar de la forma

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) + R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}),$$

donde $(R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}))/\|\mathbf{h}\|^2 \to 0$ cuando $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$.

Como $Hf(\mathbf{x}_0)$ es definida positiva, el Lema 1 asegura la existencia de una constante $M > 0$ tal que para todo $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$,

$$Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) \geqslant M\|\mathbf{h}\|^2.$$

Como $R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})/\|\mathbf{h}\|^2 \to 0$ cuando $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$, existe un $\delta > 0$ tal que para $0 < \|\mathbf{h}\| < \delta$,

$$|R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})| < M\|\mathbf{h}\|^2.$$

Así, $0 < Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) + R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)$ para $0 < \|\mathbf{h}\| < \delta$, de manera que $\mathbf{x}_0$ es un punto de mínimo relativo, de hecho, un punto de mínimo relativo estricto.

La demostración en el caso de que la forma cuadrática hessiana sea definida negativa es similar; también puede obtenerse aplicando la anterior a $-f$, y se deja como ejercicio.

EJEMPLO 3.15 Consideramos nuevamente la función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x^2 + y^2$. El $(0, 0)$ es un punto crítico, y f ya está dada en la forma del teorema de Taylor:

$$f((0, 0) + (h_1, h_2)) = f(0, 0) + (h_1^2 + h_2^2) + 0.$$

Podemos ver directamente que la forma cuadrática hessiana en $(0, 0)$ es

$$Hf(\mathbf{0})(\mathbf{h}) = h_1^2 + h_2^2,$$

que evidentemente es definida positiva. Así, $(0, 0)$ es un punto de mínimo relativo. Por supuesto, este caso sencillo se podría haber hecho sin ningún cálculo. En efecto, está claro que $f(x, y) > 0$ para todo $(x, y) \neq (0, 0)$.

Para funciones de dos variables $f(x, y)$, se puede escribir la forma cuadrática hessiana como sigue:

$$Hf(x, y)(\mathbf{h}) = \tfrac{1}{2}[h_1, h_2] \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

Presentaremos ahora un criterio que sirve para saber cuándo una forma cuadrática definida por una matriz 2×2 de ese tipo es definida positiva. Será útil combinado con el Teorema 5.

LEMA 2 Sea

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad H(\mathbf{h}) = \tfrac{1}{2}[h_1, h_2]B \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}.$$

Entonces $H(\mathbf{h})$ es definida positiva si y sólo si $a > 0$ y $\det B = ac - b^2 > 0$.

DEMOSTRACIÓN Tenemos

$$H(\mathbf{h}) = \tfrac{1}{2}[h_1, h_2] \begin{bmatrix} ah_1 + bh_2 \\ bh_1 + ch_2 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}(ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2).$$

Completamos el cuadrado escribiendo

$$H(\mathbf{h}) = \frac{1}{2}a\left(h_1 + \frac{b}{a}h_2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(c - \frac{b^2}{a}\right)h_2^2.$$

Supongamos que H es definida positiva. Haciendo $h_2 = 0$, vemos que $a > 0$. Tomando $h_1 = -(b/a)h_2$, obtenemos $c - b^2/a > 0$. Recíprocamente, si $a > 0$ y $c - b^2/a > 0$, $H(\mathbf{h})$ es una suma de cuadrados, de manera que $H(\mathbf{h}) \geqslant 0$. Si $H(\mathbf{h}) = 0$, entonces cada cuadrado tiene que ser cero. Esto implica que tanto h_1 como h_2 deben ser cero, de modo que $H(\mathbf{h})$ es definida positiva.

De manera análoga, se puede ver que $H(\mathbf{h})$ es definida negativa si y sólo si $a < 0$ y $ac - b^2 > 0$. Obsérvese que una formulación alternativa es que $H(\mathbf{h})$ es definida positiva (respectivamente, negativa) si $a + c = \text{traza } B > 0$ (respectivamente, < 0) y $\det B > 0$.

Criterio del determinante para decidir si una forma cuadrática es definida positiva

Hay criterios similares para una matriz $n \times n$ simétrica B. Consideramos las n submatrices cuadradas a lo largo de la diagonal (*véase* la Figura 3.3.5). B es definida positiva (esto es, la forma cuadrática asociada con B es definida positiva) si y sólo si los determinantes de estas submatrices diagonales son todos mayores que cero. Para B definida negativa, los signos deben ser

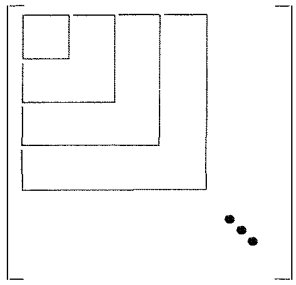


Figura 3.3.5. En el criterio para decidir si una forma cuadrática es definida positiva se usan submatrices «diagonales»: todas deben tener determinante > 0.

alternativamente <0 y >0. No demostraremos aquí el caso general[9]. Si los determinantes de las submatrices diagonales son todos distintos de cero, pero la matriz no es definida positiva ni negativa, el punto crítico es de ***tipo silla***; en este caso se puede demostrar, como en el Ejemplo 3.12, que el punto no es ni de máximo ni de mínimo.

Criterio de la derivada segunda

El Lema 2 y el Teorema 5 implican el siguiente resultado:

TEOREMA 6: Criterio de la segunda derivada para los puntos de máximo y mínimo de funciones de dos variables Sea $f(x, y)$ de clase C^3 en un conjunto abierto U de $\mathbb{R}^2$. Un punto (x_0, y_0) es un punto de mínimo local (estricto) de f si se cumplen las tres condiciones siguientes:

i) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$

ii) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0.$

iii) $D = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$ en (x_0, y_0).

(D se conoce como ***discriminante*** de la forma cuadrática hessiana). Si en ii) tenemos <0 en lugar de >0 sin cambiar la condición iii), entonces tenemos un punto de máximo local (estricto).

EJEMPLO 3.16 Clasificar los puntos críticos de la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $(x, y) \to x^2 - 2xy + 2y^2$.

Solución

Como en el Ejemplo 3.15, $f(0, 0) = 0$, el origen es el único punto crítico y la forma cuadrática hessiana es

$$Hf(\mathbf{0})(\mathbf{h}) = h_1^2 - 2h_1h_2 + 2h_2^2 = (h_1 - h_2)^2 + h_2^2,$$

que es claramente definida positiva. Así, (0, 0) es un punto de mínimo relativo de f. Como alternativa, podemos aplicar el Teorema 6. En (0, 0), $\partial^2 f/\partial x^2 = 2$, $\partial^2 f/\partial y^2 = 4$ y $\partial^2 f/\partial x \partial y = -2$. Se cumplen las condiciones i), ii) y iii), de modo que (0, 0) es un punto de mínimo relativo de f.

[9] Esto se demuestra, por ejemplo, en el libro de K. Hoffman y R. Kunze, *Linear Algebra*, Prentice Hall, Englewoods Cliffs, NJ, 1961, pp. 249-251. Los estudiantes familiarizados con el álgebra lineal se darán cuenta de que B es definida positiva cuando todos sus autovalores (que son necesariamente reales, puesto que B es simétrica) son positivos.

Si en el Teorema 6 se tiene $D < 0$, entonces estamos ante un punto de silla. De hecho, se puede demostrar que $f(x, y)$ es mayor que $f(x_0, y_0)$ cuando nos alejamos de (x_0, y_0) en una cierta dirección, y menor cuando nos alejamos en la dirección ortogonal (*véase* el Ejercicio 26). Por consiguiente, el aspecto general es similar al mostrado en la Figura 3.3.4. Para conocer la forma de la gráfica cerca de (x_0, y_0) en el caso $D = 0$ es necesario hacer un análisis más profundo.

Resumamos el procedimiento para tratar con funciones de dos variables: hallamos todos los puntos críticos y calculamos las correspondientes formas cuadráticas hessianas; algunas de estas hessianas pueden ser definidas positivas, indicando que se trata de un punto de mínimo relativo; otras pueden ser definidas negativas, indicando que estamos ante un punto de máximo relativo; y algunas tomarán valores positivos y valores negativos, indicando que el punto es de silla. La forma de la gráfica en un punto de silla en el que $D < 0$ es como la de la Figura 3.3.4. Los puntos críticos para los que $D \neq 0$ se llaman ***puntos críticos no degenerados***. Dichos puntos son puntos de máximo, de mínimo o de silla. Los puntos críticos restantes, para los cuales $D = 0$, se pueden examinar directamente, por medio de conjuntos de nivel, secciones o cualquier otro método. Dichos puntos críticos se llaman ***degenerados***; los métodos desarrollados en este capítulo no nos dan una idea del comportamiento de una función cerca de un punto de este tipo, por lo que hay que estudiar cada punto por separado.

EJEMPLO 3.17 Localizar los puntos de máximo y mínimo relativos, y los puntos de silla de la función

$$f(x, y) = \log(x^2 + y^2 + 1).$$

Solución

En primer lugar tenemos que localizar los puntos críticos de esta función; por consiguiente, de acuerdo con el Teorema 3, calculamos

$$\nabla f(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}\,\mathbf{i} + \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}\,\mathbf{j}.$$

Así, $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$ si y sólo si $(x, y) = (0, 0)$, de modo que el único punto crítico de f es $(0, 0)$. Ahora debemos determinar si se trata de un punto de máximo, de mínimo o de silla. Las derivadas parciales segundas son

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(x^2 + y^2 + 1) - (2x)(2x)}{(x^2 + y^2 + 1)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2(x^2 + y^2 + 1) - (2y)(2y)}{(x^2 + y^2 + 1)^2},$$

y:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-2x(2y)}{(x^2 + y^2 + 1)^2}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0,$$

lo que lleva a

$$D = 2 \cdot 2 = 4 > 0.$$

Como $(\partial^2 f/\partial x^2)(0, 0) > 0$, concluimos, por el Teorema 6, que $(0, 0)$ es un punto de mínimo local. (¿Se puede mostrar esto a partir tan sólo de que $\log t$ es una función creciente en $t > 0$?)

EJEMPLO 3.18 La gráfica de la función $g(x, y) = 1/xy$ es una superficie S en $\mathbb{R}^3$. Hallar los puntos de S más cercanos al origen $(0, 0, 0)$. (*Véase* la Figura 3.3.6.)

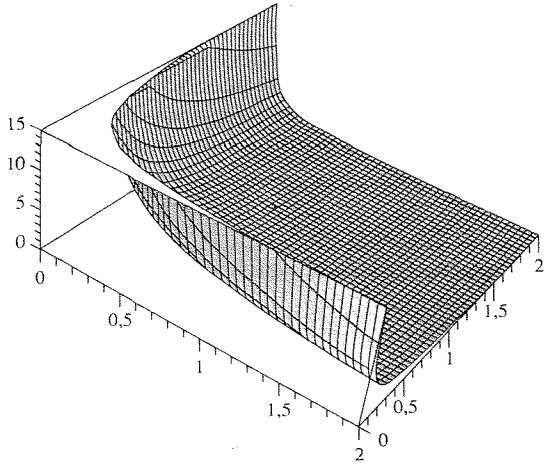


Figura 3.3.6. La superficie $z = 1/xy$ en el primer cuadrante. (Las figuras en los otros cuadrantes son similares; no obstante, $z < 0$ en el segundo y en el cuarto cuadrante.)

Solución

Cada punto de S es de la forma $(x, y, 1/xy)$. La distancia de este punto al origen es

$$d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2y^2}}.$$

Como es más fácil trabajar con el cuadrado de d, tomamos $f(x, y) = x^2 + y^2 + (1/x^2y^2)$, que tendrá el mismo punto de mínimo. Nótese que $f(x, y)$ se hace muy grande a medida que x e y se hacen cada vez mayores; $f(x, y)$ también se hace muy grande cuando (x, y) se acerca a los ejes x o y, donde f no está definida; así pues, f tiene que alcanzar un mínimo en algún punto crítico. Los puntos críticos están determinados por:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - \frac{2}{x^3y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - \frac{2}{y^3x^2} = 0,$$

es decir, $x^4y^2 - 1 = 0$ y $x^2y^4 - 1 = 0$. De la primera ecuación obtenemos $y^2 = 1/x^4$ y, al sustituir esto en la segunda ecuación, obtenemos

$$\frac{x^2}{x^8} = 1 = \frac{1}{x^6}.$$

Así, $x = \pm 1$ e $y = \pm 1$, de donde se sigue que f tiene cuatro puntos críticos, a saber, $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ y $(-1, -1)$. Nótese que f toma el valor 3 en todos estos puntos, de modo que todos ellos son mínimos. Por consiguiente, los puntos de la superficie más cercanos al origen son $(1, 1, 1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$ y $(-1, -1, 1)$, y la distancia mínima es $\sqrt{3}$. ¿Es esto consistente con la gráfica de la Figura 3.3.6?

EJEMPLO 3.19 Analizar el comportamiento de $z = x^5y + xy^5 + xy$ en sus puntos críticos.

Solución

Las derivadas parciales primeras son

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4y + y^5 + y = y(5x^4 + y^4 + 1)$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x(5y^4 + x^4 + 1).$$

Los términos $5x^4 + y^4 + 1$ y $5y^4 + x^4 + 1$ son siempre mayores o iguales que 1, de donde se deduce que el único punto crítico es $(0, 0)$.

Las derivadas parciales segundas son

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 20x^3y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 20xy^3,$$

y

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 5x^4 + 5y^4 + 1.$$

Así, $D = -1$ en $(0, 0)$, de modo que $(0, 0)$ es un punto de silla no degenerado y la gráfica de z cerca de $(0, 0)$ tiene el mismo aspecto que la gráfica de la Figura 3.3.3.

Máximos y mínimos globales

Terminamos esta sección con un estudio de la teoría de máximos y mínimos *absolutos* o *globales* de funciones de varias variables. Desgraciadamente, en general es mucho más difícil localizar los máximos y mínimos absolutos para funciones de $\mathbb{R}^n$ que para funciones de una variable.

DEFINICIÓN Supongamos que $f: A \to \mathbb{R}$ es una función definida en un conjunto A de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. Se dice que un punto $\mathbf{x}_0 \in A$ es un ***punto de máximo absoluto*** (o de ***mínimo absoluto***) de f si $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$ [o $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$] para todo $\mathbf{x} \in A$.

En cálculo de una variable se aprende —aunque con frecuencia no se demuestre— que toda función continua sobre un intervalo cerrado I alcanza su valor máximo (o mínimo) absoluto en algún punto $\mathbf{x}_0$ de I. En $\mathbb{R}^n$ también se cumple una generalización de este resultado teórico. Estos teoremas garantizan que el máximo o el mínimo que uno busca realmente existen; por consiguiente, la búsqueda no será en vano.

DEFINICIÓN Se dice que un conjunto $D \in \mathbb{R}^n$ es ***acotado*** si existe un número $M > 0$ tal que $\|\mathbf{x}\| < M$ para todo $\mathbf{x} \in D$. Un conjunto es ***cerrado*** si contiene todos los puntos de su frontera.

Así, un conjunto está acotado si está estrictamente contenido en alguna bola (que puede ser grande). La generalización adecuada del teorema de una variable sobre máximos y mínimos es el siguiente resultado, que enunciamos sin demostración.

TEOREMA 7: Teorema de existencia de máximos y mínimos globales Sea D cerrado y acotado en $\mathbb{R}^n$, y sea $f: D \to \mathbb{R}$ continua. Entonces existen puntos $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{x}_1$ de D donde f alcanza sus valores máximo y mínimo.

Dicho de manera simple, $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{x}_1$ son puntos donde f alcanza su valores mayor y menor. Como en el cálculo de una variable, estos puntos no tienen por qué ser únicos.

Supongamos ahora que $D = U \cup \partial U$, donde U es abierto y ∂U es su frontera. Si $D \subset \mathbb{R}^2$, supondremos que ∂U es una curva suave a trozos; es decir, D es una región limitada por una familia de curvas suaves —por ejemplo, un cuadrado o los conjuntos que se muestran en la Figura 3.3.7.

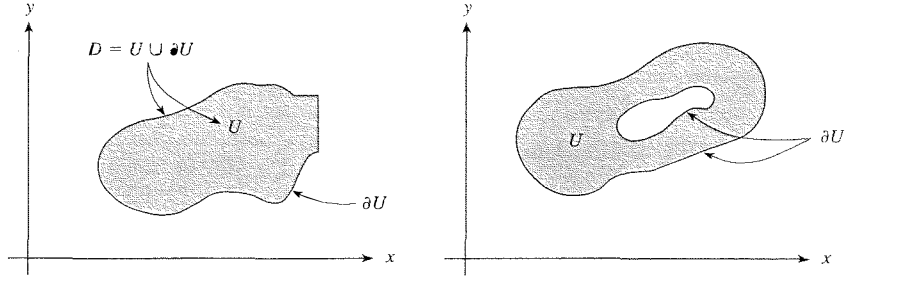


Figura 3.3.7. $D = U \cup \partial U$. Dos ejemplos de regiones cuya frontera es una curva suave a trozos.

Si $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{x}_1$ están en U, sabemos, por el Teorema 4, que son puntos críticos de f. Si están en ∂U y ∂U es una curva suave (esto es, la imagen de una trayectoria suave $\mathbf{c}$ con $\mathbf{c}' \neq 0$), entonces son puntos de máximo o de mínimo de f considerada como una función sobre ∂U. Estas

observaciones proporcionan un método para hallar los valores máximo y mínimo absolutos de f en una región D.

Estrategia para hallar los puntos de máximo y mínimo absolutos en una región con frontera Sea f una función continua de dos variables definida en una región D en $\mathbb{R}^2$ cerrada y acotada, que está limitada por una curva cerrada suave. Para hallar el máximo y el mínimo absolutos de f en D:

i) Localizar todos los puntos críticos de f en D.

ii) Hallar los puntos críticos de f considerada como una función definida sólo en ∂D.

iii) Calcular el valor de f en todos estos puntos críticos.

iv) Comparar todos estos valores y seleccionar el mayor y el menor.

Si D es una región limitada por una familia de curvas suaves (como lo es un cuadrado), se sigue un procedimiento análogo, pero incluyendo en el paso iii) los puntos donde se unen las curvas (en el caso del cuadrado, las esquinas).

En estos momentos el estudiante debería estar ya familiarizado con todos estos pasos, salvo el ii). Una forma de llevar a cabo el paso ii) en el plano es hallar una parametrización suave de ∂D; esto es, hallar una trayectoria $\mathbf{c}$: $I \to \partial D$, donde I es algún intervalo, cuyo rango sea ∂D. A continuación se considera la función de una variable $t \to f(\mathbf{c}(t))$, donde $t \in I$, y se localizan los puntos de máximo y de mínimo $t_0, t_1 \in I$ (¡recuerde revisar los extremos del intervalo!). Entonces $\mathbf{c}(t_0)$, $\mathbf{c}(t_1)$ serán *puntos* de máximo y mínimo de f como función definida en ∂D. Otro método para hacer frente al paso ii) es el método de los multiplicadores de Lagrange, que presentaremos en la siguiente sección.

EJEMPLO 3.20 Hallar los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ en el disco D definido por $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

Solución

i) Para hallar los puntos críticos hacemos $\partial f/\partial x = \partial f/\partial y = 0$. Así, $2x - 1 = 0$, $2y - 1 = 0$, y por lo tanto $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ es el único punto crítico en el disco abierto $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

ii) La frontera ∂D se puede parametrizar por $\mathbf{c}(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Así,

$$f(\mathbf{c}(t)) = \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t - \operatorname{sen} t - \cos t + 1 = 2 - \operatorname{sen} t - \cos t = g(t).$$

Para hallar los puntos críticos de f en ∂D, basta con localizar el máximo y el mínimo de g. Ahora bien, $g'(t) = 0$ sólo cuando:

$$\operatorname{sen} t = \cos t, \qquad \text{esto es, cuando} \qquad t = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}.$$

Por consiguiente, los candidatos para puntos de máximo y mínimo de f en ∂D son los puntos $\mathbf{c}(\pi/4)$, $\mathbf{c}(5\pi/4)$ y los extremos $\mathbf{c}(0) = \mathbf{c}(2\pi)$.

iii) Los valores de f en los puntos críticos son: $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ del paso i) y, del paso ii),

$$f\left(\mathbf{c}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 - \sqrt{2},$$

$$f\left(\mathbf{c}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 + \sqrt{2},$$

y

$$f(\mathbf{c}(0)) = f(\mathbf{c}(2\pi)) = f(0, 1) = 1.$$

iv) Comparando todos los valores $\frac{1}{2}$, $2 - \sqrt{2}$, $2 + \sqrt{2}$, 1, está claro que el mínimo absoluto se alcanza en $(1/2, 1/2)$ y el máximo absoluto en $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$.

En la Sección 3.4 consideraremos una generalización de esta estrategia a regiones D de $\mathbb{R}^n$ para hallar el máximo y el mínimo absolutos.

EJERCICIOS

En los ejercicios del 1 al 16, hallar los puntos críticos de la función dada y determinar cuáles son puntos de máximo local, de mínimo local o de silla.

1. $f(x, y) = x^2 - y^2 + xy$.

2. $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$.

3. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy$.

4. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy$.

5. $f(x, y) = e^{2+x^2-y^2}$.

6. $f(x, y) = x^2 - 3xy + 5x - 2y + 6y^2 + 8$.

7. $f(x, y) = 3x^2 + 2xy + 2x + y^2 + y + 4$.

8. $f(x, y) = \operatorname{sen}(x^2 + y^2)$ [considerar sólo el punto crítico $(0, 0)$].

9. $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$ [considerar sólo los tres puntos críticos $(0, 0)$, $(\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$ y $(0, \sqrt{\pi})$].

10. $f(x, y) = y + x \operatorname{sen} y$.

11. $f(x, y) = e^x \cos y$.

12. $f(x, y) = (x - y)(xy - 1)$.

13. $f(x, y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.

14. $f(x, y) = \log(2 + \operatorname{sen} xy)$.

15. $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$.

16. $f(x, y) = (x + y)(xy + 1)$.

17. Hallar los puntos de máximo y mínimo locales para $z = (x^2 + 3y^2)e^{1-x^2-y^2}$ (*véase* la Figura 2.1.15).

18. Sea $f(x, y) = x^2 + y^2 + kxy$. Si imaginamos la gráfica cambiando a medida que se incrementa k, ¿en qué valores de k cambia cualitativamente su forma?

19. Un examen de la función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to (y - 3x^2)(y - x^2)$ nos dará idea de la dificultad para hallar condiciones que garanticen que un punto crítico es un punto de extremo relativo cuando falla el Teorema 6[10]. Mostrar que

a) el origen es un punto crítico de f;

b) f tiene un mínimo relativo en (0, 0) en cada recta que pasa por (0, 0); es decir, si $g(t) = (at, bt)$, entonces $f \circ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene un mínimo relativo en 0 para cualquier elección de a y b;

c) el origen no es un punto de mínimo relativo de f.

20. Sea $f(x, y) = Ax^2 + E$ donde A y E son constantes. ¿Cuáles son los puntos críticos de f? ¿Son puntos de máximo local o de mínimo local?

21. Sea $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$. Aquí $D = 0$. ¿Podría decir si los puntos críticos son de mínimo o máximo local, o de silla?

22. Hallar el punto del plano $2x - y + 2z = 20$ más próximo al origen.

23. Demostrar que una caja rectangular de volumen dado tiene una superficie mínima cuando es un cubo.

24. Demostrar que el paralelepípedo rectangular con una superficie dada y un volumen máximo es un cubo.

25. Escribir el número 120 como suma de tres números de modo que la suma de los productos tomados de dos en dos sea máxima.

26. Mostrar que si (x_0, y_0) es un punto crítico de una forma cuadrática $f(x, y)$ y $D < 0$, entonces hay puntos (x, y) próximos a (x_0, y_0) en los cuales $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ y, de manera análoga, puntos para los cuales $f(x, y) < f(x_0, y_0)$.

27. Determinar la naturaleza de los puntos críticos de la función:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy.$$

28. Sea n un entero mayor que 2 y sea $f(x, y) = ax^n + cy^n$, donde $ac \neq 0$. Determinar la naturaleza de los puntos críticos de f.

29. Determinar la naturaleza de los puntos críticos de $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy + 6x + 3y$.

---

[10] Este interesante fenómeno fue señalado por primera vez por el famoso matemático Giuseppe Peano (1858-1932). En el Ejercicio 41 se da otra «patología» curiosa.

30. Hallar los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = (x^2 + y^2)^4$ en el disco $x^2 + y^2 \leqslant 1$. (No *tiene* que usarse cálculo.)

31. Repetir el Ejercicio 30 para la función $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$.

32. Una curva C en el espacio está definida *implícitamente* en el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ por medio de la ecuación adicional $x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1$. Hallar el punto o puntos de C más cercanos al origen.

33. Hallar los valores máximo y mínimo absolutos para $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \cos y$ en el rectángulo R definido por $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant y \leqslant 2\pi$.

34. Hallar los valores máximo y mínimo absolutos para la función $f(x, y) = xy$ en el rectángulo R definido por $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$.

35. Determinar la naturaleza de los puntos críticos de $f(x, y) = xy + 1/x + 8/y$.

En los ejercicios del 36 al 40, D denota el disco unidad.

36. Sea u una función C^2 en D «estrictamente subarmónica»; esto es, satisface la siguiente desigualdad: $\nabla^2 u = (\partial^2 u/\partial x^2) + (\partial^2 u/\partial y^2) > 0$. Mostrar que u no puede tener un punto de máximo en $D \backslash \partial D$ (conjunto de puntos de D que no están en ∂D).

37. Sea u una función armónica en D; esto es, $\nabla^2 u = 0$ en $D \backslash \partial D$ con u continua en D. Mostrar que si u alcanza su valor máximo en $D \backslash \partial D$, también lo alcanza en ∂D. Este hecho se denomina en ocasiones «principio del máximo débil» para funciones armónicas. [INDICACIÓN: Considerar $\nabla^2(u + \varepsilon e^x)$, $\varepsilon > 0$. Se puede usar el siguiente hecho, que se demuestra en textos más avanzados: dada una sucesión de puntos $\{\mathbf{p}_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, en un conjunto cerrado y acotado A, en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, existe un punto $\mathbf{q}$ tal que todo entorno de $\mathbf{q}$ contiene al menos un elemento de $\{\mathbf{p}_n\}$.]

38. Parafraseando el Ejercicio 36, definir el concepto de función u estrictamente superarmónica en D. Mostrar que u no puede tener un punto de mínimo en $D \backslash \partial D$.

39. Sea u armónica en D, como en el Ejercicio 37. Mostrar que si u alcanza su valor mínimo en $D \backslash \partial D$, también lo alcanza en ∂D. Este hecho se denomina en ocasiones «principio del mínimo débil» para funciones armónicas.

40. Sea ϕ: $\partial D \to \mathbb{R}$ continua y sea T una solución en D de $\nabla^2 T = 0$, continua en D, con $T = \phi$ en ∂D.

a) Utilizar los Ejercicios 36 a 39 para mostrar que dicha solución, si existe, debe ser única.

b) Supongamos que $T(x, y)$ representa una función de temperatura independiente del tiempo, siendo ϕ la temperatura en la frontera de una placa circular. ¿Podría dar una interpretación física del principio enunciado en el apartado a)?

41. **a)** Sea f una función C^1 en la recta real $\mathbb{R}$. Supongamos que f tiene exactamente un punto crítico x_0, que es un punto de mínimo local estricto de f. Mostrar que x_0 es también un punto de mínimo absoluto de f, esto es, que $f(x) \geqslant f(x_0)$ para todo x.

b) El siguiente ejemplo muestra que la conclusión de la parte a) no se cumple para funciones de más de una variable. Sea f: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = -y^4 - e^{-x^2} + 2y^2\sqrt{e^x + e^{-x^2}}.$$

i) Mostrar que $(0, 0)$ es el único punto crítico de f y que es un punto de mínimo local.

ii) Argumentar de manera informal que f no tiene mínimo absoluto.

42. Supongamos que un pentágono está compuesto por un rectángulo debajo de un triángulo isósceles (*véase* la Figura 3.3.8). Si la longitud del perímetro está dada, hallar la máxima área posible.

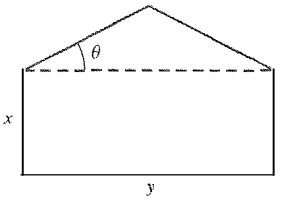


Figura 3.3.8. Maximizar el área para un perímetro dado.

3.4. Extremos condicionados y multiplicadores de Lagrange

Frecuentemente se desea maximizar o minimizar una función sujeta a ciertas *restricciones* o *condiciones adicionales*. Por ejemplo, podríamos necesitar maximizar $f(x, y)$ sujeta a la condición de que $x^2 + y^2 = 1$; esto es, que (x, y) esté en la circunferencia de radio uno. Con mayor generalidad, podríamos tener que maximizar o minimizar $f(x, y)$ sujeta a la condición adicional de que (x, y) satisfaga también la ecuación $g(x, y) = c$, donde g es alguna función y c es una constante (en el ejemplo anterior, $g(x, y) = x^2 + y^2$ y $c = 1$). El conjunto de dichos (x, y) es una curva de nivel de g.

El propósito de esta sección es desarrollar algunos métodos para manejar esta clase de problemas. En la Figura 3.4.1 dibujamos la gráfica de una función $f(x, y)$. En este dibujo, el máximo de f parece estar en $(0, 0)$. Sin embargo, supongamos que no estamos interesados en este máximo, sino sólo en el máximo de $f(x, y)$ cuando (x, y) pertenece a la circunferencia unidad; esto es, cuando $x^2 + y^2 = 1$. El cilindro sobre $x^2 + y^2 = 1$ interseca la gráfica de $z = f(x, y)$ en una curva que está contenida en esta gráfica. El problema de maximizar o minimizar $f(x, y)$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 1$ equivale a encontrar el punto en esta curva donde z es mayor o menor.

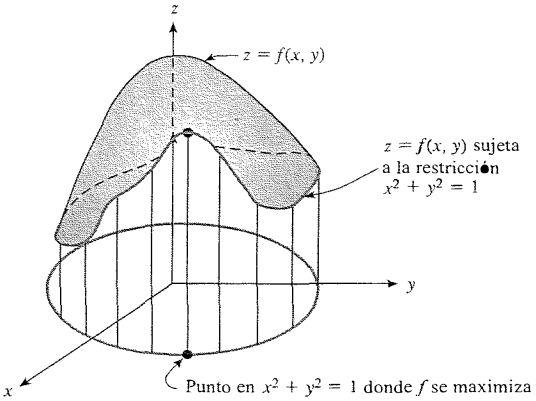


Figura 3.4.1. Significado geométrico de maximizar f sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 1$.

El método de los multiplicadores de Lagrange

En general, sean f: $U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y g: $U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones C^1 dadas, y sea S el conjunto de nivel de g con valor c (recordemos que éste es el conjunto de puntos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ con $g(\mathbf{x}) = c$).

Cuando f se restringe a S, de nuevo tenemos el concepto de máximo o mínimo local (extremos locales), y un máximo absoluto (el mayor valor) o un mínimo absoluto (el menor valor) debe ser un extremo local. El siguiente método proporciona una condición necesaria para que haya un extremo condicionado:

TEOREMA 8: El método de los multiplicadores de Lagrange Sean f: $U \subset \mathbb{R}^n$ y g: $U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones C^1 con valores reales. Sean $\mathbf{x}_0 \in U$ y $g(\mathbf{x}_0) = c$, y sea S el conjunto de nivel de g con valor c (recordemos que éste es el conjunto de los puntos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ que satisfacen $g(\mathbf{x}) = c$). Supongamos que $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$.

Si $f|S$, que denota «f restringida a S», alcanza en $\mathbf{x}_0$ un máximo o mínimo local en S, entonces existe un número real λ tal que

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0). \tag{1}$$

En general, un punto $\mathbf{x}_0$ donde se cumple la Ecuación (1) se dice que es un ***punto crítico*** de $f|S$.

DEMOSTRACIÓN No hemos desarrollado técnicas suficientes para dar una prueba completa, pero podemos dar los puntos esenciales. (Las cuestiones técnicas adicionales necesarias se tratan en la Sección 3.5 y en el suplemento de Internet.)

En la Sección 2.6 aprendimos que para $n = 3$ el espacio tangente o plano tangente a S en $\mathbf{x}_0$ es el espacio ortogonal a $\nabla g(\mathbf{x}_0)$. Para n arbitraria podemos dar la misma definición de espacio tangente a S en $\mathbf{x}_0$. Esta definición se puede motivar, considerando tangentes a trayectorias $\mathbf{c}(t)$ contenidas en S, como sigue: si $\mathbf{c}(t)$ es una trayectoria en S y $\mathbf{c}(0) = \mathbf{x}_0$, entonces $\mathbf{c}'(0)$ es un vector tangente a S en $\mathbf{x}_0$; pero

$$\frac{d}{dt}\, g(\mathbf{c}(t)) = \frac{d}{dt}\, c = 0,$$

y por otra parte, por la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dt}\, g(\mathbf{c}(t))\bigg|_{t=0} = \nabla g(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{c}'(0),$$

de manera que $\nabla g(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{c}'(0) = 0$; es decir, $\mathbf{c}'(0)$ es ortogonal a $\nabla g(\mathbf{x}_0)$.

Si $f|S$ tiene un máximo en $\mathbf{x}_0$, entonces, $f(\mathbf{c}(t))$ tiene un máximo en $t = 0$. Por cálculo de una variable, $df(\mathbf{c})(t))/dt|_{t=0} = 0$. Entonces, por la regla de la cadena,

$$0 = \frac{d}{dt}\, f(\mathbf{c}(t))\bigg|_{t=0} = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{c}'(0).$$

Así, $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ es perpendicular a la tangente a cualquier curva en S y por tanto es perpendicular al espacio tangente a S en $\mathbf{x}_0$. Como el espacio perpendicular a este espacio tangente es una recta, $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ y $\nabla g(\mathbf{x}_0)$ son paralelos. Dado que $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$, se deduce que $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ es un múltiplo de $\nabla g(\mathbf{x}_0)$, que es la conclusión del teorema.

Extraigamos algo de geometría de esta prueba.

TEOREMA 9 Si al restringir f a una superficie S, tiene un máximo o un mínimo en $\mathbf{x}_0$, entonces $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ es perpendicular a S en $\mathbf{x}_0$ (*véase* la Figura 3.4.2).

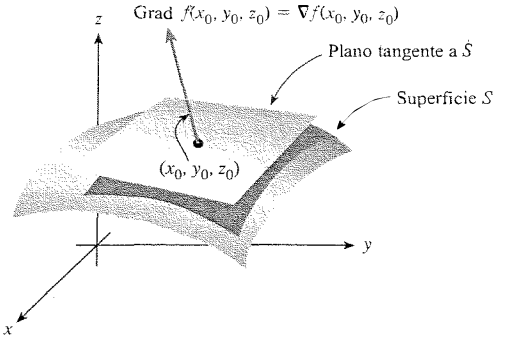


Figura 3.4.2. La geometría de los extremos condicionados.

Estos resultados nos indican que, con el fin de hallar los extremos condicionados de f, tenemos que buscar entre aquellos puntos $\mathbf{x}_0$ que satisfagan las conclusiones de estos dos teoremas. Daremos varios ejemplos de cómo usar cada uno de ellos.

Cuando se usa el método del Teorema 8, debemos buscar un punto $\mathbf{x}_0$ y una constante λ llamada ***multiplicador de Lagrange***, tal que $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0)$. Este método es de una naturaleza más analítica que el método geométrico del Teorema 9. Sorprendentemente, Euler introdujo estos multiplicadores en 1744, ¡unos cuarenta años antes que Lagrange!

La Ecuación (1) dice que las derivadas parciales de f son proporcionales a las de g. Hallar los puntos $\mathbf{x}_0$ donde eso ocurre significa resolver las ecuaciones simultáneas

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n) \\ &\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \ldots, x_n) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ &\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n) = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n) \\ &g(x_1, \ldots, x_n) = c \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

en $x_1, \ldots, x_n$ y λ.

Otra manera de considerar estas ecuaciones es así: pensamos en λ como en una variable adicional y formamos la función auxiliar

$$h(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = f(x_1, \ldots, x_n) - \lambda[g(x_1, \ldots, x_n) - c].$$

El teorema de los multiplicadores de Lagrange dice que para hallar los puntos de extremo de $f|S$ debemos examinar los puntos críticos de h. Éstos se encuentran resolviendo las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial h}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} \\ &\vdots \\ 0 &= \frac{\partial h}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n} \\ 0 &= \frac{\partial h}{\partial \lambda} = g(x_1, \ldots, x_n) - c \end{aligned}\right\}, \tag{3}$$

que coinciden con las Ecuaciones de (2) anteriores.

Más adelante en esta sección, en el Teorema 10, daremos criterios que usan las derivadas segundas para determinar si los puntos son de máximo o de mínimo, análogos a los de la Sección 3.3. No obstante, en muchos problemas es posible distinguir entre máximos y mínimos por observación directa o métodos geométricos. Como con frecuencia esto es más sencillo, consideraremos primero ejemplos de este tipo.

EJEMPLO 3.21 Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ la recta que pasa por $(-1, 0)$ con una inclinación de 45°, y sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x^2 + y^2$. Hallar los extremos de $f|S$.

Solución

Aquí $S = \{(x, y) \mid y - x - 1 = 0\}$, y por consiguiente hacemos $g(x, y) = y - x - 1$ y $c = 0$. Tenemos $\nabla g(x, y) = -\mathbf{i} + \mathbf{j} \neq \mathbf{0}$. Los puntos de extremo relativo de $f|S$ deben hallarse entre aquellos puntos en que ∇f es ortogonal a S, esto es, en rectas con una inclinación de $-45°$.

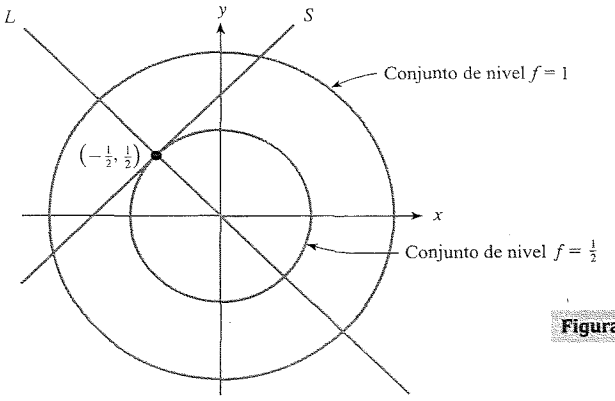


Figura 3.4.3. La geometría asociada con la búsqueda de los extremos de $f(x, y) = x^2 + y^2$ restringida a $S = \{(x, y) \mid y - x - 1 = 0\}$.

Pero $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$, que tiene la pendiente deseada tan sólo cuando $x = -y$ o cuando (x, y) está en la recta L que pasa por el origen con una inclinación de $-45°$. Esto puede suceder en el conjunto S sólo en el único punto en el que se intersecan L y S (*véase* la Figura 3.4.3). Las curvas de nivel de f indican que este punto $(-1/2, 1/2)$ es un punto de mínimo relativo de $f|S$ (aunque no de f).

Obsérvese que en este problema f tiene un mínimo en S, pero no un máximo.

EJEMPLO 3.22 Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x^2 - y^2$ y sea S la circunferencia de radio uno centrada en el origen. Hallar los extremos de $f|S$.

Solución

El conjunto S es la curva de nivel de g con valor 1, siendo $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x^2 + y^2$. Como ya estudiamos ambas funciones en ejemplos anteriores, conocemos sus curvas de nivel; se muestran en la Figura 3.4.4. En dos dimensiones, la condición de que $\nabla f = \lambda \nabla g$ en $\mathbf{x}_0$, esto es, que ∇f y ∇g sean paralelos en $\mathbf{x}_0$, es la misma que pedir que las curvas de nivel sean tangentes en $\mathbf{x}_0$ (¿por qué?). Así, los puntos de extremo de $f|S$ son $(0, \pm 1)$ y $(\pm 1, 0)$. Evaluando f, hallamos que $(0, \pm 1)$ son puntos de mínimo y $(\pm 1, 0)$ de máximo.

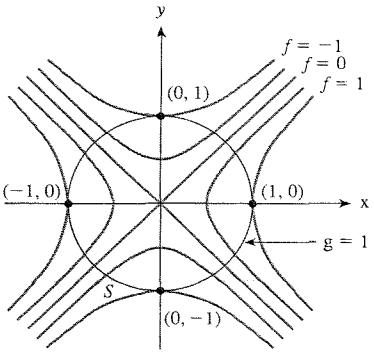


Figura 3.4.4. La geometría asociada con el problema de hallar los extremos de $x^2 - y^2$ en $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Resolvamos el problema también analíticamente, por el método de los multiplicadores de Lagrange. Claramente,

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x, -2y) \qquad \text{y} \qquad \nabla g(x, y) = (2x, 2y).$$

Nótese que $\nabla g(x, y) \neq \mathbf{0}$ si $x^2 + y^2 = 1$. Así, de acuerdo con el teorema de los multiplicadores de Lagrange, tenemos que hallar un λ tal que

$$(2x, -2y) = \lambda(2x, 2y) \qquad \text{y} \qquad (x, y) \in S, \qquad \text{i.e., } x^2 + y^2 = 1.$$

Estas condiciones producen tres ecuaciones, que se pueden resolver en las tres incógnitas x, y, y λ. De $2x = \lambda 2x$ concluimos que $x = 0$ o $\lambda = 1$. Si $x = 0$, entonces $y = \pm 1$ y $-2y = \lambda 2y$ implica que $\lambda = -1$. Si $\lambda = 1$, entonces $y = 0$ y $x = \pm 1$. Así, obtenemos los puntos $(0, \pm 1)$ y $(\pm 1, 0)$,

como antes. Como hemos mencionado, este método sólo localiza puntos de extremo potenciales; para determinar si son puntos de máximo o de mínimo, o ninguna de las dos cosas, habrá que usar otros medios, tales como argumentos geométricos o el criterio de la derivada segunda que se presenta más adelante[11].

EJEMPLO 3.23 Maximizar la función $f(x, y, z) = x + z$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Solución

Sabemos, por el Teorema 7, que la función f restringida a la superficie de la esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ tiene un máximo (y también un mínimo). Para hallar el máximo utilizamos nuevamente el teorema de los multiplicadores de Lagrange. Buscamos λ y (x, y, z) tales que

$$1 = 2x\lambda, \qquad 0 = 2y\lambda \qquad \text{y} \qquad 1 = 2z\lambda,$$

y

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

De la primera o de la tercera ecuación vemos que $\lambda \neq 0$. Así, de la segunda ecuación obtenemos $y = 0$. De la primera y de la tercera ecuación, $x = z$, y por tanto de la cuarta, $x = \pm 1/\sqrt{2} = z$. Por consiguiente, nuestros puntos son $(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ y $(-1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$. Comparando los valores de f en estos puntos, podemos ver que el primer punto produce el máximo de f (sometida a la restricción) y el segundo el mínimo.

EJEMPLO 3.24 Supongamos que entre todas las cajas rectangulares con una superficie de 10 metros cuadrados hay una con el mayor volumen posible. Hallar sus dimensiones.

Solución

Si x, y, y z son las longitudes de sus lados, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, y el volumen es $f(x, y, z) = xyz$. La restricción es $2(xy + xz + yz) = 10$; es decir, $xy + xz + yz = 5$. Así, las condiciones del multiplicador de Lagrange son:

$$\begin{aligned} yz &= \lambda(y + z) \\ xz &= \lambda(x + z) \\ xy &= \lambda(y + x) \\ xy + xz + yz &= 5. \end{aligned}$$

En primer lugar, $x \neq 0$, pues $x = 0$ implica $yz = 5$ y $0 = \lambda z$, de modo que $\lambda = 0$ y obtenemos la ecuación y $z = 0$, que contradice a la anterior. De manera análoga, $y \neq 0$, $z \neq 0$, $x + y \neq 0$. Al eliminar λ de las primeras dos ecuaciones se tiene $yz/(y + z) = xz/(x + z)$, lo cual da $x = y$; análogamente, $y = z$. Sustituyendo estos valores en la última ecuación, obtenemos $3x^2 = 5$ o $x = \sqrt{5/3}$. Así, llegamos a la solución $x = y = z = \sqrt{5/3}$, y $xyz = (5/3)^{3/2}$. Esta forma (cúbica) debe por lo tanto maximizar el volumen, suponiendo que exista una caja de volumen máximo.

[11] En estos ejemplos $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$ en la superficie S, tal y como exige el teorema de los multiplicadores de Lagrange. Si $\nabla g(\mathbf{x}_0)$ fuera cero para algún $\mathbf{x}_0$ en S, entonces habría que incluirlo entre los posibles puntos de extremo.

Existencia de soluciones

Debemos hacer notar que la solución del Ejemplo 3.24 *no* demuestra que el cubo sea la caja rectangular de mayor volumen con una superficie dada; prueba que el cubo es el único candidato posible para un máximo. Más adelante esbozaremos una demostración de que en realidad es el máximo. La distinción entre mostrar que hay *sólo una solución posible* al problema y mostrar que, de hecho, *existe una solución*, es una sutileza que muchos (incluso grandes) matemáticos han pasado por alto.

La reina Dido (aprox. 900 a.C.) se dio cuenta de que entre todas las regiones planas con un perímetro fijo, el disco es la región de área máxima. No es difícil demostrar este hecho bajo el supuesto de que existe una región de área máxima; sin embargo, demostrar que esa región de área máxima existe es un asunto (difícil) bastante diferente. No fue hasta la segunda mitad del siglo diecinueve que el matemático alemán Weierstrass dio una demostración completa.

Consideremos una situación no matemática paralela. Pongámonos en el lugar de Lord Peter Wimsey, famoso detective creado por Dorothy Sayers:

> «Sin duda», dijo Wimsey, «pero si piensas que esta identificación hará de tu vida una dulce y maravillosa canción, estás equivocado... Ya que hemos dedicado una gran cantidad de tiempo y pensamientos al caso, bajo la hipótesis de que fue un asesinato, conviene saber que la hipótesis es correcta.»

Wimsey ha encontrado el cuerpo de un hombre muerto, y después de algún tiempo ha encontrado diez sospechosos. Está seguro de que nadie aparte de los sospechosos puede ser el asesino. Al reunir todas las pruebas y verificar las coartadas, reduce el número de sospechosos hasta que, finalmente, sólo queda el mayordomo; por lo tanto, ¡él es el asesino! Pero esperen, Peter es un hombre muy cauteloso. Al verificar todo una vez más, descubre que el hombre se suicidó; así que no hay asesinato. *Véase* el caso: no basta con hallar un claro y único sospechoso en un caso criminal en el que se supone que hubo asesinato; hay que probar que realmente hubo un asesinato.

Lo mismo vale para nuestro cubo; el hecho de que sea el único candidato posible para un máximo no demuestra que sea un máximo. (Para más información, *véase The Parsimonious Universe*: *Shape and Form in the Natural World*, por S. Hildebrandt y A. Tromba, Springer-Verlag, Nueva York/Berlín, 1995.)

La dificultad para demostrar que $f(x, y, z) = xyz$ realmente tiene un máximo se encuentra en el hecho de que f es una función continua que está definida en la superficie no acotada S: $xy + xz + yz = 5$, y no en un conjunto acotado que incluya su frontera, en cuyo caso podríamos aplicar el Teorema 7 de la Sección 3.3. Ya hemos visto problemas de esta clase para funciones de una y dos variables.

La manera de demostrar que $f(x, y, z) = xyz \geqslant 0$ tiene, en efecto, un máximo en $xy + yz + xz = 5$ es mostrar que si x, y o z tienden a ∞, entonces $f(x, y, z) \to 0$. Apelando al Teorema 7, podemos entonces concluir que el máximo de f en S tiene que existir (el estudiante deberá completar los detalles). Así, supongamos que (x, y, z) está en S y $x \to \infty$, entonces $y \to 0$ y $z \to 0$ (¿por qué?). Multiplicando la ecuación que define S por z, obtenemos la ecuación $xyz + xz^2 + yz^2 = 5z \to 0$ cuando $x \to \infty$. Como $x, y, z \geqslant 0$, $xyz = f(x, y, z) \to 0$. Análogamente, $f(x, y, z) \to 0$ si y o z tienden a ∞. Por consiguiente, tiene que existir una caja de volumen máximo.

Puede resultar útil tener algunas directrices generales para abordar problemas de máximos y mínimos con restricciones. En primer lugar, si la superficie S es acotada (por ejemplo, un

elipsoide), entonces f tiene un máximo y un mínimo en S. (*Véase* el Teorema 7 de la sección anterior.) En particular, si f tiene tan sólo dos puntos que satisfacen las condiciones del teorema de los multiplicadores de Lagrange o del Teorema 9, entonces uno de ellos debe ser un punto de máximo y el otro de mínimo. Sin embargo, si hay más de dos puntos tales, algunos pueden ser puntos de silla. Asimismo, si S no es acotada (por ejemplo, si es un hiperboloide), entonces f no tiene por qué tener máximos o mínimos.

Varias restricciones

Si una superficie S está definida por varias restricciones, a saber,

$$\left.\begin{aligned} g_1(x_1, \ldots, x_n) &= c_1 \\ g_2(x_1, \ldots, x_n) &= c_2 \\ &\vdots \\ g_k(x_1, \ldots, x_n) &= c_k \end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

entonces el teorema de los multiplicadores de Lagrange se puede generalizar como sigue: *si f tiene un máximo o un mínimo sobre S en $\mathbf{x}_0$, deben existir constantes $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tales que*[12]

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda_1 \nabla g_1(\mathbf{x}_0) + \cdots + \lambda_k \nabla g_k(\mathbf{x}_0). \tag{5}$$

Este caso se puede demostrar generalizando el método utilizado en la demostración del teorema de los multiplicadores de Lagrange. Demos un ejemplo de cómo se utiliza esta formulación más general.

EJEMPLO 3.25 Hallar los puntos de extremo de $f(x, y, z) = x + y + z$ sujeta a las dos condiciones $x^2 + y^2 = 2$ y $x + z = 1$.

Solución

Aquí hay dos restricciones:

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 = 0 \qquad \text{y} \qquad g_2(x, y, z) = x + z - 1 = 0.$$

Así, debemos encontrar x, y, z, λ_1 y λ_2 tales que

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda_1 \nabla g_1(x, y, z) + \lambda_2 \nabla g_2(x, y, z),$$

$$g_1(x, y, z) = 0 \qquad \text{y} \qquad g_2(x, y, z) = 0.$$

[12] Al igual que con la hipótesis $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$ en el teorema de los multiplicadores de Lagrange, aquí tenemos que suponer que los vectores $\nabla g_1(\mathbf{x}_0)$, ..., $\nabla g_k(\mathbf{x}_0)$ son linealmente independientes; es decir, ningún $\nabla g_i(\mathbf{x}_0)$ es combinación lineal de los otros $\nabla g_j(\mathbf{x}_0)$, $j \neq i$.

Calculando los gradientes e igualando componentes, obtenemos

$$1 = \lambda_1 \cdot 2x + \lambda_2 \cdot 1,$$
$$1 = \lambda_1 \cdot 2y + \lambda_2 \cdot 0,$$
$$1 = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1,$$
$$x^2 + y^2 = 2 \qquad \text{y} \qquad x + z = 1.$$

Éstas son cinco ecuaciones para x, y, z, λ_1 y λ_2. De la tercera ecuación $\lambda_2 = 1$, y por tanto $2x\lambda_1 = 0$, $2y\lambda_1 = 1$. Como la segunda implica $\lambda_1 \neq 0$, tenemos $x = 0$. Por consiguiente, $y = \pm\sqrt{2}$ y $z = 1$. Por lo tanto, los posibles puntos de extremo son $(0, \pm\sqrt{2}, 1)$. Una simple inspección muestra que $(0, \sqrt{2}, 1)$ da un máximo relativo y $(0, -\sqrt{2}, 1)$ un mínimo relativo.

La condición $x^2 + y^2 = 2$ implica que x e y tienen que estar acotadas. La condición $x + z = 1$ implica que también z está acotada. Se deduce que el conjunto S dado por las restricciones es cerrado y acotado. Del Teorema 7 se sigue que f tiene un máximo y un mínimo en S, que se deben alcanzar en $(0, \sqrt{2}, 1)$ y $(0, -\sqrt{2}, 1)$, respectivamente.

El método de los multiplicadores de Lagrange nos proporciona otra herramienta para encontrar los puntos de máximo y mínimo absolutos de funciones diferenciables sobre regiones acotadas en $\mathbb{R}^2$ (*véase* la estrategia para encontrar puntos de máximo y mínimo absolutos descrita en la Sección 3.3).

EJEMPLO 3.26 Hallar el máximo absoluto de $f(x, y) = xy$ en el disco unidad D, donde D es el conjunto de puntos (x, y) con $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

Solución

Sabemos, por el Teorema 7 de la Sección 3.3, que el máximo absoluto existe. Hallemos en primer lugar todos los puntos críticos de f en el conjunto U de los puntos (x, y) tales que $x^2 + y^2 < 1$. Como

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x,$$

$(0, 0)$ es el único punto crítico de f en U. Ahora consideramos f en la circunferencia unidad, la curva de nivel $g(x, y) = 1$, donde $g(x, y) = x^2 + y^2$. Para localizar los puntos de máximo y mínimo de f en C, escribimos las ecuaciones de los multiplicadores de Lagrange: $\nabla f(x, y) = (y, x) = \lambda \nabla g(x, y) = \lambda(2x, 2y)$ y $x^2 + y^2 = 1$. Reescribiéndolas componente a componente, obtenemos

$$y = 2\lambda x,$$
$$x = 2\lambda y,$$
$$x^2 + y^2 = 1.$$

Así

$$y = 4\lambda^2 y,$$

o $\lambda = \pm 1/2$ e $y = \pm x$, lo que significa que $x^2 + x^2 = 2x^2 = 1$ o $x = \pm 1/\sqrt{2}$, $y = \pm 1/\sqrt{2}$. El resultado de nuestro cálculo es que hay cuatro candidatos en C para puntos de máximo y mínimo absolutos, a saber,

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

El valor de f tanto en $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ como en $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ es $1/2$. El valor de f en $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ y $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ es $-1/2$, y el valor de f en $(0, 0)$ es 0. Por consiguiente, el máximo absoluto de f es $1/2$ y el mínimo absoluto es $-1/2$, y ambos se alcanzan en C. En $(0, 0)$, $\partial^2 f/\partial x^2 = 0$, $\partial^2 f/\partial y^2 = 0$ y $\partial^2 f/\partial x \partial y = 1$, de modo que el discriminante es -1 y por tanto $(0, 0)$ es un punto de silla.

EJEMPLO 3.27 Hallar el máximo y el mínimo absolutos de $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$ en la región elíptica D definida por $\frac{1}{2}x^2 + y^2 \leq 1$.

Solución

De nuevo por el Teorema 7 de la Sección 3.3, el máximo y el mínimo absoluto existen. Para empezar, localizamos los puntos críticos de f en el conjunto U de los puntos (x, y) tales que $\frac{1}{2}x^2 + y^2 < 1$. Como

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = y,$$

el único punto crítico es el origen $(0, 0)$.

A continuación hallamos los puntos de máximo y mínimo de f restringida a la frontera C de U, que es el conjunto de nivel $g(x, y) = 1$, siendo $g(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2$. Las ecuaciones de los multiplicadores de Lagrange son

$$\nabla f(x, y) = (x, y) = \lambda \nabla g(x, y) = \lambda(x, 2y)$$

y $(x^2/2) + y^2 = 1$. En otras palabras,

$$x = \lambda x$$
$$y = 2\lambda y$$
$$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1.$$

Si $x = 0$, entonces $y = \pm 1$ y $\lambda = \frac{1}{2}$. Si $y = 0$, entonces $x = \pm\sqrt{2}$ y $\lambda = 1$. Si $x \neq 0$ e $y \neq 0$, tenemos simultáneamente $\lambda = 1$ y $1/2$, lo cual es imposible. Así, los candidatos para puntos de máximo y mínimo de f en C son $(0, \pm 1)$, $(\pm\sqrt{2}, 0)$ y para f dentro de D el candidato es $(0, 0)$. El valor de f en $(0, \pm 1)$ es $1/2$, en $(\pm\sqrt{2}, 0)$ es 1 y en $(0, 0)$ es 0. Por lo tanto, el mínimo absoluto de f se alcanza en $(0, 0)$ y es 0. El máximo absoluto de f en D es 1 y se alcanza en los puntos $(\pm\sqrt{2}, 0)$.

Máximos y mínimos globales

El método de los multiplicadores de Lagrange refuerza nuestras técnicas para hallar máximos y mínimos globales. En este sentido, es útil lo que sigue.

DEFINICIÓN Sea U una región abierta en $\mathbb{R}^n$ con frontera ∂U. Decimos que ∂U es ***suave*** si ∂U es el conjunto de nivel de una función suave g cuyo gradiente ∇g nunca se anula (esto es, $\nabla g \neq \mathbf{0}$). Entonces podemos seguir la estrategia que sigue.

Estrategia de los multiplicadores de Lagrange para encontrar máximos y mínimos absolutos en regiones con frontera Sea f una función diferenciable sobre una región cerrada y acotada $D = U \cup \partial U$, U abierto en $\mathbb{R}^n$ con frontera ∂U suave.

Para hallar el máximo y el mínimo absolutos de f en D:

i) Encontrar todos los puntos críticos de f en U.

ii) Utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange para localizar todos los puntos críticos de $f|\partial U$.

iii) Calcular el valor de f en todos estos puntos críticos.

iv) Comparar todos estos valores, y seleccionar el mayor y el menor.

EJEMPLO 3.28 Hallar el máximo y el mínimo absolutos de la función $f(x, y, z) = x + y + z$ en el conjunto $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Solución

Como en los ejemplos anteriores, sabemos que el máximo y el mínimo absoluto existen. Ahora bien, $D = U \cup \partial U$, donde

$$U = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$$

y

$$\partial U = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

El gradiente de f es $\nabla f = (1, 1, 1)$, y por tanto f no tiene puntos críticos en U. Por consiguiente, los valores máximo y mínimo de f se tienen que alcanzar en ∂U.

Sea $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Entonces ∂U es el conjunto de nivel $g(x, y, z) = 1$. El método de los multiplicadores de Lagrange nos dice que el máximo y el mínimo se deben alcanzar en un punto crítico de $f|\partial U$, es decir, en un punto $\mathbf{x}_0$ en el que $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0)$ para algún escalar λ.

Así,

$$(1, 1, 1) = \lambda(2x, 2y, 2z); \qquad \text{esto es} \qquad x = \frac{1}{2\lambda}, \qquad y = \frac{1}{2\lambda}, \qquad z = \frac{1}{2\lambda}.$$

Como $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, obtenemos que $\lambda = \pm\sqrt{3}/2$ y por tanto $\mathbf{x}_0 = \pm(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. Claramente, $-(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ es el punto en el que f alcanza su mínimo absoluto (a saber, $-\sqrt{3}$) y $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1\sqrt{3})$, el punto donde f alcanza su valor máximo $\sqrt{3}$.

Dos aplicaciones adicionales

Presentamos a continuación otras dos aplicaciones, a la geometría y a la economía, de las técnicas matemáticas que hemos desarrollado en esta sección. Comenzamos con un ejemplo geométrico.

EJEMPLO 3.29 Supongamos que tenemos una curva definida por la ecuación

$$\phi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - 1 = 0.$$

Hallar la máxima y la mínima distancia de la curva al origen (éstas son las longitudes de los **semiejes mayor** y **menor** de esta cuádrica).

Solución

El problema equivale a hallar los valores extremos de $f(x, y) = x^2 + y^2$ sujeta a la condición restrictiva $\phi(x, y) = 0$. Utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange, tenemos las siguientes ecuaciones:

$$2x + \lambda(2Ax + 2By) = 0 \tag{6}$$

$$2y + \lambda(2Bx + 2Cy) = 0 \tag{7}$$

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1. \tag{8}$$

Sumando x veces la Ecuación (6) a y veces la Ecuación (7), obtenemos

$$2(x^2 + y^2) + 2\lambda(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2) = 0.$$

De la Ecuación (8) se sigue que $x^2 + y^2 + \lambda = 0$. Sea $t = -1/\lambda = 1/(x^2 + y^2)$ (el caso $\lambda = 0$ es imposible, ya que (0, 0) no está sobre la curva $\phi(x, y) = 0$). Entonces las Ecuaciones (6) y (7) se pueden escribir como sigue:

$$\begin{aligned} 2(A - t)x + 2By &= 0 \\ 2Bx + 2(C - t)y &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Si estas dos ecuaciones tienen una solución no trivial (recordemos que $(x, y) = (0, 0)$ no está en nuestra curva, y que por tanto no es una solución), se sigue de un teorema de álgebra lineal que su determinante se anula[13]:

$$\begin{vmatrix} A - t & B \\ B & C - t \end{vmatrix} = 0.$$

Dado que esta ecuación es cuadrática en t, tiene dos soluciones, que llamaremos t_1 y t_2. Como $-\lambda = x^2 + y^2$, tenemos $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{-\lambda}$. Ahora bien, $\sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia del punto (x, y) al origen. Por consiguiente, si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) denotan las soluciones no triviales de la Ecuación (9) correspondientes a t_1 y t_2, y si t_1 y t_2 son positivas, obtenemos $\sqrt{x_2^2 + y_2^2} = 1/\sqrt{t_2}$ y $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 1/\sqrt{t_1}$. En consecuencia, si $t_1 > t_2$, las longitudes de los semiejes mayor y menor son $1/\sqrt{t_1}$ y $1/\sqrt{t_2}$, respectivamente. Si la curva es una elipse, tanto t_1 como t_2 son, de hecho, reales y positivas. ¿Qué sucede con una hipérbola o una parábola?

[13] La matriz de coeficientes de las ecuaciones no puede tener inversa, porque esto implicaría que la solución es cero. Recordemos que una matriz que no tiene inversa tiene determinante cero.

Por último, estudiaremos una aplicación a la economía.

EJEMPLO 3.30 Supongamos que la producción de una compañía manufacturera es una cantidad Q de un cierto producto, donde Q es una función $f(K, L)$, siendo K el capital invertido en equipos (o inversión) y L la mano de obra utilizada. Si el precio de la mano de obra es p, el precio de los equipos es q y la compañía no puede gastar más de B euros, ¿cómo podemos hallar las cantidades de capital y trabajo que maximizan la producción Q?

Solución

Es de esperar que si se aumenta la inversión o la mano de obra, aumente también la producción; esto es,

$$\frac{\partial Q}{\partial K} \geqslant 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial Q}{\partial L} \geqslant 0.$$

También es de esperar que a medida que se añada mano de obra a una inversión en equipos dada, la cantidad de producción adicional obtenida sea cada vez menor; esto es,

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} < 0.$$

Análogamente,

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} < 0.$$

Con estas hipótesis sobre Q, es razonable esperar que las curvas de nivel de producción (llamadas ***isocuantas***) $q(K, L) = c$ tengan un aspecto parecido al de las curvas bosquejadas en la Figura 3.4.5, con $c_1 < c_2 < c_3$.

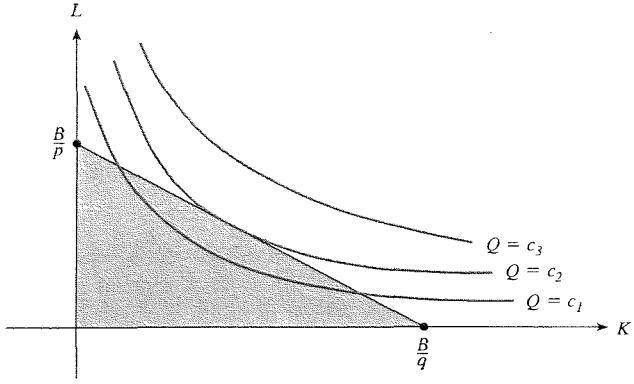


Figura 3.4.5. ¿Cuál es el mayor valor de Q en el triángulo sombreado?

Podemos interpretar la convexidad de las isocuantas como sigue: cuando uno se mueve hacia la derecha a lo largo de una cierta isocuanta, se necesita cada vez más inversión para sustituir una unidad de mano de obra y seguir produciendo lo mismo. La restricción sobre el

presupuesto significa que tenemos que permanecer dentro del triángulo limitado por los ejes y la recta $pL + qK = B$. Geométricamente, está claro que produciremos lo máximo posible si gastamos nuestro dinero de tal forma que seleccionemos la isocuanta que justo toca, pero no cruza, la línea de presupuesto.

Como el punto de máximo está en la frontera de nuestro dominio, aplicamos el método de los multiplicadores de Lagrange para hallar el máximo. Para maximizar $Q = f(K, L)$ sujeta a la restricción $pL + qK = B$, buscamos los puntos críticos de la función auxiliar

$$h(K, L, \lambda) = f(K, L) - \lambda(pL + qK - B).$$

Así, queremos

$$\frac{\partial Q}{\partial K} = \lambda q, \qquad \frac{\partial Q}{\partial L} = \lambda p \qquad \text{y} \qquad pL + qK = B.$$

Éstas son las dos condiciones que tenemos que satisfacer para maximizar la producción (en el Ejercicio 31 se le pide al lector resolver un caso particular).

En el ejemplo anterior, λ representa algo interesante. Sean $k = qK$ y $l = pL$, de forma que k es el valor en euros de la inversión y l es el valor en euros de la mano de obra empleada. Entonces las dos primeras ecuaciones pasan a ser

$$\frac{\partial Q}{\partial k} = \frac{1}{q}\frac{\partial Q}{\partial K} = \lambda = \frac{1}{p}\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial Q}{\partial l}.$$

Por consiguiente, en el punto de producción óptima, el cambio marginal en la producción por cada euro de inversión adicional en equipos es igual al cambio marginal de producción por cada euro de mano de obra adicional, y λ es este valor común. En el punto óptimo, el intercambio de un euro de inversión en equipos por un euro de mano de obra no cambia la producción. Lejos del punto óptimo las producciones marginales son diferentes, y uno de los dos cambios se traducirá en una mayor producción.

Criterio de la derivada segunda para extremos condicionados

En la Sección 3.3 obtuvimos, examinando el término de segundo grado de la serie de Taylor de f, un criterio con las derivadas segundas para extremos de funciones de varias variables. Si la matriz hessiana de las derivadas parciales segundas es o bien definida positiva o bien definida negativa en un punto crítico de f, este punto es, respectivamente, un punto de mínimo o de máximo relativo.

De manera natural surge la pregunta de si hay un criterio con las derivadas segundas para problemas de máximos y mínimos *sometidos a restricciones*. La respuesta es sí, y el criterio involucra una matriz denominada *hessiana orlada*. En primer lugar estudiamos el criterio y cómo se aplica para el caso de una función $f(x, y)$ de dos variables sujeta a la restricción $g(x, y) = c$.

TEOREMA 10 Sean f: $U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y g: $U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones suaves (al menos C^2). Sean $\mathbf{v}_0 \in U$, $g(\mathbf{v}_0) = c$, y sea S la curva de nivel de g correspondiente al valor c. Suponga-mos que $\nabla g(\mathbf{v}_0) \neq \mathbf{0}$ y que existe un número real λ tal que $\nabla f(\mathbf{v}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{v}_0)$. Formamos la función auxiliar $h = f - \lambda g$ y el determinante de la matriz ***hessiana orlada***

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & -\dfrac{\partial g}{\partial x} & -\dfrac{\partial g}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2} \end{vmatrix} \text{ evaluado en } \mathbf{v}_0.$$

i) Si $|\bar{H}| > 0$, entonces $\mathbf{v}_0$ es un punto de máximo local de $f|S$.

ii) Si $|\bar{H}| < 0$, entonces $\mathbf{v}_0$ es un punto de mínimo local de $f|S$.

iii) Si $|\bar{H}| = 0$, el criterio no es concluyente y $\mathbf{v}_0$ puede ser un punto de máximo, un punto de mínimo o ninguna de las dos cosas.

Este teorema se prueba en el suplemento de Internet de esta sección.

EJEMPLO 3.31 Hallar los puntos de extremo de $f(x, y) = (x - y)^n$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 = 1$, donde $n \geq 1$.

Solución

Igualamos a cero las derivadas primeras de la función auxiliar h definida por $h(x, y, \lambda) = (x - y)^n - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$:

$$\begin{aligned} n(x - y)^{n-1} - 2\lambda x &= 0 \\ -n(x - y)^{n-1} - 2\lambda y &= 0 \\ -(x^2 + y^2 - 1) &= 0. \end{aligned}$$

A partir de las dos primeras ecuaciones vemos que $\lambda(x + y) = 0$. Si $\lambda = 0$, entonces $x = y = \pm\sqrt{2}/2$. Si $\lambda \neq 0$, entonces $x = -y$. Los cuatro puntos críticos se representan en la Figura 3.4.6 y los correspondientes valores de $f(x, y)$ se escriben a continuación:

(A)	$x = \sqrt{2}/2$	$y = \sqrt{2}/2$	$\lambda = 0$	$f(x, y) = 0.$
(B)	$x = \sqrt{2}/2$	$y = -\sqrt{2}/2$	$\lambda = n(\sqrt{2})^{n-2}$	$f(x, y) = (\sqrt{2})^n.$
(C)	$x = -\sqrt{2}/2$	$y = -\sqrt{2}/2$	$\lambda = 0$	$f(x, y) = 0.$
(D)	$x = -\sqrt{2}/2$	$y = \sqrt{2}/2$	$\lambda = (-1)^{n-2} n(\sqrt{2})^{n-2}$	$f(x, y) = (-\sqrt{2})^n.$

Vemos por inspección que si n es par, entonces A y C son puntos de mínimo, y B y D de máximo. Si n es impar, entonces B es un punto de máximo, D es de mínimo, y A y C no son ninguna de estas dos cosas. Veamos si el Teorema 10 es consistente con estas observaciones.

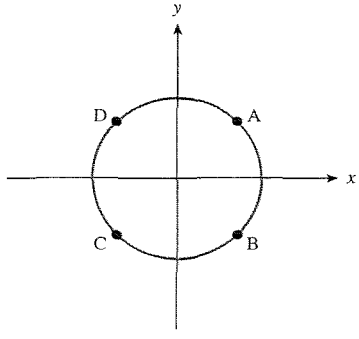


Figura 3.4.6. Los cuatro puntos críticos del Ejemplo 3.31.

El determinante de la matriz hessiana orlada es

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & -2x & -2y \\ -2x & n(n-1)(x-y)^{n-2} - 2\lambda & -n(n-1)(x-y)^{n-2} \\ -2y & -n(n-1)(x-y)^{n-2} & n(n-1)(x-y)^{n-2} - 2\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -4n(n-1)(x-y)^{n-2}(x+y)^2 + 8\lambda(x^2 - y^2).$$

Si $n = 1$ o si $n \geqslant 3$, $|\bar{H}| = 0$ en A, B, C y D. Si $n = 2$, entonces $|\bar{H}| = 0$ en B y D, y -16 en A y C. Así, el criterio de la derivada segunda reconoce los mínimos en A y C, pero no concluye la existencia de los máximos en B y D para $n = 2$. Tampoco es concluyente para los demás valores de n.

Tal como sucede en el caso sin restricciones, también hay un criterio con las derivadas segundas para funciones de más de dos variables. Si buscamos los puntos de extremo de $f(x_1, \ldots, x_n)$ sujeta a una única restricción $g(x_1, \ldots, x_n) = c$, primero formamos la matriz hessiana orlada para la función auxiliar $h(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) - \lambda(g(x_1, \ldots, x_n) - c)$ como sigue:

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{-\partial g}{\partial x_1} & \frac{-\partial g}{\partial x_2} & \cdots & \frac{-\partial g}{\partial x_n} \\ \frac{-\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{-\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{-\partial g}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 h}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}.$$

En segundo lugar, examinamos los determinantes de las submatrices diagonales de orden $\geqslant 3$ en los puntos críticos de h. Si todos son negativos, esto es, si

$$\begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial g}{\partial x_1} & -\frac{\partial g}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} \\ -\frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} < 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\partial g}{\partial x_1} & -\frac{\partial g}{\partial x_2} & -\frac{\partial g}{\partial x_3} \\ -\frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_3} \\ -\frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_3} \\ -\frac{\partial g}{\partial x_3} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_3^2} \end{vmatrix} < 0, \ldots,$$

entonces estamos en un punto de mínimo local de $f|S$. Si comienzan con un subdeterminante 3×3 y alternan los signos (esto es, >0, <0, >0, <0, ...), entonces estamos en un punto de máximo local. Si son todos distintos de cero y no encajan en ninguno de estos patrones, entonces el punto no es ni de máximo ni de mínimo (se dice que es de tipo silla de montar)[14].

EJEMPLO 3.32 Estudiar los puntos de extremo local de $f(x, y, z) = xyz$ en la superficie de la esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, utilizando el criterio de la derivada segunda.

Solución

Igualando a cero las derivadas parciales de la función auxiliar

$$h(x, y, z, \lambda) = xyz - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} yz &= 2\lambda x \\ xz &= 2\lambda y \\ xy &= 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1. \end{aligned}$$

Así, $3xyz = 2\lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 2\lambda$. Si $\lambda = 0$, las soluciones son $(x, y, z, \lambda) = (\pm 1, 0, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0, 0)$ y $(0, 0, \pm 1, 0)$. Si $\lambda \neq 0$, entonces tenemos $2\lambda = 3xyz = 6\lambda z^2$, de modo que $z^2 = \frac{1}{3}$. De manera análoga, $x^2 = y^2 = \frac{1}{3}$. Los puntos críticos de h y los correspondientes valores de f se dan en la Tabla 3.1. En ella se ve que los puntos E, F, G y K son de mínimo. Los puntos D, H, I y J son de máximo. Para ver si esto concuerda con el criterio de la derivada segunda necesitamos considerar dos determinantes. Veamos en primer lugar el siguiente determinante:

$$\begin{aligned} |\bar{H}_2| &= \begin{vmatrix} 0 & -\partial g/\partial x & -\partial g/\partial y \\ -\partial g/\partial x & \partial^2 h/\partial x^2 & \partial^2/\partial x \partial y \\ -\partial g/\partial y & \partial^2 h/\partial x \partial y & \partial^2 h/\partial y^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2x & -2y \\ -2x & -2\lambda & z \\ -2y & z & -2\lambda \end{vmatrix} \\ &= 8\lambda x^2 + 8\lambda y^2 + 8xyz = 8\lambda(x^2 + y^2 + 2z^2). \end{aligned}$$

[14] Para un estudio detallado *véase* C. Caratheodory, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, Holden-Day, San Francisco, 1965; Y. Murata, *Mathematics for Stability and Optimization of Economic Systems*, Academic Press, Nueva York, 1977, pp. 263-271; o D. Spring, *Am. Math. Mon.* 92 (1985): 631-643.

Tabla 3.1. Puntos críticos A, B, ..., J, K de h y los correspondientes valores de f.

	x	y	z	λ	$f(x, y, z)$
$\pm$A	± 1	0	0	0	0
$\pm$B	0	± 1	0	0	0
$\pm$C	0	0	± 1	0	0
D	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/6$	$\sqrt{3}/9$
E	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/6$	$-\sqrt{3}/9$
F	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/6$	$-\sqrt{3}/9$
G	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/6$	$-\sqrt{3}/9$
H	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/6$	$\sqrt{3}/9$
I	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/6$	$\sqrt{3}/9$
J	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/6$	$\sqrt{3}/9$
K	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/6$	$-\sqrt{3}/9$

Obsérvese que signo $(|\bar{H}_2|)$ = signo λ = signo (xyz), donde el signo de un número es 1 si ese número es positivo y -1 si es negativo. En segundo lugar consideramos

$$|\bar{H}_3| = \begin{vmatrix} 0 & -\partial g/\partial x & -\partial g/\partial y & -\partial g/\partial z \\ -\partial g/\partial x & \partial^2 h/\partial x^2 & \partial^2 h/\partial x \partial y & \partial^2 h/\partial x \partial z \\ -\partial g/\partial y & \partial^2 h/\partial x \partial y & \partial^2 h/\partial y^2 & \partial^2 h/\partial y \partial z \\ -\partial g/\partial z & \partial^2 h/\partial x \partial z & \partial^2 h/\partial y \partial z & \partial^2 h/\partial z^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -2x & -2y & -2z \\ -2x & -2\lambda & z & y \\ -2y & z & -2\lambda & x \\ -2z & y & x & -2\lambda \end{vmatrix},$$

que resulta ser $+4$ en los puntos $\pm$A, $\pm$B y $\pm$C, y $-\frac{16}{3}$ en los otros ocho puntos. En E, F, G y K tenemos $|\bar{H}_2| < 0$ y $|\bar{H}_3| < 0$, de modo que el criterio indica que son puntos de mínimo local. En D, H, I y J tenemos $|\bar{H}_2| > 0$ y $|\bar{H}_3| < 0$, y por tanto el criterio dice que son puntos de máximo local. Finalmente, el criterio de la derivada segunda muestra que $\pm$A, $\pm$B y $\pm$C son puntos de silla.

EJERCICIOS

En los Ejercicios 1 al 5, hallar los puntos de extremo de f sujeta a las restricciones enunciadas.

1. $f(x, y, z) = x - y + z$, sujeta a $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

2. $f(x, y) = x - y$, sujeta a $x^2 - y^2 = 2$.

3. $f(x, y) = x$, sujeta a $x^2 + 2y^2 = 3$.

4. $f(x, y, z) = x + y + z$, sujeta a $x^2 - y^2 = 1$, $2x + z = 1$.

5. $f(x, y) = 3x + 2y$, sujeta a $2x^2 + 3y^2 = 3$.

Hallar los puntos de extremo relativo de $f|S$ en los Ejercicios 6 al 9.

6. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x^2 + y^2$, $S = \{(x, 2) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

7. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x^2 + y^2$, $S = \{(x, y) \mid y \geqslant 2\}$.

8. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x^2 - y^2$, $S = \{(x, \cos x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

9. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \to x^2 + y^2 + z^2$, $S = \{(x, y, z) \mid z \geqslant 2 + x^2 + y^2\}$.

10. Utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange para hallar los valores máximo y mínimo absolutos de $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ en el disco unidad (*véase* el Ejemplo 3.20 de la Sección 3.3).

11. Consideramos la función $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ definida en el disco unidad $D = \{(x, y) \mid x^2 - y^2 \leqslant 1\}$. Utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange para localizar los puntos de máximo y de mínimo de f en la circunferencia unidad. Usar esto para determinar los valores máximo y mínimo absolutos de f en D.

12. Una caja rectangular sin tapa tiene una superficie de 16 m^2. Hallar las dimensiones que maximizan su volumen.

13. Diseñar una lata cilíndrica (con tapa) que contenga 1 litro de agua, usando la mínima cantidad de metal posible.

14. Demostrar que las soluciones de las Ecuaciones (4) y (5) se corresponden biunívocamente con los puntos críticos de

$$h(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = f(x_1, \ldots, x_n) - \lambda_1[g_1(x_1, \ldots, x_n) - c_1] - \cdots - \lambda_k[g_k(x_1, \ldots, x_n) - c_k].$$

15. Hallar el máximo y el mínimo absolutos para la función $f(x, y, z) = x + y - z$ en la bola $B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$.

16. Repetir el Ejercicio 15 para $f(x, y, z) = x + yz$.

17. Se va a adornar un espejo rectangular que tiene un área de A centímetros cuadrados, a lo largo de sus bordes. Si los adornos a lo largo de los lados horizontales cuestan p céntimos por centímetro y los de los lados verticales q céntimos por centímetro, hallar las dimensiones que minimizarán el costo total.

18. Un canal de riego en Arizona tiene los lados y el fondo de hormigón, una sección transversal trapezoidal de área $A = y(x + y \tan\theta)$ y perímetro húmedo $P = x + 2y/\cos\theta$, donde x = anchura del fondo, y = profundidad del agua, y θ = inclinación de los lados medida a partir de la vertical. El mejor diseño para una inclinación θ fija se halla resolviendo P = mínimo sujeto a la condición A = constante. Demostrar que $y^2 = (A \cos\theta)/(2 - \operatorname{sen}\theta)$.

19. Aplicar el criterio de la derivada segunda para estudiar la naturaleza de los puntos de extremo de los Ejercicios 1 y 5.

20. Un rayo de luz viaja del punto A al punto B atravesando la frontera entre dos medios (*véase* la Figura 3.4.7). En el primer medio su velocidad es v_1, y en el segundo v_2. Demostrar que el viaje se realiza en el menor tiempo posible cuando se cumple la *ley de Snell*:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

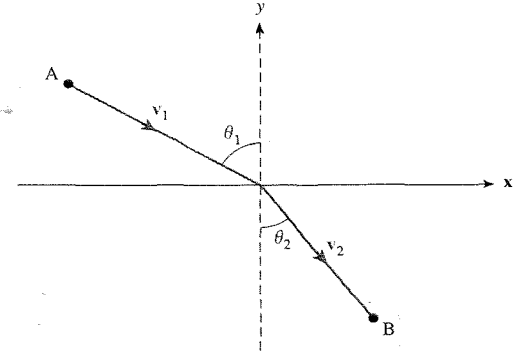


Figura 3.4.7. La ley de refracción de Snell.

21. Un servicio de mensajería exige que las dimensiones de una caja rectangular sean tales que la longitud más el doble de la anchura más el doble de la altura no rebase 108 centímetros:

$$l + 2w + 2h \leqslant 108.$$

¿Cuál es la capacidad de la caja de mayor volumen que transportará la compañía?

22. Sea P un punto en la superficie S de $\mathbb{R}^3$ definida por la ecuación $f(x, y, z) = 1$, donde f es de clase C^1. Supongamos que P es un punto donde se maximiza la distancia de S al origen. Demostrar que el vector que sale del origen y acaba en P es perpendicular a S.

23. Sea A una matriz 3×3 simétrica distinta de cero. Así, sus elementos satisfacen $a_{ij} = a_{ji}$. Consideramos la función $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}$.

a) ¿Cuál es ∇f?

b) Considerar la restricción de f a la superficie de la esfera unidad $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ en $\mathbb{R}^3$. Sabemos por el Teorema 7 que f tiene un máximo y un mínimo en S. Demostrar que tiene que haber un $\mathbf{x} \in S$ y un $\lambda \neq 0$ tales que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. (El vector $\mathbf{x}$ se llama ***autovector***, mientras que el escalar λ se llama ***autovalor***.)

c) ¿Cuáles son el máximo y el mínimo de f en $B = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$?

24. Supongamos que la matriz A de la función f definida en el Ejercicio 23 no es necesariamente simétrica.

a) ¿Cuál es ∇f?

b) ¿Es posible concluir la existencia de un vector propio y de un valor propio, como en el Ejercicio 23?

25. **a)** Hallar los puntos críticos de $x + y^2$ sujeta a la restricción $2x^2 + y^2 = 1$.

b) Utilizar la matriz hessiana orlada para clasificar los puntos críticos.

26. Responder a la pregunta planteada en la última línea del Ejemplo 3.29.

27. Intentar encontrar los puntos de extremo de $xy + yz$ entre aquellos puntos que satisfacen $xz = 1$.

28. La función de producción de una empresa es $Q(x, y) = xy$. El coste de producción es $C(x, y) = 2x + 3y$. Si esta empresa puede gastar $C(x, y) = 10$, ¿cuál es la máxima cantidad que puede producir?

29. Hallar el punto de la curva $(\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen}(t/2))$ que está más alejado del origen.

30. Una compañía utiliza fibra de algodón y lana para producir tela. La cantidad de tela producida está dada por $Q(x, y) = xy - x - y + 1$, donde x es el número de kilos de lana, y el número de kilos de algodón, $x > 1$ e $y > 1$. Si la lana cuesta p euros el kilo y el algodón q euros el kilo, y la compañía puede gastar B euros en materiales, ¿cuál debe ser la proporción entre algodón y lana para producir el máximo de tela?

31. Llevar a cabo el análisis del Ejemplo 3.30 para la función de producción $Q(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, siendo A y α constantes positivas, y $0 < \alpha < 1$. Ésta es la llamada **función de producción de Cobb-Douglas** y se utiliza en ocasiones como un modelo macroeconómico simple. En ese caso Q es el producto agregado de la economía para una cantidad dada de capital y mano de obra.

3.5. El teorema de la función implícita

En esta sección enunciamos dos versiones del *teorema de la función implícita*, tal vez el teorema más importante de todo el análisis matemático. Todo el fundamento teórico de la noción de superficie, así como el método de los multiplicadores de Lagrange, dependen de él. Es más, es la piedra angular de varias áreas de las matemáticas, como la topología diferencial y la geometría.

El teorema de la función implícita de una variable

En el cálculo de una variable se aprende la importancia del proceso de hallar la inversa de una función. Por ejemplo, $x = \ln y$ es la inversa de $y = e^x$, y $x = \operatorname{arcsen} y$ es la inversa de $y = \operatorname{sen} x$. También es importante saber calcular la inversa en el caso de funciones de varias variables; por ejemplo, el cambio entre coordenadas polares y cartesianas en el plano involucra invertir dos funciones de dos variables.

Recordemos del cálculo de una variable que si $y = f(x)$ es una función C^1 y $f'(x_0) \neq 0$, entonces podemos despejar x localmente, en un entorno de x_0, para obtener la función inversa $x = f^{-1}(y)$. Aprendimos que $(f^{-1})'(y) = 1/f'(x)$; es decir, $dx/dy = 1/(dy/dx)$. Es razonable esperar que $y = f(x)$ se pueda invertir, puesto que $f'(x_0) \neq 0$ significa que la pendiente de $y = f(x)$ no es cero, de modo que la gráfica está subiendo o bajando cerca de x_0. Así, si reflejamos la gráfica con respecto a la recta $y = x$, sigue siendo una gráfica *cerca de* (x_0, y_0), donde $y_0 = f(x_0)$. Por ejemplo, en la Figura 3.5.1 podemos invertir $y = f(x)$ en la caja sombreada, por lo que $x = f^{-1}(y)$ está definida en este rango.

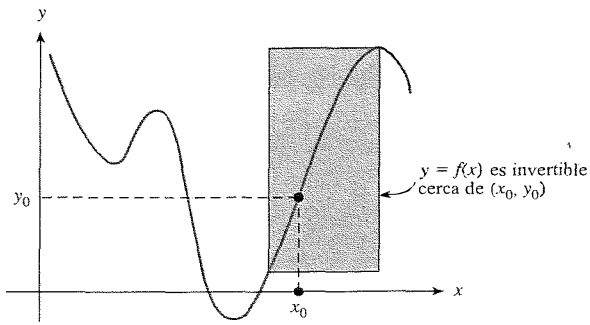


Figura 3.5.1. Si $f'(x_0) \neq 0$, entonces $y = f(x)$ es localmente invertible.

Un resultado particular

A continuación consideramos la situación en el caso de funciones con valores reales de las variables $x_1, \ldots, x_n$ y z.

TEOREMA 11: Caso particular del teorema de la función implícita Supongamos que $F: \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ tiene derivadas parciales continuas. Denotamos los puntos de $\mathbb{R}^{n+1}$ por $(\mathbf{x}, z)$, donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $z \in \mathbb{R}$, y suponemos que $(\mathbf{x}_0, z_0)$ satisface

$$F(\mathbf{x}_0, z_0) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}_0, z_0) \neq 0.$$

Entonces hay una bola U que contiene a $\mathbf{x}_0$ en $\mathbb{R}^n$ y un entorno V de z_0 en $\mathbb{R}$ tales que existe una única función $z = g(\mathbf{x})$ definida para $\mathbf{x}$ en U y z en V que satisface

$$F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0.$$

Más aún, si $\mathbf{x}$ en U y z en V satisfacen $F(\mathbf{x}, z) = 0$, entonces $z = g(\mathbf{x})$. Finalmente, $z = g(\mathbf{x})$ es continuamente diferenciable, con derivada dada por

$$\mathbf{D}g(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}, z)} \mathbf{D}_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}, z)\Big|_{z = g(\mathbf{x})},$$

donde $\mathbf{D}_{\mathbf{x}} F$ denota las derivadas (parciales) de F con respecto a la variable x, esto es, $\mathbf{D}_{\mathbf{x}} F = [\partial F/\partial x_1, \ldots, \partial F/\partial x_n]$. En otras palabras,

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = -\frac{\partial F/\partial x_i}{\partial F/\partial z}, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

En el suplemento de Internet se da una prueba de este teorema.

Una vez sabemos que $z = g(\mathbf{x})$ existe y es diferenciable, se puede comprobar la Fórmula (1) derivando implícitamente; para ver esto, nótese que la regla de la cadena aplicada a $F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0$ da

$$\mathbf{D}_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) + \left[\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))\right][\mathbf{D}g(\mathbf{x})] = 0,$$

que es equivalente a la Fórmula (1).

EJEMPLO 3.33 En este caso particular del teorema de la función implícita es importante darse cuenta de la necesidad de tomar entornos U y V suficientemente pequeños. Por ejemplo, consideremos la ecuación

$$x^2 + z^2 - 1 = 0,$$

esto es, $F(x, z) = x^2 + z^2 - 1$, con $n = 1$. Aquí $(\partial F/\partial z)(x, z) = 2z$, de modo que el caso particular del teorema de la función implícita se puede aplicar en puntos (x_0, z_0) que satisfagan $x_0^2 + z_0^2 - 1 = 0$ y $z_0 \neq 0$. Así, cerca de dichos puntos z está definida de manera única como función de x. Esta función es $z = +\sqrt{1 - x^2}$ si $z_0 > 0$ y $z = -\sqrt{1 - x^2}$ si $z_0 < 0$. Nótese que z está definida sólo para $|x| < 1$ (U no debe ser demasiado grande) y z es única sólo si está cerca de z_0 (V no debe ser demasiado grande). Estos hechos y la no existencia de $\partial z/\partial x$ en $z_0 = 0$ son, por supuesto, claros partiendo de que $x^2 + z^2 = 1$ define una circunferencia en el plano xz (Figura 3.5.2).

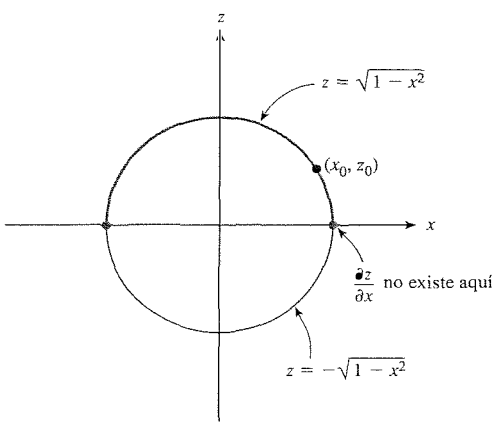


Figura 3.5.2. En el teorema de la función implícita es necesario tomar entornos pequeños.

El teorema de la función implícita y las superficies

Apliquemos el Teorema 11 al estudio de superficies. Estamos interesados en el conjunto de nivel de una función g: $U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, es decir, en la superficie S formada por los puntos $\mathbf{x}$ que satisfacen $g(\mathbf{x}) = c_0$, donde $\mathbf{x}_0$ está dado y $c_0 = g(\mathbf{x}_0)$. Para ser más específicos, tomamos $n = 3$. Así pues, estamos tratando con el conjunto de nivel de una función $g(x, y, z)$ que pasa por un punto dado (x_0, y_0, z_0). Como en el teorema de los multiplicadores de Lagrange, suponemos que

$\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$. Esto significa que al menos una de las derivadas parciales de g es distinta de cero. Para ser específicos, supongamos que $(\partial g/\partial z)(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Aplicando el Teorema 11 a la función $(x, y, z) \to g(x, y, z) - c_0$, sabemos que hay una única función $z = k(x, y)$ que satisface $g(x, y, k(x, y)) = c_0$ para (x, y) próximo a (x_0, y_0) y z próximo a z_0. Así, cerca de z_0 la superficie S es la gráfica de una función k. Como k es continuamente diferenciable, esta superficie tiene un plano tangente en (x_0, y_0, z_0) dado por

$$z = z_0 + \left[\frac{\partial k}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0) + \left[\frac{\partial k}{\partial y}(x_0, y_0)\right](y - y_0). \tag{2}$$

Pero, por la Fórmula (1),

$$\frac{\partial k}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\dfrac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial k}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\dfrac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}.$$

Sustituyendo estas dos ecuaciones en la ecuación del plano tangente se obtiene esta descripción equivalente:

$$0 = (z - z_0)\frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) + (x - x_0)\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0);$$

esto es,

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \nabla g(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Así, el plano tangente a la superficie de nivel de g es el complemento ortogonal a $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ que pasa por el punto (x_0, y_0, z_0). Esto concuerda con la caracterización de planos tangentes a conjuntos de nivel que dimos en el Capítulo 2.

Ahora estamos preparados para completar la prueba del teorema de los multiplicadores de Lagrange. Para ello debemos demostrar que todo vector tangente a S en (x_0, y_0, z_0) es tangente a una curva en S. Por el Teorema 11, basta con demostrar esto para gráficas de la forma $z = k(x, y)$. Sin embargo, si $\mathbf{v} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ es tangente a la gráfica (esto es, si satisface la Ecuación (2)), entonces $\mathbf{v}$ es tangente a la trayectoria en S dada por

$$\mathbf{c}(t) = (x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0), k(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)))$$

en $t = 0$. Esto se puede verificar usando la regla de la cadena (*véase* la Figura 3.5.3).

EJEMPLO 3.34 ¿Cerca de qué puntos es posible representar la superficie

$$x^3 + 3y^2 + 8xz^2 - 3z^3y = 1$$

como la gráfica de una función diferenciable $z = k(x, y)$?

Solución

Aquí tomamos $F(x, y, z) = x^3 + 3y^2 + 8xz^2 - 3z^3y - 1$ e intentamos despejar z de $F(x, y, z) = 0$ como función de (x, y). Por el Teorema 11, esto se puede hacer cerca de un punto (x_0, y_0, z_0) si $(\partial F/\partial z)(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, esto es, si

$$z_0(16x_0 - 9z_0y_0) \neq 0,$$

lo cual significa a su vez

$$z_0 \neq 0 \qquad \text{y} \qquad 16x_0 \neq 9z_0y_0.$$

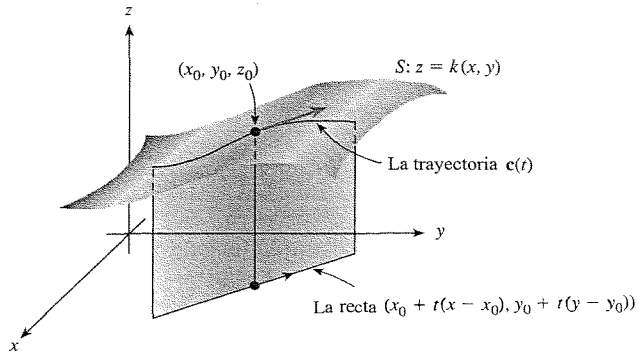


Figura 3.5.3. Construcción de una trayectoria $\mathbf{c}(t)$ en la superficie S con vector tangente $\mathbf{v}$.

El teorema general de la función implícita

A continuación enunciaremos, sin demostración, el *teorema general de la función implícita*[15]. En lugar de tratar de despejar una variable de una ecuación, intentamos despejar m variables $z_1, \ldots, z_m$ de m ecuaciones:

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m) &= 0 \\ F_2(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m) &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad & \vdots \\ F_m(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m) &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

[15] Se pueden consultar tres demostraciones diferentes del caso general en:

a) E. Goursat, *A Course in Mathematical Analysis*, I, Dover, Nueva York, 1959, p. 45. (Esta demostración deduce el teorema general mediante aplicaciones sucesivas del Teorema 11.)
b) T. M. Apóstol, *Mathematical Analysis*, segunda edición, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1974.
c) J. E. Marsden y M. Hoffman, *Elementary Classical Analysis*, segunda edición, Freeman, Nueva York, 1993.

De estas fuentes, las dos últimas utilizan ideas más sofisticadas que normalmente no se cubren hasta un curso avanzado de análisis. La primera, sin embargo, la puede comprender fácilmente el lector que tenga algún conocimiento de álgebra lineal.

En el Teorema 11 teníamos la condición $\partial F/\partial z \neq 0$. La condición adecuada para el teorema general de la función implícita es que $\Delta \neq 0$[16], donde Δ es el determinante de la matriz $m \times m$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial z_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial z_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial z_m} \end{bmatrix}$$

evaluado en el punto $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)$; en un entorno de dicho punto podemos despejar $\mathbf{z}$, de manera única, en términos de $\mathbf{x}$.

TEOREMA 12: Teorema general de la función implícita Si $\Delta \neq 0$, entonces la Ecuación (3) define de manera única funciones (suaves)

$$z_i = k_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

cerca del punto $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)$. Sus derivadas se pueden calcular mediante diferenciación implícita.

EJEMPLO 3.35 Demostrar que es posible despejar u y v de

$$xu + yvu^2 = 2$$

$$xu^3 + y^2v^4 = 2$$

como función de x y z de manera única cerca del punto $(x, y, u, v) = (1, 1, 1, 1)$. Calcular $\partial u/\partial x$ en el punto $(1, 1)$.

Solución

Para comprobar que se puede despejar, formamos las ecuaciones

$$F_1(x, y, u, v) = xu + yvu^2 - 2$$

$$F_2(x, y, u, v) = xu^3 + y^2v^4 - 2$$

[16] Para estudiantes que hayan cursado álgebra lineal: la condición $\Delta \neq 0$ tiene una interpretación simple en el caso en que F *sea lineal*; a saber, $\Delta \neq 0$ es equivalente a que el rango de F sea igual a m, lo que a su vez equivale a que el espacio de soluciones de $F = 0$ sea m-dimensional.

y el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} \qquad \text{en} \qquad (1, 1, 1, 1)$$

$$= \begin{vmatrix} x + 2yuv & yu^2 \\ 3u^2x & 4y^2v^3 \end{vmatrix} \qquad \text{en} \qquad (1, 1, 1, 1)$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 9.$$

Como $\Delta \neq 0$, el teorema general de la función implícita nos asegura que es posible despejar. Para hallar $\partial u/\partial x$ derivamos implícitamente la ecuación dada con respecto a x usando la regla de la cadena:

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + u + y \frac{\partial v}{\partial x} u^2 + 2yvu \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$3xu^2 \frac{\partial u}{\partial x} + u^3 + 4y^2v^3 \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Haciendo $(x, y, u, v) = (1, 1, 1, 1)$ se tiene que

$$3 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = -1$$

$$3 \frac{\partial u}{\partial x} + 4 \frac{\partial v}{\partial x} = -1.$$

Despejamos $\partial u/\partial x$ multiplicando la primera ecuación por 4 y restándole la segunda, obteniéndose $\partial u/\partial x = -\frac{1}{3}$.

El teorema de la función inversa

El *teorema de la función inversa* es un caso particular del teorema general de la función implícita. Aquí trataremos de despejar $x_1, \ldots, x_n$ como funciones de $y_1, \ldots, y_n$ en las ecuaciones

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_n) &= y_1 \\ &\cdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) &= y_n \end{aligned} \tag{4}$$

es decir, estamos intentando invertir las ecuaciones del sistema (4). Esto es análogo a formar las inversas de funciones como $\operatorname{sen} x = y$ y $e^x = y$, algo con lo que el lector debería estar familiarizado por el cálculo elemental. Ahora, sin embargo, tratamos con funciones de varias variables. A la pregunta de si es posible despejar, se responde mediante el teorema general de la función

implícita aplicado a las funciones $y_i - f_i(x_1, \ldots, x_n)$ con las incógnitas $(x_1, \ldots, x_n)$ (anteriormente llamadas $(z_1, \ldots, z_n)$). La condición para poder despejar en un entorno de un punto $\mathbf{x}_0$ es $\Delta \neq 0$, donde Δ es el determinante de la matriz $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$, y $f = (f_1, \ldots, f_n)$. La cantidad Δ se denota por $\partial(f_1, \ldots, f_n)/\partial(x_1, \ldots, x_n)$, $\partial(y_1, \ldots, y_n)/\partial(x_1, \ldots, x_n)$ o $J(f)(\mathbf{x}_0)$, y recibe el nombre de ***determinante jacobiano*** de f. Explícitamente,

$$\left.\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = J(f)(\mathbf{x}_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{vmatrix}. \tag{5}$$

El lector notará que en el caso en que f es lineal, por ejemplo $f(x) = Ax$, donde A es una matriz $n \times n$, la condición $\Delta \neq 0$ es equivalente a que el determinante de A sea distinto de cero, $\det A \neq 0$, y de la Sección 1.5 sabemos que A, y por tanto f, tiene una inversa.

El determinante jacobiano desempeñará un papel importante en nuestro trabajo sobre integración (*véase* el Capítulo 5). El siguiente teorema resume este análisis.

TEOREMA 13: Teorema de la función inversa Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sean $f_1: U \to \mathbb{R}$, ..., $f_n: U \to \mathbb{R}$ con derivadas parciales continuas. Consideramos las ecuaciones de (4) cerca de una solución dada $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{y}_0$. Si $J(f)(\mathbf{x}_0)$ (definido por la Ecuación (5)) es distinto de cero, entonces en las ecuaciones de (4) se puede despejar de manera única $\mathbf{x} = g(\mathbf{y})$, para $\mathbf{x}$ cerca de $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{y}$ cerca de $\mathbf{y}_0$. Además, la función g tiene derivadas parciales continuas.

EJEMPLO 3.36 Consideramos las ecuaciones

$$\frac{x^4 + y^4}{x} = u, \qquad \operatorname{sen} x + \cos y = v.$$

¿Cerca de qué puntos (x, y) podemos despejar x, y en términos de u, v?

Solución

Aquí las funciones son $u = f_1(x, y) = (x^4 + y^4)/x$ y $v = f_2(x, y) = \operatorname{sen} x + \cos y$. Queremos conocer los puntos cerca de los cuales podemos despejar x, y como funciones de u y v. Según el teorema de la función inversa, primero debemos calcular el determinante jacobiano $\partial(f_1, f_2)/\partial(x, y)$. Como dominio de $f = (f_1, f_2)$ tomamos $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$. Ahora

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{3x^4 - y^4}{x^2} & \dfrac{4y^3}{x} \\ \cos x & -\operatorname{sen} y \end{vmatrix} = \frac{\operatorname{sen} y}{x^2}(y^4 - 3x^4) - \frac{4y^3}{x}\cos x.$$

Por consiguiente, en los puntos donde esto no se anula podemos despejar x, y en términos de u y v. En otras palabras, podemos despejar x, y cerca de aquellos x, y para los cuales $x \neq 0$ y $(\operatorname{sen} y)(y^4 - 3x^4) \neq 4xy^3 \cos x$. Por ejemplo, si $x_0 = \pi/2$, $y_0 = \pi/2$, podemos despejar x, y cerca de (x_0, y_0), porque ahí $\partial(f_1, f_2)/\partial(x, y) \neq 0$. En general estas condiciones no se pueden resolver explícitamente.

EJERCICIOS

1. Consideramos una curva en el plano xy que pasa por el punto (x_0, y_0), definida por $F(x, y) = 0$, donde F es C^1. Supongamos que $(\partial F/\partial y)(x_0, y_0) \neq 0$. Demostrar que esta curva se puede representar localmente como la gráfica de una función $y = g(x)$. Demostrar que i) la recta ortogonal a $\nabla F(x_0, y_0)$ coincide con ii) la recta tangente a la gráfica de $y = g(x)$.

2. Demostrar que en $xy + z + 3xz^5 = 4$ se puede despejar z como función de (x, y) cerca de $(1, 0, 1)$. Calcular $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ en $(1, 0)$.

3. **a)** Determinar directamente (esto es, sin utilizar el Teorema 11) dónde se puede despejar la variable y en términos de x en la ecuación $F(x, y) = y^2 + y + 3x + 1 = 0$.

b) Comprobar que la respuesta de la parte a) concuerda con la respuesta que se espera del teorema de la función implícita. Calcular dy/dx.

4. Repetir el Ejercicio 3 con $F(x, y) = xy^2 - 2y + x^2 + 2 = 0$.

5. Demostrar que se puede despejar z como función de (x, y) en $x^3z^2 - z^3yx = 0$ cerca de $(1, 1, 1)$, pero no cerca del origen. Calcular $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ en $(1, 1)$.

6. Analizar la posibilidad de despejar u, v, w en términos de x, y, z en el sistema

$$3x + 2y + z^2 + u + v^2 = 0$$
$$4x + 3y + z + u^2 + v + w + 2 = 0$$
$$x + z + w + u^2 + 2 = 0$$

cerca de $x = y = z = 0$, $u = v = 0$ y $w = -2$.

7. Analizar la posibilidad de despejar u, v en términos de x, y en

$$y + x + uv = 0$$
$$uxy + v = 0$$

cerca de $x = y = u = v = 0$, y comprobarlo directamente.

8. Investigar si se puede o no despejar x, y, z en términos de u, v, w en el sistema

$$u(x, y, z) = x + xyz$$
$$v(x, y, z) = y + xy$$
$$w(x, y, z) = z + 2x + 3z^2$$

cerca de $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

9. Consideramos $f(x, y) = ((x^2 - y^2)/(x^2 + y^2), xy/(x^2 + y^2))$. ¿Tiene esta aplicación de $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ en $\mathbb{R}^2$ una inversa local cerca de $(x, y) = (0, 1)$?

10. **a)** Definimos x: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mediante $x(r, \theta) = r\cos\theta$ y definimos y: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mediante $y(r, \theta) = r\,\text{sen}\,\theta$. Demostrar que

$$\left.\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}\right|_{(r_0, \theta_0)} = r_0.$$

b) ¿Cuándo se puede formar una función inversa suave $(r(x, y), \theta(x, y))$? Comprobarlo directamente y con el teorema de la función inversa.

c) Consideramos las siguientes transformaciones a coordenadas esféricas (*véase* la Sección 1.4):

$$x(\rho, \phi, \theta) = \rho\,\text{sen}\,\phi\cos\theta$$
$$y(\rho, \phi, \theta) = \rho\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta$$
$$z(\rho, \phi, \theta) = \rho\cos\phi.$$

Demostrar que el determinante jacobiano viene dado por

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = \rho^2\,\text{sen}\,\phi.$$

d) ¿Cuándo se puede despejar (ρ, ϕ, θ) en términos de (x, y, z)?

11. Sea (x_0, y_0, z_0) un punto del lugar geométrico definido por $z^2 + xy - a = 0$, $z^2 + x^2 - y^2 - b = 0$, donde a y b son constantes.

a) ¿Bajo qué condiciones se puede representar la parte de este lugar geométrico que está cerca de (x_0, y_0, z_0) en la forma $x = f(z)$, $y = g(z)$?

b) Calcular $f'(z)$ y $g'(z)$.

12. ¿Es posible despejar $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$ en el sistema de ecuaciones

$$xy^2 + xzu + yv^2 = 3$$
$$u^3yz + 2xv - u^2v^2 = 2$$

cerca de $(x, y, z) = (1, 1, 1)$, $(u, v) = (1, 1)$? Calcular $\partial v/\partial y$ en $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

13. El problema de factorizar un polinomio $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ en factores lineales es, en cierto sentido, un problema de «función inversa». Se puede pensar en los coeficientes a_i como en funciones de las n raíces r_j. Nos gustaría expresar las raíces como funciones de los coeficientes en alguna región. Con $n = 3$, aplicar el teorema de la función inversa a este problema y enunciar lo que dice sobre la posibilidad de llevar a cabo lo anteriormente planteado.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 3

1. Analizar el comportamiento de las siguientes funciones en los puntos indicados. (La respuesta del apartado b) puede depender de la constante C.)

a) $z = x^2 - y^2 + 3xy, \qquad (x, y) = (0, 0).$

b) $z = x^2 - y^2 + Cxy, \qquad (x, y) = (0, 0).$

2. Hallar y clasificar los valores extremos (si los hay) de las funciones de $\mathbb{R}^2$ definidas por las siguientes expresiones:

a) $y^2 - x^3$.

b) $(x - 1)^2 + (x - y)^2$.

c) $x^2 + xy^2 + y^4$.

3. **a)** Hallar la mínima distancia del origen en $\mathbb{R}^3$ a la superficie $z = \sqrt{x^2 - 1}$.

b) Repetir la parte a) para la superficie $z = 6xy + 7$.

4. Hallar algunos de los primeros términos del desarrollo de Taylor de $f(x, y) = e^{xy}\cos x$ alrededor de $x = 0$, $y = 0$.

5. Demostrar que

$$z = \frac{3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 18}{12(1 + 4y^2)}$$

tiene un máximo local, un mínimo local y un punto de silla (la gráfica se muestra en la Figura 3.R.1).

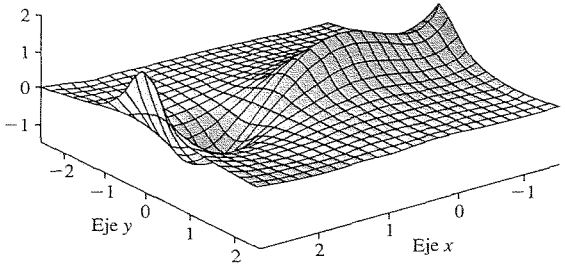


Figura 3.R.1. Gráfica de $z = (3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 18)/12(1 + 4y^2)$.

6. Hallar los puntos de máximo, de mínimo y de silla de la función $z = (2 + \cos \pi x)(\text{sen } \pi y)$, cuya gráfica se muestra en la Figura 3.R.2.

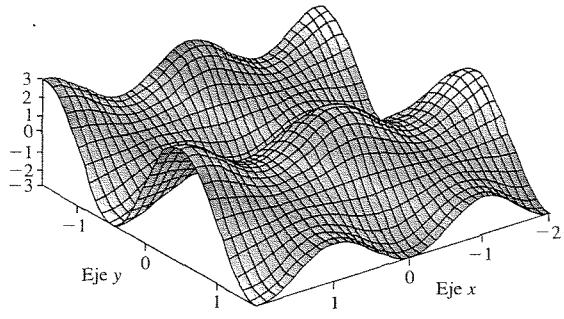


Figura 3.R.2. Gráfica de $z = (2 + \cos \pi x)(\text{sen } \pi y)$.

7. Hallar y describir los puntos críticos de $f(x, y) = y \,\text{sen}\,(\pi x)$ (*véase* la Figura 3.R.3).

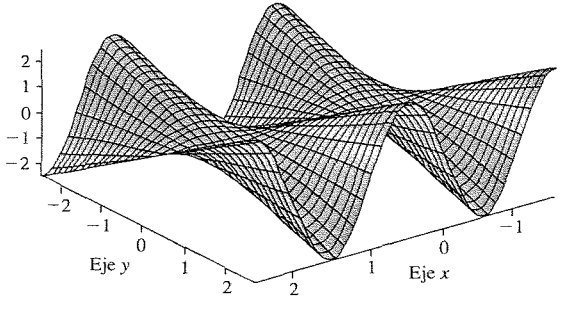


Figura 3.R.3. Gráfica de $z = y \,\text{sen}\,(\pi x)$.

8. En la Figura 3.R.4 se muestra la gráfica de la función $z = \text{sen}\,(\pi x)/(1 + y^2)$. Comprobar que esta función alterna puntos de máximo y de mínimo sobre el eje x, sin otros puntos críticos.

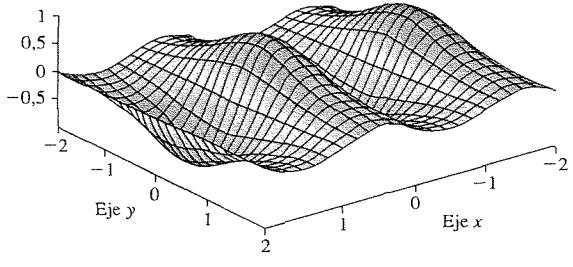


Figura 3.R.4. Gráfica de $z = \text{sen}\,(\pi x)/(1 + y^2)$.

En los Ejercicios 9 al 14, hallar los extremos de las funciones dadas sujetas a las restricciones especificadas.

9. $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$, sujeta a $x^2 + y^2 = 1$.

10. $f(x, y) = xy - y^2$, sujeta a $x^2 + y^2 = 1$.

11. $f(x, y) = \cos(x^2 - y^2)$, sujeta a $x^2 + y^2 = 1$.

12. $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, sujeta a $x + y = 1$.

13. $z = xy$, sujeta a la condición $x + y = 1$.

14. $z = \cos^2 x + \cos^2 y$, sujeta a la condición $x + y = \pi/4$.

15. Hallar los puntos de la superficie $z^2 - xy = 1$ más cercanos al origen.

16. Utilizar el teorema de la función implícita para calcular dy/dx para

a) $x/y = 10$. **b)** $x^3 - \operatorname{sen} y + y^4 = 4$ **c)** $e^{x+y^2} + y^3 = 0$.

17. Hallar la distancia más corta del punto $(0, b)$ a la parábola $x^2 - 4y = 0$. Resolver este problema utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange y también sin usar dicho método.

18. Resolver los siguientes problemas geométricos mediante el método de Lagrange.

a) Hallar la distancia más corta del punto (a_1, a_2, a_3) en $\mathbb{R}^3$ al plano de ecuación $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$, donde $(b_1, b_2, b_3) \neq (0, 0, 0)$.

b) Hallar el punto más próximo al origen sobre la recta de intersección de los dos planos $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ y $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$.

c) Demostrar que el volumen del mayor paralelepípedo rectangular que se puede inscribir en el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

es $8abc/3\sqrt{3}$.

19. Una partícula se mueve en un potencial $V(x, y) = x^3 - y^2 + x^2 + 3xy$. Determinar si $(0, 0)$ es un punto de equilibrio estable —esto es, si $(0, 0)$ es o no un punto de mínimo local estricto de V.

20. Estudiar la naturaleza de la función $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ cerca de $(0, 0)$. Demostrar que el punto $(0, 0)$ es un punto crítico degenerado, esto es, $D = 0$. Esta superficie se llama *silla de mono*.

21. Hallar el máximo de $f(x, y) = xy$ sobre la curva $(x + 1)^2 + y^2 = 1$.

22. Hallar el máximo y el mínimo de $f(x, y) = xy - y + x - 1$ en el conjunto $x^2 + y^2 \leqslant 2$.

23. La planta de Baraboo, Wisconsin, de la International Widget Co., Inc., usa aluminio, hierro y magnesio para producir cachivaches de alta calidad. La cantidad de cachivaches que se puede producir utilizando x toneladas de aluminio, y toneladas de hierro y z toneladas de magnesio es $Q(x, y, z) = xyz$. El coste de las materias primas es: aluminio, 6 dólares por tonelada; hierro, 4 dolares por tonelada; y magnesio, 8 dólares por tonelada. ¿Cuántas toneladas de aluminio, hierro y magnesio deberán usarse para manufacturar 1.000 cachivaches al menor coste posible? [INDICACIÓN: Hallar un valor de extremo, ¿de qué función sujeta a qué restricción?].

24. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y sea:

$$u = f(x)$$
$$v = -y + xf(x).$$

Si $f'(x_0) \neq 0$, probar que esta transformación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ es invertible cerca de (x_0, y_0) y que su inversa está dada por

$$x = f^{-1}(u)$$
$$y = -v + uf^{-1}(u).$$

25. Demostrar que el par de ecuaciones

$$x^2 - y^2 - u^3 + v^2 + 4 = 0$$
$$2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8 = 0$$

determinan funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$ definidas para (x, y) próximo a $x = 2$ e $y = -1$, tales que $u(2, -1) = 2$ y $v(2, -1) = 1$. Calcular $\partial u/\partial x$ en $(2, -1)$.

26. Demostrar que existen números positivos p y q, y funciones únicas u y v del intervalo $(-1 - p, -1 + p)$ en el intervalo $(1 - q, 1 + q)$ que satisfacen

$$xe^{u(x)} + u(x)e^{v(x)} = 0 = xe^{v(x)} + v(x)e^{u(x)}$$

para todo x en el intervalo $(-1 - p, -1 + p)$ con $u(-1) = 1 = v(-1)$.

27. Para hacer este ejercicio, el lector deberá estar familiarizado con la técnica de diagonalización de una matriz 2×2. Sean $a(x)$, $b(x)$ y $c(x)$ tres funciones continuas definidas en $U \cup \partial U$, donde U es un conjunto abierto y ∂U denota el conjunto de los puntos de su frontera (*véase* la Sección 2.2). Usamos la notación del Lema 2 de la Sección 3.3 y suponemos que para cada $x \in U \cup \partial U$ la forma cuadrática definida por la matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

es definida positiva. Dada una función v de clase C^2 en $U \cup \partial U$, definimos el operador diferencial L mediante $Lv = a(\partial^2 v/\partial x^2) + 2b(\partial^2 v/\partial x \partial y) + c(\partial^2 v/\partial y^2)$. Dada la condición de que la matriz sea definida positiva, se dice que este operador es ***elíptico***. Se dice que una función v es ***estrictamente subarmónica respecto*** a L si $Lv > 0$. Demostrar que una función estrictamente subarmónica no puede tener un punto de máximo en U.

28. Se dice que una función v está en el **núcleo** del operador L descrito en el Ejercicio 27 si $Lv = 0$ en $U \cup \partial U$. Argumentando como en el Ejercicio 37 de la Sección 3.3, demostrar que si v alcanza su máximo en U entonces también lo alcanza en ∂U. Esto recibe el nombre de *principio del máximo débil* para operadores elípticos.

29. Sea L un operador diferencial elíptico como el de los Ejercicios 27 y 28.

a) Definir la noción de función estrictamente superarmónica.

b) Demostrar que dichas funciones no pueden alcanzar su mínimo en U.

c) Si v es como la del Ejercicio 28, demostrar que si alcanza su mínimo en U, también lo alcanza en ∂U.

*El **método de los mínimos cuadrados** que se describe a continuación deberá aplicarse en los ejercicios del 30 al 35.*

Sucede en ocasiones que la teoría que hay detrás de un experimento indica que los datos experimentales deberían disponerse aproximadamente a lo largo de una recta de la forma $y = mx + b$. Está claro que los resultados obtenidos en la realidad nunca concuerdan exactamente con la teoría. Nos enfrentamos

(RA 676 - E326-UTD - CONCEPCION DEL URUGUAY

entonces al problema de hallar la recta que *se ajusta mejor* a un cierto conjunto de datos experimentales (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n), como en la Figura 3.R.5. Si conjeturamos que la recta $y = mx + b$ se ajustará a los datos, cada punto se desviará verticalmente de la recta en la cantidad $d_i = y_i - (mx_i + b)$.

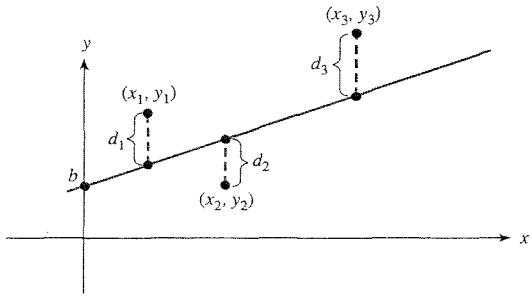


Figura 3.R.5. El método de los mínimos cuadrados trata de hallar la recta que aproxima mejor a un conjunto de datos.

Nos gustaría escoger a y b de tal manera que el efecto total de estas desviaciones sea tan pequeño como sea posible. Sin embargo, como algunas son negativas y otras son positivas, podríamos tener muchas cancelaciones y obtener un ajuste muy malo. Esto nos hace sospechar que una mejor medida del error total podría ser la suma de los *cuadrados* de estas desviaciones. Así, llegamos al problema de hallar m y b que minimicen la función

$$s = f(m, b) = d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_n^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - mx_i - b)^2,$$

donde x_1, ..., x_n e y_1, ..., y_n son los datos dados.

30. Para cada conjunto de tres puntos dato, dibujar los puntos, escribir la función $f(m, b)$ a partir de la ecuación anterior, hallar los valores m y b que dan la recta que mejor se ajusta de acuerdo con el método de los mínimos cuadrados, y dibujar dicha recta.

a) $(x_1, y_1) = (1, 1)$, $(x_2, y_2) = (2, 3)$, $(x_3, y_3) = (4, 3)$.

b) $(x_1, y_1) = (0, 0)$, $(x_2, y_2) = (1, 2)$, $(x_3, y_3) = (2, 3)$.

31. Demostrar que si sólo se dan dos puntos dato (x_1, y_1) y (x_2, y_2), este método produce la recta que pasa por (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

32. Demostrar que las ecuaciones para determinar puntos críticos $\partial s/\partial b = 0$ y $\partial s/\partial m = 0$ son equivalentes a

$$m\left(\sum x_i\right) + nb = \left(\sum y_i\right) \quad \text{y} \quad m\left(\sum x_i^2\right) + b\left(\sum x_i\right) = \left(\sum x_i y_i\right),$$

donde todas las sumas van de $i = 1$ a $i = n$.

33. Si $y = mx + b$ es la recta que mejor se ajusta a los datos (x_1, y_1), ..., (x_n, y_n) de acuerdo con el método de los mínimos cuadrados, demostrar que

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - mx_i - b) = 0;$$

esto es, la desviaciones positivas y negativas se cancelan (*véase* el Ejercicio 32).

34. Utilizar el criterio de la derivada segunda para demostrar que el punto crítico de f es un punto de mínimo.

35. Utilizar el método de los mínimos cuadrados para hallar la recta que mejor se ajusta a los puntos (0, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 4) y (4, 5). Dibujar los puntos y la recta [17].

[17] El método de los mínimos cuadrados se puede modificar y generalizar de varias maneras. La idea básica se puede aplicar a ecuaciones de curvas más complicadas que la recta. Por ejemplo, esto se puede hacer para hallar la parábola que mejor se ajusta a un conjunto dado de puntos dato. Estas ideas también formaron parte de las bases para el desarrollo, debido a Norbert Wiener, de la cibernética. Otra versión del problema de aproximación por mínimos cuadrados es la siguiente: dada una función f definida e integrable en $[a, b]$, encontrar un polinomio P de grado $\leq n$ tal que el error cuadrático medio

$$\int_a^b |f(x) - P(x)|^2 \, dx$$

sea lo más pequeño posible.

4

Funciones con valores vectoriales

... quien con vigor mental casi divino, fue el primero en demostrar los movimientos y formas de los planetas, las trayectorias de los cometas y el flujo de las mareas.

Epitafio de Newton

Los Capítulos 2 y 3 se centraron en las funciones con valores reales. Este capítulo se dedica principalmente al estudio de las funciones con valores vectoriales. Comenzamos en la primera sección con una continuación de nuestro estudio de las trayectorias, añadiendo aplicaciones de la segunda ley de Newton. Luego, estudiamos la longitud de arco. Después de esto, definimos la divergencia y el rotacional de un campo vectorial que, juntamente con el gradiente, son los operadores básicos del cálculo diferencial vectorial. En particular, se estudian los principales aspectos geométricos y propiedades analíticas de la divergencia y el rotacional. El cálculo integral asociado se verá más adelante, en el Capítulo 8.

4.1. La aceleración y la segunda ley de Newton

En la Sección 2.4, estudiamos la geometría básica de las trayectorias, aprendiendo a esbozar curvas (las imágenes de las trayectorias) y calcular rectas tangentes. También aprendimos a interpretar una trayectoria, como su nombre sugiere, en términos del movimiento de una partícula y en, consecuencia, a ver la derivada de una trayectoria como su vector velocidad. En esta

sección continuamos nuestro estudio de las trayectorias incluyendo algunos aspectos adicionales, en particular el concepto de aceleración y la segunda ley de Newton.

Diferenciación de trayectorias

Recordemos que una trayectoria en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $\mathbf{c}$ de $\mathbb{R}$ o un intervalo en $\mathbb{R}$ con valores en $\mathbb{R}^n$. Si la trayectoria es diferenciable, su derivada en cada instante t es una matriz $n \times 1$. Más concretamente, si las componentes del vector $\mathbf{c}(t)$ son $x_1(t)$, ..., $x_n(t)$, la matriz derivada es

$$\mathbf{c}'(t) = \begin{bmatrix} dx_1/dt \\ dx_2/dt \\ \vdots \\ dx_n/dt \end{bmatrix},$$

que también puede escribirse en forma de vector como

$$(dx_1/dt, \ldots, dx_n/dt) \qquad \text{o} \qquad (x_1'(t), \ldots, x_n'(t)).$$

Recordemos de la Sección 2.4 que $\mathbf{c}'(t)$ es el vector tangente a la trayectoria en el punto $\mathbf{c}(t)$. Recordemos también que si $\mathbf{c}$ representa la trayectoria de una partícula en movimiento, entonces su vector velocidad es

$$\mathbf{v} = \mathbf{c}'(t),$$

y su rapidez es $s = \|\mathbf{v}\|$.

El cálculo práctico de derivadas de trayectorias se simplifica si tenemos en cuenta las siguientes reglas:

Reglas de derivación Sean $\mathbf{b}(t)$ y $\mathbf{c}(t)$ trayectorias diferenciables en $\mathbb{R}^3$, y sean $p(t)$ y $q(t)$ funciones escalares diferenciables.

Regla de la suma: $$\frac{d}{dt}[\mathbf{b}(t) + \mathbf{c}(t)] = \mathbf{b}'(t) + \mathbf{c}'(t).$$

Regla de la multiplicación por una función escalar: $$\frac{d}{dt}[p(t)\mathbf{c}(t)] = p'(t)\mathbf{c}(t) + p(t)\mathbf{c}'(t).$$

Regla del producto escalar: $$\frac{d}{dt}[\mathbf{b}(t) \cdot \mathbf{c}(t)] = \mathbf{b}'(t) \cdot \mathbf{c}(t) + \mathbf{b}(t) \cdot \mathbf{c}'(t).$$

Regla del producto vectorial: $$\frac{d}{dt}[\mathbf{b}(t) \times \mathbf{c}(t)] = \mathbf{b}'(t) \times \mathbf{c}(t) + \mathbf{b}(t) \times \mathbf{c}'(t).$$

Regla de la cadena: $$\frac{d}{dt}[\mathbf{c}(q(t))] = q'(t)\mathbf{c}'(q(t)).$$

Estas reglas se deducen inmediatamente aplicando componente a componente las fórmulas usuales de derivación de funciones escalares.

EJEMPLO 4.1 Demostrar que si $\mathbf{c}(t)$ es una función vectorial tal que $||\mathbf{c}(t)||$ es constante, entonces $\mathbf{c}'(t)$ es perpendicular a $\mathbf{c}(t)$ para todo t.

Solución

Puesto que $||\mathbf{c}(t)||$ es constante, entonces su cuadrado $||\mathbf{c}(t)||^2 = \mathbf{c}(t) \cdot \mathbf{c}(t)$ también lo es. La derivada de una constante es cero, de modo que aplicando la fórmula para la derivada del producto escalar de dos funciones vectoriales,

$$0 = \frac{d}{dt}\left[\mathbf{c}(t) \cdot \mathbf{c}(t)\right] = \mathbf{c}'(t) \cdot \mathbf{c}(t) + \mathbf{c}(t) \cdot \mathbf{c}'(t) = 2\mathbf{c}(t) \cdot \mathbf{c}'(t);$$

por tanto, $\mathbf{c}(t) \cdot \mathbf{c}'(t) = 0$; es decir, $\mathbf{c}'(t)$ es perpendicular a $\mathbf{c}(t)$.

Para una trayectoria que describe un movimiento rectilíneo y uniforme, el vector velocidad es constante. En general, el vector velocidad es una función vectorial $\mathbf{v} = \mathbf{c}'(t)$ que depende de t. Su derivada $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = \mathbf{c}''(t)$ se denomina ***aceleración*** de la curva. Si la curva es $(x(t), y(t), z(t))$, entonces la aceleración en el instante t viene dada por

$$\mathbf{a}(t) = x''(t)\mathbf{i} + y''(t)\mathbf{j} + z''(t)\mathbf{k}.$$

EJEMPLO 4.2 Una partícula se mueve de manera que su aceleración es igual al vector constante $-\mathbf{k}$. Si en el instante $t = 0$ se encuentra en el punto $(0, 0, 1)$, y la velocidad en $t = 0$ es $\mathbf{i} + \mathbf{j}$, ¿cuándo y en qué punto cruza la partícula el plano $z = 0$? Describir la trayectoria seguida por la partícula (suponiendo $t \geqslant 0$).

Solución

Sea $(x(t), y(t), z(t))$ la trayectoria descrita por la partícula, de modo que el vector velocidad es $\mathbf{c}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$. La aceleración $\mathbf{c}''(t)$ es igual a $-\mathbf{k}$, de manera que $x''(t) = 0$, $y''(t) = 0$ y $z''(t) = -1$. Se sigue que $x'(t)$ e $y'(t)$ son funciones constantes, y $z'(t)$ es una función lineal, con pendiente -1. Puesto que $\mathbf{c}'(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, obtenemos $\mathbf{c}'(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} - t\mathbf{k}$. Integrando de nuevo, y usando que la partícula parte inicialmente del punto $(0, 0, 1)$, obtenemos que $(x(t), y(t), z(t)) = (t, t, 1 - \frac{1}{2}t^2)$. La partícula cruza el plano $z = 0$ cuando $1 - \frac{1}{2}t^2 = 0$, es decir, $t = \sqrt{2}$ (porque $t \geqslant 0$). En ese instante su posición es $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$. La trayectoria descrita por la partícula es una parábola en el plano $y = x$ (*véase* la Figura 4.1.1), puesto que en ese plano la ecuación viene descrita por $z = 1 - \frac{1}{2}x^2$.

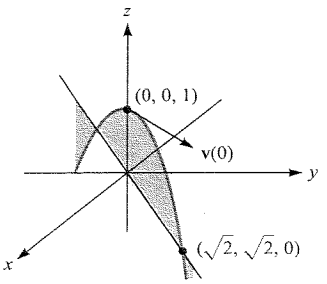


Figura 4.1.1. La trayectoria de la partícula con posición inicial (0,0,1), velocidad inicial $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y aceleración constante $-\mathbf{k}$ es una parábola en el plano $y = x$.

La imagen de una trayectoria C^1 no es necesariamente «muy suave»; en efecto, puede tener bruscos cambios de dirección. Por ejemplo, como puede verse en la Figura 2.4.6, la cicloide $\mathbf{c}(t) = (t - \operatorname{sen} t,\ 1 - \cos t)$ no tiene recta tangente cuando $\mathbf{c}$ toca al eje $\mathbf{x}$ (es decir, cuando $1 - \cos t = 0$, lo que sucede cuando $t = 2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \ldots$). Otro ejemplo es la hipocicloide de cuatro puntas, $\mathbf{c}$: $[0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \to (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t)$, que tiene picos o cúspides en cuatro puntos (*véase* la Figura 4.1.2). En tales puntos, $\mathbf{c}'(t) = 0$, lo que es coherente con la no existencia de recta tangente. Evidentemente, la dirección de la velocidad $\mathbf{c}'(t)$ puede cambiar abruptamente en los puntos en los que la partícula se ha parado.

Diremos que una trayectoria diferenciable $\mathbf{c}$ es regular en $t = t_0$ si $\mathbf{c}'(t_0) \neq \mathbf{0}$. Si se verifica $\mathbf{c}'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo t, diremos que $\mathbf{c}$ es una trayectoria regular. En este caso, la curva imagen tiene un aspecto suave.

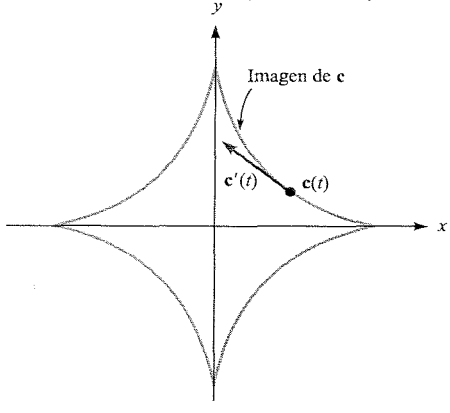


Figura 4.1.2. La imagen de la trayectoria regular $\mathbf{c}(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t)$, una hipocicloide, no tiene un «aspecto suave».

EJEMPLO 4.3 Una partícula se mueve sobre una hipocicloide, según la ecuación

$$x = \cos^3 t, \qquad y = \operatorname{sen}^3 t, \qquad a \leqslant t \leqslant b.$$

¿Cuáles son la velocidad y la rapidez de la partícula?

Solución

El vector velocidad de la partícula es

$$\mathbf{v} = \frac{dx}{dt}\,\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\,\mathbf{j} = -(3 \operatorname{sen} t \cos^2 t)\mathbf{i} + (3 \cos t \operatorname{sen}^2 t)\mathbf{j},$$

y su rapidez es

$$s = \|\mathbf{v}\| = (9 \operatorname{sen}^2 t \cos^4 t + 9 \cos^2 t \operatorname{sen}^4 t)^{1/2} = 3|\operatorname{sen} t|\,|\cos t|.$$

La segunda ley de Newton

Si una partícula de masa m se mueve en $\mathbb{R}^3$, la fuerza $\mathbf{F}$ que actúa sobre ella en el punto $\mathbf{c}(t)$ está relacionada con la aceleración $\mathbf{a}(t)$ mediante la **segunda ley de Newton**[1]:

$$\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) = m\mathbf{a}(t).$$

En caso de que sobre la partícula no actúe ninguna fuerza, entonces $\mathbf{a}(t) = 0$, de modo que $\mathbf{c}'(t)$ será constante, y la partícula seguirá una línea recta.

La aceleración y la segunda ley de Newton. La aceleración de una trayectoria $\mathbf{c}(t)$ es

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{c}''(t).$$

Si $\mathbf{F}$ es la fuerza actuante y m es la masa de la partícula, entonces

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}.$$

En el problema de determinar la trayectoria $\mathbf{c}(t)$ de una partícula bajo la influencia de un campo de fuerzas dado $\mathbf{F}$, la ley de Newton se convierte en una ecuación diferencial (es decir, una ecuación que involucra derivadas) para $\mathbf{c}(t)$.

Por ejemplo, el movimiento de un planeta que sigue una trayectoria $\mathbf{r}(t)$ alrededor del Sol (que consideramos situado en el origen de coordenadas de $\mathbb{R}^3$) obedece a la ley

$$m\mathbf{r}'' = -\frac{GmM}{r^3}\mathbf{r},$$

donde M es la masa del Sol, m la del planeta, $r = \|\mathbf{r}\|$, y G es la constante gravitacional. La relación usada para determinar la fuerza, $\mathbf{F} = -GmM\mathbf{r}/r^3$, se denomina **ley de Newton de la gravitación** (*véase* la Figura 4.1.3). No haremos en este libro un estudio general de tales ecuaciones, sino que nos restringiremos al caso especial de las órbitas circulares. (Órbitas más generales —las secciones cónicas— se discuten en el suplemento de Internet.)

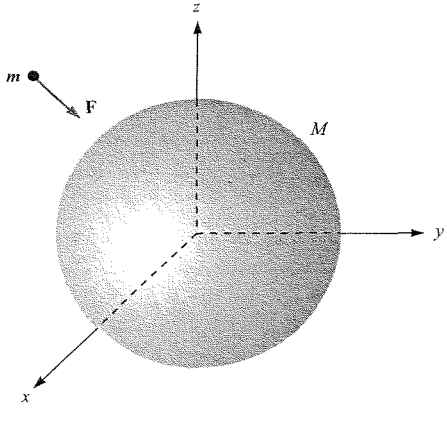


Figura 4.1.3. Una masa M atrae a una masa m con una fuerza $\mathbf{F}$ dada por la ley de Newton de la gravitación: $\mathbf{F} = -GmM\mathbf{r}/r^3$.

[1] Muchos científicos consideran que $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ es la ecuación más importante en ciencia e ingeniería.

Órbitas circulares

Consideremos una partícula de masa m que se mueve con rapidez constante s siguiendo una trayectoria circular de radio r_0. Si suponemos que se mueve en el plano xy, podemos suprimir la tercera componente, y escribir su posición como

$$\mathbf{r}(t) = \left(r_0 \cos \frac{st}{r_0},\ r_0 \operatorname{sen} \frac{st}{r_0} \right).$$

Nótese que esto es la ecuación de una circunferencia de radio r_0 y que su rapidez es $\|\mathbf{r}'(t)\| = s$. La cantidad s/r_0 se denomina ***frecuencia*** y se denota por ω. Por tanto,

$$\mathbf{r}(t) = (r_0 \cos \omega t,\ r_0 \operatorname{sen} \omega t).$$

La aceleración viene dada por

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = \left(-\frac{s^2}{r_0} \cos \frac{st}{r_0},\ -\frac{s^2}{r_0} \operatorname{sen} \frac{st}{r_0} \right) = -\frac{s^2}{r_0^2}\,\mathbf{r}(t) = -\omega^2 \mathbf{r}(t).$$

Es decir, la aceleración tiene la dirección opuesta a $\mathbf{r}(t)$, de modo que apunta hacia el centro de la circunferencia (*véase* la Figura 4.1.4). Esta aceleración, multiplicada por la masa de la partícula, se denomina ***fuerza centrípeta***. Aun cuando la rapidez es constante, la dirección de la velocidad está cambiando continuamente, y por tanto la aceleración, que mide una razón del cambio bien en rapidez, bien en dirección, bien en ambas, es distinta de cero.

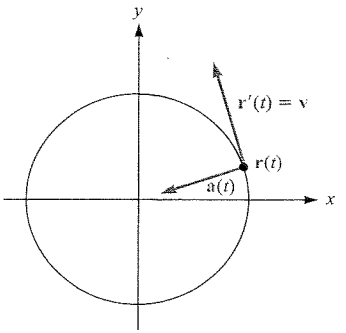


Figura 4.1.4. La posición, velocidad y aceleración de una partícula en movimiento circular.

La ley de Newton ayuda a descubrir una relación entre el radio de la órbita y el período, es decir, el tiempo que la partícula que gira tarda en describir una vuelta completa. Consideremos un satélite de masa m que se mueve con rapidez s alrededor de un cuerpo central de masa M siguiendo una órbita circular de radio r_0 (distancia medida desde el centro del sólido esférico central). Por la segunda ley de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, obtenemos

$$-\frac{s^2 m}{r_0^2}\,\mathbf{r}(t) = -\frac{GmM}{r_0^3}\,\mathbf{r}(t).$$

Las longitudes de los vectores de ambos lados de esta ecuación deben ser iguales. Por tanto,

$$s^2 = \frac{GM}{r_0}.$$

Si T denota el periodo, entonces $s = 2\pi r_0/T$; sustituyendo este valor en la ecuación precedente, y despejando T, obtenemos lo siguiente:

Ley de Kepler

$$T^2 = r_0^3 \frac{(2\pi)^2}{GM}.$$

Por tanto, el cuadrado del periodo es proporcional al cubo del radio.

Hemos definido dos conceptos básicos asociados con una trayectoria: su velocidad y su aceleración. Ambos requieren del cálculo *diferencial*. El concepto básico de la longitud de una trayectoria, que requiere del cálculo *integral*, será considerado en la sección siguiente.

EJEMPLO 4.4 Supongamos que un satélite sigue una órbita circular en torno a la Tierra de modo que permanece fijo en el cielo sobre un punto del ecuador. ¿Cuál es el radio de una tal órbita geoestacionaria? (La masa de la Tierra es de $5{,}98 \times 10^{24}$ kilogramos y $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ en el sistema de unidades metro-kilogramo-segundo.)

Solución

El periodo del satélite debe ser 1 día, es decir $T = 60 \times 60 \times 24 = 86.400$ segundos. A partir de la fórmula $T^2 = r_0^3(2\pi)^2/GM$, obtenemos $r_0^3 = T^2GM/(2\pi)^2$, de modo que

$$r_0^3 = \frac{T^2GM}{(2\pi)^2} = \frac{(86.400)^2 \times (6{,}67 \times 10^{-11}) \times (5{,}98 \times 10^{24})}{(2\pi)^2} \approx 7{,}54 \times 10^{22}\ \text{m}^3.$$

Por tanto, $r_0 = 4{,}23 \times 10^7$ m $= 42.300$ km.

Suplemento a la Sección 4.1: Órbitas planetarias, principio de Hamilton y trayectorias de naves espaciales

En esta sección hemos estudiado trayectorias en el espacio y la segunda ley de Newton. Afortunadamente, el estudiante puede darse cuenta de que estas ideas se aplican al mundo real —el movimiento de la Tierra alrededor del Sol, por ejemplo, está gobernado por estas leyes. Pero la historia no termina aquí, como intentaremos mostrar a continuación.

Nota Histórica

Kepler, Newton y Hamilton

Como discutimos en la introducción histórica, la ley del movimiento planetario que afirma que el cuadrado del periodo es proporcional al cubo del radio de una órbita es una de las tres leyes que Kepler observó antes de que Newton formulase sus leyes del movimiento, conocidas más generalmente como mecánica newtoniana. Esta mecánica nos permite calcular el periodo de un satélite alrededor de la Tierra, o de un planeta alrededor del Sol (cuando el radio de su órbita es conocido) y, como veremos más adelante, trayectorias de misiones espaciales.

Kepler descubrió y usó resultados como éste no sólo para órbitas circulares, sino para órbitas más generales de tipo elíptico. Newton consiguió deducir las tres leyes celestes de Kepler a partir de su propia ley de gravitación. El simple y claro orden matemático del Universo proporcionado por estas leyes tuvo un gran impacto en el pensamiento del siglo dieciocho.

Newton nunca escribió sus leyes de la mecánica como ecuaciones diferenciales. Esto fue hecho por primera vez por Euler alrededor de 1730. Newton hizo muchas de sus deducciones por métodos geométricos (al menos así es como aparecieron publicadas). Euler también demostró cómo las leyes de Newton podían deducirse del principio de acción de Maupertuis. La versión más clara de este principio de la mecánica, conocida hoy día como ***principio de Hamilton***, se debe a William Rowan Hamilton, alrededor de 1830, quien, como a estas alturas ya deberíamos saber, también es el padre del cálculo vectorial. La versión de Hamilton del principio de Maupertuis fue elegantemente presentada por Richard Feynman, como veremos a continuación.

Feynman y el principio de Hamilton

En sus legendarias *Lecciones de Física* del Caltech, el premio Nobel de Física Richard Phillips Feynman (*véase* la Figura 4.1.5) incluyó lo que denominó una «Lección especial» sobre un tema muy querido para él, que escuchó por primera vez a su profesor de secundaria en Nueva York, Mr. Bader. Mr. Bader contó a su (aparentemente aburrido) estudiante Feynman cómo aplicar principios de máximo y mínimo a las trayectorias de objetos en movimiento y en particular cómo el principio de acción de Maupertuis, Leibniz y Hamilton (examinado en la Sección 3.3) se aplica a la mecánica newtoniana, gobernada por $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

El profesor Feynman, al final de su lección, señala que «un físico, un estudiante de Mr. Bader, demostró en 1942 cómo este principio de acción era también aplicable a la mecánica cuántica». Este estudiante fue el propio Feynman, quien recibió el premio Nobel por sus aportaciones, que también incluyen el descubrimiento de las *integrales de Feynman*. La moraleja de esta historia es: *Presta atención a tus profesores —¡especialmente a los mejores!*

A continuación incluimos la primera parte de la conferencia de Feynman, y una versión más detallada en el suplemento de Internet; consultar la lección 19 del volumen II de las *Lecciones de física de Feynman* para ver el texto completo.

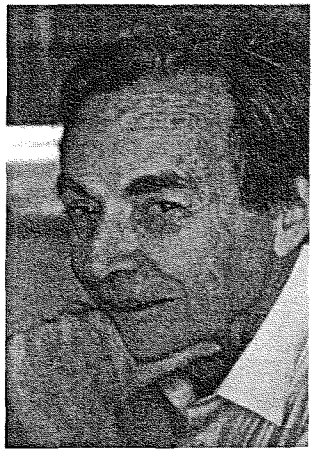


Figura 4.1.5. Richard P. Feynman (1918-1988).

El principio de mínima acción, por Richard Feynman

Cuando era un estudiante de secundaria, mi profesor de Física —cuyo nombre era Mr. Bader— me llamó un día después de su clase y me dijo: «Pareces aburrido; voy a contarte algo interesante». Entonces, me explicó algo que me pareció absolutamente maravilloso, y que, desde entonces, siempre me ha fascinado. Cada vez que el tema aparece, trabajo sobre él. En efecto, cuando comencé a preparar esta conferencia, me vi a mí mismo haciendo más análisis sobre él. En lugar de preocuparme de la charla, me vi envuelto en un nuevo problema. El tema es este, el principio de mínima acción.

Mr. Bader me contó lo siguiente: Supongamos que tenemos una partícula (en un campo gravitatorio, por ejemplo) que parte de algún lugar, y se mueve libremente hacia otro punto —la lanzamos, y entonces sube y después baja (*véase* la Figura 4.1.6).

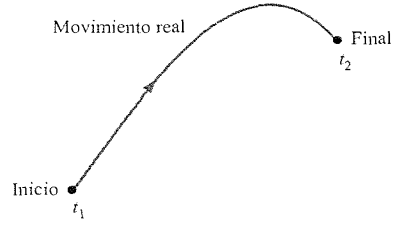


Figura 4.1.6.

La partícula va de la posición inicial a la posición final en un cierto intervalo de tiempo. Ahora, intentamos un movimiento diferente. Supongamos que para ir de un punto al otro, lo hacemos de esta forma (*véase* la Figura 4.1.7), pero hacemos el recorrido justo en el mismo intervalo de tiempo.

Entonces, dijo: «Si calculas la energía cinética de la trayectoria en cada instante, restas la energía potencial e integras el resultado a lo largo del tiempo que dura el recorrido, verás que obtienes un número más grande que el obtenido para el movimiento real».

En otras palabras, las leyes de Newton pueden enunciarse no en la forma $F = ma$ sino en la forma: la energía cinética media menos la energía potencial media es tan pequeña como sea posible para la trayectoria de un objeto que va de un punto a otro.

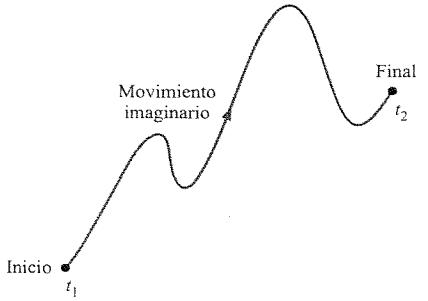


Figura 4.1.7.

Déjenme ilustrar un poco mejor qué significa esto. Si tomamos el caso del campo gravitatorio, entonces si la partícula sigue la trayectoria $x(t)$ (por el momento, tomemos simplemente el caso unidimensional; imaginemos una trayectoria que sube y baja, sin desviaciones laterales), donde x es la altura sobre el suelo, la energía cinética es $\frac{1}{2}m(dx/dt)^2$ y la energía potencial en cualquier instante es mgx. Ahora, tomo la energía cinética menos la potencial en cualquier instante sobre la trayectoria e integro esto con respecto al tiempo desde el instante inicial hasta el instante final. Supongamos que en el instante inicial t_1 partimos a cierta altura y que en el instante final t_2 terminamos en algún otro lugar (*véase* la Figura 4.1.8).

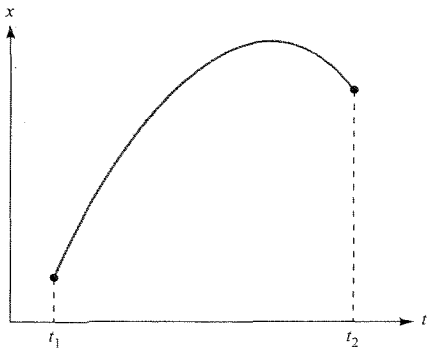


Figura 4.1.8.

Entonces la integral es

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - mgx \right] dt.$$

El movimiento real es algún tipo de curva —es una parábola si lo dibujamos como función del tiempo— y nos da un cierto valor para la integral. Pero podemos imaginar algún otro movimiento, que suba muy alto, y después baje y suba de algún modo peculiar (*véase* la Figura 4.1.9).

Podemos calcular la energía cinética menos la energía potencial e integrar para tal trayectoria..., o para cualquier otra trayectoria que queramos. El milagro es que la trayectoria real es aquella para la que tal integral es mínima.

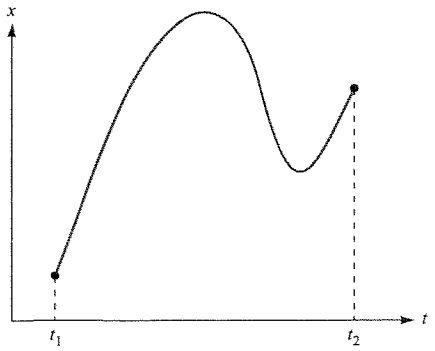


Figura 4.1.9.

Trayectorias en la vida real

En nuestro propio sistema solar aparecen interesantes trayectorias en $\mathbb{R}^3$ que obedecen a la segunda ley de Newton y que son usadas por la NASA para planear misiones espaciales. Una de esas misiones, la Genesis Discovery Mission, lanzada desde la Tierra el 8 de agosto de 2001 (y que debe volver a la Tierra en septiembre de 2004) tiene una trayectoria especialmente interesante, como se ve en la Figura 4.1.10. Se puede encontrar más información sobre esta trayectoria y los objetivos de la misión en http://genesismission.jpl.nasa.gov/.

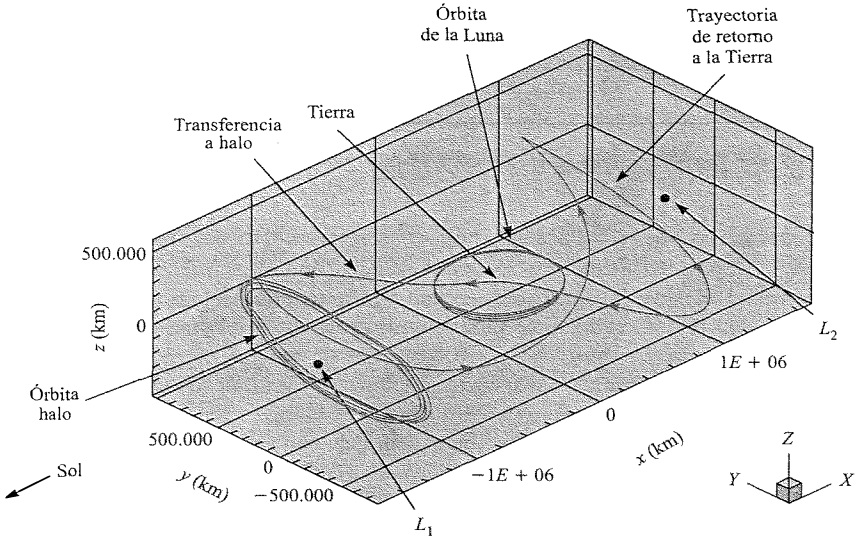


Figura 4.1.10. Trayectoria de la nave espacial *Genesis* desde la Tierra hasta una órbita periódica situada aproximadamente a un millón y medio de kilómetros de la Tierra, y la interesante trayectoria de retorno a la Tierra.

Los puntos denotados por L_1 y L_2 son puntos de equilibrio (descubiertos por Euler) entu Tierra y el Sol. Una nave espacial colocada en uno de esos puntos permanecería allí indefin mente. Hay órbitas periódicas alrededor de esos puntos que hemos denominado (libremente) *bitas halo*. La dinámica básica de la nave espacial está gobernada por las atracciones de la rra y el Sol (y en muy pequeña medida por la Luna) sobre la nave. Por tanto, esto forma p del célebre *problema de los tres cuerpos* estudiado y hecho famoso por Poincaré alred de 1890[2].

Emmy Noether y el principio de Hamilton

Emmy Noether (1882-1935) (*véase* la Figura 4.1.11) es probablemente más conocida por trabajos en álgebra, pero también hizo una contribución significativa al principio de Hamilt Para el movimiento planetario, el vector momento angular $\mathbf{J} = \mathbf{r}(t) \times m\dot{\mathbf{r}}(t)$ no depende tiempo (es decir, es una *cantidad que se conserva*), como puede verse fácilmente calculand derivada de $\mathbf{J}$ y usando $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ (*véase* el Ejercicio 20). Lo que descubrió Noether fue una p funda conexión entre tales cantidades conservadas y las simetrías en el principio de Hami —en el caso del momento angular, su simetría rotacional—. Desde entonces, los descubrim tos de Noether tuvieron una profunda influencia en el estudio de los sistemas mecánicos, t clásicos como cuánticos.



Figura 4.1.11. Emmy Noether (1882-1935).

[2] Para más información sobre Poincaré, *véase* F. Dicau y P. Holmes, *Celestial Encounters. The Origin of Chaos Stability*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.

[3] Invariante Variationsprobleme, *Göttinger Nachr. Math. Phys.* 2 (1918), 235-257.

EJERCICIOS

En los ejercicios del 1 al 4, para el valor de t indicado, hallar los vectores velocidad y aceleración, y la ecuación de la recta tangente para cada una de las curvas siguientes:

1. $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} 2t)\mathbf{j}$, en $t = 0$.

2. $\mathbf{c}(t) = (t \operatorname{sen} t, t \cos t, \sqrt{3}t)$, en $t = 0$.

3. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$, en $t = 0$.

4. $\mathbf{c}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \frac{2}{3}t^{3/2}\mathbf{k}$, en $t = 9$.

En los ejercicios del 5 al 8, sea $\mathbf{c}_1(t) = e^t\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ *y* $\mathbf{c}_2(t) = e^{-t}\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} - 2t^3\mathbf{k}$. *Hallar cada una de las derivadas indicadas de dos maneras diferentes para comprobar las reglas de derivación de trayectorias enunciadas antes del Ejemplo 4.1.*

5. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{c}_1(t) + \mathbf{c}_2(t)]$.

6. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{c}_1(t) \cdot \mathbf{c}_2(t)]$.

7. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{c}_1(t) \times \mathbf{c}_2(t)]$.

8. $\dfrac{d}{dt}\{\mathbf{c}_1(t) \cdot [2\mathbf{c}_2(t) + \mathbf{c}_1(t)]\}$.

9. Si $\mathbf{r}(t) = 6t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, ¿qué fuerza actúa sobre una partícula de masa m que se mueve a lo largo de $\mathbf{r}$ en el instante $t = 0$?

10. Supongamos que una partícula de masa 1 g sigue la trayectoria del Ejercicio 1, con unidades en segundos y centímetros. ¿Qué fuerza actúa sobre ella en el instante $t = 0$? (La respuesta debe incluir las unidades correspondientes.)

11. Un cuerpo de 2 kg de masa se mueve a lo largo de una circunferencia de 3 m de radio, completando una revolución cada 5 segundos. Hallar la fuerza centrípeta que actúa sobre el cuerpo.

12. Hallar la fuerza centrípeta que actúa sobre un cuerpo de 4 kg de masa, que se mueve sobre una circunferencia de 10 m de radio con una frecuencia de 2 revoluciones por segundo.

13. Demostrar que si la aceleración de un objeto es siempre perpendicular a la velocidad, entonces la rapidez del objeto es constante. [INDICACIÓN: *Véase* el Ejemplo 4.1.]

14. Demostrar que en un máximo o mínimo local de $\|\mathbf{r}(t)\|$ el vector $\mathbf{r}'(t)$ es perpendicular a $\mathbf{r}(t)$.

15. Un satélite está en una órbita circular 500 millas por encima de la superficie terrestre. ¿Cuál es el periodo de la órbita? (Como valor del radio de la Tierra podemos tomar 4.000 millas, o bien 6.436×10^6 metros.)

16. ¿Cuál es la aceleración del satélite del Ejercicio 15?, ¿y la fuerza centrípeta?

17. Hallar la trayectoria $\mathbf{c}$ tal que $\mathbf{c}(0) = (0, -5, 1)$ y $\mathbf{c}'(t) = (t, e^t, t^2)$.

18. Sea $\mathbf{c}$ una trayectoria en $\mathbb{R}^3$ con aceleración nula. Demostrar que $\mathbf{c}$ es una línea recta o un punto.

19. Hallar trayectorias $\mathbf{c}(t)$ cuyas imágenes sean las siguientes curvas:

a) $\{(x, y) \mid y = e^x\}$.

b) $\{(x, y) \mid 4x^2 + y^2 = 1\}$.

c) Una línea recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el origen y por el punto (a, b, c).

d) $\{(x, y) \mid 9x^2 + 16y^2 = 4\}$.

20. Sea $\mathbf{c}(t)$ una trayectoria, $\mathbf{v}(t)$ su velocidad y $\mathbf{a}(t)$ la aceleración. Supongamos que $\mathbf{F}$ es una aplicación C^1 de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$, $m > 0$, y $\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) = m\mathbf{a}(t)$ (segunda ley de Newton). Demostrar que

$$\frac{d}{dt}\left[m\mathbf{c}(t) \times \mathbf{v}(t)\right] = \mathbf{c}(t) \times \mathbf{F}(\mathbf{c}(t))$$

(es decir, «razón del cambio de momento angular = momento de la fuerza»). ¿Qué podemos concluir si $\mathbf{F}(\mathbf{c}(t))$ es paralelo a $\mathbf{c}(t)$? ¿Es éste el caso del movimiento planetario?

21. Continuar las investigaciones del Ejercicio 20 para demostrar la ley de Kepler que afirma que la trayectoria de un planeta que se mueve alrededor de un sol bajo la influencia de la gravedad está contenida en un plano.

4.2. Longitud de arco

Definición de longitud de arco

¿Cuál es la longitud de una trayectoria $\mathbf{c}(t)$? Puesto que la rapidez $\|\mathbf{c}'(t)\|$ mide la razón del cambio de la distancia recorrida con respecto del tiempo, la distancia recorrida por un punto que se mueve sobre la curva debe ser igual a la integral de la rapidez con respecto al tiempo sobre el intervalo $[t_0, t_1]$ que dura el trayecto; es decir, la longitud de la trayectoria, también llamada su ***longitud de arco***, es

$$L(\mathbf{c}) = \int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{c}'(t)\|\, dt.$$

Se plantea la pregunta de si esta fórmula efectivamente corresponde con la verdadera longitud de arco. Por ejemplo, supongamos que tomamos una curva en el espacio y pegamos sobre ella ajustadamente una cinta, cortando el sobrante de manera que la cinta se superponga exactamente sobre la curva. Si después despegamos la cinta, la enderezamos y la medimos con una regla, es claro que obtendremos exactamente la longitud de la curva. Al final de esta sección se justifica que nuestra fórmula para la longitud de arco coincida con el resultado obtenido por este procedimiento.

EJEMPLO 4.5 La longitud de arco de la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (r\cos t, r\,\text{sen}\, t)$, para t contenido en el intervalo $[0, 2\pi]$, es decir, para $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, es

$$L(\mathbf{c}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r\,\text{sen}\, t)^2 + (r\cos t)^2}\, dt = 2\pi r,$$

ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA

que es la longitud de una circunferencia de radio r. Si hubiéramos tomado $0 \leqslant t \leqslant 4\pi$, habríamos obtenido $4\pi r$, puesto que en ese caso la trayectoria recorre por dos veces la misma circunferencia (Figura 4.2.1).

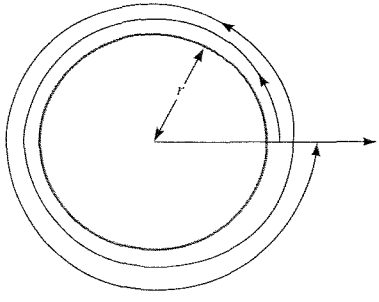


Figura 4.2.1. La longitud de arco de una circunferencia recorrida dos veces es $4\pi r$.

Longitud de arco La longitud de arco de la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ para $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ es

$$L(\mathbf{c}) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt.$$

Para curvas planas, se omite el término $z'(t)$, como en el Ejemplo 4.5. A continuación se muestra un ejemplo en $\mathbb{R}^3$.

EJEMPLO 4.6 Hallar la longitud de arco de $(\cos t, \operatorname{sen} t, t^2)$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

Solución

La trayectoria $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t^2)$ tiene como vector velocidad $\mathbf{v} = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 2t)$. Puesto que

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 4t^2} = \sqrt{1 + 4t^2} = 2\sqrt{t^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2},$$

la longitud de arco es

$$L(\mathbf{c}) = \int_0^{\pi} 2\sqrt{t^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}\, dt.$$

Esta integral puede evaluarse usando la siguiente fórmula de la tabla de integrales:

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \log\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)\right] + C.$$

Por tanto,

$$L(\mathbf{c}) = 2 \cdot \frac{1}{2}\left[t\sqrt{t^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \log\left(t + \sqrt{t^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}\right)\right]\Bigg|_{t=0}^{\pi}$$

$$= \pi\sqrt{\pi^2 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4}\log\left(\pi + \sqrt{\pi^2 + \frac{1}{4}}\right) - \frac{1}{4}\log\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{1}{4}\log(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2}) \approx 10{,}63.$$

Como una comprobación de nuestro resultado, podemos observar que la trayectoria $\mathbf{c}$ conecta los puntos $(1, 0, 0)$ y $(-1, 0, \pi^2)$. La distancia entre estos puntos es $\sqrt{4 + \pi^2} \approx 3{,}72$, que es menor que 10,63, como debía ser.

Si una curva está formada por un número finito de trozos cada uno de los cuales es C^1 (con derivada acotada), calculamos su longitud de arco sumando las longitudes de cada uno de sus trozos. Tales curvas se denominan C^1 ***a trozos***. A veces diremos simplemente «suaves a trozos».

EJEMPLO 4.7 Una bola rodando en una mesa de billar sigue la trayectoria $\mathbf{c}$: $[-1, 1] \to \mathbb{R}^3$ definida por $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (|t|, |t - \frac{1}{2}|, 0)$. Hallar la distancia recorrida por la bola.

Solución

Esta trayectoria no es suave, porque $x(t) = |t|$ no es diferenciable en $t = 0$, como tampoco $y(t) = |t - \frac{1}{2}|$ es diferenciable en $\frac{1}{2}$. Sin embargo, si dividimos el intervalo $[-1, 1]$ en los trozos $[-1, 0]$, $[0, \frac{1}{2}]$ y $[\frac{1}{2}, 1]$, vemos que $x(t)$ e $y(t)$ tienen derivadas continuas en cada uno de los intervalos $[-1, 0]$, $[0, \frac{1}{2}]$ y $[\frac{1}{2}, 1]$. (*Véase* la Figura 4.2.2.)

En el intervalo $[-1, 0]$, $x(t) = -t$, $y(t) = -t + \frac{1}{2}$ y $z(t) = 0$, de modo que $\|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{2}$. Por tanto, la longitud de arco de $\mathbf{c}$ entre -1 y 0 es $\displaystyle\int_{-1}^{0} \sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}$. Análogamente, en $[0, \frac{1}{2}]$, $x(t) = t$, $y(t) = -t + \frac{1}{2}$, $z(t) = 0$, y nuevamente $\|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{2}$, de manera que la longitud de arco de $\mathbf{c}$ entre 0 y $\frac{1}{2}$ es $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Finalmente, en $[\frac{1}{2}, 1]$ tenemos $x(t) = t$, $y(t) = t - \frac{1}{2}$, $z(t) = 0$, y la longitud del arco $\mathbf{c}$ entre $\frac{1}{2}$ y 1 es $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Por tanto, la longitud de arco total de $\mathbf{c}$ es $2\sqrt{2}$. Por supuesto, también podríamos haber calculado la solución como la suma de las distancias desde $\mathbf{c}(-1)$ hasta $\mathbf{c}(0)$, desde $\mathbf{c}(0)$ hasta $\mathbf{c}(\frac{1}{2})$, y desde $\mathbf{c}(\frac{1}{2})$ hasta $\mathbf{c}(1)$.

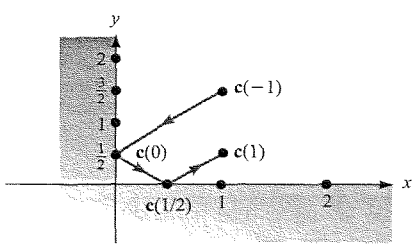


Figura 4.2.2. Una trayectoria suave a trozos.

EJEMPLO 4.8 Considérese una partícula cuya función de posición es

$$\mathbf{c}(t) = (t - \operatorname{sen} t,\ 1 - \cos t),$$

que describe la cicloide estudiada en la Sección 2.4 (*véase* la Figura 2.4.6). Hallar la velocidad, la rapidez y la longitud de un arco.

Solución

El vector velocidad es $\mathbf{c}'(t) = (1 - \cos t,\ \operatorname{sen} t)$, de manera que la rapidez en el punto $\mathbf{c}(t)$ es

$$\|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \operatorname{sen}^2 t} = \sqrt{2 - 2\cos t}.$$

Por tanto, $\mathbf{c}(t)$ se mueve con rapidez variable, aunque el círculo rueda a velocidad constante. Además, la rapidez de $\mathbf{c}(t)$ es cero cuando t es un múltiplo entero de 2π. En esos valores de t, la coordenada y del punto $\mathbf{c}(t)$ es cero y por lo tanto el punto está sobre el eje x. La longitud de arco de un ciclo es

$$L(\mathbf{c}) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt = 2\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}}\, dt$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\frac{t}{2}\, dt \left(\text{porque } 1 - \cos t = 2\operatorname{sen}^2\frac{t}{2} \text{ y } \operatorname{sen}\frac{t}{2} \geqslant 0 \text{ en } [0, 2\pi]\right)$$

$$= 4\left(-\cos\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = 8.$$

La diferencial de la longitud de arco

La fórmula de la longitud de arco sugiere la introducción de la siguiente notación, que será útil en el Capítulo 7, en nuestro estudio sobre integrales de línea.

Diferencial de la longitud de arco Un **desplazamiento infinitesimal** de una partícula que sigue una trayectoria $\mathbf{c}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ es

$$d\mathbf{s} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} = \left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}\right)dt,$$

y su longitud

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

es la ***diferencial de la longitud de arco***. *Véase* la Figura 4.2.3.

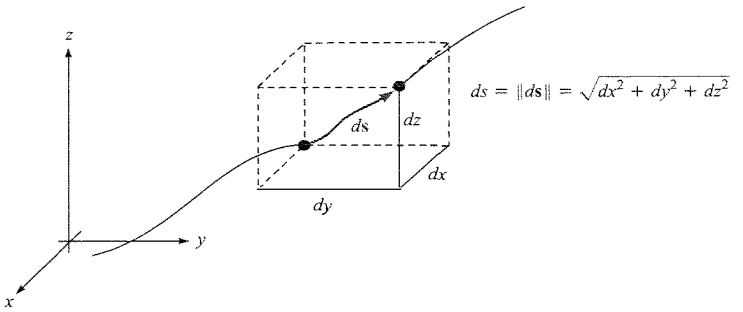


Figura 4.2.3. Diferencial de la longitud de arco.

Estas fórmulas ayudan a recordar la fórmula de la longitud de arco como

$$\text{Longitud de arco} = \int_{t_0}^{t_1} ds.$$

Al igual que hicimos antes con otros conceptos geométricos como la longitud y el ángulo, podemos extender la noción de longitud de arco a trayectorias en el espacio n-dimensional.

Longitud de arco en $\mathbb{R}^n$ Sea $\mathbf{c}:[t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ un camino C^1 a trozos. Su ***longitud*** se define como

$$L(\mathbf{c}) = \int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{c}'(t)\|\, dt.$$

El integrando es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las componentes del vector $\mathbf{c}'(t)$. Si,

$$\mathbf{c}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)),$$

entonces

$$L(\mathbf{c}) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2 + \cdots + (x_n'(t))^2}\, dt.$$

EJEMPLO 4.9 Calcular la longitud de la trayectoria en $\mathbb{R}^4$ dada por $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \cos 2t, \operatorname{sen} 2t)$ y definida en el intervalo desde 0 hasta π.

Solución

Tenemos $\mathbf{c}'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, -2\operatorname{sen} 2t, 2\cos 2t)$ y por tanto

$$\|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 4\operatorname{sen}^2 2t + 4\cos^2 2t} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5},$$

una constante, de manera que la longitud de la trayectoria es

$$\int_0^{\pi} \sqrt{5}\, dt = \sqrt{5}\pi.$$

Es una práctica habitual introducir la ***función longitud de arco*** $s(t)$ asociada a una trayectoria $\mathbf{c}(t)$, mediante la fórmula siguiente:

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{c}'(u)\|\, du,$$

de modo que (por el teorema fundamental del cálculo)

$$s'(t) = \|\mathbf{c}'(t)\|$$

y,

$$\int_a^b s'(t)\, dt = s(b) - s(a) = s(b).$$

EJEMPLO 4.10 Considérese la gráfica de una función de una variable $y = f(x)$ para x en el intervalo $[a, b]$. Podemos considerar esta gráfica como una curva parametrizada por $t = x$, es decir, $\mathbf{c}(x) = (x, f(x))$ para x entre a y b. La fórmula de la longitud de arco nos da

$$L(\mathbf{c}) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx,$$

lo que coincide con la fórmula de la longitud de una gráfica hallada mediante el cálculo de una variable.

Justificación de la fórmula de la longitud de arco

La discusión siguiente requiere el conocimiento de la integral definida, enunciada en términos de las sumas de Riemann. Si la formación del lector en este tema necesita algún refuerzo, este material puede posponerse hasta después del Capítulo 5.

En $\mathbb{R}^3$ hay otro modo de justificar la fórmula de la longitud de arco, basada en aproximaciones poligonales. Dividimos el intervalo $[a, b]$ en N subintervalos de igual longitud:

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b;$$

$$t_{i+1} - t_i = \frac{b - a}{N} \qquad \text{para} \qquad 0 \leqslant i \leqslant N - 1.$$

Consideramos la línea poligonal obtenida uniendo los sucesivos pares de puntos $\mathbf{c}(t_i)$, $\mathbf{c}(t_{i+1})$ para $0 \leqslant i \leqslant N - 1$. Esto nos da una aproximación poligonal a $\mathbf{c}$, como en la Figura 4.2.4.

Por la fórmula de la distancia en $\mathbb{R}^3$, resulta que el segmento rectilíneo que une $\mathbf{c}(t_i)$ con $\mathbf{c}(t_{i+1})$ tiene longitud

$$\|\mathbf{c}(t_{i+1}) - \mathbf{c}(t_i)\| = \sqrt{[x(t_{i+1}) - x(t_i)]^2 + [y(t_{i+1}) - y(t_i)]^2 + [z(t_{i+1}) - z(t_i)]^2},$$

donde $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Aplicando el teorema del valor medio a $x(t)$, $y(t)$, y $z(t)$ en el intervalo $[t_i, t_{i+1}]$, obtenemos tres puntos t_i^*, t_i^{**}, y t_i^{***} tales que

$$x(t_{i+1}) - x(t_i) = x'(t_i^*)(t_{i+1} - t_i),$$
$$y(t_{i+1}) - y(t_i) = y'(t_i^{**})(t_{i+1} - t_i),$$

y,

$$z(t_{i+1}) - z(t_i) = z'(t_i^{***})(t_{i+1} - t_i).$$

Así, el segmento rectilíneo que une $\mathbf{c}(t_i)$ con $\mathbf{c}(t_{i+1})$ tiene longitud

$$\sqrt{[x'(t_i^*)]^2 + [y'(t_i^{**})]^2 + [z'(t_i^{***})]^2}\,(t_{i+1} - t_i).$$

Por tanto, la longitud de nuestra aproximación poligonal es

$$S_N = \sum_{i=0}^{N-1} \sqrt{[x'(t_i^*)]^2 + [y'(t_i^{**})]^2 + [z'(t_i^{***})]^2}\,(t_{i+1} - t_i).$$

Cuando $N \to \infty$, esta poligonal se aproxima cada vez más a la imagen de $\mathbf{c}$; por tanto, podemos definir la longitud de arco de $\mathbf{c}$ como el límite, si existe, de la sucesión S_N cuando $N \to \infty$. Puesto que suponemos que las derivadas x', y', y z' son continuas en el intervalo $[a, b]$, podemos concluir que, efectivamente, el límite existe, y viene dado por

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt.$$

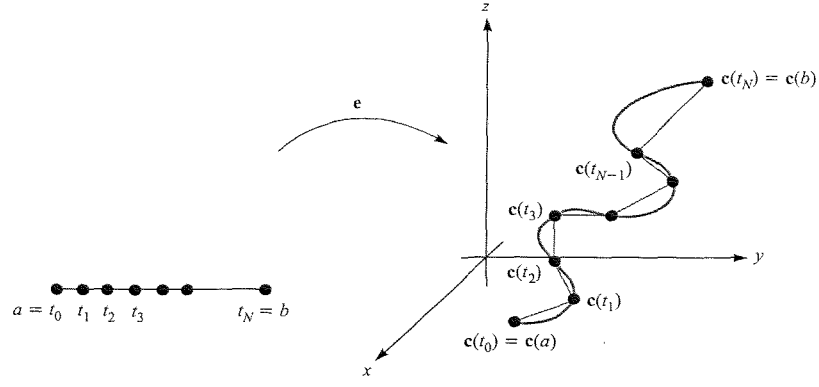


Figura 4.2.4. Una trayectoria $\mathbf{c}$ se puede aproximar mediante una línea poligonal obtenida uniendo cada $\mathbf{c}(t_i)$ con $\mathbf{c}(t_{i+1})$ mediante un segmento rectilíneo.

(La teoría de integración relaciona la integral con límites de sumas mediante la fórmula

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} f(t_i^*)(t_{i+1} - t_i),$$

donde $t_0, \ldots, t_N$ es una partición de $[a, b]$, $t_i^* \in [t_i, t_{i+1}]$ es arbitrario y f es una función continua. En nuestro caso puede ocurrir que los puntos t_i^*, t_i^{**} y t_i^{***} sean diferentes, y por ello se necesita una extensión conveniente de la fórmula anterior.)

EJERCICIOS

En los ejercicios del 1 al 6, hallar la longitud de arco de la curva dada en el intervalo especificado[4].

1. $(2\cos t, 2\operatorname{sen} t, t)$, para $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

2. $(1, 3t^2, t^3)$, para $0 \leqslant t \leqslant 1$.

3. $(\operatorname{sen} 3t, \cos 3t, 2t^{3/2})$, para $0 \leqslant t \leqslant 1$.

4. $\left(t + 1, \dfrac{2\sqrt{2}}{3} t^{3/2} + 7, \dfrac{1}{2} t^2\right)$, para $1 \leqslant t \leqslant 2$.

5. (t, t, t^2), para $1 \leqslant t \leqslant 2$.

6. $(t, t\operatorname{sen} t, t\cos t)$, para $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

7. Hallar la longitud de la trayectoria $\mathbf{c}(t)$, definida por $\mathbf{c}(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t, t)$, si $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, y por $\mathbf{c}(t) = (2, t - 2\pi, t)$, si $2\pi \leqslant t \leqslant 4\pi$.

8. Sea $\mathbf{c}$ la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (t, t\operatorname{sen} t, t\cos t)$. Hallar la longitud de arco de $\mathbf{c}$ entre los dos puntos $(0, 0, 0)$ y $(\pi, 0, -\pi)$.

9. Sea $\mathbf{c}$ la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (2t, t^2, \log t)$, definida para $t > 0$. Hallar la longitud de arco de $\mathbf{c}$ entre los puntos $(2, 1, 0)$ y $(4, 4, \log 2)$.

10. Dada una trayectoria $\mathbf{c}(t)$, la función longitud de arco asociada $s(t)$, dada por $s(t) = \displaystyle\int_a^t \|\mathbf{c}'(\tau)\|\,d\tau$, representa la distancia recorrida hasta el instante t por una partícula que viaja a lo largo de la trayectoria, habiendo iniciado su movimiento en el instante a; es decir, da la longitud de $\mathbf{c}$ entre $\mathbf{c}(a)$ y $\mathbf{c}(t)$. Hallar las funciones longitud de arco para las curvas $\alpha(t) = (\cosh t, \operatorname{senh} t, t)$ y $\beta(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, tomando $a = 0$.

---

[4] Varios de estos problemas requerirán el uso de la fórmula

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \log\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)\right] + C,$$

que puede encontrarse en la tabla de integrales al final de este libro.

11. Sea $\mathbf{c}(t)$ una trayectoria dada, con $a \leqslant t \leqslant b$. Sea $s = \alpha(t)$ una nueva variable, donde α es una función C^1, estrictamente creciente, definida en $[a, b]$. Para cada s en $[\alpha(a), \alpha(b)]$, existe un único t tal que $\alpha(t) = s$. Defínase la función $\mathbf{d}$: $[\alpha(a), \alpha(b)] \to \mathbb{R}^3$ mediante la ecuación $\mathbf{d}(s) = \mathbf{c}(t)$.

a) Justificar razonadamente que las curvas $\mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$ tienen la misma imagen.

b) Demostrar que $\mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$ tienen la misma longitud de arco.

c) Sea $s = \alpha(t) = \int_a^t \|\mathbf{c}'(\tau)\|\, d\tau$. Defínase $\mathbf{d}$ igual que antes, $\mathbf{d}(s) = \mathbf{c}(t)$. Demostrar que

$$\left\| \frac{d}{ds}\, \mathbf{d}(s) \right\| = 1.$$

La trayectoria $s \to \mathbf{d}(s)$ se denomina ***reparametrización de*** $\mathbf{c}$ ***por la longitud de arco*** (*véase* también el Ejercicio 13).

En los ejercicios del 12 al 17 se desarrollan algunos aspectos de la geometría diferencial clásica de curvas.

12. Sea $\mathbf{c}$: $[a, b] \to \mathbb{R}^3$ una trayectoria infinitamente diferenciable (es decir, existen derivadas de todos los órdenes). Supongamos $\mathbf{c}'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo t. El vector $\mathbf{c}'(t)/\|\mathbf{c}'(t)\| = \boldsymbol{T}(t)$ es tangente a $\mathbf{c}$ en el punto $\mathbf{c}(t)$ y, puesto que $\|\mathbf{T}(t)\| = \mathbf{1}$, $\mathbf{T}$ se denomina la ***tangente unitaria*** a $\mathbf{c}$.

a) Demostrar que $\mathbf{T}'(t) \cdot \mathbf{T}(t) = 0$. [INDICACIÓN: Derivar $\mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}(t) = 1$.]

b) Escribir una fórmula para $\mathbf{T}'(t)$ en términos de $\mathbf{c}$.

13. **a)** Una trayectoria $\mathbf{c}(s)$ se denomina una ***reparametrización por la longitud de arco*** o, lo que es lo mismo, se dice que tiene ***rapidez unitaria***, si $\|\mathbf{c}'(s)\| = 1$. Para una trayectoria parametrizada por la longitud de arco en $[a, b]$, demostrar que $l(\mathbf{c}) = b - a$.

b) La ***curvatura*** en un punto $\mathbf{c}(s)$ de una trayectoria se define por $k = \|\mathbf{T}'(s)\|$ cuando la trayectoria está parametrizada por la longitud de arco. Demostrar que $k = \|\mathbf{c}''(s)\|$.

c) Si $\mathbf{c}$ viene expresada en términos de algún otro parámetro t, y $\mathbf{c}'(t)$ es siempre distinto de 0, demostrar que $k = \|\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)\|/\|\mathbf{c}'(t)\|^3$.

d) Calcular la curvatura de la hélice $\mathbf{c}(t) = (1/\sqrt{2})(\cos t, \operatorname{sen} t, t)$. (Esta curva $\mathbf{c}$ es un múltiplo escalar de la hélice circular recta.)

14. Si $\mathbf{T}'(t) \neq \mathbf{0}$, del Ejercicio 12 se deduce que $\mathbf{N}(t) = \mathbf{T}'(t)/\|\mathbf{T}'(t)\|$ es normal (es decir, perpendicular) a $\mathbf{T}(t)$; $\mathbf{N}$ se denomina ***vector normal principal***. Consideremos un tercer vector unitario perpendicular a $\mathbf{T}$ y a $\mathbf{N}$, definido por $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$; $\mathbf{B}$ se denomina ***vector binormal***. Los tres juntos, $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ y $\mathbf{B}$, forman un sistema ortogonal orientado positivamente, que podemos interpretar en movimiento a lo largo de la trayectoria (Figura 4.2.5). Demostrar que

a) $\dfrac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot \mathbf{B} = 0.$

b) $\dfrac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot \mathbf{T} = 0.$

c) $d\mathbf{B}/dt$ es un múltiplo escalar de $\mathbf{N}$.

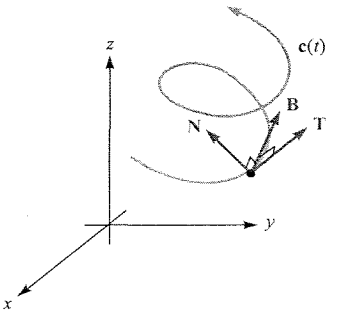


Figura 4.2.5. Tangente **T**, normal principal **N** y binormal **B**.

15. Si $\mathbf{c}(s)$ está parametrizada por la longitud de arco, usamos el resultado del Ejercicio 14(c) para definir una función con valores escalares τ, llamada ***torsión***, mediante la fórmula

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}.$$

a) Demostrar que $\tau = [\mathbf{c}'(s) \times \mathbf{c}''(s)] \cdot \mathbf{c}'''(s)/\|\mathbf{c}''(s)\|^2$.

b) Demostrar que si $\mathbf{c}$ está expresada en términos de otro parámetro t,

$$\tau = \frac{[\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)] \cdot \mathbf{c}'''(t)}{\|\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)\|^2}.$$

Comparar con el Ejercicio 13(c).

c) Calcular la torsión de la hélice $\mathbf{c}(t) = (1/\sqrt{2})(\cos t, \operatorname{sen} t, t)$.

16. Demostrar que si una trayectoria está contenida en un plano, entonces su torsión es cero. Para ello, probar que $\mathbf{B}$ es constante y es un vector normal al plano que contiene a $\mathbf{c}$. (Si la torsión no es cero, entonces da una medida de lo rápidamente que la curva se despega del plano formado por $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$.)

17. **a)** Utilizar los resultados de los Ejercicios 13, 14 y 15 para probar las ***fórmulas de Frenet*** siguientes para una curva de rapidez unitaria:

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = k\mathbf{N}; \qquad \frac{d\mathbf{N}}{ds} = -k\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}; \qquad \frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}.$$

b) Reescribir en forma vectorial los resultados del apartado a), como

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix} = \omega \times \begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \mathbf{N}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}$$

para un vector ω apropiado.

18. En relatividad especial, el tiempo propio de una trayectoria $\mathbf{c}:[a, b] \to \mathbb{R}^4$, con componentes dadas por $\mathbf{c}(\lambda) = (x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda), t(\lambda))$, se define mediante la fórmula:

$$\int_a^b \sqrt{-[x'(\lambda)]^2 - [y'(\lambda)]^2 - [z'(\lambda)]^2 + c^2[t'(\lambda)]^2}\, d\lambda,$$

donde c es la velocidad de la luz, una constante. En la Figura 4.2.6, demostrar, utilizando una notación clara y fácil de entender, la «paradoja de los gemelos»:

$$\text{tiempo propio (AB)} + \text{tiempo propio (BC)} < \text{tiempo propio (AC)}.$$

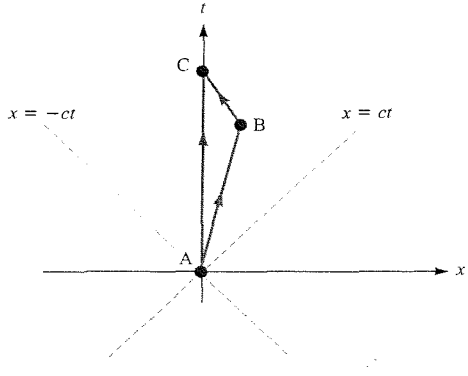


Figura 4.2.6. La desigualdad triangular relativista.

19. Los antiguos griegos sabían que una línea recta era el camino más corto entre dos puntos. Euclides, en su libro *Óptica*, enunció el «principio de reflexión de la luz» —es decir, la luz que se mueve en un plano lo hace en línea recta y, cuando se refleja en un espejo, el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión—. Los griegos no podían tener una prueba de que la línea recta era el camino más corto entre dos puntos porque, en primer lugar, no conocían la definición de longitud de una trayectoria general. Ellos pensaron que esta propiedad de las líneas rectas era más o menos «obvia».

Utilizando la justificación de la longitud de arco dada en esta sección y la desigualdad triangular de la Sección 1.5, justificar razonadamente que si $\mathbf{c}_0$ es el segmento rectilíneo $c_0(t) = t\mathrm{P} + (1 - t)\mathrm{Q}$ que une los puntos P y Q en $\mathbb{R}^3$, entonces:

$$L(\mathbf{c}_0) \leqslant L(\mathbf{c})$$

para cualquier otra trayectoria $\mathbf{c}$ que una P y Q.

4.3. Campos vectoriales

El concepto de campo vectorial

En el Capítulo 2, presentamos un tipo particular de campo vectorial: el gradiente. En esta sección estudiamos campos vectoriales generales, examinando su importancia geométrica y física.

Campos vectoriales Un **campo vectorial** en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $\mathbf{F}$: $A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que asigna a cada punto $\mathbf{x}$ de su dominio A un vector $\mathbf{F}(\mathbf{x})$. Si $n = 2$, $\mathbf{F}$ se denomina un ***campo vectorial en el plano***, y si $n = 3$, $\mathbf{F}$ es un ***campo vectorial en el espacio***.

Podemos representar $\mathbf{F}$ dibujando una flecha en cada punto (*véase* la Figura 4.3.1). Para diferenciarla de los campos vectoriales, una aplicación $f\colon A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que asigna un número a cada punto se llama ***campo escalar***. Un campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z)$ en $\mathbb{R}^3$ tiene tres ***componentes*** F_1, F_2 y F_3, cada una de las cuales es un ***campo escalar***, de manera que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)).$$

Análogamente, un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$ tiene n componentes $F_1, \ldots, F_n$. Si cada componente es una función C^k, diremos que el campo vectorial $\mathbf{F}$ es de ***clase*** C^k. En adelante, supondremos que los campos vectoriales que aparezcan serán al menos de clase C^1, salvo que se diga expresamente lo contrario.

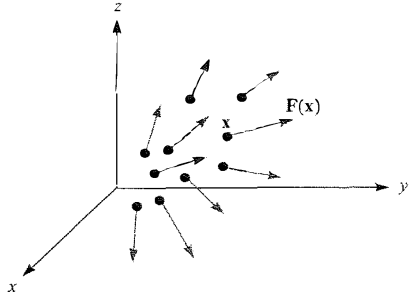


Figura 4.3.1. Un campo vectorial **F** asigna un vector **F(x)** a cada punto **x** de su dominio.

En muchas aplicaciones el vector $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ representa una cantidad física (fuerza, velocidad, etc.) asociada con la posición $\mathbf{x}$, como puede verse en los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 4.11 El flujo de agua a través de una tubería se llama ***estacionario*** si en cada punto del interior de la tubería la velocidad del fluido que pasa por ese punto no cambia con el tiempo. (Obsérvese que esto es muy distinto de afirmar que el agua de la tubería no se mueve.) Asignando a cada punto la velocidad del fluido en él, obtenemos el ***campo de velocidades*** $\mathbf{V}$ (*véase* la Figura 4.3.2). Obsérvese que la longitud de las flechas (la rapidez), así como la dirección del flujo, pueden cambiar de un punto a otro.

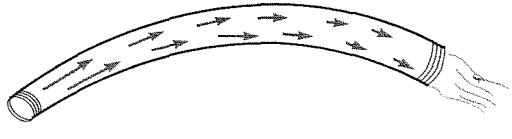


Figura 4.3.2. Un campo vectorial que describe la velocidad de un fluido en una tubería.

EJEMPLO 4.12 Algunos movimientos giratorios (por ejemplo el movimiento de las partículas en un plato que está rotando) pueden describirse mediante el campo vectorial

$$\mathbf{V}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}.$$

Véase la Figura 4.3.3, en la que, para mayor claridad, hemos dibujado en lugar de $\mathbf{V}$ el campo más corto $\frac{1}{4}\mathbf{V}$, de manera que las flechas no se solapen. Esto es una práctica común al dibujar campos vectoriales.

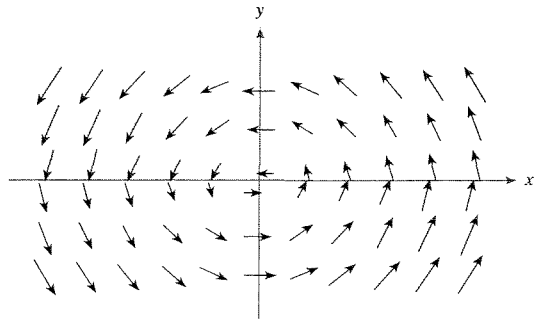


Figura 4.3.3. Un campo vectorial rotatorio.

EJEMPLO 4.13 En el plano, $\mathbb{R}^2$, consideramos el campo vectorial x definido por

$$\mathbf{V}(x, y) = \frac{y\mathbf{i}}{x^2 + y^2} - \frac{x\mathbf{j}}{x^2 + y^2} = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, -\frac{x}{x^2 + y^2}\right)$$

(excepto en el origen, donde $\mathbf{V}$ no está definido). Este campo vectorial es una buena aproximación para la componente plana de la velocidad del agua que fluye a través de un agujero en la base de una cuba (*véase* la Figura 4.3.4). Obsérvese que la velocidad aumenta cuando nos aproximamos al desagüe.

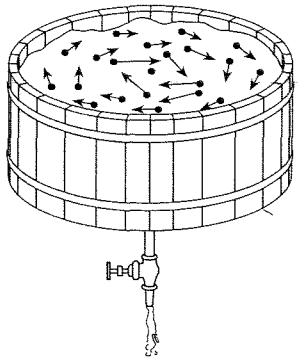


Figura 4.3.4. El campo vectorial que describe el flujo circular en una cuba.

Campo vectorial gradiente

En la Sección 2.6 definimos el gradiente de una función mediante la expresión

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Ahora vamos a interpretarlo como un ejemplo de campo vectorial —asigna un vector a cada punto (x, y, z). En consecuencia, nos referiremos a ∇f como *campo vectorial gradiente*. Estos campos aparecen en un variado número de situaciones, como muestran los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 4.14 Considérese un objeto sólido que está siendo calentado por un extremo y enfriado por el otro. La temperatura en cada punto del interior del cuerpo en un instante dado viene descrita por una función escalar $T(x, y, z)$. El flujo de calor puede representarse por un campo vectorial, donde las flechas indican la dirección y magnitud del flujo (Figura 4.3.5). Este ***campo vectorial flujo de calor*** o ***energía*** viene dado por $\mathbf{J} = -k\nabla T$, donde $k > 0$ es una constante llamada ***conductividad***, y ∇T es el gradiente de la función escalar T. Los conjuntos de nivel de T se llaman ***isotermas***. Obsérvese que el calor fluye de las regiones calientes hacia las frías, puesto que $-\nabla T$ apunta en la dirección en que T decrece.

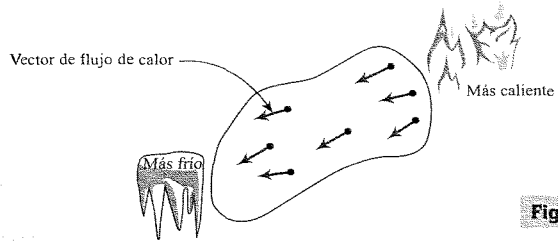


Figura 4.3.5. Un campo vectorial que describe la dirección y magnitud del flujo de calor.

EJEMPLO 4.15 La fuerza de atracción de la Tierra sobre una masa m puede describirse mediante un campo vectorial, llamado ***campo gravitatorio***. Tomamos un sistema de coordenadas cuyo origen está situado en el centro de la Tierra (que suponemos esférica). De acuerdo con la ley de Newton de la gravitación, este campo viene dado por

$$\mathbf{F} = -\frac{mMG}{r^3}\mathbf{r},$$

donde $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$, y $r = \|\mathbf{r}\|$ (*véase* la Figura 4.3.6). El dominio de este campo vectorial consiste en aquellos valores de $\mathbf{r}$ para los que $\|\mathbf{r}\|$ es mayor que el radio de la Tierra. Como vimos en el Ejemplo 2.52, Sección 2.6, $\mathbf{F}$ es un campo gradiente, $\mathbf{F} = -\nabla V$, donde

$$V = -\frac{mMG}{r}$$

es el ***potencial gravitatorio***. Obsérvese nuevamente que $\mathbf{F}$ apunta en la dirección hacia la que V decrece. Escribiendo $\mathbf{F}$ en términos de sus componentes, vemos que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{-mMG}{r^3}x, \frac{-mMG}{r^3}y, \frac{-mMG}{r^3}z\right).$$

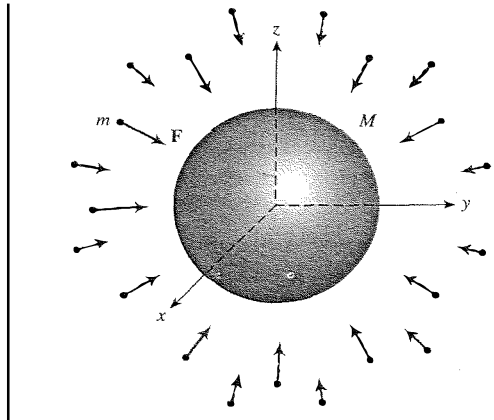


Figura 4.3.6. El campo vectorial **F** dado por la ley de la gravitación de Newton.

EJEMPLO 4.16 Según la ***ley de Coulomb***, la fuerza que actúa sobre una carga e situada en una posición $\mathbf{r}$, bajo el efecto de una carga Q situada en el origen, es

$$\mathbf{F} = \frac{\varepsilon Qe}{r^3}\,\mathbf{r} = -\nabla V,$$

donde $V = \varepsilon Qe/r$ y ε es una constante que depende de las unidades que estemos usando. Para $Qe > 0$ (cargas del mismo signo) la fuerza es repulsiva [Figura 4.3.7(a)], y para $Qe < 0$ (cargas de distinto signo) la fuerza es atractiva [Figura 4.3.7(b)]. Como el potencial V es constante sobre sus superficies de nivel, éstas reciben el nombre de ***superficies equipotenciales***. Obsérvese que la fuerza es ortogonal a las superficies equipotenciales (la fuerza es radial, mientras que las superficies equipotenciales son esferas concéntricas).

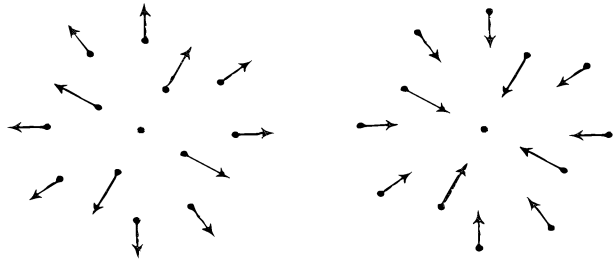


Figura 4.3.7. Los campos vectoriales asociados con (a) cargas del mismo signo ($Qe > 0$) y (b) cargas de distinto signo ($Qe < 0$).

El ejemplo siguiente demuestra que no todo campo vectorial es un campo gradiente.

EJEMPLO 4.17 Demostrar que el campo vectorial $\mathbf{V}$ en $\mathbb{R}^2$ definido por $\mathbf{V}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ no es un campo gradiente; es decir, no existe ninguna función f de clase C^1 tal que

$$\mathbf{V}(x, y) = \nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}.$$

Solución

Supongamos que existiera una tal f. Entonces $\partial f/\partial x = y$ y $\partial f/\partial y = -x$. Puesto que éstas son de clase C^1, f tiene derivadas de primer y segundo orden continuas. Pero $\partial^2 f/\partial x \partial y = -1$ y $\partial^2 f/\partial y \partial x = 1$, lo que contradice la igualdad de las derivadas cruzadas; por tanto, $\mathbf{V}$ no puede ser un campo gradiente.

Conservación de la energía y escape del campo gravitatorio terrestre

Consideremos una partícula de masa m que se mueve en un campo de fuerzas $\mathbf{F}$ que es un campo potencial. Es decir, suponemos $\mathbf{F} = -\nabla V$ para una función escalar V, y que las partículas se mueven según la ley $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Entonces, si la trayectoria es $\mathbf{r}(t)$, se tiene

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t) = -\nabla V(\mathbf{r}(t)). \tag{1}$$

Una característica básica de tal movimiento es la *conservación de la energía*. La energía E de la partícula se define como la suma de las energías potencial y cinética,

$$E = \frac{1}{2} m\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|^2 + V(\mathbf{r}(t)). \tag{2}$$

El principio de *conservación de la energía* afirma que si se cumple la segunda ley de Newton, entonces E es independiente del tiempo; es decir, $dE/dt = 0$. La prueba de esta identidad es un sencillo cálculo; utilizamos la Ecuación (2), la regla de la cadena, y la Ecuación (1):

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= m\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} + (\nabla V) \cdot \dot{\mathbf{r}} \\ &= \dot{\mathbf{r}} \cdot (-\nabla V + \nabla V) = 0.\end{aligned}$$

Velocidad de escape

Como aplicación de la conservación de la energía, calcularemos la velocidad que un cohete debe alcanzar para poder escapar de la influencia gravitacional de la Tierra. Supongamos que m es la masa del cohete, que está a una distancia R_0 del centro de la Tierra (o de cualquier otro planeta) cuando alcanza la velocidad de escape v_e, y a partir de ese punto viaja sin usar sus motores. La energía en ese instante es

$$E_0 = \frac{1}{2} m v_e^2 - \frac{mMG}{R_0}. \tag{3}$$

Por la conservación de la energía, E_0 debe ser igual a la energía en un instante posterior, que escribimos como

$$E_0 = E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mMG}{R}, \tag{4}$$

donde v es la velocidad y R es la distancia hasta el centro de la Tierra (u otro planeta). Lo que denotamos por el término *velocidad de escape* es que v_e se elige de modo que cuando el cohete alcanza grandes distancias apenas se mueve; es decir, v está próxima a cero y R es muy grande. Por tanto, de la Ecuación (4), vemos que E = 0 y entonces $E_0 = 0$; despejando v_e en esta expresión usando la Ecuación (3) obtenemos

$$v_e = \sqrt{\frac{2MG}{R_0}}.$$

Ahora, GM/R_0^2 es exactamente g, la aceleración de la gravedad a distancia R_0 del centro del planeta. Por tanto, podemos escribir:

$$v_e = \sqrt{2gR_0}.$$

Para la Tierra, si la velocidad se alcanzase en la superficie (lo que, por supuesto, no es muy realista), deberíamos obtener

$$v_e = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 6.371.000 \text{ m}} = 11.127 \text{ m/s}.$$

Sin embargo, este valor es una buena aproximación de la velocidad que necesita un satélite situado en una órbita baja alrededor de la Tierra para escapar del campo gravitatorio terrestre.

Líneas de flujo

Un concepto importante relacionado con los campos vectoriales (no necesariamente provenientes de un gradiente) es el de línea de flujo, definida del modo siguiente:

Líneas de flujo Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial, una ***línea de flujo*** para $\mathbf{F}$ es una trayectoria $\mathbf{c}(t)$ tal que:

$$\mathbf{c}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)).$$

Es decir, $\mathbf{F}$ da el campo de velocidades de la trayectoria $\mathbf{c}(t)$.

En el contexto del Ejemplo 4.11, una línea de flujo es la trayectoria seguida por una pequeña partícula suspendida en el fluido (Figura 4.3.8). Las líneas de flujo también se llaman apropiadamente ***líneas de corriente*** o ***curvas integrales***.

Geométricamente, una línea de flujo para un campo vectorial dado $\mathbf{F}$ es una curva trazada sobre el dominio de $\mathbf{F}$ de manera que el vector tangente a la curva en cada punto coincide con el campo vectorial, como se representa en la Figura 4.3.9.

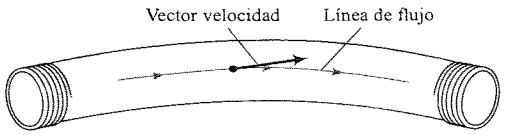


Figura 4.3.8. El vector velocidad de un fluido es tangente a las líneas de flujo.

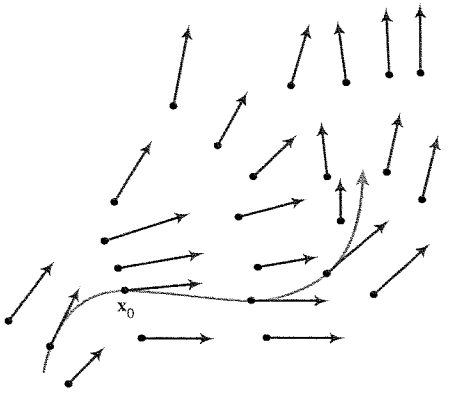


Figura 4.3.9. Una línea de flujo discurriendo sobre un campo vectorial en el plano.

Una línea de flujo puede interpretarse como la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales. En efecto, podemos escribir su definición $\mathbf{c}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{c}(t))$ como

$$x'(t) = P(x(t), y(t), z(t)),$$
$$y'(t) = Q(x(t), y(t), z(t)),$$
$$z'(t) = R(x(t), y(t), z(t)),$$

donde $\mathbf{c}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, y donde

$$\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}.$$

Estos sistemas se analizan en cursos sobre ecuaciones diferenciales, pero suponemos que no se ha seguido uno de estos cursos.

EJEMPLO 4.18 Demostrar que la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ es una línea de flujo para el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$. ¿Hay más líneas de flujo?

Solución

Debemos comprobar que $\mathbf{c}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{c}(t))$. El término de la izquierda es $(-\operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}$, mientras que el término de la derecha es $\mathbf{F}(\cos t, \operatorname{sen} t) = (-\operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}$, de manera que tenemos una línea de flujo. Como sugiere la Figura 4.3.3, las otras líneas de flujo también son circunferencias. Su ecuación es

$$\mathbf{c}(t) = (r\cos(t - t_0), r\operatorname{sen}(t - t_0))$$

con r y t_0 constantes.

En muchos casos es imposible encontrar fórmulas explícitas para las líneas de flujo, lo que nos lleva a recurrir a métodos numéricos. La Figura 4.3.10 muestra una gráfica obtenida mediante un programa que calcula numéricamente líneas de flujo y las dibuja en la pantalla del computador.

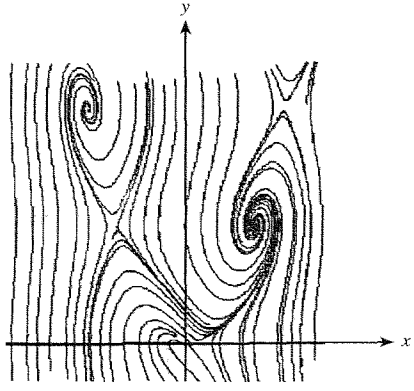


Figura 4.3.10. Curvas integrales del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (\operatorname{sen} y)\mathbf{i} + (x^2 - y)\mathbf{j}$ generadas por computador. Este dibujo fue obtenido usando el programa *3D-XplorMath*, disponible en la página web de Richard Palais http://rsp.math.brandeis.edu/3D-XplorMath.

Nota Histórica

El concepto de campo

El concepto de «campo», entendido como campo de vectores, tuvo un enorme impacto en el desarrollo de las bases conceptuales de la física y la ingeniería. Es realmente una de las ideas que supusieron un avance significativo en la historia del pensamiento humano. Es la noción que permite describir de modo sistemático las influencias sobre objetos y entre objetos que están separados espacialmente.

La idea de campo comenzó con el concepto de Newton de *campo gravitatorio*. En este caso, el campo gravitatorio describe la atracción de un cuerpo o grupo de cuerpos sobre otro. Análogamente, el campo eléctrico producido por un objeto o grupo de objetos cargados crea, de acuerdo con la ley de Coulomb, una fuerza sobre otro objeto cargado. El uso de campos vectoriales para describir este tipo de fuerzas ha conducido a una comprensión más profunda de las fuerzas atractivas y repulsivas en la naturaleza.

Sin embargo, fue el monumental descubrimiento de las ecuaciones de Maxwell, que describen la propagación de la energía electromagnética, el que consolidó el concepto de «campo» en el pensamiento científico. Este ejemplo es especialmente interesante, porque estos campos se pueden *propagar*. El contraste entre los campos electromagnéticos que se pueden propagar y el campo gravitatorio que implica una *acción instantánea a distancia* ha originado gran interés entre los filósofos de la ciencia.

La idea de Einstein es que la gravitación puede describirse en términos de las propiedades métricas del espacio-tiempo, y que en esta teoría los campos asociados también se pueden propagar, exactamente como el campo electromagnético, proporcionando por tanto una profunda evidencia filosófica de que la versión de Einstein de la gravitación

debería ser correcta. Estas ideas también han guiado los recientes esfuerzos para detectar ondas gravitatorias. Para una discusión más profunda del trabajo de Einstein, *véase* la Sección 7.7.

La idea de campo también se usa en ingeniería para describir sistemas elásticos e interesantes propiedades microestructurales de los materiales. En la física teórica moderna, el concepto de campo se usa para describir partículas elementales y es una herramienta central en los esfuerzos de los físicos teóricos modernos por unificar la gravedad con la mecánica cuántica de las partículas elementales. Es imposible imaginar un marco teórico moderno que no incorpore algún tipo de concepto de campo como ingrediente central.

EJERCICIOS

En los ejercicios del 1 al 8, esbozar el campo vectorial dado o un pequeño múltiplo suyo.

1. $\mathbf{F}(x, y) = (2, 2)$.

2. $\mathbf{F}(x, y) = (4, 0)$.

3. $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$.

4. $\mathbf{F}(x, y) = (-x, y)$.

5. $\mathbf{F}(x, y) = (2y, x)$.

6. $\mathbf{F}(x, y) = (y, -2x)$.

7. $\mathbf{F}(x, y) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$.

8. $\mathbf{F}(x, y) = \left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$.

En los ejercicios del 9 al 12, esbozar algunas líneas de flujo del campo vectorial dado.

9. $\mathbf{F}(x, y) = (y, -x)$.

10. $\mathbf{F}(x, y) = (x, -y)$.

11. $\mathbf{F}(x, y) = (x, x^2)$.

12. $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, -x, 0)$.

En los ejercicios del 13 al 16, demostrar que la curva dada $\mathbf{c}(t)$ *es una línea de flujo del campo de velocidades dado* $\mathbf{F}(x, y, z)$.

13. $\mathbf{c}(t) = (e^{2t}, \log|t|, 1/t)$, $t \neq 0$; $\mathbf{F}(x, y, z) = (2x, z, -z^2)$.

14. $\mathbf{c}(t) = (t^2, 2t - 1, \sqrt{t})$, $t > 0$; $\mathbf{F}(x, y, z) = (y + 1, 2, 1/2z)$.

15. $\mathbf{c}(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, e^t)$; $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, -x, z)$.

16. $\mathbf{c}(t) = \left(\frac{1}{t^3}, e^t, \frac{1}{t}\right)$; $\mathbf{F}(x, y, z) = (-3z^4, y, -z^2)$.

17. Demostrar que para colocar un satélite en una órbita a baja altura sobre la Tierra se necesita la mitad de la energía requerida para hacerlo escapar de la atracción de la Tierra (ignorar el efecto de la rotación terrestre).

18. Sea $\mathbf{c}(t)$ una línea de flujo de un campo gradiente $\mathbf{F} = -\nabla V$. Demostrar que $V(\mathbf{c}(t))$ es decreciente como función de t.

19. Supongamos que todas las isotermas en una región son esferas concéntricas centradas en el origen. Demostrar que el campo vectorial que representa el flujo de energía apunta en la dirección del radio, bien hacia el origen, bien hacia fuera.

20. Esbozar el campo gradiente $-\nabla V$ para $V(x, y) = (x + y)/(x^2 + y^2)$, y la superficie equipotencial $V = 1$.

4.4. La divergencia y el rotacional

Para definir las operaciones divergencia y rotacional, vamos a utilizar el ***operador nabla***, definido por

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Para funciones de una variable, el cálculo de una derivada puede interpretarse como una operación o proceso; es decir, dada una función $y = f(x)$, su derivada es el resultado de *operar* sobre y mediante el *operador* derivada d/dx. Análogamente, podemos escribir el gradiente como

$$\nabla f = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}\right)f = \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y}$$

para funciones de dos variables y

$$\nabla f = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)f = \mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z}$$

para tres variables. En términos operacionales, el gradiente de f se obtiene tomando el operador ∇ y aplicándolo sobre f.

Definición de divergencia

Definimos la divergencia de un campo vectorial $\mathbf{F}$ formalmente tomando el producto escalar del operador ∇ con $\mathbf{F}$.

Divergencia Si $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$, la ***divergencia*** de $\mathbf{F}$ es el campo escalar

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

Análogamente, si $\mathbf{F} = (F_1, \ldots, F_n)$ es un campo vectorial en $\mathbb{R}^n$, su divergencia es

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}.$$

EJEMPLO 4.19 Calcular la divergencia de

$$\mathbf{F} = x^2y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}.$$

Solución

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(z) + \frac{\partial}{\partial z}(xyz) = 2xy + 0 + xy = 3xy.$$

Interpretación

La divergencia tiene una importante interpretación física. Si imaginamos que $\mathbf{F}$ es el campo de velocidades de un gas (o de un fluido), entonces div $\mathbf{F}$ representa *la razón de expansión por unidad de volumen bajo el flujo del gas (o del fluido)*. Si div $\mathbf{F} < 0$, el gas (o fluido) se está *comprimiendo*. Para un campo vectorial en el plano $\mathbf{F}(x, y) = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j}$, la *divergencia*

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

mide *la razón de expansión del área*.

Esta interpretación se explica gráficamente del modo siguiente. Tomemos una pequeña región W alrededor de un punto $\mathbf{x}_0$. Para cada punto $\mathbf{x}$ de W, sea $\mathbf{x}(t)$ la línea de flujo que parte de $\mathbf{x}$. El conjunto de puntos $\mathbf{x}(t)$ describe cómo fluye el conjunto W tras un tiempo t (*véase* la Figura 4.4.1).

Denotamos la región resultante en el instante t por $W(t)$ y sea $\mathcal{V}(t)$ su volumen (o área, si estamos en dos dimensiones). Entonces, la razón relativa de cambio de volumen es la divergencia, más exactamente,

$$\frac{1}{\mathcal{V}(0)} \frac{d}{dt} \mathcal{V}(t)\Big|_{t=0} \approx \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}_0),$$

donde la aproximación se hace más y más exacta según W se contrae a $\mathbf{x}_0$. Se puede encontrar una prueba directa de este resultado en el suplemento de Internet, pero en el Capítulo 8 se presenta un argumento más natural, en el contexto de los teoremas sobre integrales del cálculo vectorial.

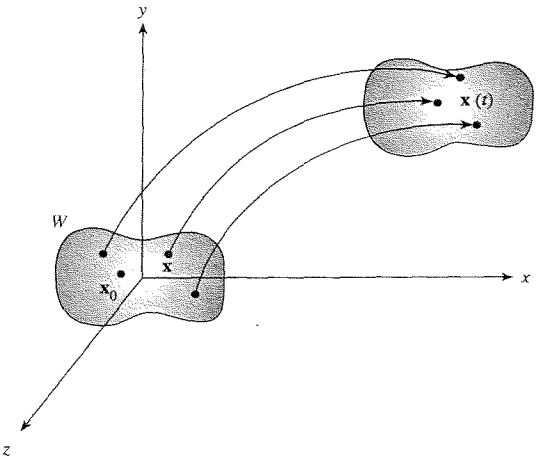


Figura 4.4.1. Deformación de una región W siguiendo las líneas de flujo de un campo vectorial.

EJEMPLO 4.20 Considerar el campo vectorial en el plano dado por $\mathbf{V}(x, y) = x\mathbf{i}$. Relacionar el signo de la divergencia de $\mathbf{V}$ con la razón del cambio de áreas bajo el flujo.

Solución

Interpretamos $\mathbf{V}$ como el campo de velocidades de un fluido en el plano. El campo vectorial $\mathbf{V}$ apunta hacia la derecha para $x > 0$, y hacia la izquierda para $x < 0$, como podemos ver en la Figura 4.4.2. La longitud de $\mathbf{V}$ es más corta cuando nos acercamos al origen. Cuando el fluido se mueve, se expande (el área del rectángulo sombreado aumenta), de manera que es de esperar que div $\mathbf{V} > 0$. En efecto, div $\mathbf{V} = 1$.

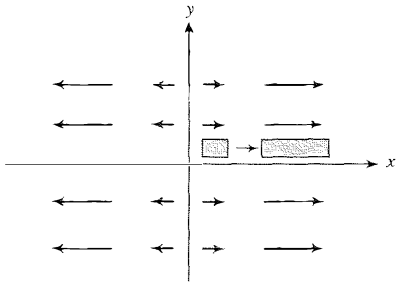


Figura 4.4.2. El fluido se está expandiendo.

EJEMPLO 4.21 Las líneas de flujo del campo vectorial $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ son semirrectas que parten del origen (*véase* la Figura 4.4.3).

Si estas líneas de flujo se corresponden con un fluido, entonces éste se está expandiendo conforme se aleja del origen, de modo que div $\mathbf{F}$ debería ser positiva. En efecto,

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y} y = 2 > 0.$$

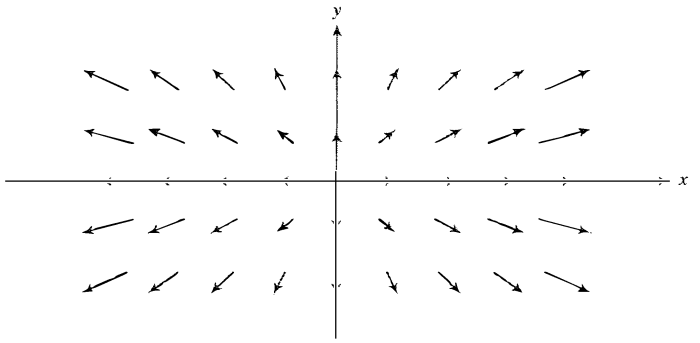


Figura 4.4.3. El campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

EJEMPLO 4.22 Consideremos el campo vectorial $\mathbf{F} = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$. A diferencia del caso anterior, aquí las líneas de flujo apuntan hacia el origen (*véase* la Figura 4.4.4). Por tanto, el fluido se está comprimiendo, de manera que esperamos que div $\mathbf{F} < 0$. Haciendo los cálculos, vemos que

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(-x) + \frac{\partial}{\partial y}(-y) = -1 - 1 = -2 < 0.$$

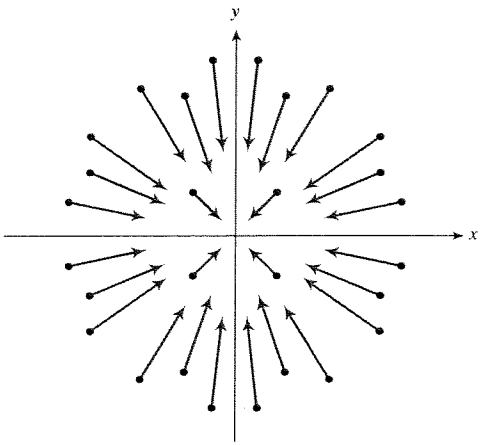


Figura 4.4.4. El campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$.

EJEMPLO 4.23 Como vimos en la última sección, las líneas de flujo de $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ son circunferencias concéntricas centradas en el origen, moviéndose en el sentido contrario al de las agujas del reloj. Según la Figura 4.4.5, parece que el fluido ni se comprime ni se expande. Esto se confirma calculando

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(-y) + \frac{\partial}{\partial y}(x) = 0 + 0 = 0.$$

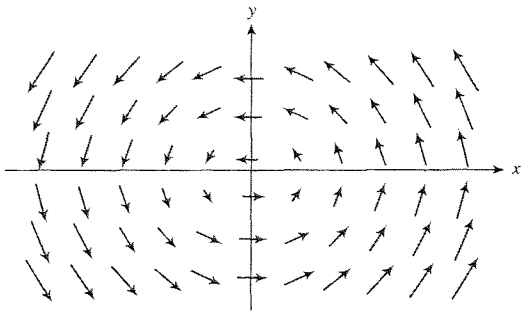
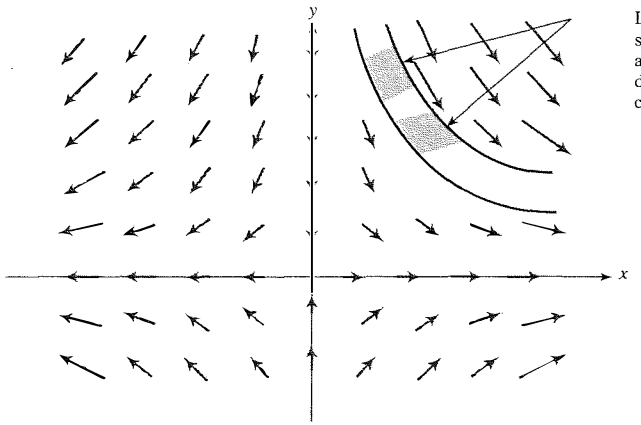


Figura 4.4.5. El campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ tiene divergencia cero.

EJEMPLO 4.24 En la Figura 4.4.6 se muestran algunas líneas de flujo del campo $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$. Aquí nuestra intuición sobre expansión o compresión no es tan clara; sin embargo, es cierto que las regiones sombreadas tienen la misma área, y calculamos que

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y} (-y) = 1 + (-1) = 0.$$



Las partículas del fluido se mueven de la región sombreada a la otra después de un intervalo de tiempo fijo. Las dos áreas coinciden.

Figura 4.4.6. El campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$.

El rotacional

Para calcular el rotacional, la segunda operación básica para campos vectoriales, tomamos formalmente el producto vectorial de ∇ con $\mathbf{F}$.

El rotacional de un campo vectorial Si $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$, entonces el ***rotacional*** de $\mathbf{F}$ es el *campo vectorial*

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Si usamos una notación alternativa, y escribimos $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, la fórmula del rotacional se escribe

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

EJEMPLO 4.25 Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Hallar $\nabla \times \mathbf{F}$.

Solución

Utilizamos la fórmula anterior:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & xy & 1 \end{vmatrix} = (0 - 0)\mathbf{i} - (0 - 0)\mathbf{j} + (y - 0)\mathbf{k}.$$

Por tanto, $\nabla \times \mathbf{F} = y\mathbf{k}$.

EJEMPLO 4.26 Hallar el rotacional del campo $xy\mathbf{i} - \operatorname{sen} z\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Solución

Sea $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} - \operatorname{sen} z\mathbf{j} + \mathbf{k}$,

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy & -\operatorname{sen} z & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -\operatorname{sen} z & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy & 1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ xy & -\operatorname{sen} z \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

$$= \cos z\mathbf{i} - x\mathbf{k}.$$

A diferencia de la divergencia, que se puede definir en $\mathbb{R}^n$ para cualquier n, sólo definimos el rotacional en un espacio tridimensional (o en el caso de vectores en el plano, suponiendo que su tercera componente es igual a cero).

El rotacional y las rotaciones

El significado físico del rotacional será discutido en el Capítulo 8, cuando estudiemos el teorema de Stokes; sin embargo, podemos considerar una situación específica, en la cual el rotacional está asociado con rotaciones.

EJEMPLO 4.27 Consideremos un sólido rígido B que gira alrededor de un eje L. El movimiento de rotación del cuerpo puede describirse mediante un vector $\boldsymbol{\omega}$ a lo largo del eje de rotación, eligiendo su dirección de modo que el cuerpo gire en torno a $\boldsymbol{\omega}$, como en la Figura 4.4.7. Denominaremos al vector $\boldsymbol{\omega}$ como ***vector velocidad angular***. La longitud $\omega = \|\boldsymbol{\omega}\|$ se toma de modo que coincida con la rapidez angular del sólido B, es decir, la rapidez de cualquier punto de B dividida por su distancia al eje de rotación L. El movimiento de los puntos en el cuerpo rotante está descrito por el campo vectorial $\mathbf{v}$ cuyo valor en cada punto es la velocidad en ese punto. Para hallar $\mathbf{v}$, sea Q un punto cualquiera en B, y sea α la distancia entre Q y L.

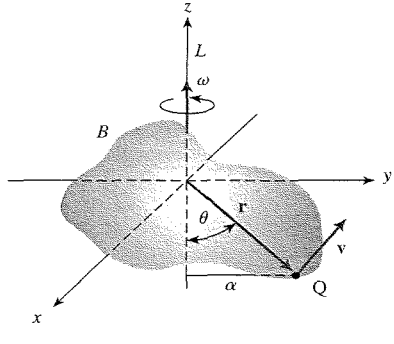


Figura 4.4.7. La velocidad $\mathbf{v}$ y la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de un sólido en rotación están ligadas por la fórmula $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$.

La Figura 4.4.7 muestra que $\alpha = \|\mathbf{r}\| \operatorname{sen} \theta$, donde $\mathbf{r}$ es el vector que parte del origen de coordenadas y termina en Q, y θ es el ángulo entre $\mathbf{r}$ y el eje de rotación L. La velocidad tangencial

$\mathbf{v}$ de Q se dirige en el sentido contrario al de las agujas del reloj sobre la tangente a una circunferencia paralela al plano xy de radio α, y tiene magnitud

$$||\mathbf{v}|| = \omega\alpha = \omega||\mathbf{r}|| \operatorname{sen}\theta = ||\boldsymbol{\omega}||\,||\mathbf{r}|| \operatorname{sen}\theta.$$

La dirección y magnitud de $\mathbf{v}$ implican que $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Eligiendo un sistema de coordenadas en el cual L sea el eje z, podemos escribir $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$ y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Entonces,

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j},$$

y por tanto

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 2\omega\mathbf{k} = 2\boldsymbol{\omega}.$$

Es decir, para la rotación de un sólido rígido, el rotacional del campo de velocidades es un nuevo campo vectorial cuyo valor es el mismo en todos los puntos. Su dirección es la del eje de rotación, y su magnitud es el doble de la velocidad angular.

El rotacional y las rotaciones en un flujo

Si un campo vectorial representa el flujo de un fluido, entonces el valor de $\nabla \times \mathbf{F}$ en un punto es el doble de la velocidad angular de un pequeño sólido que rotase del mismo modo que lo hace el fluido cerca de ese punto. En particular, $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ en un punto P significa que el fluido está libre de rotaciones rígidas en P, es decir, no tiene remolinos. Otra justificación de esta idea depende del teorema de Stokes del Capítulo 8. Sin embargo, podemos decir informalmente que rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ significa que si una *pequeña* rueda rígida dotada de paletas flota en el fluido, se moverá con él, pero no rotará alrededor de su eje. Tal campo vectorial se denomina **irrotacional**. Por ejemplo, se ha determinado a partir de experimentos que el movimiento de un líquido contenido en una cuba, mientras ésta se vacía por un desagüe en su parte inferior, es usualmente irrotacional excepto justo en el centro, a pesar de que el fluido esté girando alrededor del desagüe (*véase* la Figura 4.4.8). En el Ejemplo 4.28, *las líneas de flujo del campo vectorial* $\mathbf{V}$ *son*

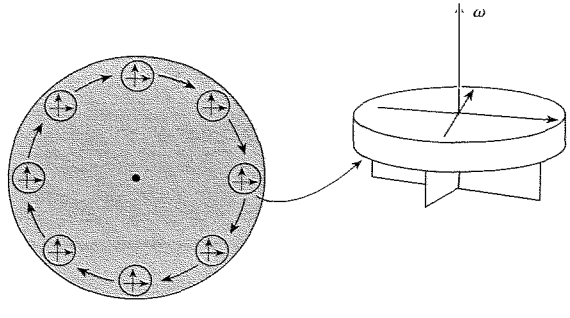


Figura 4.4.8. Observación desde arriba de un fluido en el que flota una rueda con paletas. El campo de velocidades $\mathbf{V}(x, y, z) = (y\mathbf{i} - x\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$ es irrotacional; la rueda no gira alrededor de su eje $\boldsymbol{\omega}$.

circunferencias centradas en el origen, a pesar de lo cual demostraremos que el flujo es irrotacional; por tanto, el lector debería estar prevenido ante la posible confusión que puede ocasionar el término «irrotacional».

EJEMPLO 4.28 Comprobar que el campo vectorial

$$\mathbf{V}(x, y, z) = \frac{y\mathbf{i} - x\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$$

es irrotacional cuando $(x, y) \neq (0, 0)$ (es decir, excepto cuando $\mathbf{V}$ no está definido).

Solución

El rotacional es

$$\nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{y}{x^2 + y^2} & \dfrac{-x}{x^2 + y^2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2 + y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)\right]\mathbf{k}$$

$$= \left[\frac{-(x^2 + y^2) + 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right]\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Los campos gradiente son irrotacionales

La siguiente identidad es una relación básica entre gradiente y rotacional, que se debería comparar con el hecho de que para cualquier vector $\mathbf{v}$ se tiene $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

TEOREMA 1: El rotacional de un gradiente Sea f una función C^2. Entonces

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}.$$

Es decir, el rotacional de cualquier gradiente es el vector cero.

DEMOSTRACIÓN Puesto que $\nabla f = (\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z)$, por definición tenemos

$$\nabla \times \nabla f = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)\mathbf{k}.$$

Cada una de las componentes es cero, por la igualdad de las derivadas parciales cruzadas.

El recíproco de este teorema (un campo vectorial con rotacional cero, bajo hipótesis adecuadas, es un campo gradiente) se tratará en el Capítulo 8.

EJEMPLO 4.29 Sea $\mathbf{V}(x, y, z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$. Demostrar que $\mathbf{V}$ no es un campo gradiente.

Solución

Si $\mathbf{V}$ fuera un campo gradiente, según el Teorema 1 debería verificar rot $\mathbf{V} = \mathbf{0}$. Pero

$$\text{rot } \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = -2\mathbf{k} \neq \mathbf{0},$$

de manera que $\mathbf{V}$ no puede ser un gradiente.

Rotacional escalar

Hay una operación sobre campos vectoriales en el plano que está muy relacionada con el concepto de rotacional. Si $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ es un campo vectorial en el plano, también puede interpretarse como un campo vectorial en el espacio tridimensional, para el cual la componente $\mathbf{k}$ es cero y las otras dos componentes son independientes de la coordenada z. Entonces, el rotacional de $\mathbf{F}$ se reduce a

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

y siempre apunta en la dirección $\mathbf{k}$. La función

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

que depende de las variables x e y se denomina el ***rotacional escalar*** de $\mathbf{F}$.

EJEMPLO 4.30 Hallar el rotacional escalar de $\mathbf{V}(x, y) = -y^2\mathbf{i} + x\mathbf{j}$.

Solución

El rotacional es

$$\nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & 0 \end{vmatrix} = (1 + 2y)\mathbf{k},$$

de modo que el rotacional escalar, que es el coeficiente de $\mathbf{k}$, vale $1 + 2y$.

Los rotacionales tienen divergencia cero

A continuación, enunciamos una relación básica entre los operadores divergencia y rotacional.

TEOREMA 2: La divergencia de un rotacional Para cualquier campo vectorial $\mathbf{F}$ de clase C^2,

$$\text{div rot } \mathbf{F} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0.$$

Es decir, la divergencia de cualquier rotacional es cero.

Al igual que ocurría en la prueba de que el rotacional de un gradiente es cero, en este caso la demostración del teorema se basa en la igualdad de las derivadas cruzadas. El lector debería escribir los detalles. El resultado recíproco se estudiará en el Capítulo 8.

EJEMPLO 4.31 Demostrar que el campo vectorial $\mathbf{V}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ no puede ser el rotacional de ningún campo vectorial $\mathbf{F}$; es decir, no existe ningún campo $\mathbf{F}$ tal que $\mathbf{V} = \text{rot } \mathbf{F}$.

Solución

Si existiera un tal $\mathbf{F}$, según el Teorema 2 deberíamos tener div $\mathbf{V} = 0$. Pero

$$\text{div } \mathbf{V} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3 \neq 0,$$

de modo que $\mathbf{V}$ no puede ser rot $\mathbf{F}$ para ningún $\mathbf{F}$.

El laplaciano

El ***operador de Laplace*** ∇^2, que actúa sobre funciones f, se define como la divergencia del gradiente[5]:

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Este operador desempeña un importante papel en muchas leyes físicas, como ya mencionamos en la Sección 3.1.

EJEMPLO 4.32 Demostrar que $\nabla^2 f = 0$ para

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{1}{r} \qquad \text{y} \qquad (x, y, z) \neq (0, 0, 0),$$

donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, y $r = \|\mathbf{r}\|$.

Solución

Las derivadas primeras son

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Calculando las derivadas segundas, resulta

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{3y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{3z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Por tanto,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = 0.$$

[5] *Nota de los traductores:* otra notación muy habitual en la literatura para representar el operador de Laplace es el símbolo Δ.

Identidades vectoriales

En este momento tenemos a nuestra disposición cuatro operadores básicos: gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano. El siguiente cuadro contiene algunas fórmulas que son útiles cuando se calcula con campos vectoriales.

Identidades básicas del análisis vectorial

1. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$.
2. $\nabla(cf) = c\nabla f$, para cualquier constante c.
3. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$.
4. $\nabla(f/g) = (g\nabla f - f\nabla g)/g^2$, en aquellos puntos $\mathbf{x}$ en los que $g(\mathbf{x}) \neq 0$.
5. $\text{div}\,(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \text{div}\,\mathbf{F} + \text{div}\,\mathbf{G}$.
6. $\text{rot}\,(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \text{rot}\,\mathbf{F} + \text{rot}\,\mathbf{G}$.
7. $\text{div}\,(f\mathbf{F}) = f\,\text{div}\,\mathbf{F} + \nabla f$.
8. $\text{div}\,(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \mathbf{G}\cdot\text{rot}\,\mathbf{F} - \mathbf{F}\cdot\text{rot}\,\mathbf{G}$.
9. $\text{div rot}\,\mathbf{F} = 0$.
10. $\text{rot}\,(f\mathbf{F}) = f\,\text{rot}\,\mathbf{F} + \nabla f\times\mathbf{F}$.
11. $\text{rot}\,\nabla f = \mathbf{0}$.
12. $\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2(\nabla f\cdot\nabla g)$.
13. $\text{div}\,(\nabla f\times\nabla g) = 0$.
14. $\text{div}\,(f\nabla g - g\nabla f) = f\nabla^2 g - g\nabla^2 f$.

EJEMPLO 4.33 Demostrar la identidad número 7 del cuadro anterior.

Solución

El campo vectorial $f\mathbf{F}$ tiene componentes fF_i para $i = 1, 2, 3$, y por tanto

$$\text{div}\,(f\mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(fF_1) + \frac{\partial}{\partial y}(fF_2) + \frac{\partial}{\partial z}(fF_3).$$

Por otra parte, según la regla del producto, $(\partial/\partial x)(f F_1) = f\partial F_1/\partial x + F_1 \partial f/\partial x$, con expresiones similares para los otros términos. Por tanto,

$$\begin{aligned}\text{div } (f\mathbf{F}) &= f\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) + F_1 \frac{\partial f}{\partial x} + F_2 \frac{\partial f}{\partial y} + F_3 \frac{\partial f}{\partial z} \\ &= f(\nabla \cdot \mathbf{F}) + \mathbf{F} \cdot \nabla f.\end{aligned}$$

Vamos a utilizar estas identidades para repetir el Ejemplo 4.32.

EJEMPLO 4.34 Demostrar que para $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$, $\nabla^2(1/r) = 0$.

Solución

Como en el caso del potencial gravitatorio, $\nabla(1/r) = -\mathbf{r}/r^3$. En general, $\nabla(r^n) = nr^{n-2}\mathbf{r}$ (*véase* el Ejercicio 30). Por la identidad $\nabla(f\mathbf{F}) = f\nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla f \cdot \mathbf{F}$, obtenemos

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) &= \frac{1}{r^3} \nabla \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) \\ &= \frac{3}{r^3} + \mathbf{r} \cdot \left(\frac{-3\mathbf{r}}{r^5}\right) = \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} = 0.\end{aligned}$$

Nota Histórica

La divergencia y el rotacional

William Rowan Hamilton, en su investigación de los cuaterniones (tratada en la Sección 1.3) introdujo el *operador nabla*, definido formalmente como

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Hamilton creía firmemente en la relevancia de este operador. Si $f(x, y, z)$ es una función escalar en $\mathbb{R}^3$, entonces la «multiplicación» por ∇ nos da el gradiente de f:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k},$$

que, por supuesto, nos da la dirección de ascenso más rápido (*véase* la Sección 2.6). Si

$$\mathbf{V}(x, y, z) = V_1(x, y, z)\mathbf{i} + V_2(x, y, z)\mathbf{j} + V_3(x, y, z)\mathbf{k}$$

es un campo vectorial, entonces la «multiplicación cuaterniónica» de ∇ con $\mathbf{V}$ nos da

$$\nabla\mathbf{V} = -\text{div } \mathbf{V} + \text{rot } \mathbf{V}.$$

Por tanto, lo que ahora llamamos diverge cia de **V** es la parte escalar de este producto cambiada de signo, y rot **V** es la parte vectorial (consultar la discusión sobre los cuaterniones en la Secc ón 1.3).

Hasta donde sabemos, Hamilton nunca dio una interpretación física de la divergencia y del rotacional pero, a consecuenc a de su profunda fe en ellos, sin duda creía que debían tener un importante sentido físico. Su confianza en su formalismo matemático estaba justificada, pero la explicación física de la divergencia y el rotacional tuvo que esperar hasta la publicación de *Treatise on Electricity and Magnetism*, de James Clerk Maxwell. En él, Maxwell utilizó tanto la divergencia como el rotacional en sus ecuaciones para la interacción de campos eléctricos y magnéticos (las ecuaciones de Maxwell se tratarán en el Capítuo 8).

Curiosamente, Maxwell se refiere a la divergencia como *convergencia* y al rotacional como rotación[6], un término que aún se utiliza en la lit ratura. Fue Josiah Gibbs (Figura 4.4.9) quien rebautizó convergencia y rotación con los términos más familiares que usamos hoy día —divergencia y rotacional.

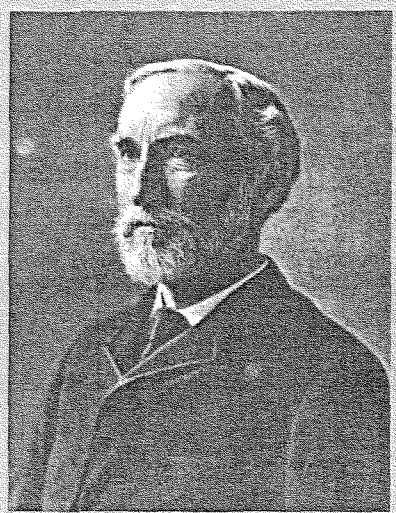


Figura 4.4.9. Josiah Willard Gibbs (1839-1903).

Maxwell dio una interpretación física de la divergencia utilizando el teorema de la divergencia de Gauss, como hacemos en la Sección 8.4. Su interpretación del rotacional como una rotación fue bastante breve. Gibbs proporcionó una interpretación más elemental de la divergencia, como nosotros hicimos en esta sección. En el espíritu de Leibniz (quien creía en el significado de dx, dy, dz como cantidades infinitesimales), Gibbs imaginó un pequeño cubo de dimensiones dx, dy, dz colocado en un fluido. Las caras de este cubo tenían áreas $dx\,dy$, $dy\,dz$ y $dx\,dz$.

---

[6] *Nota de los traductores:* en inglés, la palabra que se usa para designar el rotacional es *curl*, mientras que Maxwell utilizaba el término *rotation*.

En este punto, los estudiantes pueden estar interesados en escuchar a Gibbs, a través de las palabras de su estudiante E. B. Wilson:

Consideremos la cantidad de fluido que pasa a través de las caras del cubo que son paralelas al plano *YZ*, es decir, perpendiculares al eje *X* (*véase* la Figura 4.4.10).

La normal a la cara cuya coordenada x es menor, es decir, la normal a la cara izquierda del cubo es $-\mathbf{i}$. El flujo de sustancia a través de esta cara es

$$-\mathbf{i}\cdot\mathbf{V}(x, y, z)\,dy\,dz.$$

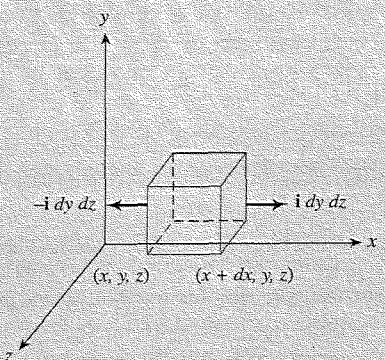


Figura 4.4.10. Un cubo con caras paralelas al plano *YZ*.

La normal a la cara opuesta, la cara cuya coordenada x es mayor, con un incremento dx, es $+\mathbf{i}$, y el flujo a través de ella es por tanto

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{V}(x + dx, y, z)\,dy\,dz = \mathbf{i}\cdot\left[\mathbf{V}(x, y, z) + \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial x}\,dx\right]dy\,dz$$

$$= \mathbf{i}\cdot\mathbf{V}(x, y, z)\,dy\,dz + \mathbf{i}\cdot\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial x}\,dx\,dy\,dz.$$

El flujo total saliente a través de esas dos caras es entonces la suma algebraica de ambas cantidades. Esto es simplemente

$$\mathbf{i}\cdot\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \frac{\partial V_1}{\partial x}\,dx\,dy\,dz.$$

Análogamente, los flujos a través de los otros pares de caras del cubo son:

$$\mathbf{j}\cdot\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial y}\,dx\,dy\,dz \qquad \text{y} \qquad \mathbf{k}\cdot\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial z}\,dx\,dy\,dz.$$

Por tanto, el flujo total que sale del cubo es:

$$\left(\mathbf{i}\cdot\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{j}\cdot\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial y} + \mathbf{k}\cdot\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz.$$

Ésta es la cantidad neta de fluido que sale del cubo por unidad de tiempo. El cociente de esta cantidad dividida por el volumen del cubo, $dx\,dy\,dz$, da la tasa de disminución de la densidad. Esto es

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \mathbf{i} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{j} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial y} + \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}.$$

Puesto que $\nabla \cdot \mathbf{V}$ representa, por tanto, la disminución de la densidad, o la proporción en la que la materia está abandonando un punto por unidad de volumen y por unidad de tiempo, se denomina *divergencia*. Maxwell empleó el término *convergencia* para designar la tasa con la que el fluido se aproxima a un punto por unidad de volumen y por unidad de tiempo. Esto es la divergencia cambiada de signo. En el caso de que el fluido sea *incompresible*, debe salir del cubo tanta materia como entre en él. La variación total de su contenido debe ser por tanto cero. Por esta razón, la ecuación diferencial característica que debe satisfacer cualquier fluido incompresible es

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0,$$

donde $\mathbf{V}$ es la velocidad del fluido. Esta ecuación se conoce frecuentemente como *ecuación hidrodinámica*. Se satisface por cualquier flujo de agua, pues el agua es prácticamente incompresible. La gran importancia de esta ecuación para el estudio de la electricidad se debe al hecho de que, de acuerdo a las hipótesis de Maxwell, el desplazamiento eléctrico obedece las mismas leyes que un fluido incompresible. Por tanto, si $\mathbf{D}$ es el desplazamiento eléctrico:

$$\text{div } \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{D} = 0.$$

La interpretación de Gibbs para el rotacional fue muy parecida a la que dimos en el Ejemplo 4.27 para la rotación de un sólido rígido. Wilson comenta que el análisis del significado del rotacional para el movimiento de un fluido era «bastante difícil». Incluso hoy día sigue siendo un concepto un tanto escurridizo, como puede verse en nuestra discusión tras el Ejemplo 4.27. En el Capítulo 8 proporcionaremos otra interpretación.

EJERCICIOS

En los ejercicios del 1 al 4, hallar la divergencia de los campos vectoriales.

1. $\mathbf{V}(x, y, z) = e^{xy}\mathbf{i} - e^{xy}\mathbf{j} + e^{yz}\mathbf{k}$.
2. $\mathbf{V}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{i} + xy\mathbf{k}$.
3. $\mathbf{V}(x, y, z) = x\mathbf{i} + (y + \cos x)\mathbf{j} + (z + e^{xy})\mathbf{k}$.
4. $\mathbf{V}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + (x + y)^2\mathbf{j} + (x + y + z)^2\mathbf{k}$.

5. La Figura 4.4.11 muestra algunas líneas de flujo y el movimiento de algunas regiones para un fluido que se mueve en el plano según un campo de velocidades $\mathbf{V}$. ¿En qué zonas div $\mathbf{V} > 0$ y en qué zonas div $\mathbf{V} < 0$?

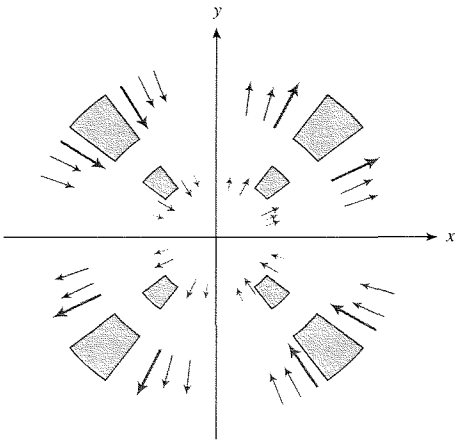


Figura 4.4.11. Líneas de flujo de un fluido que se mueve en el plano.

6. Sea $V(x, y, z) = x\mathbf{i}$ el campo de velocidades de un fluido en el espacio. Relacionar el signo de la divergencia con la tasa de variación de volumen bajo el flujo dado.

7. Esbozar algunas líneas de flujo para $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i}$. Calcular $\nabla \cdot \mathbf{F}$ y explicar por qué la respuesta es consistente con el esbozo de las líneas de flujo.

8. Esbozar algunas líneas de flujo para $\mathbf{F}(x, y) = -3x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$. Calcular $\nabla \cdot \mathbf{F}$ y explicar por qué la respuesta es consistente con el esbozo de las líneas de flujo.

En los ejercicios del 9 al 12, hallar la divergencia de los campos vectoriales.

9. $\mathbf{F}(x, y) = x^3\mathbf{i} - x \operatorname{sen}(xy)\mathbf{j}$.

10. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$.

11. $\mathbf{F}(x, y) = \operatorname{sen}(xy)\mathbf{i} - \cos(x^2y)\mathbf{j}$.

12. $\mathbf{F}(x, y) = xe^y\mathbf{i} - [y/(x + y)]\mathbf{j}$.

Calcular el rotacional, $\nabla \times \mathbf{F}$, de los campos vectoriales indicados en los ejercicios del 13 al 16.

13. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

14. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$.

15. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)(3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k})$.

16. $\mathbf{F}(x, y, z) = \dfrac{yz\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}}{x^2 + y^2 + z^2}$.

Calcular el rotacional escalar de cada uno de los campos vectoriales dados en los ejercicios del 17 al 20.

17. $\mathbf{F}(x, y) = \operatorname{sen} x\mathbf{i} + \cos x\mathbf{j}$.

18. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$.

19. $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + (x^2 - y^2)\mathbf{j}$.

20. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

Comprobar que $\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$ *para las funciones indicadas en los ejercicios del 21 al 24.*

21. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

22. $f(x, y, z) = xy + yz + xz$.

23. $f(x, y, z) = 1/(x^2 + y^2 + z^2)$.

24. $f(x, y, z) = x^2y^2 + y^2z^2$.

25. Demostrar que $\mathbf{F} = y(\cos x)\mathbf{i} + x(\operatorname{sen} y)\mathbf{j}$ no es un campo gradiente.

26. Demostrar que $\mathbf{F} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j}$ no es un campo gradiente.

27. Demostrar la identidad 10 de la lista de identidades vectoriales.

28. Supongamos que $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ y $\nabla \cdot \mathbf{G} = 0$. ¿Cuál de los campos siguientes tiene necesariamente divergencia nula?

a) $\mathbf{F} + \mathbf{G}$. **b)** $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$.

29. Sea $\mathbf{F} = 2xz^2\mathbf{i} + \mathbf{j} + y^3z\mathbf{k}$, y $f = x^2y$. Calcular las cantidades siguientes:

a) ∇f. **b)** $\nabla \times \mathbf{F}$. **c)** $\mathbf{F} \times \nabla f$. **d)** $\mathbf{F} \cdot (\nabla f)$.

30. Sea $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$, y $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \|\mathbf{r}\|$. Demostrar las identidades siguientes:

a) $\nabla(1/r) = -\mathbf{r}/r^3$, $r \neq 0$; y, en general, $\nabla(r^n) = nr^{n-2}\mathbf{r}$ y $\nabla(\log r) = \mathbf{r}/r^2$.

b) $\nabla^2(1/r) = 0$, $r \neq 0$; y, en general, $\nabla^2 r^n = n(n + 1)r^{n-2}$.

c) $\nabla \cdot (\mathbf{r}/r^3) = 0$; y, en general, $\nabla \cdot (r^n\mathbf{r}) = (n + 3)r^n$.

d) $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$; y, en general, $\nabla \times (r^n\mathbf{r}) = \mathbf{0}$.

31. ¿Deben ser perpendiculares $\nabla \times \mathbf{F}$ y $\mathbf{F}$?

32. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x^2y\mathbf{i} + (x^3 + y^3)\mathbf{j}$.

a) Comprobar que rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

b) Hallar una función f de manera que $\mathbf{F} = \nabla f$ (en el Capítulo 8 se darán técnicas para construir f en general. En este problema en particular, es posible encontrar la f pedida simplemente por

33. Demostrar que las partes real e imaginaria de cada una de las siguientes funciones complejas forman las componentes de un campo vectorial en el plano que es irrotacional e incompresible (aquí, $i = \sqrt{-1}$).

a) $(x - iy)^2$. **b)** $(x - iy)^3$. **c)** $e^{x-iy} = e^x(\cos y - i \operatorname{sen} y)$.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 4

En los ejercicios del 1 al 4, hallar el vector velocidad, el vector aceleración, la rapidez y la ecuación de la recta tangente en el punto indicado.

1. $\mathbf{c}(t) = (t^3 + 1, e^{-t}, \cos(\pi t/2))$, en $t = 1$.

2. $\mathbf{c}(t) = (t^2 - 1, \cos(t^2), t^4)$, en $t = \sqrt{\pi}$.

3. $\mathbf{c}(t) = (e^t, \operatorname{sen} t, \cos t)$, en $t = 0$.

4. $\mathbf{c}(t) = \dfrac{t^2}{1 + t^2}\,\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \mathbf{k}$, en $t = 2$.

5. Calcular los vectores tangente y aceleración para la hélice $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ en el punto $t = \pi/4$.

6. Calcular los vectores tangente y aceleración para la cicloide $\mathbf{c}(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t)$ en el punto $t = \pi/4$, y dibujar un esquema del resultado.

7. Consideremos una partícula de masa m moviéndose a lo largo de la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (t^2, \operatorname{sen} t, \cos t)$. Calcular la fuerza que actúa sobre la partícula en el instante $t = 0$.

8. **a)** Sea $\mathbf{c}(t)$ una trayectoria con $\|\mathbf{c}(t)\| =$ constante, es decir, la curva está contenida en una esfera. Demostrar que $\mathbf{c}'(t)$ es ortogonal a $\mathbf{c}(t)$.

b) Sea $\mathbf{c}$ una trayectoria cuya rapidez es siempre distinta de cero. Demostrar que $\mathbf{c}$ tiene rapidez constante si y sólo si el vector aceleración $\mathbf{c}''$ es siempre perpendicular al vector velocidad $\mathbf{c}'$.

9. Expresar la longitud de arco de la curva $x^2 = y^3 = z^5$ entre $x = 1$ y $x = 4$ como una integral, utilizando una parametrización adecuada.

10. Hallar la longitud de arco de $\mathbf{c}(t) = t\mathbf{i} + (\log t)\mathbf{j} + 2\sqrt{2}t\mathbf{k}$ para $1 \leqslant t \leqslant 2$.

11. Una partícula se mueve alrededor de la circunferencia unidad en el plano xy según la fórmula $(x, y, z) = (\cos(t^2), \operatorname{sen}(t^2), 0)$, $t \geqslant 0$.

a) Determinar el vector velocidad y la rapidez de la partícula como funciones del parámetro t.

b) ¿En qué punto de la circunferencia debería liberarse la partícula con el fin de alcanzar un blanco situado en el punto (2, 0, 0)? (Téngase cuidado con el sentido en que se mueve la partícula alrededor de la circunferencia.)

c) ¿En qué instante de tiempo t debería ser liberada la partícula? (Hallar el mínimo $t > 0$ que cumpla la condición anterior.)

d) ¿Cuáles son la velocidad y rapidez en el instante de la liberación?

e) ¿En qué instante se alcanza el blanco?

12. Una partícula de masa m se mueve bajo la influencia de una fuerza $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$, donde k es una constante y $\mathbf{r}(t)$ es la posición de la partícula en el instante t.

a) Escribir las ecuaciones diferenciales que satisfacen las componentes de $\mathbf{r}(t)$.

b) Resolver las ecuaciones del apartado a) bajo las condiciones iniciales $\mathbf{r}(0) = 0$, $\mathbf{r}'(0) = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

13. Escribir en forma paramétrica la curva descrita por las ecuaciones $x - 1 = 2y + 1 = 3z + 2$.

14. Escribir en forma paramétrica la curva $x = y^3 = z^2 + 1$.

15. Demostrar que $\mathbf{c}(t) = (1/(1 - t), 0, e^t/(1 - t))$ es una línea de flujo del campo vectorial definido por $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, 0, z(1 + x))$.

16. Dada una función de una variable f, definimos el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = f(x^2 + y^2)[-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}]$. Determinar qué ecuación debe satisfacer una función $g(t)$ de manera que

$$\mathbf{c}(t) = [\cos g(t)]\mathbf{i} + [\operatorname{sen} g(t)]\mathbf{j}$$

sea una línea de flujo para el campo $\mathbf{F}$.

Hallar $\nabla \cdot \mathbf{F}$ y $\nabla \times \mathbf{F}$ para los campos vectoriales de los ejercicios del 17 al 20.

17. $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$.

18. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$.

19. $\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j} + (z + x)\mathbf{k}$.

20. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + 3xy\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

Hallar la divergencia y el rotacional para los campos vectoriales dados en los Ejercicios 21 y 22 en los puntos indicados.

21. $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$, en el punto (1, 1, 1).

22. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y)^3\mathbf{i} + (\operatorname{sen} xy)\mathbf{j} + (\cos xyz)\mathbf{k}$, en el punto (2, 0, 1).

Hallar el gradiente de las funciones dadas en los ejercicios del 23 al 26, y comprobar que $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$.

23. $f(x, y) = e^{xy} + \cos(xy)$.

24. $f(x, y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

25. $f(x, y) = e^{x^2} - \cos(xy^2)$.

26. $f(x, y) = \tan^{-1}(x^2 + y^2)$.

27. **a)** Sea $f(x, y, z) = xyz^2$; hallar ∇f.

b) Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zy\mathbf{k}$. Calcular $\nabla \times \mathbf{F}$.

c) Calcular $\nabla \times (f\mathbf{F})$ utilizando la identidad 10 de la lista de identidades vectoriales. Comparar con el cálculo directo.

28. **a)** Sea $\mathbf{F} = 2xye^z\mathbf{i} + e^z x^2\mathbf{j} + (x^2ye^z + z^2)$. Calcular $\nabla \cdot \mathbf{F}$ y $\nabla \times \mathbf{F}$.

b) Hallar una función $f(x, y, z)$ tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

29. Sea $\mathbf{F}(x, y) = f(x^2 + y^2)[-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}]$, como en el Ejercicio 16. Calcular la divergencia y el rotacional del campo $\mathbf{F}$, y analizar las respuestas teniendo en cuenta los resultados del Ejercicio 16.

30. Sea una partícula de masa m, moviéndose a lo largo de la hélice elíptica $\mathbf{c}(t) = (4\cos t, \operatorname{sen} t, t)$.

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la hélice en el instante $t = \pi/4$.

b) Hallar la fuerza que actúa sobre la partícula en el instante $t = \pi/4$.

c) Escribir una expresión (en términos de una integral) para la longitud de arco de la curva $\mathbf{c}(t)$ entre $t = 0$ y $t = \pi/4$.

31. **a)** Sea $g(x, y, z) = x^3 + 5yz + z^2$, y sea $h(u)$ una función de una variable tal que $h'(1) = 1/2$. Sea $f = h \circ g$. Partiendo del punto $(1, 0, 0)$, ¿en qué dirección está cambiando f al 50% de su tasa máxima de variación?

b) Para $g(x, y, z) = x^3 + 5yz + z^2$, calcular $\mathbf{F} = \nabla g$ y comprobar directamente que $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ en cada punto (x, y, z).

32. **a)** Escribir en forma paramétrica la curva determinada por la intersección de las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ e $y = 1$.

b) Hallar la ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto $(1, 1, 1)$.

c) Escribir una expresión integral para la longitud de arco de esta curva. ¿Cuál es el valor de esta integral?

33. En meteorología, el ***gradiente negativo de presiones*** $\mathbf{G}$ es un vector que apunta desde las regiones de altas presiones hacia las direcciones de bajas presiones, perpendicular a las líneas de presión constante (***isobaras***).

a) En un sistema de coordenadas xy,

$$\mathbf{G} = -\frac{\partial P}{\partial x}\,\mathbf{i} - \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathbf{j}.$$

Escribir una fórmula para la longitud del vector $\mathbf{G}$.

b) Si el gradiente de presiones horizontales fuera la única fuerza horizontal actuando en el aire, el viento debería soplar directamente a través de las isobaras en la dirección de $\mathbf{G}$ y, para una masa de aire dada, con aceleración proporcional a la longitud de $\mathbf{G}$. Explicar este hecho usando la segunda ley de Newton.

c) Debido al efecto de la rotación terrestre, el viento no sopla en la dirección sugerida por el apartado b). En lugar de esto, obedece la ***ley de Buys-Ballot***, que dice: «Si en el hemisferio norte, nos colocamos con la espalda en contra del viento, entonces la zona de altas presiones está a la derecha y la zona de bajas presiones a la izquierda». Dibujar un esquema e introducir coordenadas xy de modo que $\mathbf{G}$ apunte en la dirección correcta.

d) Enunciar e ilustrar gráficamente la ley de Buys-Ballot para el hemisferio sur, en el cual la orientación de altas y bajas presiones se invierte.

34. Una esfera de masa m, radio a y densidad uniforme tiene un potencial gravitatorio, denotado por u, y una fuerza gravitatoria, denotada por $\mathbf{F}$, a una distancia r del centro $(0, 0, 0)$, dados por las fórmulas:

$$u = \frac{3m}{2a} - \frac{mr^2}{2a^3}, \qquad \mathbf{F} = -\frac{m}{a^3}\mathbf{r} \qquad (r \leqslant a),$$

$$u = \frac{m}{r}, \qquad \mathbf{F} = -\frac{m}{r^3}\mathbf{r} \qquad (r > a),$$

donde $r = \|\mathbf{r}\|$, $r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

a) Comprobar que $\mathbf{F} = \nabla u$ dentro y fuera de la esfera.

b) Comprobar que u satisface la ecuación de Poisson: $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 + \partial^2 u/\partial z^2 =$ constante dentro de la esfera.

c) Demostrar que u satisface la ecuación de Laplace $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 + \partial^2 u/\partial z^2 = 0$ fuera de la esfera.

35. Una hélice circular soportada en el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$, con un desplazamiento vertical ρ en cada vuelta, puede describirse paramétricamente por

$$x = R\cos\theta, \qquad y = R\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad z = \rho\theta, \qquad \theta \geqslant 0.$$

Una partícula se desliza a lo largo de la hélice, sin fricción, bajo la acción de la gravedad (que actúa paralela al eje z). Si la partícula sale de una altura $z_0 > 0$, entonces cuando pasa por la altura z su velocidad viene dada por

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{(z_0 - z)2g},$$

donde s es la longitud de arco a lo largo de la hélice, g es la aceleración de la gravedad, t es el tiempo y $0 \leqslant z \leqslant z_0$.

a) Hallar la longitud de la parte de la hélice comprendida entre los planos $z = z_0$ y $z = z_1$, $0 \leqslant z_1 < z_0$.

b) Hallar el tiempo T_0 que tarda la partícula en alcanzar el plano $z = 0$.

36. Una esfera de 10 centímetros de radio con centro en $(0, 0, 0)$ gira alrededor del eje z con velocidad angular 4, en una dirección tal que el sentido de giro, visto desde la parte positiva del eje z, es contrario al de las agujas del reloj.

a) Hallar el vector de rotación $\boldsymbol{\omega}$ (*véase* el Ejemplo 4.27, en la Sección 4.4).

b) Hallar la velocidad $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ cuando $\mathbf{r} = 5\sqrt{2}(\mathbf{i} - \mathbf{j})$ está sobre el «ecuador».

c) Hallar la velocidad del punto de la esfera de coordenadas $(0, 5\sqrt{3}, 5)$.

37. Hallar la velocidad de los estudiantes de una clase situada a una latitud 49° N, provocada por la rotación de la Tierra (ignorar el movimiento de traslación de la Tierra alrededor del Sol, el movimiento del Sol en la galaxia, etc.; el radio de la Tierra es de 6.378 km).

5

Integrales dobles y triples

Es a Arquímedes mismo (ca. 225 a.C.) a quien debemos la aproximación más cercana a la integración actual que podemos encontrar entre los griegos. Su primer avance notable en esta dirección tiene que ver con su demostración de que el área de un segmento parabólico es cuatro tercios la del triángulo que tiene la misma base y el mismo vértice o dos tercios la del paralelogramo circunscrito.

D. E. Smith, History of Mathematics

En este capítulo y el siguiente estudiaremos la integración de funciones reales de varias variables; este capítulo trata las integrales de funciones de dos y tres variables, o *integrales dobles* y *triples*. La integral doble tiene una interpretación geométrica básica como volumen, y se puede definir rigurosamente como límite de sumas aproximantes. Presentaremos diversas técnicas para calcular integrales dobles y triples, y consideraremos algunas aplicaciones.

5.1. Introducción

Esta sección se ocupa de algunos aspectos geométricos de la integral doble, aplazando hasta la Sección 5.2 un estudio más riguroso en términos de sumas de Riemann.

Integrales dobles como volúmenes

Consideremos una función continua de dos variables $f: R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cuyo dominio R es un rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados. El rectángulo R se puede describir en

términos de los dos intervalos cerrados $[a, b]$ y $[c, d]$ que representan los lados de R a lo largo de los ejes x e y, respectivamente, como en la Figura 5.1.1. En este caso, decimos que R es el ***producto cartesiano*** de $[a, b]$ y $[c, d]$, y escribimos $R = [a, b] \times [c, d]$.

Supongamos que $f(x, y) \geq 0$ en R, de modo que la gráfica de $z = f(x, y)$ es una superficie sobre el rectángulo R. Esta superficie, el rectángulo R y los cuatro planos $x = a$, $x = b$, $y = c$, y $y = d$ forman la frontera de una región V en el espacio (*véase* la Figura 5.1.1).

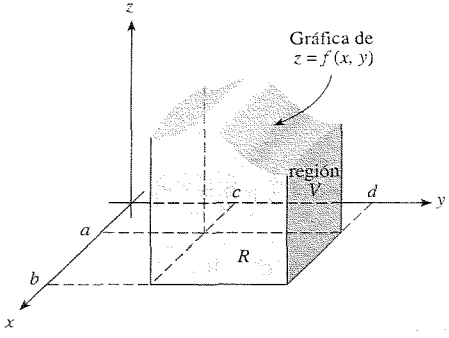


Figura 5.1.1. La región V en el espacio está acotada por la gráfica de f, el rectángulo R y las cuatro caras verticales indicadas.

Hay que enfrentarse al problema de cómo definir rigurosamente el volumen de V, y se resolverá en la Sección 5.2 mediante el método clásico de exhaución o, dicho en términos más modernos, el método de las sumas de Riemann. Para tener una comprensión intuitiva de la integral doble, supondremos provisionalmente que el volumen de una región ya ha sido definido.

Integrales dobles El volumen de la región que está sobre R y bajo la gráfica de una función no negativa f se llama ***integral (doble)*** de f sobre R y se denota por:

$$\iint_R f(x, y)\, dA \quad \text{o} \quad \iint_R f(x, y)\, dx\, dy.$$

EJEMPLO 5.1

a) Si f está definida por $f(x, y) = k$, donde k es una constante positiva, entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dA = k(b - a)(d - c),$$

pues la integral es igual al volumen de una caja rectangular con base R y altura k.

b) Si $f(x, y) = 1 - x$ y $R = [0, 1] \times [0, 1]$, entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \frac{1}{2},$$

ya que la integral es igual al volumen de sólido triangular que se muestra en la Figura 5.1.2.

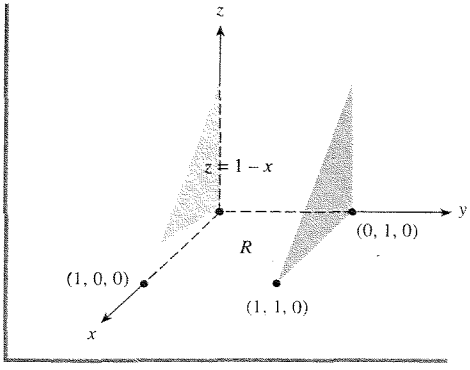


Figura 5.1.2. Volumen bajo la gráfica $z = 1 - x$, y sobre $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

EJEMPLO 5.2 Supongamos que $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ y $R = [-1, 1] \times [0, 1]$. Entonces la integral $\iint_R (x^2 + y^2)\,dx\,dy$ es igual al volumen del sólido dibujado en la Figura 5.1.3. Calcularemos esta integral en el Ejemplo 5.3.

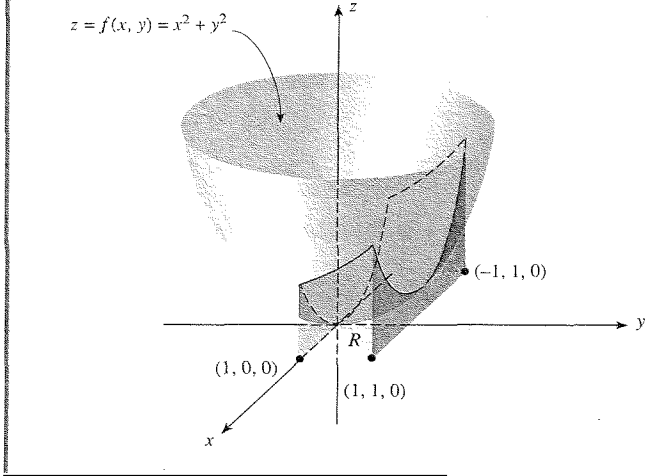


Figura 5.1.3. Volumen bajo $z = x^2 + y^2$, y sobre $R = [-1, 1] \times [0, 1]$.

Estas ideas son similares a las de la integral simple $\int_a^b f(x)\,dx$, que representa el área bajo la gráfica de f si $f \geqslant 0$; *véase* la Figura 5.1.4 [1].

Las integrales simples $\int_a^b f(x)\,dx$ se pueden definir rigurosamente, sin recurrir al concepto de área, como el límite de sumas de Riemann. La idea es aproximar $\int_a^b f(x)\,dx$ eligiendo una partición $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de $[a, b]$, seleccionando puntos $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$ y escribiendo la suma de Riemann

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i) \approx \int_a^b f(x)\,dx$$

[1] Los lectores que no estén familiarizados con esta idea deberían repasar las secciones correspondientes de su libro de introdución al cálculo.

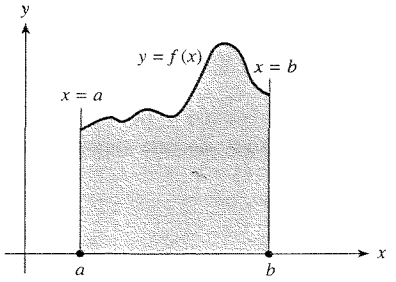


Figura 5.1.4. El área bajo la gráfica de una función continua no negativa f desde $x = a$ hasta $x = b$ es $\int_a^b f(x)\,dx$.

(*véase* la Figura 5.1.5). Examinaremos el proceso análogo para integrales dobles en la Sección 5.2.

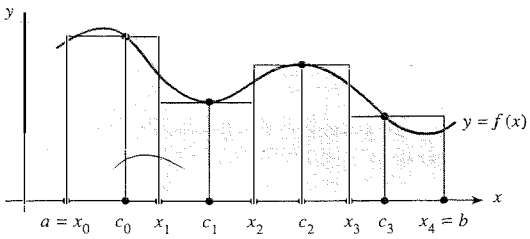


Figura 5.1.5. La suma de las áreas de los rectángulos sombreados es una suma de Riemann, que aproxima el área debajo de f entre $x = a$ y $x = b$.

Principio de Cavalieri

Existe un método muy útil para calcular volúmenes, conocido como *principio de Cavalieri*. Supongamos que tenemos un cuerpo sólido y denotemos por $A(x)$ el área de la sección transversal en un plano P_x que está a una distancia x de un plano de referencia (Figura 5.1.6).

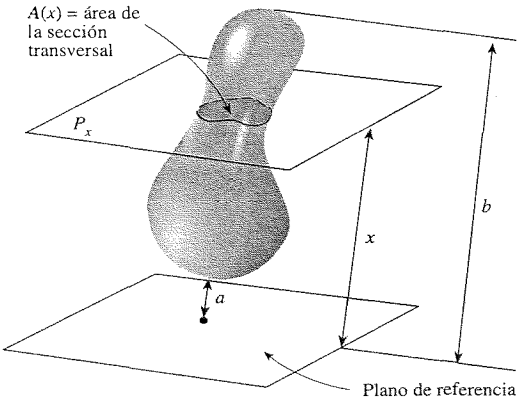


Figura 5.1.6. Cuerpo sólido con área de sección transversal $A(x)$ a distancia x de un plano de referencia.

De acuerdo con el principio de Cavalieri, el volumen del cuerpo viene dado por

$$\text{volumen} = \int_a^b A(x)\,dx,$$

donde a y b son el mínimo y el máximo respectivamente de las distancias al plano de referencia. Esto se puede entender de manera intuitiva. Si partimos $[a, b]$ en $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, entonces una suma de Riemann aproximante para la integral anterior es

$$\sum_{i=0}^{n-1} A(c_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Pero esta suma también aproxima el volumen del cuerpo, porque $A(x)\Delta x$ es el volumen de una rebanada con sección transversal de área $A(x)$ y anchura Δx (Figura 5.1.7). Por tanto, es razonable aceptar la fórmula anterior para el volumen. Una justificación más cuidadosa de este método puede verse en el suplemento de internet al Capítulo 5.

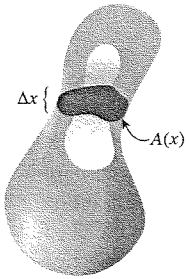


Figura 5.1.7. El volumen de una rebanada con área de sección transversal $A(x)$ y anchura Δx es $A(x)\Delta x$. El volumen total del cuerpo es $\int_a^b A(x)\,dx$.

El método de las secciones —Principio de Cavalieri Sea S un sólido y P_x, con $a \leqslant x \leqslant b$, una familia de planos paralelos tales que:

1. S está entre P_a y P_b.
2. El área de la sección de S al cortarlo con P_x es $A(x)$.

Entonces el volumen de S es igual a

$$\int_a^b A(x)\,dx.$$

Nota Histórica

Buonaventura Cavalieri (1598-1647) fue discípulo de Galileo y profesor en Bolonia. Sus investigaciones acerca del área y el volumen fueron piezas importantes en los orígenes del cálculo. Aunque sus métodos fueron criticados por sus contemporáneos, Arquímedes ya había usado ideas similares en la antigüedad y fueron después retomadas por los «padres» del cálculo, Newton y Leibniz.

Reducción a integrales iteradas

Ahora usaremos el principio de Cavalieri para calcular integrales dobles. Consideremos la región sólida bajo la gráfica $z = f(x, y)$ y definida en la región $[a, b] \times [c, d]$, donde f es continua y mayor que cero. Hay dos funciones naturales para el área de sección transversal: una obtenida usando planos de corte perpendiculares al eje x y otra obtenida usando planos de corte perpendiculares al eje y. La sección transversal determinada por un plano de corte $x = x_0$, del primer tipo, es la región plana bajo la gráfica de $z = f(x_0, y)$ entre $y = c$ e $y = d$ (Figura 5.1.8).

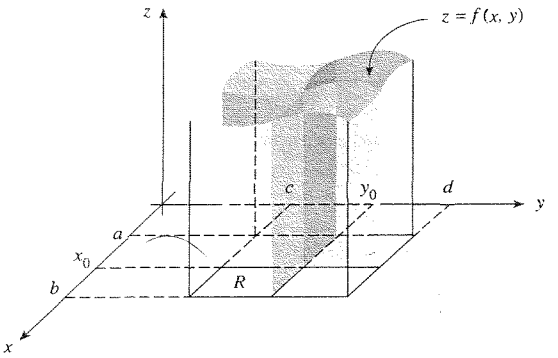


Figura 5.1.8. Dos secciones transversales diferentes que barren el volumen bajo $z = f(x, y)$.

Cuando fijamos $x = x_0$, obtenemos la función $y \to f(x_0, y)$, que es continua en $[c, d]$. El área de la sección transversal $A(x_0)$ es, por tanto, igual a la integral $\int_c^d f(x_0, y)\, dy$. Así, la función de área de la sección transversal A tiene dominio $[a, b]$ y viene dada por la fórmula $A: x \to \int_c^d f(x, y)\, dy$. Según el principio de Cavalieri, el volumen V de la región bajo $z = f(x, y)$ debe ser igual a

$$V = \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx.$$

La integral $\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy\right] dx$ se conoce como ***integral iterada*** porque se obtiene integrando con respecto a y y, después, integrando el resultado con respecto a x. Como $\iint_R f(x, y)\, dA$ es igual al volumen V, obtenemos el siguiente resultado.

Integrales dobles e iteradas

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx. \tag{1}$$

Si usamos planos de corte perpendiculares al eje y, obtenemos

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx \right] dy. \tag{2}$$

La expresión de la derecha en la Fórmula (2) es la integral iterada que se obtiene integrando respecto a x y, después, integrando el resultado respecto a y.

De este modo, si nuestra intuición sobre volúmenes es correcta, las Fórmulas (1) y (2) deben ser válidas. Y es así, de hecho, cuando los conceptos en discusión se definen de un modo riguroso, y el resultado se conoce como *Teorema de Fubini*. Daremos una prueba de este teorema en la siguiente sección.

Como ilustran los siguientes ejemplos, la noción de integral iterada y las Ecuaciones (1) y (2) proporcionan un método poderoso para *calcular* la integral doble de una función de dos variables.

EJEMPLO 5.3 Calcular la integral

$$\iint_R (x^2 + y^2)\,dx\,dy,$$

donde $R = [-1, 1] \times [0, 1]$.

Solución

Según la Ecuación (2),

$$\iint_R (x^2 + y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_{-1}^1 (x^2 + y^2)\,dx\right] dy.$$

Para hallar $\int_{-1}^1 (x^2 + y^2)\,dx$, tratamos y como una constante e integramos respecto a x. Como $x^3/3 + y^2x$ es una primitiva de $x^2 + y^2$ con respecto a x, podemos integrar usando el teorema fundamental del cálculo para obtener

$$\int_{-1}^1 (x^2 + y^2)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + y^2x\right]_{x=-1}^1 = \frac{2}{3} + 2y^2.$$

A continuación, integramos $\frac{2}{3} + 2y^2$ con respecto a y entre 0 y 1, obteniendo

$$\int_0^1 \left(\frac{2}{3} + 2y^2\right) dy = \left[\frac{2}{3}y + \frac{2}{3}y^3\right]_{y=0}^1 = \frac{4}{3}.$$

Por tanto, el volumen del sólido que vimos en la Figura 5.1.3 es 4/3.

Para completar, evaluemos $\iint_R (x^2 + y^2)\,dx\,dy$ usando la Ecuación (1) —esto es, integrando con respecto a y primero y después con respecto a x—. Tenemos

$$\iint_R (x^2 + y^2)\,dx\,dy = \int_{-1}^1 \left[\int_0^1 (x^2 + y^2)\,dy\right] dx.$$

Tratando a x como una constante en la integración con respecto a y, obtenemos

$$\int_0^1 (x^2 + y^2)\,dy = \left[x^2y + \frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^1 = x^2 + \frac{1}{3}.$$

A continuación, calculamos $\int_{-1}^1 (x^2 + \frac{1}{3})\,dx$ para obtener

$$\int_{-1}^1 \left(x^2 + \frac{1}{3}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3}\right]_{x=-1}^1 = \frac{4}{3},$$

que concuerda con la respuesta obtenida previamente.

EJEMPLO 5.4 Calcular la integral doble $\iint_S \cos x \operatorname{sen} y \, dx \, dy$, donde S es el cuadrado $[0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$ (*véase* la Figura 5.1.9).

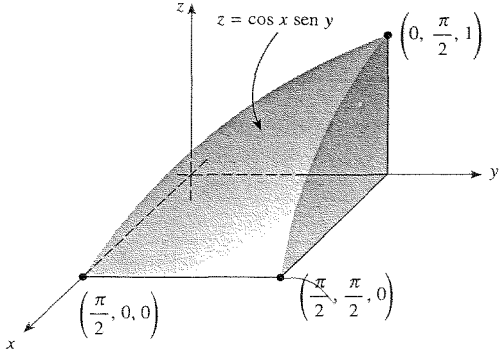


Figura 5.1.9. Volumen bajo $z = \cos x \operatorname{sen} y$, y sobre el rectángulo $[0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$.

Solución

Según la Ecuación (2),

$$\iint_S \cos x \operatorname{sen} y \, dx \, dy = \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^{\pi/2} \cos x \operatorname{sen} y \, dx \right] dy$$

$$= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} y \left[\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx \right] dy = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} y \, dy = 1.$$

En la Sección 5.2, usaremos las sumas de Riemann para definir con rigor la integral doble para una clase amplia de funciones de dos variables, sin recurrir a la noción de volumen. Aunque eliminaremos la condición $f(x, y) \geqslant 0$, las Ecuaciones (1) y (2) seguirán siendo válidas. De este modo, la integral iterada proporcionará de nuevo la clave para calcular la integral doble. En la Sección 5.3, trataremos las integrales dobles sobre regiones más generales que los rectángulos.

Finalmente, observamos que es usual eliminar los paréntesis en las integrales iteradas como las descritas en las Ecuaciones (1) y (2), y escribir

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx \qquad \text{en lugar de} \qquad \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) \, dy \right] dx$$

y,

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy \qquad \text{en lugar de} \qquad \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) \, dx \right] dy.$$

EJERCICIOS

1. Calcular las siguientes integrales iteradas:

a) $\int_{-1}^{1} \int_{0}^{1} (x^4 y + y^2)\, dy\, dx.$

b) $\int_{0}^{\pi/2} \int_{0}^{1} (y \cos x + 2)\, dy\, dx.$

c) $\int_{0}^{1} \int_{0}^{1} (xye^{x+y})\, dy\, dx.$

d) $\int_{-1}^{0} \int_{1}^{2} (-x \log y)\, dy\, dx.$

2. Calcular las integrales del Ejercicio 1 integrando con respecto a x, y después con respecto a y.

3. Usar el principio de Cavalieri para demostrar que los volúmenes de dos cilindros con la misma base y altura son iguales (*véase* la Figura 5.1.10).

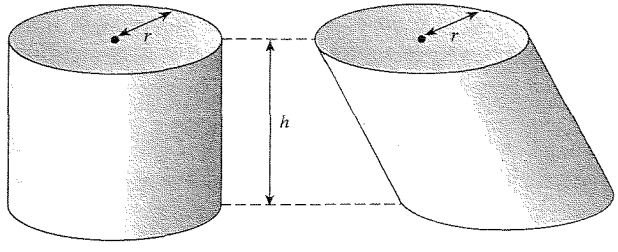


Figura 5.1.10. Dos cilindros con la misma base y la misma altura tienen el mismo volumen.

4. Usando el principio de Cavalieri, calcular el volumen de la estructura mostrada en la Figura 5.1.11; cada sección transversal es un rectángulo de longitud 5 y anchura 3.

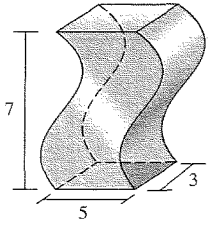


Figura 5.1.11. Calcular este volumen.

5. Un leñador corta una pieza W con forma de cuña de un árbol cilíndrico de radio r mediante dos cortes de sierra hacia el centro del árbol: uno horizontal y otro con ángulo θ. Calcular el volumen de la cuña W usando el principio de Cavalieri (*véase* la Figura 5.1.12).

6. **a)** Probar que el volumen del sólido de revolución mostrado en la Figura 5.1.13(a) es

$$\pi \int_{a}^{b} [f(x)]^2\, dx.$$

b) Probar que el volumen de la región obtenida rotando la región bajo la gráfica de la parábola $y = -x^2 + 2x + 3$, $-1 \leqslant x \leqslant 3$, alrededor del eje x es $512\pi/15$ (*véase* la Figura 5.1.13(b)).

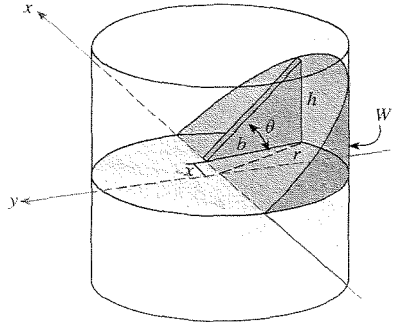


Figura 5.1.12. Hallar el volumen de W.

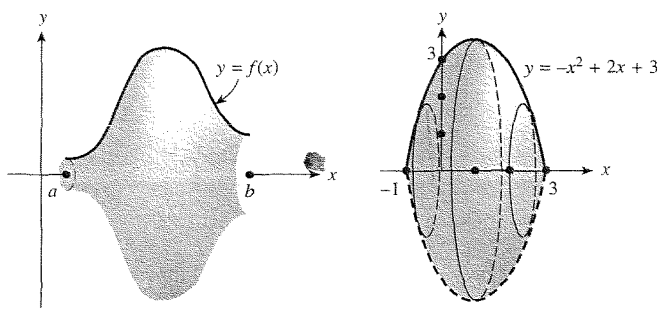


Figura 5.1.13. El sólido de revolución (a) tiene volumen $\pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx$. La parte (b) muestra el sólido de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje x la región que está entre la gráfica de $y = -x^2 + 2x + 3$ y el eje x.

Calcular las integrales dobles de los Ejercicios 7 a 9, donde R es el rectángulo $[0, 2] \times [-1, 0]$.

7. $\displaystyle\iint_R (x^2y^2 + x)\,dy\,dx.$

8. $\displaystyle\iint_R \left(|y| \cos \frac{1}{4}\pi x\right) dy\,dx.$

9. $\displaystyle\iint_R \left(-xe^x \operatorname{sen} \frac{1}{2}\pi y\right) dy\,dx.$

10. Hallar el volumen acotado por la gráfica de $f(x, y) = 1 + 2x + 3y$, el rectángulo $[1, 2] \times [0, 1]$ y los cuatro lados verticales del rectángulo R, como en la Figura 5.1.1.

11. Repetir el Ejercicio 10 para la función $f(x, y) = x^4 + y^2$ y el rectángulo $[-1, 1] \times [-3, -2]$.

5.2. La integral doble sobre un rectángulo

Ya estamos preparados para dar una definición rigurosa de la integral doble como límite de una sucesión de sumas. Ésta se usará para *definir* el volumen de la región bajo la gráfica de una función $f(x, y)$. No será necesario suponer que $f(x, y) \geqslant 0$; pero, si $f(x, y)$ toma valores negativos, interpretaremos la integral como un volumen con signo, como se hace con el área bajo la gráfica de una función de una variable. Además, estudiaremos algunas propiedades algebraicas fundamentales de la integral doble y probaremos el teorema de Fubini, que asegura que la integral doble se puede calcular como una integral iterada. Para empezar, vamos a establecer la notación para particiones y sumas.

Definición de la integral

Consideremos un rectángulo cerrado $R \subset \mathbb{R}^2$; esto es, R es el producto cartesiano de dos intervalos: $R = [a, b] \times [c, d]$. Por una ***partición regular*** de R de orden n entenderemos dos familias ordenadas de puntos $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ y $\{y_k\}_{k=0}^{n}$ que satisfacen

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \qquad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$$

y,

$$x_{j+1} - x_j = \frac{b-a}{n}, \qquad y_{k+1} - y_k = \frac{d-c}{n}$$

(*véase* la Figura 5.2.1).

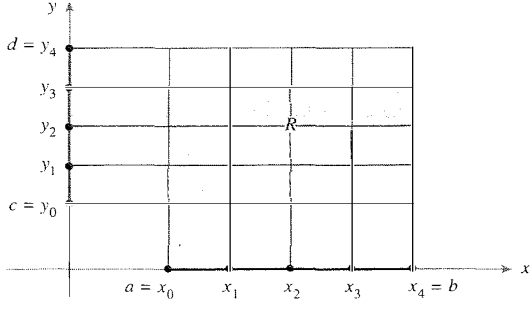


Figura 5.2.1. Partición regular de un rectángulo R, con $n = 4$.

Una función $f(x, y)$ se llama ***acotada*** si existe un número $M > 0$ tal que $-M \leqslant f(x, y) \leqslant M$ para todos los (x, y) en el dominio de f. Una función continua en un rectángulo *cerrado* es siempre acotada pero, por ejemplo, $f(x, y) = 1/x$ sobre $(0, 1] \times [0, 1]$ es continua pero no acotada, ya que $1/x$ se hace arbitrariamente grande para x cerca de 0. El rectángulo $(0, 1] \times [0, 1]$ no es cerrado, pues el punto inicial 0 falta en el primer factor.

Sea R_{jk} el rectángulo $[x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$ y sea $\mathbf{c}_{jk}$ *cualquier* punto de R_{jk}. Supongamos que $f: R \to \mathbb{R}$ es una función acotada con valores reales. Consideremos la suma

$$S_n = \sum_{j,k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk}) \Delta x \Delta y = \sum_{j,k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk}) \Delta A, \tag{1}$$

donde

$$\Delta x = x_{j+1} - x_j = \frac{b-a}{n}, \qquad \Delta y = y_{k+1} - y_k = \frac{d-c}{n},$$

y,

$$\Delta A = \Delta x \, \Delta y.$$

En esta suma tanto j como k toman todos los valores entre 0 y $n-1$, de modo que hay n^2 sumandos. Una suma de este tipo se llama ***suma de Riemann*** para f.

DEFINICIÓN: Integral doble Si la sucesión $\{S_n\}$ converge a un límite S cuando $n \to \infty$ y si este límite S es el mismo para cualquier elección de puntos $\mathbf{c}_{jk}$ en los rectángulos R_{jk}, entonces decimos que f es ***integrable*** sobre R y escribimos

$$\iint_R f(x, y)\, dA, \qquad \iint_R f(x, y), dx\, dy \qquad \text{o} \qquad \iint_R f\, dx\, dy$$

para designar el límite S.

Así, podemos escribir nuevamente la integrabilidad del siguiente modo:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j,k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk})\Delta x\, \Delta y = \iint_R f\, dx\, dy$$

para cualquier elección de $\mathbf{c}_{jk} \in R_{jk}$.

Propiedades de la integral

La prueba del siguiente teorema básico puede encontrarse en el suplemento de Internet al Capítulo 5.

TEOREMA 1 Cualquier función continua definida en un rectángulo cerrado R es integrable.

Si $f(x, y) \geqslant 0$, la existencia de $\lim_{n\to\infty} S_n$ tiene un significado geométrico inmediato. Consideremos la gráfica de $z = f(x, y)$ como la tapa de un sólido cuya base es el rectángulo R. Si escogemos $\mathbf{c}_{jk}$ como el punto de R_{jk} donde $f(x, y)$ alcanza su mínimo valor[2], entonces $f(\mathbf{c}_{jk})\Delta x\, \Delta y$ representa el volumen de una caja rectangular con base R_{jk}. La suma $\sum_{j,k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk})\Delta x\, \Delta y$ es el volumen de un sólido inscrito, parte del cual se muestra en la Figura 5.2.2.

Del mismo modo, si $\mathbf{c}_{jk}$ es el punto donde $f(x, y)$ alcanza su máximo sobre R_{jk}, entonces la suma $\sum_{j,k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk})\Delta x \Delta y$ es igual al volumen de un sólido circunscrito (*véase* la Figura 5.2.3).

Por tanto, si $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe y es independiente de $\mathbf{c}_{jk} \in R_{jk}$, los volúmenes de los sólidos inscrito y circunscrito convergen al mismo límite cuando $n \to \infty$. Es entonces razonable llamar

[2] Dicho $\mathbf{c}_{jk}$ existe en virtud de la continuidad de f en R; *véase* el Teorema 7 de la Sección 3.3.

ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA

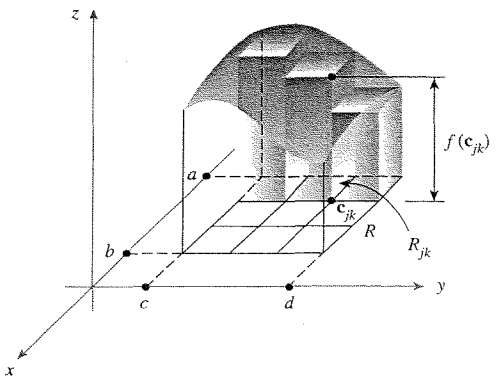


Figura 5.2.2. La suma de las cajas inscritas aproxima el volumen bajo la gráfica de $z = f(x, y)$.

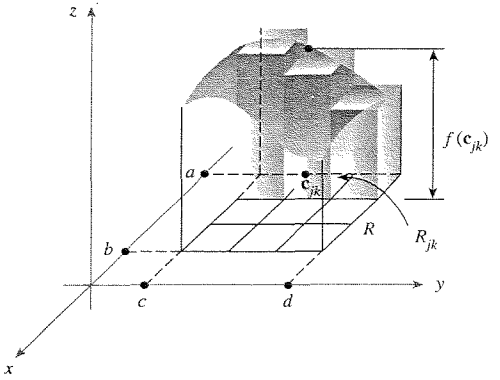


Figura 5.2.3. El volumen de las cajas circunscritas también aproxima el volumen bajo $z = f(x, y)$.

a este límite el volumen exacto del sólido bajo la gráfica de f. Así, el método de las sumas de Riemann sirve de base a los conceptos que se introdujeron de forma intuitiva en la Sección 5.1.

Hay un teorema que garantiza la existencia de la integral de ciertas funciones discontinuas. Necesitaremos este resultado en la siguiente sección para estudiar las integrales de funciones sobre regiones más generales que los rectángulos. Estaremos especialmente interesados en funciones cuyas discontinuidades estén sobre curvas del plano xy. La Figura 5.2.4 muestra dos funciones definidas en un rectángulo R cuyas discontinuidades están sobre curvas. En otras palabras, f es continua en cada punto de R salvo en los puntos de la curva, donde puede no serlo.

Las curvas útiles son las gráficas de funciones tales como $y = \phi(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ o $x = \psi(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$, o uniones finitas de tales gráficas. Algunos ejemplos se muestran en la Figura 5.2.5.

El siguiente teorema proporciona un importante criterio para determinar si una función es integrable. La prueba puede encontrarse en el suplemento de Internet.

TEOREMA 2: Integrabilidad de funciones acotadas Sea $f: R \to \mathbb{R}$ una función real acotada sobre el rectángulo R y supongamos que el conjunto de puntos donde f es discontinua está contenido en una unión finita de gráficas de funciones continuas. Entonces f es integrable en R.

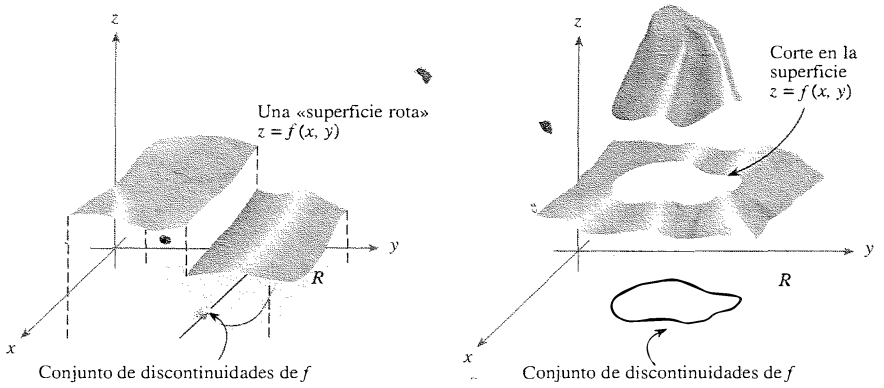


Figura 5.2.4. Aspecto que pueden presentar las gráficas de funciones discontinuas de dos variables.

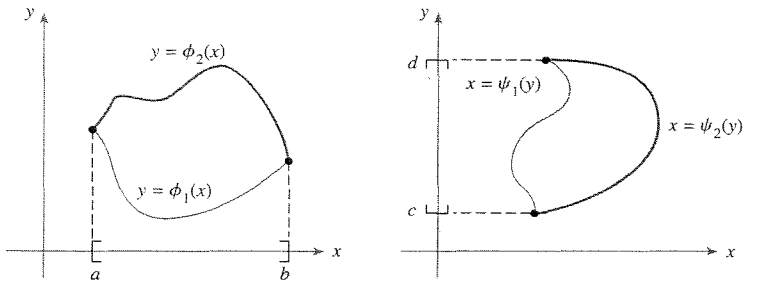


Figura 5.2.5. Curvas en el plano representadas como gráficas.

Usando el Teorema 2 y las observaciones que lo preceden, vemos que las funciones esbozadas en la Figura 5.2.4 son integrables sobre R, ya que están acotadas y son continuas excepto en gráficas de funciones continuas.

De la definición de la integral como límite de sumas y de los teoremas sobre límites, podemos deducir algunas propiedades fundamentales de la integral $\iint_R f(x, y)\, dA$; estas propiedades son esencialmente las mismas que las de la integral de una función real de una variable.

Sean f y g funciones integrables sobre el rectángulo R y sea c una constante. Entonces $f + g$ y cf son integrables y

i) Linealidad

$$\iint_R [f(x, y) + g(x, y)]\, dA = \iint_R f(x, y)\, dA + \iint_R g(x, y)\, dA.$$

ii) Homogeneidad

$$\iint_R cf(x, y)\, dA = c \iint_R f(x, y)\, dA.$$

iii) **Monotonía** Si $f(x, y) \geqslant g(x, y)$, entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dA \geqslant \iint_R g(x, y)\, dA.$$

iv) **Aditividad** Si R_i, $i = 1, \ldots, m$ son rectángulos con interiores disjuntos dos a dos, f es acotada e integrable sobre cada R_i y $Q = R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_m$ es un rectángulo, entonces $f: Q \to \mathbb{R}$ es integrable sobre Q y

$$\iint_Q f(x, y)\, dA = \sum_{i=1}^{m} \iint_{R_i} f(x, y)\, dA.$$

Las propiedades i) y ii) son consecuencia de la definición de integral como límite de una suma y de los siguientes resultados sobre convergencia de sucesiones $\{S_n\}$ y $\{T_n\}$, que se demuestran de la misma forma que los teoremas para límites del Capítulo 2:

$$\lim_{n\to\infty} (T_n + S_n) = \lim_{n\to\infty} T_n + \lim_{n\to\infty} S_n$$

$$\lim_{n\to\infty} (cS_n) = c \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Para demostrar la monotonía observemos primero que si $h(x, y) \geqslant 0$ y $\{S_n\}$ es una sucesión de sumas de Riemann que converge a $\iint_R h(x, y)\, dA$, entonces $S_n \geqslant 0$ para todo n, de manera que $\iint_R h(x, y)\, dA = \lim_{n\to\infty} S_n \geqslant 0$. Si $f(x, y) \geqslant g(x, y)$ para todo $(x, y) \in R$, entonces $(f - g)(x, y) \geqslant 0$ para todo (x, y) y, usando las propiedades i) e ii), tenemos:

$$\iint_R f(x, y)\, dA - \iint_R g(x, y)\, dA = \iint_R [f(x, y) - g(x, y)]\, dA \geqslant 0.$$

Esto prueba la propiedad iii). La demostración de iv) es más técnica y se prueba un caso particular en el suplemento de Internet. Esta propiedad debería resultar intuitivamente obvia.

Otro resultado importante es la desigualdad:

$$\left| \iint_R f\, dA \right| \leqslant \iint_R |f|\, dA. \tag{2}$$

Para comprobar la certeza de (2) nótese que, por la definición de valor absoluto,

$$-|f| \leqslant f \leqslant |f|;$$

por tanto, de la monotonía y la homogeneidad de la integración (con $c = -1$), se deduce

$$-\iint_R |f|\, dA \leqslant \iint_R f\, dA \leqslant \iint_R |f|\, dA,$$

que es equivalente a la desigualdad (2).

El teorema de Fubini

Aunque hemos visto una amplia clase de funciones integrables, aún no hemos establecido rigurosamente un método general para calcular integrales. En el caso de una variable evitamos calcular $\int_a^b f(x)\,dx$ a partir de su definición como límite de una suma, mediante el uso del *teorema fundamental del cálculo integral*. Este importante teorema nos dice que, *si f es continua, entonces*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

donde F es una primitiva de f; esto es, $F' = f$.

Esta técnica no funciona, tal como está enunciada, para funciones $f(x, y)$ de dos variables. Sin embargo, como ya indicamos en la Sección 5.1, una integral doble sobre un rectángulo se puede reducir con frecuencia a integrales simples iteradas; el teorema fundamental se puede aplicar entonces a cada una de estas integrales. El teorema de Fubini, que ya fue mencionado en la última sección, justifica rigurosamente esta reducción a integrales iteradas por medio de sumas de Riemann. Como vimos en la Sección 5.1, la reducción

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right]dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\,dx\right]dy,$$

es una consecuencia del principio de Cavalieri, al menos cuando $f(x, y) \geqslant 0$. En términos de sumas de Riemann, esto se corresponde con la siguiente igualdad:

$$\sum_{j,k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk})\Delta x\Delta y = \sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk})\Delta y\right)\Delta x = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk})\Delta x\right)\Delta y,$$

que se puede probar de manera más general como sigue: sea $[a_{jk}]$ una matriz $n \times n$, donde $0 \leqslant j \leqslant n-1$ y $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Sea $\sum_{j,k=0}^{n-1} a_{jk}$ la suma de los n^2 elementos de la matriz. Entonces,

$$\sum_{j,k=0}^{n-1} a_{jk} = \sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{jk}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{n-1} a_{jk}\right). \tag{3}$$

En la primera igualdad, el lado de la derecha representa la suma de los elementos de la matriz primero por filas y después sumando los resultados:

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots & \overrightarrow{a_{0k}} & \cdots & a_{0(n-1)} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{j0} & a_{j1} & & \cdots & \overrightarrow{a_{jk}} & \cdots & a_{j(n-1)} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{(n-1)0} & a_{(n-1)1} & & \cdots & \overrightarrow{a_{(n-1)k}} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \begin{matrix} \sum_{k=0}^{n-1} a_{0k} \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{n-1} a_{jk} \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{n-1} a_{(n-1)k} \end{matrix} \downarrow$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{jk}\right).$$

Claramente, esto es igual a $\sum_{j,k=0}^{n-1} a_{jk}$, la suma de todos los a_{jk}. Del mismo modo, la suma $\sum_{k=0}^{n-1} (\sum_{j=0}^{n-1} a_{jk})$ representa una suma de los elementos de la matriz agrupados por columnas. Esto prueba la Ecuación (3) y hace plausible la reducción a integrales iteradas si recordamos que las integrales se pueden aproximar mediante las correspondientes sumas de Riemann. De hecho, la prueba del teorema de Fubini utiliza esta idea.

TEOREMA 3: Teorema de Fubini Sea f una función continua sobre un dominio rectángular $R = [a, b] \times [c, d]$. Entonces

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy = \iint_R f(x, y)\, dA. \tag{4}$$

DEMOSTRACIÓN Primero probaremos que

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \iint_R f(x, y)\, dA.$$

Sea $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$ una partición de $[c, d]$ en n partes iguales. Definamos

$$F(x) = \int_c^d f(x, y)\, dy.$$

Entonces

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(x, y)\, dy.$$

Usando la versión integral del teorema del valor medio[3], para cada x fijo y para cada k tenemos

$$\int_{y_k}^{y_{k+1}} f(x, y)\, dy = f(x, Y_k(x))(y_{k+1} - y_k)$$

(*véase* la Figura 5.2.6), donde el punto $Y_k(x)$ está en $[y_k, y_{k+1}]$ y puede depender de x, k y n.

Hemos probado entonces que

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x, Y_k(x))(y_{k+1} - y_k). \tag{5}$$

De la definición de integral en una variable como límite de sumas,

$$\int_a^b F(x)\, dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy \right] dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=0}^{n-1} F(p_j)(x_{j+1} - x_j),$$

[3] Éste asegura que si $g(x)$ es continua en $[a, b]$, entonces $\int_a^b g(x)\, dx = g(c)(b - a)$ para algún punto $c \in [a, b]$. El segundo teorema del valor medio, más general, se demostró en la Sección 3.2.

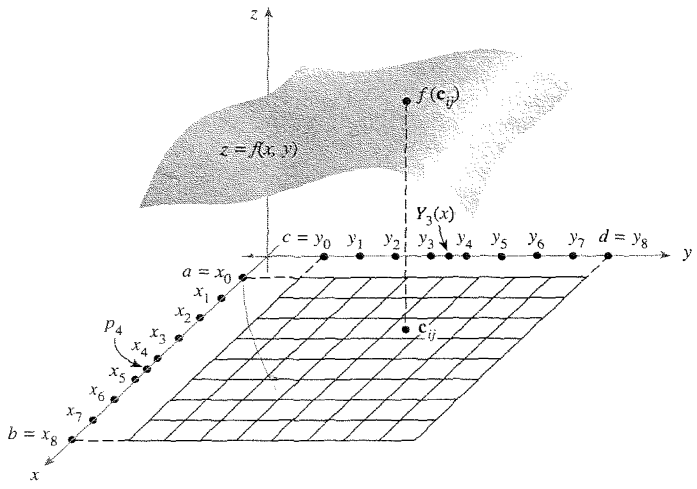


Figura S.2.6. Notación necesaria en la demostración del teorema de Fubini: $n = 8$.

donde $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ es una partición del intervalo $[a, b]$ en n partes iguales y p_j es cualquier punto en $[x_j, x_{j+1}]$. Tomando $\mathbf{c}_{jk} = (p_j, Y_k(p_j)) \in R_{jk}$ tenemos (sustituyendo p_j por x en la Ecuación (5)),

$$F(p_j) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk})(y_{k+1} - y_k).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dy\,dx = \int_a^b F(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} F(p_j)(x_{j+1} - x_j) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk})(y_{k+1} - y_k)(x_{j+1} - x_j) \\ &= \iint_R f(x, y)\,dA.\end{aligned}$$

Así, hemos probado que

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dy\,dx = \iint_R f(x, y)\,dA.$$

Usando el mismo razonamiento podemos probar que

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)\,dx\,dy = \iint_R f(x, y)\,dA.$$

Estas dos conclusiones son exactamente lo que queríamos probar.

El teorema de Fubini se puede generalizar al caso en que f no sea necesariamente continua. Aunque no lo vamos a demostrar, enunciamos aquí esta versión más general del teorema.

TEOREMA 3′: Teorema de Fubini Sea f una función acotada con dominio en un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$, y supongamos que las discontinuidades de f se encuentran en una unión finita de gráficas de funciones continuas. Si la integral $\int_c^d f(x, y)\,dy$ existe para cada $x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy \right] dx$$

existe y

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dy\,dx = \iint_R f(x, y)\,dA.$$

Del mismo modo, si $\int_a^b f(x, y)\,dx$ existe para cada $y \in [c, d]$, entonces

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\,dx \right] dy$$

existe y

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y)\,dx\,dy = \iint_R f(x, y)\,dA.$$

Por tanto, si se dan estas condiciones simultáneamente,

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\,dx\,dy = \iint_R f(x, y)\,dA.$$

Las hipótesis para esta versión del teorema de Fubini son más complicadas que las del Teorema 3. Son necesarias puesto que si f no es continua en todo el dominio, por ejemplo, no hay garantía de que exista $\int_c^d f(x, y)\,dy$ para cada x.

EJEMPLO 5.5 Calcular $\iint_R (x^2 + y)\,dA$, donde R es el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.

Solución

Por el teorema de Fubini,

$$\iint_R (x^2 + y)\,dA = \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 (x^2 + y)\,dx \right] dy.$$

De acuerdo con el teorema fundamental del cálculo, podemos integrar con respecto a x:

$$\int_0^1 (x^2 + y)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + yx \right]_{x=0}^1 = \frac{1}{3} + y.$$

Por tanto,

$$\iint_R (x^2 + y)\,dA = \int_0^1 \left[\frac{1}{3} + y\right] dy = \left[\frac{1}{3}y + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{5}{6}.$$

Lo que hemos hecho es dejar fijo y, integrar con respecto a x, y después evaluar el resultado entre los límites dados para la variable x. A continuación, hemos integrado la función resultante (que depende sólo de y) con respecto a y para obtener la respuesta final.

EJEMPLO 5.6 Una consecuencia del teorema de Fubini es que el intercambio del orden de integración en las integrales iteradas no cambia el resultado. Comprobar esto en el Ejemplo 5.5.

Solución

Realizamos la integración en el otro orden:

$$\int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y)\,dx\,dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^1 dx = \int_0^1 \left[x^2 + \frac{1}{2}\right] dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{2}\right]_0^1 = \frac{5}{6}.$$

Hemos visto que cuando $f(x, y) \geqslant 0$ sobre $R = [a, b] \times [c, d]$, la integral $\iint_R f(x, y)\,dA$ se puede interpretar como un volumen. Si la función también toma valores negativos, entonces la integral doble se puede pensar como la suma de todos los volúmenes que están entre la superficie $z = f(x, y)$ y el plano $z = 0$, acotada por los planos $x = a$, $x = b$, $y = c$ e $y = d$; aquí los volúmenes sobre $z = 0$ se cuentan como positivos y los que están por debajo, como negativos. Sin embargo, el teorema de Fubini tal como está enunciado sigue siendo válido en caso de que $f(x, y)$ sea negativa o cambie de signo en R; es decir, no hay restricción por razón del signo de f en las hipótesis del teorema.

EJEMPLO 5.7 Sea R el rectángulo $[-2, 1] \times [0, 1]$ y sea f definida por $f(x, y) = y(x^3 - 12x)$; $f(x, y)$ toma valores positivos y negativos en R. Calcular la integral $\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \iint_R y(x^3 - 12x)\,dx\,dy$.

Solución

Por el teorema de Fubini, podemos escribir

$$\iint_R y(x^3 - 12x)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_{-2}^1 y(x^3 - 12x)\,dx\right] dy = \frac{57}{4}\int_0^1 y\,dy = \frac{57}{8}.$$

De otro modo, si integramos primero con respecto a y, tenemos

$$\iint_R y(x^3 - 12x)\,dy\,dx = \int_{-2}^1 \left[\int_0^1 (x^3 - 12x)y\,dy\right] dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^1 (x^3 - 12x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4} - 6x^2\right]_{-2}^1 = \frac{57}{8}.$$

Nota Histórica

La integral de Riemann

La primera vez que la mayoría de los estudiantes de matemáticas se encuentran con el nombre de Bernhard Riemann es en sus cursos de cálculo, cuando estudian la integral de Riemann. Leibniz había entendido la integral de una función de una variable como una suma infinita (el signo $\int$ designa una suma) de áreas infinitesimales $f(x)\,dx$, donde dx es una «anchura infinitesimal» y $f(x)$ es la altura del correspondiente «infinitesimalmente delgado» rectángulo. Este enfoque bastaba la mayoría de las veces porque el teorema fundamental

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

permitía calcular esta (nebulosamente definida) integral cuando uno conocía la primitiva F de f.

Sin embargo, Riemann estaba interesado en aplicar la integración a funciones de una variable cuya primitiva no era conocida, a funciones en teoría de números y, en general, a aquellas funciones «que uno no encuentra en la naturaleza».

Cauchy ya sabía que todas las funciones continuas se podía integrar y que el teorema fundamental era cierto —es decir, que cualquier función continua tenía una primitiva—. Sin embargo, sus demostraciones no eran completamente rigurosas. Con vistas a la aplicación a la teoría de números y a ciertas series (llamadas *series de Fourier*), Riemann necesitaba una definición clara y precisa, que presentó en un artículo en 1854. En este artículo define la integral y da condiciones necesarias y suficientes para que una función f acotada sea integrable en un intervalo $[a, b]$.

En 1876, el matemático alemán Karl J. Thomae generalizó la integral de Riemann a funciones de varias variables, tal como hemos hecho en este capítulo. Este enfoque será desarrollado en el suplemento de Internet.

En la primera mitad del siglo XIX, Cauchy había observado que se cumplía el teorema de Fubini para funciones continuas de dos variables. Pero Cauchy también dio un ejemplo de una función no acotada de dos variables cuyas integrales iteradas no eran iguales. En 1878, Thomae dio el primer ejemplo de una función acotada de dos variables para la cual existe sólo una de las integrales iteradas. En estos ejemplos, las funciones no eran «integrables Riemann» en el sentido descrito en esta sección. Los ejemplos de Cauchy y Thomae demostraron que hay que actuar con cautela y no asumir necesariamente que las integrales iteradas son siempre iguales.

En 1902, el matemático francés Henri Lebesgue desarrolló una generalización verdaderamente drástica de la integral de Riemann. La teoría de Lebesgue permitió la integración de una vasta clase de funciones que no permitía el enfoque de Riemann. Su teoría iba a tener, quizá sin que el mismo Lebesgue lo sospechara, un profundo impacto en el desarrollo de muchas áreas de la matemática en el siglo XX —en particular, la teoría de ecuaciones en derivadas parciales—. Los estudiantes de matemáticas profundizan en la integral de Lebesgue en cursos especializados.

En 1907, el matemático italiano Guido Fubini utilizó la integral de Lebesgue para enunciar en su forma más general el teorema de la igualdad de las integrales iteradas, la que se estudia hoy en día y utilizan matemáticos y científicos en su investigación.

EJERCICIOS

1. Calcular cada una de las siguientes integrales si $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

a) $\iint_R (x^3 + y^2)\, dA$

b) $\iint_R ye^{xy}\, dA$

c) $\iint_R (xy)^2 \cos x^3\, dA$

d) $\iint_R \ln[(x + 1)(y + 1)]\, dA$

2. Calcular cada una de las siguientes integrales si $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

a) $\iint_R (x^m y^n)\, dx\, dy$, donde $m, n > 0$.

b) $\iint_R (ax + by + c)\, dx\, dy$.

c) $\iint_R \operatorname{sen}(x + y)\, dx\, dy$.

d) $\iint_R (x^2 + 2xy + y\sqrt{x})\, dx\, dy$.

3. Calcular el volumen de la región sobre el rectángulo $[0, 1] \times [0, 1]$ y bajo la gráfica de $z = xy$.

4. Calcular el volumen del sólido acotado por el plano xz, el plano yz, el plano xy, los planos $x = 1$ e $y = 1$, y la superficie $z = x^2 + y^4$.

5. Sea f continua en $[a, b]$ y g continua en $[c, d]$. Demostrar que

$$\iint_R [f(x)g(y)]\, dx\, dy = \left[\int_a^b f(x)\, dx\right]\left[\int_c^d g(y)\, dy\right],$$

donde $R = [a, b] \times [c, d]$.

6. Calcular el volumen del sólido acotado por la gráfica $z = \operatorname{sen} y$, los planos $x = 1$, $x = 0$, $y = 0$, e $y = \pi/2$ y el plano xy.

7. Calcular el volumen del sólido acotado por la gráfica $z = x^2 + y$, el rectángulo $R = [0, 1] \times [1, 2]$ y las «caras verticales» de R.

8. Sea f continua en $R = [a, b] \times [c, d]$; para $a < x < b$, $c < y < d$, definimos

$$F(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(u, v)\, dv\, du.$$

Demostrar que $\partial^2 F/\partial x \partial y = \partial^2 F/\partial y \partial x = f(x, y)$. Usar este ejemplo para estudiar las relaciones entre el teorema de Fubini y la igualdad de las derivadas parciales mixtas.

9. Sea $f: [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & x \text{ racional} \\ 2y & x \text{ irracional.} \end{cases}$$

Demostrar que la integral iterada $\int_0^1 [\int_0^1 f(x, y)\, dy]\, dx$ existe pero que f no es integrable.

10. Expresar $\iint_R \cosh xy\, dx\, dy$ como una sección convergente, donde $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

11. Aunque el teorema de Fubini se verifica para la mayoría de las funciones que nos encontramos en la práctica, debemos mantener cierta prudencia. En este ejercicio se da un ejemplo para el que el teorema falla. Usando un cambio de variable que involucre a la función tangente, demostrar que

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dy\, dx = \frac{\pi}{4}, \qquad \text{mientras que} \qquad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dx\, dy = -\frac{\pi}{4}.$$

¿Por qué no contradice esto los Teoremas 3 o 3′?

12. Sea f continua, $f \geqslant 0$, sobre el rectángulo R. Si $\iint_R f dA = 0$, demostrar que $f = 0$ en R.

5.3. La integral doble sobre regiones más generales

Nuestro objetivo en esta sección es doble: en primer lugar, queremos definir la integral doble de una función $f(x, y)$ sobre regiones D más generales que los rectángulos; en segundo lugar, queremos desarrollar una técnica para calcular este tipo de integral. Para llevarlo a cabo definiremos tres clases especiales de subconjuntos en el plano xy, y extenderemos a ellos la noción de integral doble.

Regiones elementales

Supongamos que tenemos dos funciones reales continuas $\phi_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $\phi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ que satisfacen $\phi_1(x) \leqslant \phi_2(x)$ para cada $x \in [a, b]$. Sea D el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que $x \in [a, b]$ y $\phi_1(x) \leqslant y \leqslant \phi_2(x)$. A la región D se la llama ***y-simple***. En la Figura 5.3.1 se muestran varios ejemplos de regiones y-simples. Las curvas y segmentos rectilíneos que delimitan la región son la ***frontera*** de D, que se denota por ∂D. Usamos la denominación y-simple porque la región se puede describir de un modo relativamente sencillo, expresando y en función de x.

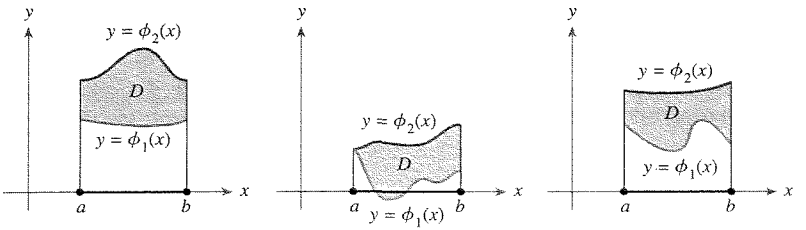


Figura 5.3.1. Algunas regiones y-simples.

Decimos que una región D es ***x-simple*** si existen funciones continuas ψ_1 y ψ_2 definidas en $[c, d]$ tales que D es el conjunto de los puntos (x, y) que satisfacen

$$y \in [c, d] \qquad \text{y} \qquad \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)$$

siendo $\psi_1(y) \leqslant \psi_2(y)$ para cada $y \in [c, d]$. De nuevo, las curvas que delimitan la región D constituyen su frontera ∂D. Se muestran algunos ejemplos de regiones x-simples en la Figura 5.3.2. En este caso, x es la variable distinguida que viene dada en función de y. La denominación x-simple es, por tanto, adecuada.

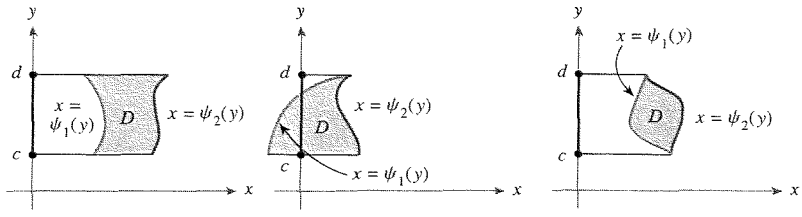


Figura 5.3.2. Algunas regiones x-simples.

Por último, una región ***simple*** es aquella que es a la vez x-simple e y-simple; así, una región simple se puede describir como región x-simple y como región y-simple. Un disco unidad es un ejemplo de región simple (*véase* la Figura 5.3.3).

Algunas veces nos referiremos a cualquiera de estas regiones como ***regiones elementales***. Nótese que la frontera ∂D de una región elemental es el tipo de conjunto de discontinuidades de una función permitido en el Teorema 2.

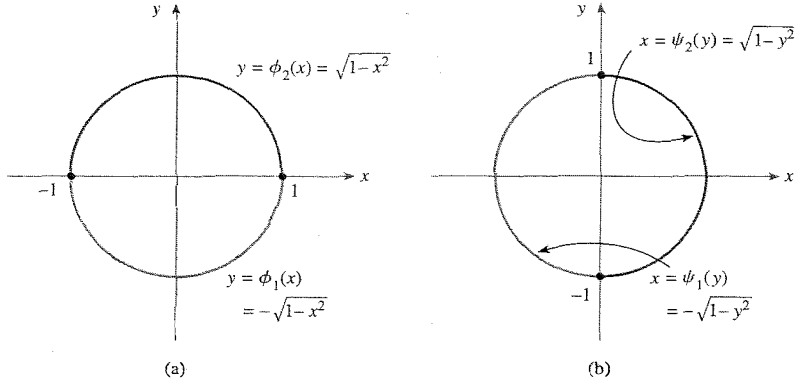


Figura 5.3.3. El disco unidad es una región simple: (a) visto como región y-simple, y (b) visto como región x-simple.

La integral sobre una región elemental

Vamos a utilizar ahora un interesante «truco» para extender la definición de integral de rectángulos a regiones elementales.

DEFINICIÓN: Integral sobre una región elemental Si D es una región elemental en el plano, elijamos un rectángulo R que contenga a D. Dada una función continua (y, por tanto, acotada) $f\colon D \to \mathbb{R}$, definimos $\iint_D f(x, y)\,dA$, la ***integral de f sobre el conjunto*** D, como sigue: extendemos f a una función f^* definida sobre todo R como

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in D \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin D \text{ y } (x, y) \in R. \end{cases}$$

Nótese que f^* es acotada (ya que f lo es) y continua excepto posiblemente en la frontera de D (*véase* la Figura 5.3.4). La frontera de D está formada por gráficas de funciones continuas, de modo que f^* es integrable sobre R por el Teorema 2. Entonces, podemos definir

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \iint_R f^*(x, y)\, dA.$$

Cuando $f(x, y) \geqslant 0$ sobre D, podemos interpretar la integral $\iint_D f(x, y)\, dA$ como el volumen de la región tridimensional que está entre la gráfica de f y D, como es evidente en la Figura 5.3.4.

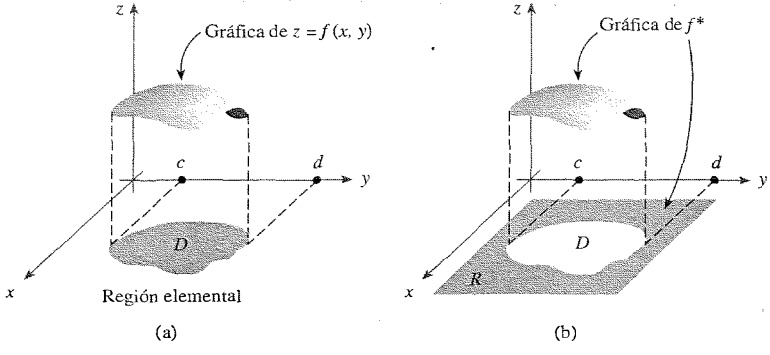


Figura 5.3.4. (a) Gráfica de $z = f(x, y)$ sobre la región elemental D. (b) La región sombreada muestra la gráfica de $z = f^*(x, y)$ en un rectángulo R que contiene a D. En este dibujo vemos que los puntos de la frontera de D pueden ser puntos de discontinuidad de f^*, ya que la gráfica de $z = f^*(x, y)$ puede estar rota en estos puntos.

Hemos definido $\iint_D f(x, y)\, dx\, dy$ eligiendo un rectángulo R que contiene a D. Debería ser intuitivamente claro que el valor de $\iint_D f(x, y)\, dx\, dy$ no depende del rectángulo elegido; demostraremos esto al final de esta sección.

Reducción a integrales iteradas

Si $R = [a, b] \times [c, d]$ es un rectángulo que contiene a D, podemos usar los resultados sobre integrales iteradas de la Sección 5.2 para obtener:

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \iint_R f^*(x, y)\, dA = \int_a^b \int_c^d f^*(x, y)\, dy\, dx$$

$$= \int_c^d \int_a^b f^*(x, y)\, dx\, dy,$$

donde f^* es igual a f en D y cero fuera de D, como antes. Supongamos que D es una región y-simple definida por las funciones $\phi_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ y $\phi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$. Consideramos la integral iterada:

$$\int_a^b \int_c^d f^*(x, y)\, dy\, dx$$

y, en particular, la integral interior $\int_c^d f^*(x, y)\, dy$ para x fijo (Figura 5.3.5). Como por definición, $f^*(x, y) = 0$ si $y < \phi_1(x)$ o $y > \phi_2(x)$, obtenemos

$$\int_c^d f^*(x, y)\, dy = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f^*(x, y)\, dy = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

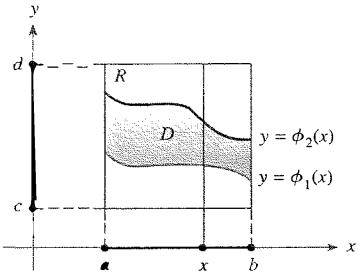


Figura 5.3.5. Esta región entre las dos gráficas es una región y-simple.

A continuación se resume lo que hemos obtenido.

TEOREMA 4: Reducción de las integrales iteradas Si D es una región y-simple, como se muestra en la Figura 5.3.5, entonces

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx. \tag{1}$$

En caso de que $f(x, y) = 1$ para cada $(x, y) \in D$, $\iint_D f(x, y)\, dA$ es el área de D. Por otro lado, en este caso, el lado derecho de (1) se convierte en:

$$\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_a^b [\phi_2(x) - \phi_1(x)]\, dx = A(D),$$

que es la fórmula para el área de D que se aprende en el cálculo de una variable.

EJEMPLO 5.8 Hallar $\iint_T (x^3 y + \cos x)\, dA$, donde T es el triángulo formado por todos los puntos (x, y) tales que $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant y \leqslant x$.

Solución

Según la Figura 5.3.6 y la Fórmula (1), tenemos:

$$\iint_T (x^3y + \cos x)\,dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^x (x^3y + \cos x)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{x^3y^2}{2} + y\cos x\right]_{y=0}^{x} dx = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{x^5}{2} + x\cos x\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^6}{12}\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (x\cos x)\,dx = \frac{\pi^6}{(12)(64)} + [x\,\text{sen}\,x + \cos x]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi^6}{768} + \frac{\pi}{2} - 1.$$

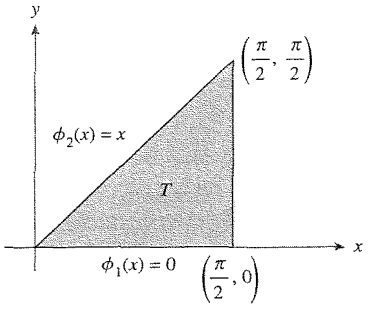


Figura 5.3.6. El triángulo T representado como una región y-simple.

En el siguiente ejemplo usaremos la Fórmula (1) para hallar el volumen de un sólido cuya base es una región D no rectangular.

EJEMPLO 5.9 Hallar el volumen del tetraedro limitado por los planos $y = 0$, $z = 0$, $x = 0$, e $y - x + z = 1$ (Figura 5.3.7).

Solución

Primero observamos que el tetraedro tiene una base triangular D cuyos puntos (x, y) satisfacen $-1 \leqslant x \leqslant 0$ y $0 \leqslant y \leqslant 1 + x$; por tanto, D es una región y-simple; de hecho, D es una región simple (*véase* la Figura 5.3.8).

Para cualquier punto (x, y) en D, la altura de la superficie z sobre (x, y) es $1 - y + x$. Así, el volumen buscado viene dado por la integral

$$\iint_D (1 - y + x)\,dA.$$

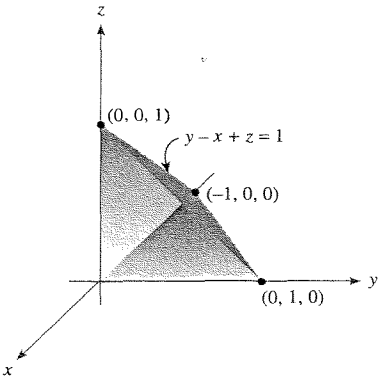


Figura 5.3.7. El tetraedro limitado por los planos $y = 0$, $z = 0$, $x = 0$, e $y - x + z = 1$.

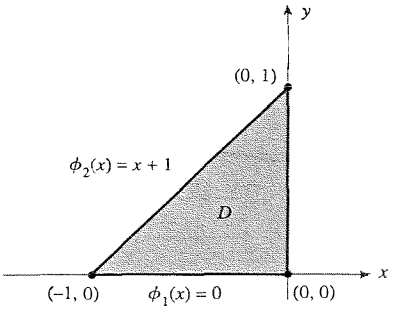


Figura 5.3.8. La base del tetraedro de la Figura 5.3.7 representada como una región y-simple.

Usando la Fórmula (1) con $\phi_1(x) = 0$ y $\phi_2(x) = x + 1$, tenemos:

$$\iint_D (1 - y + x)\,dA = \int_{-1}^{0} \int_{0}^{1+x} (1 - y + x)\,dy\,dx = \int_{-1}^{0} \left[(1 + x)y - \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{1+x} dx$$

$$= \int_{-1}^{0} \left[\frac{(1 + x)^2}{2}\right] dx = \left[\frac{(1 + x)^3}{6}\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{6}.$$

EJEMPLO 5.10 Sea D una región y-simple. Describir su área $A(D)$ como límite de sumas de Riemann.

Solución

Si recordamos la definición, $A(D) = \iint_D dx\,dy$ es la integral de la función $f = 1$ sobre un rectángulo R que contiene a D. Una suma de Riemann S_n para esta integral se obtiene dividiendo R en subrectángulos y haciendo la suma $S_n = \sum_{j,k=0}^{n-1} f^*(\mathbf{c}_{jk})\Delta x \Delta y$, como en la Fórmula (1) de la Sección 5.2. Ahora $f^*(\mathbf{c}_{jk})$ es 1 o 0, dependiendo de si $\mathbf{c}_{jk}$ está en D o fuera de D. Consideramos aquellos subrectángulos R_{jk} que tienen intersección no vacía con D, y elegimos $\mathbf{c}_{jk}$ en $D \cap R_{jk}$.

Así, S_n es la suma de las áreas de los subrectángulos que intersecan D, y $A(D)$ es el límite de ésta cuando $n \to \infty$; por tanto, $A(D)$ es el límite de las áreas de los rectángulos que «circunscriben» a D. Es recomendable hacer un dibujo para acompañar la argumentación anterior.

Los métodos para tratar las regiones x-simples son totalmente análogos. Concretamente, tenemos el siguiente teorema.

TEOREMA 4′: Integrales iteradas para regiones x-simples Supongamos que D es el conjunto de los puntos (x, y) tales que $y \in [c, d]$ y $\psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)$. Si f es continua en D, entonces

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx \right] dy. \tag{2}$$

Para hallar el área de D, sustituimos $f = 1$ en la Fórmula (2); esto nos da

$$\iint_D dA = \int_c^d (\psi_2(y) - \psi_1(y))\, dy.$$

De nuevo, este resultado para el área coincide con el resultado que se obtiene en el cálculo de una variable para el área de una región entre dos curvas.

Tanto el método para regiones y-simples como el método para x-simples se pueden utilizar para el cálculo de integrales sobre regiones simples.

Se sigue de las Fórmulas (1) y (2) que $\iint_D f dA$ no depende de la elección del rectángulo R que contiene a D y que se usa en la definición de $\iint_D f dA$ ya que, de haber escogido otro rectángulo conteniendo a D, habríamos llegado a la misma Fórmula (1).

EJERCICIOS

1. Calcular las siguientes integrales iteradas y dibujar las regiones determinadas por sus límites. Decir si las regiones son x-simples, y-simples o simples.

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{x^2} dy\, dx.$

b) $\displaystyle\int_1^2 \int_{2x}^{3x+1} dy\, dx.$

c) $\displaystyle\int_0^1 \int_1^{e^x} (x + y)\, dy\, dx.$

d) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} y\, dy\, dx.$

2. Calcular las siguientes integrales y dibujar las correspondientes regiones.

a) $\displaystyle\int_{-3}^2 \int_0^{y^2} (x^2 + y)\, dx\, dy.$

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y}\, dy\, dx.$

c) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{(1-x^2)^{1/2}} dy\, dx.$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos x} y \operatorname{sen} x\, dy\, dx.$

e) $\int_0^1 \int_{y^2}^{y} (x^n + y^m)\,dx\,dy, \quad m, n > 0.$ f) $\int_{-1}^{0} \int_{0}^{2(1-x^2)^{1/2}} x\,dy\,dx.$

3. Usar integrales dobles para calcular el área de un círculo de radio r.

4. Usando integrales dobles, determinar el área de una elipse cuyos semiejes tienen longitudes a y b, respectivamente.

5. ¿Cuál es el volumen de un granero que tiene una base rectangular de 6 m × 12 m, paredes de 9 m de altura al frente (que está del lado que mide 6 m) y 12 m detrás? El granero tiene un techo plano. Usar integrales dobles para calcular dicho volumen.

6. Sea D la región limitada por los semiejes positivos de x e y, y la recta $3x + 4y = 10$. Calcular

$$\iint_D (x^2 + y^2)\,dA.$$

7. Sea D la región acotada por el eje y, y la parábola $x = -4y^2 + 3$. Calcular

$$\iint_D x^3 y\,dx\,dy.$$

8. Calcular $\int_0^1 \int_0^{x^2} (x^2 + xy - y^2)\,dy\,dx$. Describir esta integral como una integral sobre una cierta región D en el plano xy.

9. Sea D la región formada por los (x, y) que satisfacen $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2$ e $y \geqslant 0$. ¿Es D una región elemental? Calcular $\iint_D f(x, y)\,dA$ donde $f(x, y) = 1 + xy$.

10. Usar la fórmula $A(D) = \iint_D dx\,dy$ para hallar el área encerrada por un periodo de la función sen x, para $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, y el eje x.

11. Hallar el volumen de la región encerrada por la superficie $z = x^2 + y^2$ entre $z = 0$ y $z = 10$.

12. Expresar mediante una integral el volumen del cono cuya base tiene radio r y cuya altura es h.

13. Calcular $\iint_D y\,dA$, donde D es el conjunto de puntos (x, y) tales que $0 \leqslant 2x/\pi \leqslant y$, $y \leqslant \operatorname{sen} x$.

14. Según el Ejercicio 5 de la Sección 5.2, $\int_a^b \int_c^d f(x)g(y)\,dy\,dx = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_c^d g(y)\,dy\right)$. ¿Es cierto $\iint_D f(x)g(y)\,dx\,dy = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_{\phi_1(b)}^{\phi_2(a)} g(y)\,dy\right)$ para regiones y-simples?

15. Sea D la región formada por los puntos (x, y) tales que $-\phi(x) \leqslant y \leqslant \phi(x)$, y $a \leqslant x \leqslant b$, donde ϕ es una función continua no negativa definida en el intervalo $[a, b]$. Sea $f(x, y)$ una función sobre D tal que $f(x, y) = -f(x, -y)$ para todo $(x, y) \in D$. Demostrar que $\iint_D f(x, y)\,dA = 0$.

16. Usar los métodos estudiados en esta sección para probar que el área del paralelogramo D determinado por dos vectores planos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es $|a_1b_2 - a_2b_1|$, donde $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$.

17. Describir el área $A(D)$ de una región como límite de áreas de rectángulos inscritos, como en el Ejemplo 5.10.

5.4. Cambio del orden de integración

Supongamos que D es una región simple (es decir, x-simple e y-simple). Entonces, se puede expresar como el conjunto de los puntos (x, y) tales que

$$a \leqslant x \leqslant b, \qquad \phi_1(x) \leqslant y \leqslant \phi_2(x),$$

y, también, como el conjunto de los puntos (x, y) tales que

$$c \leqslant y \leqslant d, \qquad \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y).$$

Por consiguiente, tenemos las fórmulas:

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Si se nos pide calcular una de las integrales iteradas anteriores, podemos hacerlo calculando la otra integral iterada; esta técnica se llama *cambio en el orden de integración*. Puede resultar útil hacer este cambio cuando calculamos integrales iteradas, pues quizá una de las integrales iteradas es más difícil de calcular que la otra.

EJEMPLO 5.11 Cambiando el orden de integración, calcular

$$\int_0^a \int_0^{(a^2 - x^2)^{1/2}} (a^2 - y^2)^{1/2}\, dy\, dx.$$

Solución

Nótese que x varía entre 0 y a, y que, para x fija, se tiene $0 \leqslant y \leqslant (a^2 - x^2)^{1/2}$. Así, la integral iterada es equivalente a la integral doble:

$$\iint_D (a^2 - y^2)^{1/2}\, dy\, dx,$$

donde D es el conjunto de puntos (x, y) tales que $0 \leqslant x \leqslant a$ y $0 \leqslant y \leqslant (a^2 - x^2)^{1/2}$. Como ésta es la representación de un cuarto (la parte correspondiente al cuadrante positivo) del disco de radio a, D también se puede describir como el conjunto de los puntos (x, y) que satisfacen

$$0 \leqslant y \leqslant a, \qquad 0 \leqslant x \leqslant (a^2 - y^2)^{1/2}$$

(*véase* la Figura 5.4.1). Por tanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^a \int_0^{(a^2 - x^2)^{1/2}} (a^2 - y^2)^{1/2}\, dy\, dx &= \int_0^a \left[\int_0^{(a^2 - y^2)^{1/2}} (a^2 - y^2)^{1/2}\, dx \right] dy \\
&= \int_0^a \left[x(a^2 - y^2)^{1/2} \right]_{x=0}^{(a^2 - y^2)^{1/2}} dy \\
&= \int_0^a (a^2 - y^2)\, dy = \left[a^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_0^a = \frac{2a^3}{3}.
\end{aligned}$$

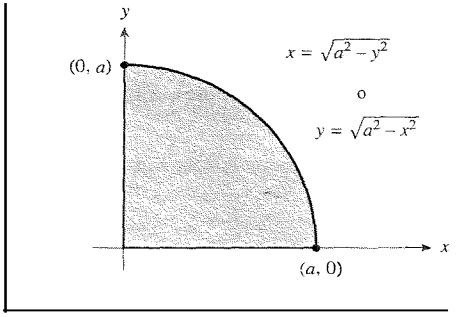


Figura 5.4.1. La parte del cuadrante positivo de un disco de radio a.

Podríamos haber calculado directamente la integral iterada inicial pero, como el lector puede comprobar fácilmente, el cambio del orden de integración hace el problema más sencillo. El siguiente ejemplo muestra que puede no ser obvio cómo calcular una integral iterada y, sin embargo, ser relativamente simple calcular la integral iterada que se obtiene al cambiar el orden de integración.

EJEMPLO 5.12 Calcular

$$\int_1^2 \int_0^{\log x} (x - 1)\sqrt{1 + e^{2y}}\, dy\, dx.$$

Solución

Cambiar el orden de integración simplificará las cosas. Obsérvese primero que la integral es igual a $\iint_D (x - 1)\sqrt{1 + e^{2y}}\, dA$, donde D es el conjunto de los (x, y) tales que

$$1 \leqslant x \leqslant 2 \qquad \text{y} \qquad 0 \leqslant y \leqslant \log x.$$

La región D es simple (*véase* la Figura 5.4.2) y se puede describir también como

$$0 \leqslant y \leqslant \log 2 \qquad \text{y} \qquad e^y \leqslant x \leqslant 2.$$

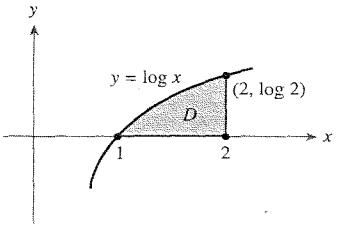


Figura 5.4.2. D es la región de integración para el Ejemplo 5.12.

Así, la integral iterada que queremos calcular es igual a:

$$\int_0^{\log 2}\int_{e^y}^{2}(x-1)\sqrt{1+e^{2y}}\,dx\,dy = \int_0^{\log 2}\sqrt{1+e^{2y}}\left[\int_{e^y}^{2}(x-1)\,dx\right]dy$$

$$= \int_0^{\log 2}\sqrt{1+e^{2y}}\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_{e^y}^{2}dx$$

$$= -\int_0^{\log 2}\left(\frac{e^{2y}}{2}-e^y\right)\sqrt{1+e^{2y}}\,dy$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{\log 2}e^{2y}\sqrt{1+e^{2y}}\,dy + \int_0^{\log 2}e^y\sqrt{1+e^{2y}}\,dy. \qquad (1)$$

En la primera integral sustituimos $u = e^{2y}$ en la Expresión (1) y, en la segunda, $v = e^y$. Entonces obtenemos

$$-\frac{1}{4}\int_1^4\sqrt{1+u}\,du + \int_1^2\sqrt{1+v^2}\,dv. \qquad (2)$$

Las dos integrales de la Expresión (2) se pueden calcular fácilmente con técnicas del cálculo de una variable (o consultando la tabla de *integrales* de este libro). Para la primera integral, obtenemos

$$\frac{1}{4}\int_1^4\sqrt{1+u}\,du = \left[\frac{1}{6}(1+u)^{3/2}\right]_1^4 = \frac{1}{6}[(1+4)^{3/2}-2^{3/2}] = \frac{1}{6}[5^{3/2}-2^{3/2}]. \qquad (3)$$

La segunda integral es

$$\int_1^2\sqrt{1+v^2}\,dv = \frac{1}{2}\left[v\sqrt{1+v^2}+\log(\sqrt{1+v^2}+v)\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\sqrt{5}+\log(\sqrt{5}+2)\right]-\frac{1}{2}\left[\sqrt{2}+\log(\sqrt{2}+1)\right] \qquad (4)$$

(*véase* la Fórmula 43 en la tabla de *integrales*). Por último, restamos la Ecuación (3) de la Ecuación (4) para obtener la respuesta:

$$\frac{1}{2}\left(2\sqrt{5}-\sqrt{2}+\log\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{2}+1}\right)-\frac{1}{6}[5^{3/2}-2^{3/2}].$$

Desigualdad del valor medio

Concluimos esta sección con una desigualdad que nos ayudará a estimar integrales. Supongamos que m y M son números tales que $m \leq f(x, y) \leq M$ para todo $(x, y) \in D$. Entonces, integrando sobre D, obtenemos

$$m \cdot A(D) \leq \iint_D f(x, y)\,dA \leq M \cdot A(D), \qquad (5)$$

donde $A(D)$ es el área de la región D. Aunque esta desigualdad es obvia, puede ayudarnos a *estimar* integrales que no se pueden calcular con exactitud.

EJEMPLO 5.13 Consideremos la integral

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{1 + x^6 + y^8}}\, dx\, dy,$$

donde D es el cuadrado unidad $[0, 1] \times [0, 1]$. Como el integrando satisface, para x e y entre 0 y 1,

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1 + x^6 + y^8}} \leqslant 1,$$

y puesto que el cuadrado tiene área 1, obtenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \leqslant \iint_D \frac{1}{\sqrt{1 + x^6 + y^8}}\, dx\, dy \leqslant 1.$$

Igualdad del valor medio

La desigualdad del valor medio puede convertirse en una igualdad cuando f es continua. De modo más preciso:

TEOREMA 5: Teorema del valor medio para integrales dobles Supongamos que $f: D \to \mathbb{R}$ es continua y D es una región elemental. Entonces, para algún punto (x_0, y_0) en D se tiene

$$\iint_D f(x, y)\, dA = f(x_0, y_0) A(D),$$

donde $A(D)$ denota el área de D.

DEMOSTRACIÓN No podemos probar el teorema con todo rigor ya que para ello se requieren algunos conceptos sobre funciones continuas que no se demuestran en este libro; pero podemos esbozar las ideas principales de la demostración.

Como f es continua sobre D, alcanza un valor máximo M y un valor mínimo m. Por consiguiente, $m \leqslant f(x, y) \leqslant M$ para cada $(x, y) \in D$. Además, $f(x_1, y_1) = m$ y $f(x_2, y_2) = M$ para algún par (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en D.

Si dividimos por $A(D)$ la desigualdad (5), tenemos:

$$m \leqslant \frac{1}{A(D)} \iint_D f(x, y)\, dA \leqslant M. \tag{6}$$

Como una función continua sobre D toma todos los valores entre su máximo y su mínimo (éste es el *teorema de los valores intermedios* de dos variables que se demuestra en cálculo avanzado; *véase* también el Ejercicio de repaso 32), y como el número $[1/A(D)]\iint_D f(x, y)\,dA$ está, de acuerdo con la desigualdad (6), entre estos valores, debe existir un punto (x_0, y_0) tal que

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{A(D)} \iint_D f(x, y)\,dA,$$

que es precisamente la conclusión del Teorema 5.

EJERCICIOS

1. En las siguientes integrales, cambiar el orden de integración, dibujar las correspondientes regiones y calcular las integrales de las dos maneras.

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 xy\,dy\,dx.$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos\theta} \cos\theta\,dr\,d\theta.$

c) $\displaystyle\int_0^1 \int_1^{2-y} (x + y)^2\,dx\,dy.$

d) $\displaystyle\int_a^b \int_a^y f(x, y)\,dx\,dy$ (expresar la respuesta en términos de primitivas).

2. Hallar:

a) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{|y|}^1 (x + y)^2\,dx\,dy.$

b) $\displaystyle\int_{-3}^1 \int_{-\sqrt{(9-y^2)}}^{\sqrt{(9-y^2)}} x\,dx\,dy.$

c) $\displaystyle\int_0^4 \int_{y/2}^2 e^{x^2}\,dx\,dy.$

d) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\arctan y}^{\pi/4} (\sec^5 x)\,dx\,dy.$

3. Si $f(x, y) = e^{\operatorname{sen}(x+y)}$ y $D = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$, probar que

$$\frac{1}{e} \leqslant \frac{1}{4\pi^2} \iint_D f(x, y)\,dA \leqslant e.$$

4. Demostrar que

$$\frac{1}{2}(1 - \cos 1) \leqslant \iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + (xy)^4}\,dx\,dy \leqslant 1.$$

5. Si $D = [-1, 1] \times [-1, 2]$, probar que

$$1 \leqslant \iint_D \frac{dx\,dy}{x^2 + y^2 + 1} \leqslant 6.$$

6. Usando la desigualdad del valor medio, probar que

$$\frac{1}{6} \leqslant \iint_D \frac{dA}{y - x + 3} \leqslant \frac{1}{4},$$

donde D es el triángulo con vértices (0, 0), (1, 1) y (1, 0).

7. Calcular el volumen de un elipsoide con semiejes a, b y c. [INDICACIÓN: Hallar primero el volumen de medio elipsoide y después usar un argumento de simetría.]

8. Calcular $\iint_D f(x, y)\,dA$, donde $f(x, y) = y^2\sqrt{x}$ y D es el conjunto de los (x, y) tales que $x > 0$, $y > x^2$, e $y < 10 - x^2$.

9. Hallar el volumen de la región delimitada por $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 10$, $z \geqslant 2$. Usar el método de las secciones circulares del cálculo de una variable y decir cómo está relacionado éste con el principio de Cavalieri.

10. Calcular $\iint_D e^{x-y}\,dx\,dy$, donde D es el interior del triángulo con vértices (0, 0), (1, 3) y (2, 2).

11. Calcular $\iint_D y^3(x^2 + y^2)^{-3/2}\,dx\,dy$, donde D es la región determinada por las condiciones $\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 1$, y $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

12. Sabiendo que la integral doble $\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$ de cierta función continua y positiva f es igual a la integral iterada $\int_0^1 \left[\int_{x^2}^{x} f(x, y)\,dy\right] dx$, dibujar la región D e intercambiar el orden de integración.

13. Sabiendo que la integral doble $\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$ de cierta función continua y positiva f es igual a la integral iterada $\int_0^1 \left[\int_{y}^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y)\,dx\right] dy$, dibujar la región D e intercambiar el orden de integración.

14. Probar que $2\int_a^b \int_x^b f(x)f(y)\,dy\,dx = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2$. [INDICACIÓN: Nótese que $\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2 = \iint_{[a,b]\times[a,b]} f(x)f(y)\,dx\,dy$.]

15. Demostrar que (*véase* el Ejercicio 27 de la Sección 2.5):

$$\frac{d}{dx}\int_a^x \int_c^d f(x, y, z)\,dz\,dy = \int_c^d f(x, y, z)\,dx + \int_a^x \int_c^d f_x(x, y, z)\,dz\,dy.$$

5.5. La integral triple

Las integrales triples son necesarias en muchos problemas físicos. Por ejemplo, si la temperatura dentro de un horno no es uniforme, determinar la temperatura media involucra «sumar» los valores de la función temperatura en todos los puntos de la región delimitada por las paredes del horno y después dividir el resultado por el volumen de éste; dicha suma se expresa matemáticamente como una integral triple.

Definición de la integral triple

Nuestro objetivo ahora es definir la integral triple en una caja (un paralelepípedo rectangular) $B = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$ de una función $f(x, y, z)$. Procediendo como en el caso de las integrales dobles, dividimos los tres lados de B en n partes iguales y escribimos la suma

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{ijk}) \Delta V,$$

donde $\mathbf{c}_{ijk}$ es un punto de B_{ijk}, el ijk-ésimo paralelepípedo rectangular (o caja) en la partición de B, y ΔV es el volumen de B_{ijk} (*véase* la Figura 5.5.1).

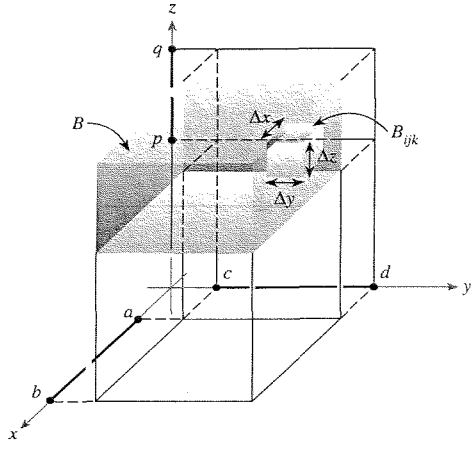


Figura 5.5.1. Partición de una caja B en n^3 subcajas B_{ijk}.

DEFINICIÓN: Integrales triples Sea f una función acotada de tres variables definida en B. Si $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ existe y es independiente de la elección de $\mathbf{c}_{ijk}$, decimos que f es ***integrable*** y llamamos a S su ***integral triple*** (o simplemente la integral) de f en B, y la denotamos por

$$\iiint_B f\,dV, \qquad \iiint_B f(x, y, z)\,dV \qquad \text{o} \qquad \iiint_B f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

Propiedades de las integrales triples

Como antes, podemos demostrar que las funciones continuas definidas en B son integrables. Más aún, las funciones acotadas cuyas discontinuidades están contenidas en gráficas de funciones continuas (tales como $x = \alpha(y, z)$, $y = \beta(x, z)$ o $z = \gamma(x, y)$) son integrables. Las demás propiedades básicas (tales como el hecho de que la integral de una suma es la suma de las integrales) para integrales dobles también se cumplen para integrales triples. Especialmente importante es la reducción a integrales iteradas.

Reducción a integrales iteradas Sea $f(x, y, z)$ una función integrable en la caja $B = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$. Cualquier integral iterada, si existe, es igual a la integral triple; esto es,

$$\iiint_B f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_p^q \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$
$$= \int_p^q \int_a^b \int_c^d f(x, y, z)\,dy\,dx\,dz$$
$$= \int_a^b \int_p^q \int_c^d f(x, y, z)\,dy\,dz\,dx,$$

y así en todos los casos (hay en total seis ordenes de integración posibles).

EJEMPLO 5.14 **a)** Sea B la caja $[0, 1] \times [-\frac{1}{2}, 0] \times [0, \frac{1}{3}]$. Calcular

$$\iiint_B (x + 2y + 3z)^2\,dx\,dy\,dz.$$

b) Comprobar que se obtiene la misma respuesta si integramos primero con respecto a y, después con respecto a z y, finalmente, con respecto a x.

Solución

a) De acuerdo con el principio de reducción a integrales iteradas, esta integral se puede calcular así:

$$\int_0^{1/3} \int_{-1/2}^0 \int_0^1 (x + 2y + 3z)^2\,dx\,dy\,dz$$
$$= \int_0^{1/3} \int_{-1/2}^0 \left[\frac{(x + 2y + 3z)^3}{3} \Big|_{x=0}^{1} \right] dy\,dz$$
$$= \int_0^{1/3} \int_{-1/2}^0 \frac{1}{3} \left[(1 + 2y + 3z)^3 - (2y + 3z)^3 \right] dy\,dz$$

$$= \int_0^{1/3} \frac{1}{24} \left[(1 + 2y + 3z)^4 - (2y + 3z)^4\right]\Big|_{y=-1/2}^{0} dz$$

$$= \int_0^{1/3} \frac{1}{24} \left[(3z + 1)^4 - 2(3z)^4 + (3z - 1)^4\right] dz$$

$$= \frac{1}{24 \cdot 15} \left[(3z + 1)^5 - 2(3z)^5 + (3z - 1)^5\right]\Big|_{z=0}^{1/3}$$

$$= \frac{1}{24 \cdot 15} (2^5 - 2) = \frac{1}{12}.$$

b)

$$\iiint_B (x + 2y + 3z)^2 \, dy \, dz \, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1/3} \int_{-1/2}^{0} (x + 2y + 3z)^2 \, dy \, dz \, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1/3} \left[\frac{(x + 2y + 3z)^3}{6}\Big|_{y=-1/2}^{0}\right] dz \, dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1/3} \frac{1}{6} \left[(x + 3z)^3 - (x + 3z - 1)^3\right] dz \, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{6} \left\{\left[\frac{(x + 3z)^4}{12} - \frac{(x + 3z - 1)^4}{12}\right]\Big|_{z=0}^{1/3}\right\} dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{72} \left[(x + 1)^4 + (x - 1)^4 - 2x^4\right] dx$$

$$= \frac{1}{72} \frac{1}{5} \left[(x + 1)^5 + (x - 1)^5 - 2x^5\right]_{x=0}^{1} = \frac{1}{12}.$$

EJEMPLO 5.15 Integrar e^{x+y+z} en la caja $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

Solución

Efectuamos las integraciones en el orden usual:

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 e^{x+y+z} \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \int_0^1 (e^{x+y+z}|_{x=0}^{1}) \, dy \, dz$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 (e^{1+y+z} - e^{y+z}) \, dy \, dz = \int_0^1 \left[e^{1+y+z}\right]_{y=0}^{1} dz$$

$$= \int_0^1 \left[e^{2+z} - 2e^{1+z} + e^z\right] dz = \left[e^{2+z} - 2e^{1+z} + e^z\right]_0^1$$

$$= e^3 - 3e^2 + 3e - 1 = (e - 1)^3.$$

Como en el caso de dos variables, definimos la integral de una función f en una región W considerando una nueva función f^*, que es igual a f en W y a 0 fuera de W, y definiendo después:

$$\iiint_W f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_B f^*(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

donde B es cualquier caja que contenga a la región W.

Regiones elementales

Como antes, restringimos nuestra atención a regiones particularmente sencillas. Una ***región elemental*** en el espacio tridimensional es aquella en la que una de las variables está entre dos funciones de las otras dos variables, siendo los dominios de estas funciones una región elemental (esto es, x-simple o y-simple) en el plano. Por ejemplo, si D es una región elemental en el plano xy, y si $\gamma_1(x, y)$ y $\gamma_2(x, y)$ son dos funciones tales que $\gamma_2(x, y) \geqslant \gamma_1(x, y)$, una región elemental es la formada por los puntos (x, y, z) tales que (x, y) está en D y $\gamma_1(x, y) \leqslant z \leqslant \gamma_2(x, y)$. En la Figura 5.5.2 se muestran dos regiones elementales.

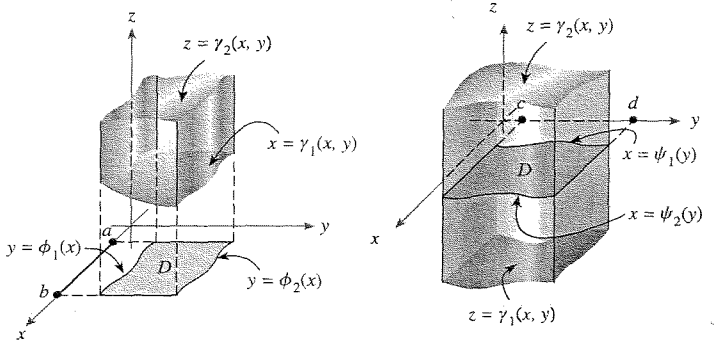


Figura 5.5.2. Dos regiones elementales en el espacio. El dominio D en la figura de la izquierda es y-simple, mientras que en la de la derecha es x-simple.

EJEMPLO 5.16 Describir la bola unidad $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$ como una región elemental.

Solución

Se puede hacer de varias maneras; una de ellas, en la que D es y-simple, es:

$$-1 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$-\sqrt{1 - x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{1 - x^2},$$

$$-\sqrt{1 - x^2 - y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Al hacer esto, escribimos primero los hemisferios superior e inferior como $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, respectivamente, donde x e y se mueven dentro del disco unidad (esto es, $-\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}$, y x varía entre -1 y 1) (*véase* la Figura 5.5.3.) Podemos describir la región de otras maneras al intercambiar los papeles de x, y, y z en las desigualdades.

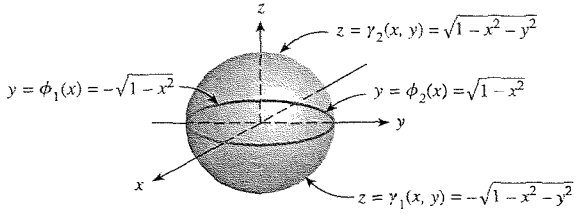


Figura 5.5.3. La bola unidad vista como una región elemental del espacio.

Integrales sobre regiones elementales

Como en el caso de las integrales en el plano, cualquier función de tres variables que sea continua en una región elemental es integrable en esa región. Un argumento semejante al utilizado para las integrales dobles demuestra que una integral triple sobre una región elemental se puede escribir como una integral iterada en la que los límites de integración son funciones. En el siguiente cuadro se dan las fórmulas para estas integrales iteradas.

Integrales triples mediante integración iterada Supongamos que W es una región elemental en la que z se mueve entre dos funciones de x e y. Entonces, o bien

$$\iiint_W f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

(*véase* la Figura 5.5.2 (izquierda)) o bien

$$\iiint_W f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$$

(*véase* la Figura 5.5.2 (derecha)).

Si $f = 1$, obtenemos la integral $\iiint_W dx\, dy\, dz$, que es el ***volumen*** de la región W.

EJEMPLO 5.17 Comprobar la fórmula del volumen para la bola de radio 1:

$$\iiint_W dx\, dy\, dz = \frac{4}{3}\pi,$$

donde W es el conjunto de los (x, y, z) tales que $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Solución

Usamos la descripción de la bola unidad dada en el Ejemplo 5.16. Según la primera fórmula del cuadro anterior, la integral es

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx.$$

Manteniendo x e y fijas, e integrando con respecto a z, obtenemos:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left[z\Big|_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right]dy\,dx = 2\int_{-1}^{1}\left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2-y^2)^{1/2}dy\right]dx.$$

Como x es fijo en la integral con respecto a y, ésta se puede expresar como $\int_{-a}^{a}(a^2-y^2)^{1/2}dy$, donde $a=(1-x^2)^{1/2}$. Esta integral es el área de una región semicircular de radio a, de modo que

$$\int_{-a}^{a}(a^2-y^2)^{1/2}dy = \frac{a^2}{2}\pi.$$

(también podríamos haber usado un cambio de variable trigonométrico o una tabla de integrales). Por consiguiente,

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2-y^2)^{1/2}dy = \frac{1-x^2}{2}\pi,$$

de modo que

$$2\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2-y^2)^{1/2}dy\,dx = 2\int_{-1}^{1}\pi\frac{1-x^2}{2}dx$$

$$= \pi\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx = \pi\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=-1}^{1} = \frac{4}{3}\pi.$$

En la Figura 5.5.4. se muestran otros tipos de regiones elementales; por ejemplo, en la segunda región, (y, z) está en una región elemental del plano yz y x se mueve entre dos gráficas:

$$\rho_1(y, z) \leqslant x \leqslant \rho_2(y, z).$$

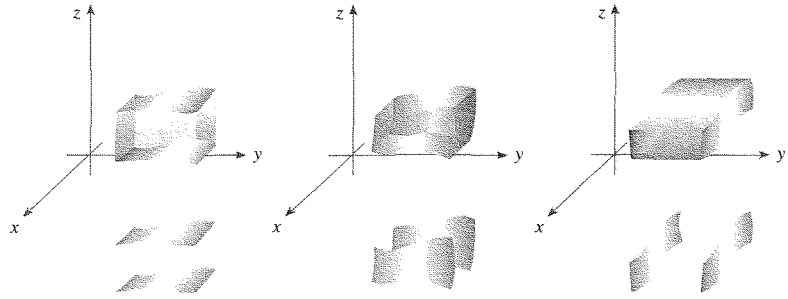
Como se muestra en la Figura 5.5.5, algunas regiones elementales se pueden describir de cada una de estas tres maneras. Estas regiones se llamarán ***regiones elementales simétricas***.

A cada descripción de una región como región elemental le corresponde una fórmula de integración; por ejemplo, si W es el conjunto de los (x, y, z) tales que

$$c \leqslant y \leqslant d, \qquad \psi_1(y) \leqslant z \leqslant \psi_2(y), \qquad \rho_1(y, z) \leqslant x \leqslant \rho_2(y, z),$$

entonces

$$\iiint_W f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_c^d\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}\int_{\rho_1(y,z)}^{\rho_2(y,z)} f(x, y, z)\,dx\,dz\,dy.$$



La tapa y el fondo son superficies $z = \gamma(x, y)$ | El frente y la parte posterior son superficies $x = \rho(y, z)$ | Los lados izquierdo y derecho son superficies $y = \delta(x, z)$

Figura 5.5.4. Tipos de regiones elementales en el espacio.

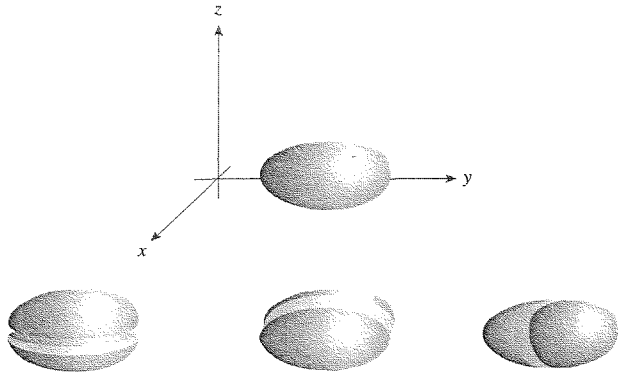


Figura 5.5.5. Una región elemental simétrica se puede describir de tres maneras.

EJEMPLO 5.18 Sea W la región limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$, y la superficie $z = x^2 + y^2$ y que está en el cuadrante $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Calcular $\iiint_W x\,dx\,dy\,dz$ y esbozar la región.

Solución

Método 1. La región W está dibujada en la Figura 5.5.6. Como se indica en la figura, podemos describir la región mediante las desigualdades

$$0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}, \qquad 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{2 - x^2}, \qquad x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 2.$$

Por tanto,

$$\iiint_W x\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\sqrt{2}} \left[\int_0^{\sqrt{2-x^2}} \left(\int_{x^2+y^2}^{2} x\,dz \right) dy \right] dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} x(2 - x^2 - y^2)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} x\left[(2-x^2)^{3/2} - \frac{(2-x^2)^{3/2}}{3}\right] dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2x}{3}(2-x^2)^{3/2}\,dx = \left.\frac{-2(2-x^2)^{5/2}}{15}\right|_0^{\sqrt{2}}$$

$$= 2 \cdot \frac{2^{5/2}}{15} = \frac{8\sqrt{2}}{15}.$$

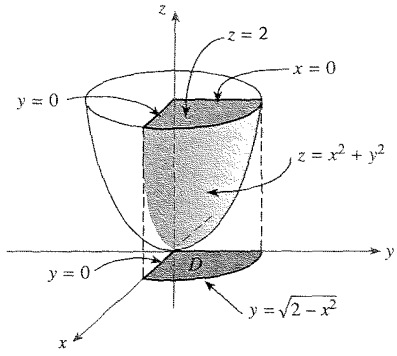


Figura 5.5.6. *W* es la región que está bajo el plano $z = 2$, sobre el paraboloide $z = x^2 + y^2$, y en los semiespacios $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

Método 2. También podemos establecer primero los límites para x y describir W como aquellos (x, y, z) tales que (y, z) está en D y $0 \leq x \leq (z - y^2)^{1/2}$, donde D es el subconjunto del plano yz definido mediante $0 \leq z \leq 2$ y $0 \leq y \leq z^{1/2}$ (*véase* la Figura 5.5.7).

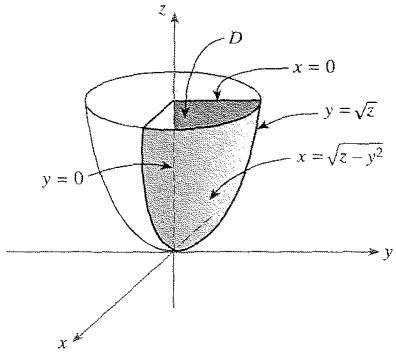


Figura 5.5.7. Una descripción distinta de la región del Ejemplo 5.18.

Por tanto,

$$\iiint_W x\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_0^{(z-y^2)^{1/2}} x\,dx\right) dy\,dz$$

$$= \int_0^2 \left[\int_0^{z^{1/2}} \left(\int_0^{(z-y^2)^{1/2}} x\,dx\right) dy\right] dz$$

$$= \int_0^2 \int_0^{z^{1/2}} \left(\frac{z - y^2}{2} \right) dy\, dz$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(z^{3/2} - \frac{z^{3/2}}{3} \right) dz = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{2}{3} z^{3/2}\, dz$$

$$= \left[\frac{2}{15} z^{5/2} \right]_0^2 = \frac{2}{15} 2^{5/2} = \frac{8\sqrt{2}}{15},$$

que coincide con la respuesta anterior.

EJEMPLO 5.19 Calcular

$$\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 dz\, dy\, dx.$$

Dibujar la región de integración W e interpretar la integral.

Solución

$$\int_0^1 \int_0^x \int_{x^2+y^2}^2 dz\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^x (2 - x^2 - y^2)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left(2x - x^3 - \frac{x^3}{3} \right) dx = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{2}{3}.$$

Esta integral es el volumen de la región dibujada en la Figura 5.5.8.

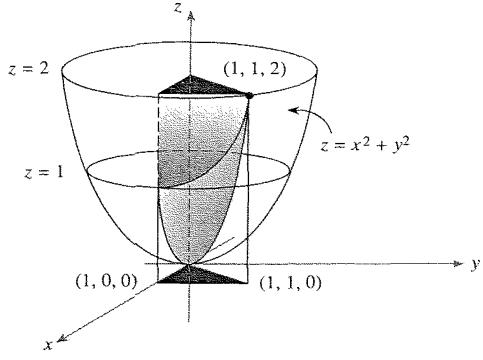


Figura 5.5.8. La región W se encuentra entre el paraboloide $z = x^2 + y^2$, el plano $z = 2$ y sobre la región D.

EJERCICIOS

En los ejercicios del 1 al 4, efectuar la integración indicada en la caja dada.

1. $\iiint_B x^2\,dx\,dy\,dz$, $B = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

2. $\iiint_B e^{-xy}y\,dx\,dy\,dz$, $B = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

3. $\iiint_B (2x + 3y + z)\,dx\,dy\,dz$, $B = [0, 2] \times [-1, 1] \times [0, 1]$.

4. $\iiint_B ze^{x+y}\,dx\,dy\,dz$, $B = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.

En los ejercicios del 5 al 8, describir la región dada como una región elemental.

5. La región que está entre el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el paraboloide $z = x^2 + y^2$.

6. La región cortada por el cilindro $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$ en la bola $2x^2 + z^2 = 1$, esto es, la región dentro del cilindro y de la bola.

7. La región dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y sobre el plano $z = 0$.

8. La región limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 4$, y $x = z - y - 1$.

En los ejercicios del 9 al 12 hallar el volumen de la región correspondiente.

9. La región limitada por $z = x^2 + y^2$, y $z = 10 - x^2 - 2y^2$.

10. El sólido limitado por $x^2 + 2y^2 = 2$, $z = 0$, y $x + y + 2z = 2$.

11. El sólido limitado por $x = y$, $z = 0$, $y = 0$, $x = 1$, y $x + y + z = 0$.

12. La región que resulta de intersecar los dos cilindros $x^2 + y^2 \leqslant a^2$ y $x^2 + z^2 \leqslant a^2$.

Calcular las integrales en los ejercicios del 13 al 21.

13. $\int_0^1 \int_1^2 \int_2^3 \cos[\pi(x + y + z)]\,dx\,dy\,dz$.

14. $\int_0^1 \int_0^x \int_{\blacksquare}^y (y + xz)\,dz\,dy\,dx$.

15. $\iiint_W (x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz$; W es la región acotada por $x + y + z = a$ (donde $a > 0$), $x = 0$, $y = 0$, y $z = 0$.

16. $\iiint_W z\,dx\,dy\,dz$; W es la región acotada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 1$, y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ con $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

17. $\iiint_W x^2 \cos z\,dx\,dy\,dz$; W es la región acotada por $z = 0$, $z = \pi$, $y = 0$, $y = 1$, $x = 0$, y $x + y = 1$.

18. $\int_0^2 \int_0^x \int_0^{x+y} dz\,dy\,dx$.

19. $\iiint_W (1 - z^2)\,dx\,dy\,dz$; W es la pirámide con vértice superior en $(0, 0, 1)$ y cuyos vértices en la base son $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(1, 1, 0)$.

20. $\iiint_W (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz$; W es la misma pirámide que en el Ejercicio 19.

21. $\int_0^1 \int_0^{2x} \int_{x^2+y^2}^{x+y} dz\,dy\,dx$.

22. **a)** Dibujar la región de integración de la integral $\int_0^1 \int_0^x \int_0^y f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx$.

b) Escribir la integral con el siguiente orden de integración: $dx\,dy\,dz$.

Para las regiones de los ejercicios del 23 al 26, encontrar los límites de integración apropiados $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, $\gamma_1(x, y)$, y $\gamma_2(x, y)$, y escribir la integral triple en la región W como una integral iterada de la forma:

$$\iiint_W f dV = \int_a^b \left\{ \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \left[\int_{\gamma_1(x,\,y)}^{\gamma_2(x,\,y)} f(x, y, z)\,dz \right] dy \right\} dx.$$

23. $W = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 1\}$.

24. $W = \{(x, y, z) \mid \frac{1}{2} \leqslant z \leqslant 1,\ \text{y}\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$.

25. $W = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1,\ z \geqslant 0,\ \text{y}\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4\}$.

26. $W = \{(x, y, z) \mid |x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1,\ z \geqslant 0,\ \text{y}\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$.

27. Demostrar que la fórmula que usa integrales triples para calcular el volumen bajo la gráfica de una función positiva $f(x, y)$ definida en una región elemental D en el plano se reduce a la integral doble de f sobre D.

28. Sea W la región limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$, y $z = x + y$.

a) Hallar el volumen de W.

b) Calcular $\iiint_W x\,dx\,dy\,dz$.

c) Calcular $\iiint_W y\,dx\,dy\,dz$.

29. Sea f continua y sea B_ε la bola de radio ε centrada en el punto (x_0, y_0, z_0). Sea vol (B_ε) el volumen de B_ε. Probar que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\text{vol}\,(B_\varepsilon)} \iiint_{B_\varepsilon} f(x, y, z)\,dV = f(x_0, y_0, z_0).$$

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 5

Calcular las integrales de los ejercicios del 1 al 4.

1. $\int_0^3 \int_{-x^2+1}^{x^2+1} xy\, dy\, dx.$

2. $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 (x + y)^2\, dy\, dx.$

3. $\int_0^1 \int_{e^x}^{e^{2x}} x \ln y\, dy\, dx.$

4. $\int_0^1 \int_1^2 \int_2^3 \cos[\pi(x + y + z)]\, dx\, dy\, dz.$

Invertir el orden de integración en las integrales de los ejercicios del 5 al 8 y calcularlas.

5. La integral del Ejercicio 1.

6. La integral del Ejercicio 2.

7. La integral del Ejercicio 3.

8. La integral del Ejercicio 4.

9. Calcular la integral $\int_0^1 \int_0^x \int_0^y (y + xz)\, dz\, dy\, dx.$

10. Calcular $\int_0^1 \int_y^{y^2} e^{x/y}\, dx\, dy.$

11. Calcular $\int_0^1 \int_0^{(\operatorname{arcsen} y)/y} y \cos xy\, dx\, dy.$

12. Cambiar el orden de integración y calcular

$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 (x + y)^2\, dx\, dy.$$

13. Demostrar que el cálculo de $\iint_D dx\, dy$, donde D es una región y-simple, reproduce la fórmula para el área encerrada entre dos curvas estudiada en el cálculo de una variable.

14. Cambiar el orden de integración y calcular

$$\int_0^1 \int_{y^{1/2}}^1 (x^2 + y^3 x)\, dx\, dy.$$

15. Sea D una región en el plano xy dentro del círculo unidad $x^2 + y^2 = 1$. Calcular $\int\int_D f(x, y)\,dx\,dy$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $f(x, y) = xy$. **b)** $f(x, y) = x^2y^2$. **c)** $f(x, y) = x^3y^3$.

16. Hallar $\int\int_D y[1 - \cos(\pi x/4)]\,dx\,dy$, donde D es la región de la Figura 5.R.1.

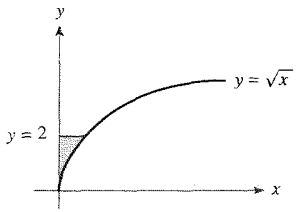


Figura 5.R.1. La región de integración del Ejercicio 16.

Calcular las integrales de los ejercicios del 17 al 24. Dibujar e identificar el tipo de región (que corresponde a cómo está escrita la integral).

17. $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_{\operatorname{sen} x}^{3\operatorname{sen} x} x(1 + y)\,dy\,dx.$

18. $\displaystyle\int_0^{1}\int_{x-1}^{x\cos(\pi x/2)} (x^2 + xy + 1)\,dy\,dx.$

19. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{y^{2/3}}^{(2-y)^2} \left(\frac{3}{2}\sqrt{x} - 2y\right)dx\,dy.$

20. $\displaystyle\int_0^{2}\int_{-3(\sqrt{(4-x^2)}/2}^{3(\sqrt{(4-x^2)}/2} \left(\frac{5}{\sqrt{2 + x}} + y^3\right)dy\,dx.$

21. $\displaystyle\int_0^{1}\int_0^{x^2} (x^2 + xy - y^2)\,dy\,dx.$

22. $\displaystyle\int_2^{4}\int_{y^2-1}^{y^3} 3\,dx\,dy.$

23. $\displaystyle\int_0^{1}\int_{x^2}^{x} (x + y)^2\,dy\,dx.$

24. $\displaystyle\int_0^{1}\int_0^{3y} e^{x+y}\,dx\,dy.$

En los ejercicios del 25 al 27, integrar la función f en la región D.

25. $f(x, y) = x - y$; D es el triángulo con vértices (0, 0), (1, 0) y (2, 1).

26. $f(x, y) = x^3y + \cos x$; D es el triángulo definido por $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant y \leqslant x$.

27. $f(x, y) = x^2 + 2xy^2 + 2$; D es la región limitada por la gráfica de $y = -x^2 + x$, el eje x, y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

En los Ejercicios 28 y 29, dibujar la región de integración, intercambiar el orden y calcular.

28. $\displaystyle\int_1^4 \int_1^{\sqrt{x}} (x^2 + y^2)\, dy\, dx.$

29. $\displaystyle\int_0^1 \int_{1-y}^1 (x + y)^2\, dx\, dy.$

30. Demostrar que

$$4e^5 \leq \iint_{[1,3]\times[2,4]} e^{x^2+y^2}\, dA \leq 4e^{25}.$$

31. Demostrar que

$$4\pi \leq \iint_D (x^2 + y^2 + 1)\, dx\, dy \leq 20\pi,$$

donde D es el disco de radio 2 y centro el origen.

32. Supongamos que W es una región ***conexa por arcos***, es decir, dados dos puntos cualesquiera de W existe un trayectoria continua que los une. Si f es una función continua definida en W, usar el teorema del valor medio para demostrar que existe al menos un punto en W en el que el valor de f es igual al promedio de f en W, esto es, al valor de la integral de f en W dividido por el volumen de W. (Comparar esto con el teorema del valor medio para integrales dobles.) ¿Qué sucede si W no es conexa?

33. Probar: $\displaystyle\int_0^x \left[\int_0^t F(u)\, du\right] dt = \int_0^x (x - u)F(u)\, du.$

Calcular las integrales de los ejercicios 34 al 36.

34. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^z \int_0^y xy^2z^3\, dx\, dy\, dz.$

35. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^y \int_0^{x/\sqrt{3}} \frac{x}{x^2 + z^2}\, dz\, dx\, dy.$

36. $\displaystyle\int_1^2 \int_1^z \int_{1/y}^2 yz^2\, dx\, dy\, dz.$

37. Escribir la integral iterada $\displaystyle\int_0^1 \int_{1-x}^1 \int_x^1 f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$ como una integral en una región de $\mathbb{R}^3$ y después escribirla en los otros cinco órdenes de integración posibles.

6

La fórmula del cambio de variables y aplicaciones de la integración

Si se atasca en un problema de cálculo y no sabe qué otra cosa hacer intente integrar por partes o cambiar de variables.

Jerry Kazdan

Si no lo consigue, déjelo, tómese una taza de café y ¡piense!

Ute Müller

La fórmula de cambio de variables es uno de las más potentes métodos de integración del calculo de una variable; permite calcular integrales como

$$\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$$

por medio de la sustitución, o *cambio de variables* $u = x^2$, que reduce el problema a la fácil tarea de integrar e^u respecto de u. En este capitulo desarrollamos la *fórmula multidimensional del cambio de variables*, que es especialmente importante y útil para evaluar integrales múltiples en coordenadas polares, cilíndricas y esféricas.

Uno de los ingredientes básicos en la fórmula del cambio de variables es cómo cambiar variables en varias dimensiones, que lleva implícita la definición de aplicación, la cual aparece en varias situaciones interesantes. Por ejemplo, considérese un objeto que se deforma, como un pez en el agua. Al cambiar su forma, puede imaginarse la correspondencia instantánea entre los puntos del pez en su estado de reposo y su forma actual. Este tipo de correspondencia es, de hecho, la principal idea que hay en un cambio de variables, en este caso de una región tridimensional (el pez en su estado de reposo) a otra (el pez en su forma actual).

La primera sección de este capítulo describe los conceptos clave en las aplicaciones entre regiones del plano. A continuación se desarrolla la técnica del cambio de variables para integrales dobles y triples. El capítulo incluye también algunas de las aplicaciones físicas importantes de la integral.

6.1. La geometría de las aplicaciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$

En esta sección nos interesarán las aplicaciones de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$. La comprensión geométrica obtenida será útil en la sección siguiente, cuando se estudie la fórmula del cambio de variables para integrales múltiples.

Aplicaciones de una región en otra

Sea D^* un subconjunto de $\mathbb{R}^2$; supóngase que consideramos una aplicación diferenciable T: $D^* \to \mathbb{R}^2$, de forma que T lleva puntos de D^* en puntos de $\mathbb{R}^2$. Denotamos el conjunto de puntos de la imagen por D o por $T(D^*)$; entonces $D = T(D^*)$ es el conjunto de todos los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que

$$(x, y) = T(x^*, y^*) \qquad \text{para algún} \qquad (x^*, y^*) \in D^*.$$

Una forma de comprender la geometría de una aplicación T es ver cómo ésta *deforma* o cambia D^*; por ejemplo, la Figura 6.1.1 ilustra una aplicación T que lleva una región ligeramente retorcida en un disco.

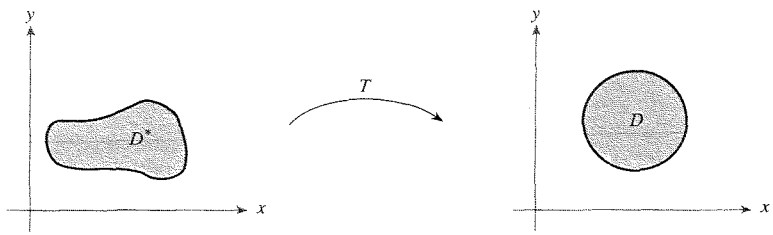


Figura 6.1.1. Una función T de una región D^* en un disco D.

EJEMPLO 6.1 Sea $D^* \subset \mathbb{R}^2$ el rectángulo $D^* = [0, 1] \times [0, 2\pi]$. Entonces todos los puntos de D^* son de la forma (r, θ), donde $0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Sea T el «cambio de variables» a coordenadas polares definido por $T(r, \theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$. Hallar el conjunto imagen de D.

Solución

Sea $(x, y) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$. Por la identidad $x^2 + y^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta = r^2 \leqslant 1$, vemos que los puntos del conjunto de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $(x, y) \in D$ verifican que $x^2 + y^2 \leqslant 1$, y por tanto D está contenido en el disco unidad. Además, todo punto (x, y) en el disco unidad puede escribirse como $(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$ para ciertos $0 \leqslant r \leqslant 1$ y $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Por tanto D es el disco unidad (*véase* la Figura 6.1.2).

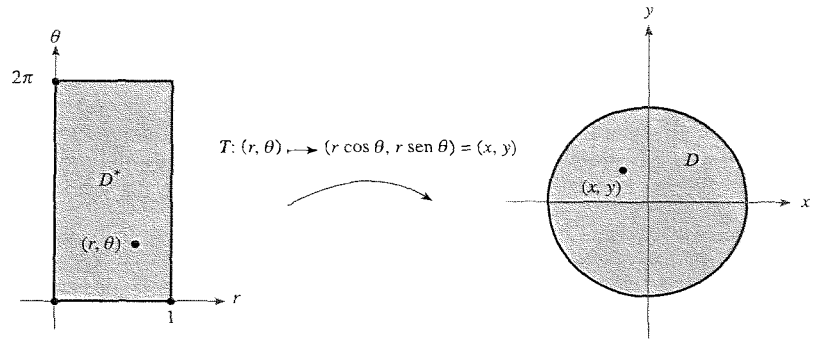


Figura 6.1.2. T da un cambio de variables de coordenadas cartesianas a coordenadas polares. El círculo unidad es la imagen de un rectángulo.

EJEMPLO 6.2 Sea T la aplicación definida por $T(x, y) = ((x + y)/2, (x - y)/2)$, y sea $D^* = [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$ un cuadrado de lado 2 centrado en el origen. Determinar la imagen D que se obtiene al aplicar T a D^*.

Solución

Determinemos primeramente el efecto de T sobre la recta $\mathbf{c}_1(t) = (t, 1)$, donde $-1 \leqslant t \leqslant 1$ (*véase* la Figura 6.1.3). Tenemos que $T(\mathbf{c}_1(t)) = ((t + 1)/2, (t - 1)/2)$. La aplicación $t \mapsto T(\mathbf{c}_1(t))$ es una parametrización de la recta $y = x - 1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, ya que $(t - 1)/2 = (t + 1)/2 -$. Éste es el segmento de recta que une $(1, 0)$ y $(0, -1)$.

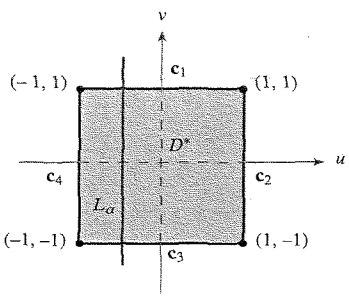


Figura 6.1.3. Dominio de la transformación T del Ejemplo 6.2.

Sean

$$\mathbf{c}_2(t) = (1, t), \qquad -1 \leqslant t \leqslant 1$$
$$\mathbf{c}_3(t) = (t, -1), \qquad -1 \leqslant t \leqslant 1$$
$$\mathbf{c}_4(t) = (-1, t)), \qquad -1 \leqslant t \leqslant 1$$

parametrizaciones de los restantes lados del cuadrado D^*. Usando el argumento anterior vemos que $T \circ \mathbf{c}_2$ es una parametrización de la recta $y = 1 - x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ (el segmento que une $(0, 1)$ y $(1, 0)$); $T \circ \mathbf{c}_3$ es la recta $y = x + 1$, $-1 \leqslant x \leqslant 0$, que une $(0, 1)$ y $(-1, 0)$, y $T \circ \mathbf{c}_4$ es la recta

$y = -x - 1$, $-1 \leqslant x \leqslant 0$, que une $(-1, 0)$ y $(0, -1)$. A estas alturas parece razonable pensar que T «inclina» el cuadrado D^* y lo lleva al cuadrado D, cuyos vértices son $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$ (*véase* la Figura 6.1.4).

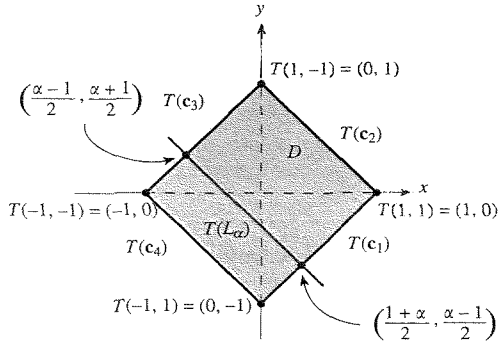


Figura 6.1.4. El efecto de T sobre la región D^*.

Para demostrar que efectivamente es así, sea $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$ y sea L_α (Figura 6.1.3) una recta fijada, parametrizada por $\mathbf{c}(t) = (\alpha, t)$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$; entonces $T(\mathbf{c}(t)) = ((\alpha + t)/2, (\alpha - t)/2)$ es una parametrización de la recta $y = -x + \alpha$, $(\alpha - 1)/2 \leqslant x \leqslant (\alpha + 1)/2$. Esta recta comienza, para $t = -1$, en el punto $((\alpha - 1)/2, (1 + \alpha)/2)$ y finaliza en el punto $((1 + \alpha)/2, (\alpha - 1)/2)$; como es fácil de comprobar, estos puntos están sobre las rectas $T \circ \mathbf{c}_3$ y $T \circ \mathbf{c}_1$ respectivamente. Por tanto, al variar α entre -1 y 1, L_α barre el cuadrado D^* mientras que $T(L_\alpha)$ barre el cuadrado D definido por los vértices $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ y $(0, -1)$.

Imágenes de aplicaciones

El siguiente teorema es un método útil para describir la imagen $T(D^*)$.

TEOREMA 1 Sea A una matriz 2×2 con $\det A \neq 0$ y sea T una aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ dada por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ (multiplicación de matrices). Entonces T transforma paralelogramos en paralelogramos y vértices en vértices. Además, si $T(D^*)$ es un paralelogramo, D^* tiene que ser un paralelogramo.

La demostración del Teorema 1 se deja como Ejercicio 10 al final de esta sección. Este teorema simplifica la solución del Ejemplo 6.2, ya que solamente necesitamos hallar los vértices de $T(D^*)$ y conectarlos por rectas.

Aplicaciones inyectivas

Aunque no podemos visualizar la gráfica de una función $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, resulta de ayuda estudiar cómo la función deforma subconjuntos. Sin embargo, no obtendremos una descripción completa del comportamiento de T estudiando solamente estas deformaciones. Podemos caracterizar T con mayor precisión usando la noción de aplicación inyectiva.

DEFINICIÓN Una aplicación es inyectiva en D^* si para (u, v) y $(u', v') \in D^*$, $T(u, v) = T(u', v')$ implica que $u = u'$ y $v = v'$.

Este enunciado significa que *T no aplica dos puntos distintos de D^* sobre el mismo punto de D*. Por ejemplo, la función $T(x, y) = (x^2 + y^2, y^4)$ no es inyectiva ya que $T(1, -1) = (2, 1) = T(1, 1)$ y, sin embargo, $(1, -1) \neq (1, 1)$.

EJEMPLO 6.3 Considérese la aplicación de cambio a coordenadas polares $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, descrita en el Ejemplo 6.1, definida por $T(r, \theta) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)$. Demostrar que T no es inyectiva si su dominio es todo $\mathbb{R}^3$.

Solución

Si $\theta_1 \neq \theta_2$, entonces $T(0, \theta_1) = T(0, \theta_2)$ y por tanto T no puede ser inyectiva. Esta observación implica que si L es el lado del rectángulo $D^* = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ dado por $0 \leqslant \theta = 2\pi$ y $r = 0$ (Figura 6.1.5), entonces T transforma todo L en un solo punto, el centro del disco unidad D. Sin embargo, si consideramos el conjunto $S^* = (0, 1] \times [0, 2\pi)$, entonces $T: S^* \to S$ es inyectiva (*véase* el Ejercicio 1 de esta sección). Evidentemente, para determinar si una aplicación es inyectiva debe tenerse muy en cuenta el dominio elegido.

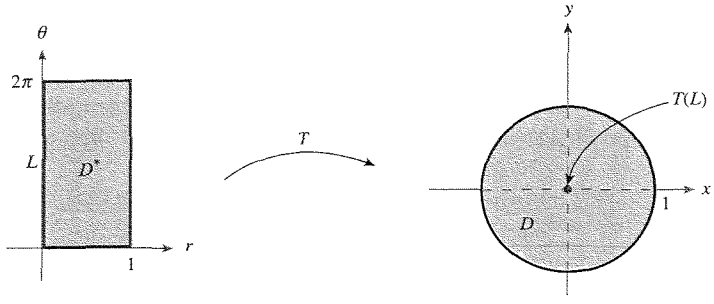


Figura 6.1.5. La transformación a coordenadas polares T transforma la recta L en el punto (0, 0).

EJEMPLO 6.4 Demostrar que la función $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ del Ejemplo 6.2 es inyectiva.

Solución

Supóngase que $T(x, y) = T(x', y')$; entonces

$$\left(\frac{x + y}{2}, \frac{x - y}{2}\right) = \left(\frac{x' + y'}{2}, \frac{x' - y'}{2}\right)$$

y tenemos que

$$x + y = x' + y',$$
$$x - y = x' - y'.$$

Sumando obtenemos

$$2x = 2x'.$$

Por tanto $x = x'$ y, de forma similar, restando se obtiene $y = y'$, lo que demuestra que T es inyectiva (con dominio todo R^2). Realmente, dado que T es lineal y $T(x) = Ax$, donde A es una matriz 2 x 2, sería también suficiente ver que det A # 0 *(véase* el Ejercicio 8 de esta sección).

Aplicaciones s

En los Ejemplos 6.1 y 6.2 hemos determinado la imagen $D = T(D^*)$ de una región D^* según una aplicación T. Lo que nos interesará en la sección siguiente es, en parte, el problema inverso; concretamente, dado D y una aplicación inyectiva T *de* R^2 en R^2, hallar D^* tal que $T(D^*) — D$.

Antes de examinar este problema con mayor detalle, introducimos la noción de «sobreyectiva».

DEFINICIÓN La aplicación T es *sobreyectiva* sobre D si para todo punto $(x, y) e D$ existe al menos un punto (u, v) en el dominio de T tal que $T(u, v) = (x, y)$.

Por tanto, si T es sobreyectiva, dado $(x, y) e D$ podemos *resolver* la ecuación $T(u, v) = (x, y)$ en (u, v). Si, además, Tes inyectiva, ésta *solución es única.*

Para las aplicaciones lineales T de IR* en R" (o de R" en R") resulta que inyectiva y sobreyectiva son nociones equivalentes *(véanse* los Ejercicios 8 y 9 de esta sección).

Si nos dan una región D y una aplicación T, la determinación de una región D^* tal que $T(D^*) = D$ será posible solamente cuando para cada $(x, y) e D$ existe un (u, v) en el dominio de Ttal que $T(u, v) — (x, y)$ (es decir, Tdebe ser sobreyectiva sobre D). El ejemplo siguiente muestra que esto no siempre puede hacerse.

EJEMPLO 6.5 Sea T: R^2 -* R^2 dada por $T(u, v) = («, 0)$. Sea D el cuadrado $D = [0, 1]$ x $[0, 1]$. Dado que T transforma todo R^2 en un eje, es imposible hallar un D^* tal que $T(D^*) = D$.

Volvamos al Ejemplo 6.2 y usemos estos métodos.

Sea T definida como en el Ejemplo 6.2 y sea D el cuadrado cuyos vértices son (1, 0), (0, 1), (- 1 , 0), (0, - 1). Hallar un D^* tal que $T(D^*) = D$.

Solución

Dado que T es lineal y que $T(x) = Ax$, donde A es una matriz 2 x 2 que verifica det A # 0, sabemos que T: R^2 —> R^2 es sobreyectiva *(véanse* los Ejercicios 8 y 9 de esta sección), y por tanto se puede hallar D^*. Por el Teorema 1, D^* tiene que ser un paralelogramo. Para hallar D^* es suficiente con hallar los cuatro puntos en los que se transforman los vértices de D, pues uniendo éstos por segmentos habremos hallado D^*. Para el vértice (1, 0) de D, debemos resolver $T(x, y) = (1, 0) = ((x + y)¡2, (x ~ y)/2)$, es decir, $(x + y)/2 = 1$, $(x - y)/2 = 0$. Por tanto, $(x, y) = (1, 1)$ es uno de los vértices de D^*. Resolviendo de igual forma los otros vértices tenemos que $D^* = [—1, 1] x [—1, 1]$;1o que coincide con lo que obtuvimos con más trabajo en el Ejemplo 6.2.

Sea D la región del primer cuadrante comprendida entre los arcos de circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = b^2$, $0 < a < b$ *(véase* la Figura 6.1.6). Estas circunferencias tienen ecuaciones $r = a$ y r = b en coordenadas polares. Sea T la transformación a coordenadas polares dada por $T(r, B)$ = (reos 9, r sen 9) = (x, y). Hallar D^* tal que $T(D^*) = D$.

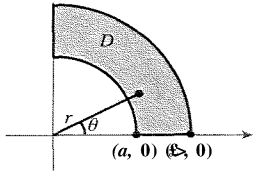


figura 5.1.6. Buscamos una región D^* en el plano Br cuya imagen por el cambio a coordenadas polares sea D.

Solución

En la región D, $a^2 < x^2 + y^2 < b^2$\ y dado que $r = x^2 + y^2$, vemos que a ^ r ^ b. Claramente, en esta región 9 varía entre $0 < 9 < 7r/2$. Por tanto, si $D = [a, b]$ x [0, $n/2$] tenemos que $T(D^*) = D$ y T es inyectiva.

NOTA El teorema de la función inversa, que se ha estudiado en la Sección 3.5, es importante en lo aquí tratado. Establece que si el determinante de $DT(w_0, v_0)$ (que es la matriz de las derivadas parciales de T evaluadas en (w_0, v_0) no es cero, entonces para (u, v) cerca de (w_0, v_0) y (x, y) cerca de $(x_0, y_0) = T(u_0, v_0)$, la ecuación $T(u, v) = (x, y)$ se puede *resolver de forma única* en (u, v) como funciones de (x, y). En particular, por unicidad T es inyectiva cerca de (u_0, v_0); además, T *es* sobreyectiva en un entorno de (x_0, v_0), ya que $T(u, v) = (x, y)$ es resoluble en (u, v) si (x, y) está cerca de (x_0, y_0).

Sin embargo, incluso si T es inyectiva cerca de cada punto, y también sobreyectiva, no es necesariamente inyectiva *globalmente.* Por tanto, debemos actuar con prudencia *(véase* el Ejercicio 12 de esta sección).

Sorprendentemente, si D^* y D son regiones elementales y T: D^* D tiene la propiedad de que el determinante de $T)T(u, v)$ no se anula en ningún (u, v) de D, y si T transforma la frontera de D^* de forma inyectiva y sobreyectiva en la frontera de D, entonces T es inyectiva y sobreyectiva de D^* en D^* (la demostración es de un nivel superior al de este libro).

Resumiendo, tenemos:

Aplicaciones inyectivas y sobreyectivas Una aplicación T: D* -> D es *inyectiva* si transforma punios distintos en puntos distintos. Es *sobreyectiva* cuando la imagen de D^* según T es todo D.

Una transformación *lineal* de R^2 en R^2 dada por la multiplicación por una matriz .4 es invectiva y sobreyectiva cuando y sólo cuando det A ¥-- 0.

EJERCICIOS

1. Sea $S^* = (0, 1] \times [0, 2\pi)$ y sea $T(r, \theta) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)$. Hallar la imagen del conjunto S. Demostrar que T es inyectiva en S^*.

2. Definimos

$$T(x^*, y^*) = \left(\frac{x^* - y^*}{\sqrt{2}}, \frac{x^* + y^*}{\sqrt{2}}\right).$$

Demostrar que T rota el cuadrado unidad $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$.

3. Sea $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$ y defínase T en D^* mediante $T(u, v) = (-u^2 + 4u, v)$. Hallar la imagen D. ¿Es T inyectiva?

4. Sea D^* el paralelogramo limitado por las rectas $y = 3x + 4$, $y = 3x$, $y = \frac{1}{2}x$, e $y = \frac{1}{2}(x + 4)$. Sea $D = [0, 1] \times [0, 1]$. Hallar una aplicación T tal que D sea la imagen de D^* por T.

5. Sea $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$ y defínase T en D^* como $T(x^*, y^*) = (x^*y^*, x^*)$. Hallar la imagen D. ¿Es T inyectiva? Si no lo es, ¿se puede quitar un subconjunto a D^* de forma que en lo que quede T sea inyectiva?

6. Sea D^* el paralelogramo con vértices en $(-1, 3)$, $(0, 0)$, $(2, -1)$ y $(1, 2)$, y D el rectángulo $D = [0, 1] \times [0, 1]$. Hallar una aplicación T tal que D sea la imagen de D^* por T.

7. Sea T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el cambio a coordenadas esféricas definido por $(\rho, \phi, \theta) \mapsto (x, y, z)$, donde

$$x = \rho\,\text{sen}\,\phi\cos\theta, \qquad y = \rho\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta, \qquad z = \rho\cos\phi.$$

Sea D^* el conjunto de puntos (ρ, ϕ, θ) tales que $\phi \in [0, \pi]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $\rho \in [0, 1]$. Hallar $D = T(D^*)$. ¿Es T inyectiva? Si no lo es, ¿se puede quitar un subconjunto a D^* de forma que en lo que quede T sea inyectiva?

En los ejercicios 8 y 9, sea $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, *donde* A *es una matriz* 2×2.

8. Demostrar que T es inyectiva si y solamente si el determinante de A no es cero.

9. Demostrar que $\det A \neq 0$ si y solamente si T es sobreyectiva.

10. Supóngase que T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es lineal, dada por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, donde A es una matriz 2×2. Demostrar que si $\det A \neq 0$, entonces T transforma paralelogramos en paralelogramos [INDICACIÓN: El paralelogramo general de $\mathbb{R}^2$ se puede describir como el conjunto de puntos $\mathbf{q} = \mathbf{p} + \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w}$ con $\lambda, \mu \in (0, 1)$ donde $\mathbf{p}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ son vectores de $\mathbb{R}^2$ tales que $\mathbf{v}$ no es un múltiplo de $\mathbf{w}$].

11. Supóngase que T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es como en el Ejercicio 10 y que $T(P^*) = P$ es un paralelogramo. Demostrar que P^* es un paralelogramo.

12. Considérese la aplicación T: $D \to D$, donde D es el disco unidad del plano, dada por

$$T(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta) = (r^2\cos 2\theta, r^2\,\text{sen}\,2\theta).$$

Usando notación compleja, $z = x + iy$, la aplicación T puede escribirse como $T(z) = z^2$. Demostrar que el determinante jacobiano de T se anula en el origen; por tanto, lejos del origen, T es localmente inyectiva. Por otra parte, demostrar que T no es globalmente inyectiva en $\mathbb{R}^2$ menos el origen.

6.2. El teorema del cambio de variables

Dadas dos regiones D y D^* de $\mathbb{R}^2$, una aplicación diferenciable T de D^* con imagen D, es decir, $T(D^*) = D$, y una función con valores reales $f: D \to \mathbb{R}$, querríamos expresar $\iint_D f(x, y)\,dA$ como una integral sobre D^* de la función compuesta $f \circ T$. En esta sección veremos cómo se hace.

Supóngase que D^* es una región del plano uv y que D es una región del plano xy. Se define la aplicación T por medio de las dos funciones coordenadas:

$$T(u, v) = (x(u, v),\ y(u, v)) \qquad \text{para} \qquad (u, v) \in D^*.$$

En principio podría conjeturarse que

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \stackrel{?}{=} \iint_{D^*} f(x(u, v),\ y(u, v))\,du\,dv, \tag{1}$$

donde $f \circ T(u, v) = f(x(u, v),\ y(u, v))$ es una función compuesta definida en D^*; sin embargo, si consideramos la función $f: D \to \mathbb{R}^2$ donde $f(x, y) = 1$, entonces la Ecuación (1) implicaría:

$$A(D) = \iint_D dx\,dy \stackrel{?}{=} \iint_{D^*} du\,dv = A(D^*). \tag{2}$$

Pero la Ecuación (2) sólo se verifica en unos cuantos casos especiales y no para una aplicación T cualquiera. Por ejemplo, defínase T por medio de $T(u, v) = (-u^2 + 4u, v)$. Si se restringe T al cuadrado unidad, es decir, a la región del plano uv, $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$ (*véase* la Figura 6.2.1). Entonces, como en el Ejercicio 3 de la Sección 6.1, T transforma D^* en $D = [0, 3] \times [0, 1]$. Obviamente, $A(D) \neq A(D^*)$ y por tanto la Fórmula (1) *no es válida*.

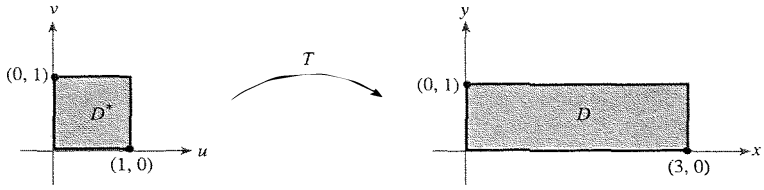


Figura 6.2.1. La aplicación $T: (u, v) \mapsto (-u^2 + 4u, v)$ transforma el cuadrado D^* en el rectángulo D.

Determinantes jacobianos

Para corregir la fórmula incorrecta (1) nos hace falta una medida de cómo distorsiona una transformación $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el área de una región. Ésta la da el *determinante jacobiano*, que se define como sigue.

DEFINICIÓN: Determinante jacobiano Sea $T: D^* \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación de clase C^1 dada por $x = x(u, v)$ y $y = y(u, v)$. El ***determinante jacobiano*** de T, que se escribe $\partial(x, y)/\partial(u, v)$, es el determinante de $\mathbf{D}T(u, v)$, la matriz derivada de T:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

EJEMPLO 6.8 La función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que transforma coordenadas polares en coordenadas cartesianas es

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\operatorname{sen}\theta$$

y su determinante jacobiano es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = r.$$

Bajo restricciones adecuadas en la función T, deduciremos más abajo que el área de $D = T(D^*)$ se obtiene intergrando el valor absoluto del jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ en D^*; es decir, tenemos la ecuación

$$A(D) = \iint_D dx\,dy = \iint_{D^*} \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv. \tag{3}$$

Por ejemplo: en el Ejemplo 6.1 tómese $T: D^* \to D$, donde $D = T(D^*)$ es el conjunto de (x, y) que verifican $x^2 + y^2 \leqslant 1$ y $D^* = [0, 1] \times [0, 2\pi]$, y $T(r, \theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$. Por la Fórmula (3),

$$A(D) = \iint_{D^*} \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}\right| dr\,d\theta = \iint_{D^*} r\,dr\,d\theta \tag{4}$$

(r y θ juegan aquí el papel de u y v). Del cálculo precedente se deduce que

$$\iint_{D^*} r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta = \pi$$

es el área del disco unidad D, lo que confirma la Fórmula (3) en este caso. De hecho, podemos recordar del cálculo de una variable que la Ecuación (4) es la fórmula correcta del área de una región en coordenadas polares.

No es tan fácil demostrar rigurosamente la afirmación de (3). Sin embargo, si se mira de forma adecuada resulta ciertamente plausible. Recuérdese que $A(D) = \iint_D dx\,dy$ se obtuvo dividiendo D en rectángulos pequeños, sumando sus áreas, y finalmente tomando el límite de esta suma cuando el tamaño de los subrectángulos tiende a cero. El problema es que T puede transformar rectángulos en regiones cuya área no sea fácil de calcular. La solución pasa por aproximar estas imágenes por medio de regiones simples cuya área podamos calcular. Una herramienta

para hacerlo es la derivada de T que, como sabemos (por el Capítulo 2), da la mejor aproximación lineal de T.

Considérese un rectángulo pequeño D^* en el plano uv como muestra la Figura 6.2.2. Sea T' la derivada de T calculada en (u_0, v_0), por lo que T' es una matriz 2×2. Sabemos, por el trabajo que hemos hecho en el Capítulo 2, que

$$T(u_0, v_0) + T'\begin{pmatrix}\Delta u\\ \Delta v\end{pmatrix},$$

da una buena aproximación a $T(x, y)$ donde $\Delta u = u - u_0$ y $\Delta v = v - v_0$. Esta aplicación T' transforma D^* en un paralelogramo con vértice en $T(u_0, v_0)$ y con lados adyacentes dados por los vectores

$$T'(\Delta u\mathbf{i}) = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta u\\ 0\end{bmatrix} = \Delta u\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u}\\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u}\end{bmatrix} = \Delta u\mathbf{T}_u$$

y,

$$T'(\Delta v\mathbf{j}) = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \Delta v\end{bmatrix} = \Delta v\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{bmatrix} = \Delta v\mathbf{T}_v,$$

donde

$$\mathbf{T}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{T}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j}$$

se evalúan en (u_0, v_0).

Recuérdese de la Sección 1.3 que el área del paralelogramo con lados iguales a los vectores $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ y $c\mathbf{i} + d\mathbf{j}$ es igual al valor absoluto del determinante

$$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a & c\\ b & d\end{vmatrix}.$$

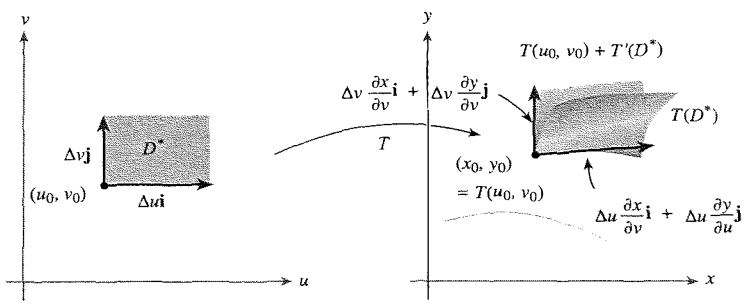


Figura 6.2.2. El efecto de la transformación T en un rectángulo pequeño D^*.

Por tanto el área de $T(D^*)$ es aproximadamente igual al *valor absoluto* de

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}\Delta u & \dfrac{\partial x}{\partial v}\Delta v \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}\Delta u & \dfrac{\partial y}{\partial v}\Delta v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \Delta u\,\Delta v = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\,\Delta u\,\Delta v$$

calculado en (u_0, v_0).

Este hecho y un razonamiento utilizando una partición deben hacer plausible la Fórmula (3). De hecho, si se hace una partición de D^* en rectángulos pequeños con lados de longitud Δu y Δv, las imágenes de estos rectángulos se aproximan a paralelogramos con lados $\mathbf{T}_u\,\Delta u$ y $\mathbf{T}_v\,\Delta v$, y por tanto con área $|\partial(x, y)/\partial(u, v)|\,\Delta u\,\Delta v$. Así, el área de D^* es aproximadamente $\sum \Delta u\,\Delta v$, donde la suma se extiende sobre todos los rectángulos dentro de D^* (*véase* la Figura 6.2.3). Por tanto, el área de $T(D^*)$ es aproximadamente la suma $\Sigma\,|\partial(x, y)/\partial(u, v)|\Delta u\,\Delta v$. En el límite esta suma será:

$$\iint_{D^*} \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv.$$

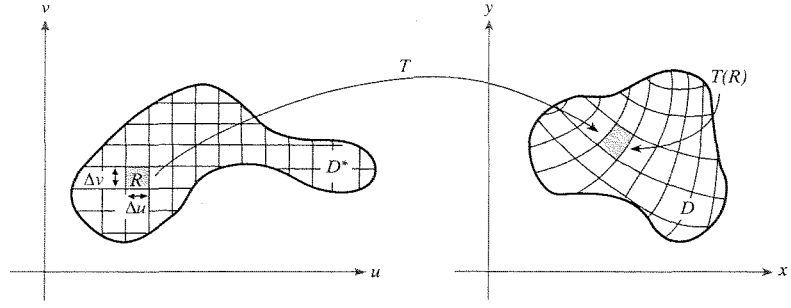


Figura 6.2.3. El área del rectángulo pequeño R es $\Delta u\,\Delta v$. El área de $T(R)$ es aproximadamente $|\partial(x, y)/\partial(u, v)|\Delta u\,\Delta v$.

Vamos a dar otro argumento informal para el caso especial (4) de la Fórmula (3), es decir, el caso de las coordenadas polares. Considérese la región D del plano xy y una malla correspondiente a una partición en las variables r y θ (Figura 6.2.4). El área de la región sombreada es aproximadamente $(\Delta r)(r_{ij}\,\Delta\theta)$, ya que la longitud de un arco de circunferencia de radio r y ángulo ϕ es $r\phi$. El área total es entonces el límite de $\sum r_{jk}\,\Delta r\,\Delta\theta$, es decir, $\int\int_{D^*} r\,dr\,d\theta$. La idea clave es, por tanto, que el jk-ésimo «rectángulo polar» de la malla tiene área aproximadamente igual a $r_{ij}\,\Delta r\,\Delta\theta$ (para n grande, el rectángulo polar jk-ésimo parecerá un rectángulo con lados de longitudes $r_{ij}\,\Delta\theta$ y Δr). Lo anterior debería dar una idea de por qué decimos: *el «elemento de área $dx\,dy$» se transforma en el «elemento de área $r dr\,d\theta$»*.

EJEMPLO 6.9 Sea D la región elemental del plano xy acotada por la gráfica de la ecuación en coordenadas polares $r = f(\theta)$, donde $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1$ y $f(\theta) = 0$ (*véase* la Figura 6.2.5). En el plano $r\theta$ consideramos la región r-simple D^*, donde $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1$ y $0 \leqslant r \leqslant f(\theta)$. La transformación

$x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ lleva la región D^* sobre la región D. Utilizar la Ecuación (4) para calcular el área de D.

Solución

$$A(D) = \iint_D dx\,dy = \iint_{D^*} \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}\right| dr\,d\theta$$

$$= \iint_{D^*} r\,dr\,d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left[\int_0^{f(\theta)} r\,dr\right] d\theta$$

$$= \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{f(\theta)} d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{[f(\theta)]^2}{2}\,d\theta.$$

Esta fórmula para $A(D)$ debe resultar familiar del cálculo de una variable.

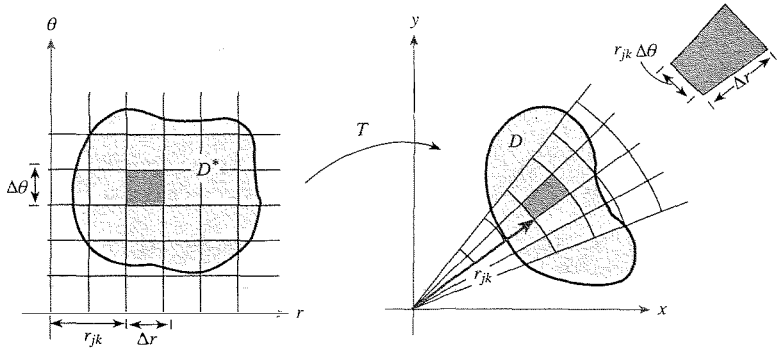


Figura 6.2.4. D^* se transforma en D por la aplicación de cambio a polares T.

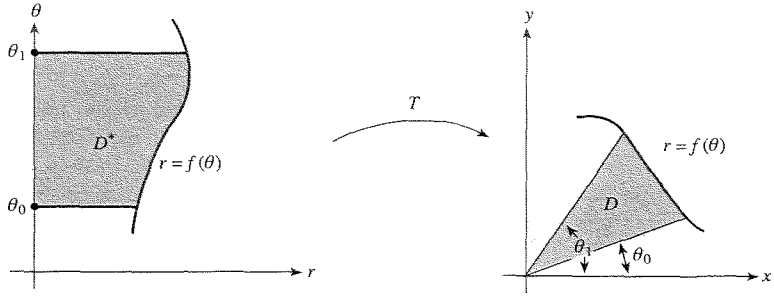


Figura 6.2.5. Efecto de la aplicación de cambio a polares sobre la región D^*.

Fórmula del cambio de variables

Antes de enunciar la fórmula del cambio de variables en dos variables, que es el objetivo de esta discusión, recordemos el teorema correspondiente del cálculo de una variable que recibe a veces el nombre de *método de sustitución*:

$$\int_a^b f(x(u))\,\frac{dx}{du}\,du = \int_{x(a)}^{x(b)} f(x)\,dx, \tag{5}$$

donde f es continua y $u \mapsto x(u)$ es continuamente diferenciable en $[a, b]$.

DEMOSTRACIÓN Sea F una primitiva de f; es decir, $F' = f$, cuya existencia garantiza el teorema fundamental del cálculo. El miembro derecho de la Ecuación (5) se convierte en

$$\int_{x(a)}^{x(b)} f(x)\,dx = F(x(b)) - F(x(a)).$$

Para calcular el miembro izquierdo de la Ecuación (5), ponemos $G(u) = F(x(u))$. Por la regla de la cadena, $G'(u) = F'(x(u))\,x'(u) = f(x(u))\,x'(u)$. De nuevo por el teorema fundamental,

$$\int_a^b f(x(u))\,x'(u)\,du = \int_a^b G'(u)\,du = G(b) - G(a) = F(x(b)) - F(x(a)),$$

como se quería.

Supóngase que ahora tenemos una *función* C^1, $u \mapsto x(u)$, que es inyectiva en $[a, b]$; por tanto debe ser $dx/du \geq 0$ en $[a, b]$ o $dx/du \leq 0$ en $[a, b]$[1]. Sea I^* el intervalo $[a, b]$, y sea I el intervalo cerrado con extremos $x(a)$ y $x(b)$ (por tanto, $I = [x(a), x(b)]$ si $u \mapsto x(u)$ es creciente e $I = [x(b), x(a)]$ si $u \mapsto x(u)$ es decreciente). Con estas convenciones podemos reescribir la Fórmula (5) como

$$\int_{I^*} f(x(u))\left|\frac{dx}{du}\right| du = \int_I f(x)\,dx.$$

Esta fórmula se generaliza a integrales dobles, como ya se ha hecho de manera informal en la Fórmula (3): I^* se convierte en D^*, I se convierte en D, y $|dx/du|$ se reemplaza por $|\partial(x, y)/\partial(u, v)|$. Enunciemos el resultado formalmente (se omite la demostración, que es técnica).

TEOREMA 2: Cambio de variables: integrales dobles Sean D y D^* regiones elementales del plano y sea $T: D^* \to D$ de clase C^1; supóngase que T es inyectiva. Además, supóngase que $D = T(D^*)$. Entonces para cualquier función integrable $f: D \to \mathbb{R}$, tenemos

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v))\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| du\,dv. \tag{6}$$

Uno de los propósitos del teorema del cambio de variables es el de proporcionar un método que permita simplificar algunas integrales dobles. Uno puede tropezarse con integrales $\iint_D f\,dA$

[1] Si dx/du es primero positiva y luego negativa, la función $x = x(u)$ primero sube y luego baja, y por tanto no es inyectiva; un resultado similar se da si dx/du es primero negativa y después positiva.

en las que bien el integrando f, bien la región D, es complicado y para el que un cálculo directo es difícil. Por tanto, se elige una aplicación T de forma que la integral sea más fácil de calcular con el nuevo integrando y la nueva región D^* (definida por $T(D^*) = D$). Desafortunadamente, el problema puede en realidad hacerse más difícil si T no se elige cuidadosamente.

EJEMPLO 6.10 Sea P el paralelogramo limitado por $y = 2x$, $y = 2x - 2$, $y = x$, e $y = x + 1$ (*véase* la Figura 6.2.6). Calcular $\iint_P xy\,dx\,dy$ por medio del cambio de variables

$$x = u - v, \qquad y = 2u - v,$$

es decir, $T(u, v) = (u - v, 2u - v)$.

Solución

La transformación T tiene determinante distinto de cero y por tanto es inyectiva (*véase* el Ejercicio 8 de la Sección 6.1). Se ha construido de forma que lleve el *rectángulo* P^*, limitado por $v = 0$, $v = -2$, $u = 0$, $u = 1$, en P. El uso de T simplifica la región de integración de P a P^*. Además,

$$\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| = \left|\det\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\right| = 1.$$

Por tanto, por la fórmula del cambio de variables,

$$\iint_P xy\,dx\,dy = \iint_{P^*} (u - v)(2u - v)\,du\,dv = \int_{-2}^{0}\int_{0}^{1} (2u^2 - 3vu + v^2)\,du\,dv$$

$$= \int_{-2}^{0}\left[\frac{2}{3}u^3 - \frac{3u^2v}{2} + v^2u\right]_0^1 dv = \int_{-2}^{0}\left[\frac{2}{3} - \frac{3}{2}v + v^2\right]dv$$

$$= \left[\frac{2}{3}v - \frac{3}{4}v^2 + \frac{v^3}{3}\right]_{-2}^{0} = -\left[\frac{2}{3}(-2) - 3 - \frac{8}{3}\right]$$

$$= -\left[-\frac{12}{3} - 3\right] = 7.$$

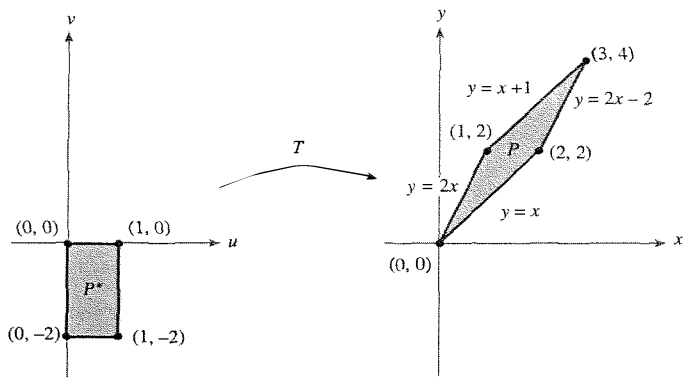


Figura 6.2.6. El efecto de $T(u, v) = (u - v, 2u - v)$ en el rectángulo P^*.

Integrales en coordenadas polares

Supóngase que consideramos el rectángulo D^* definido por $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant r \leqslant a$ en el plano $r\theta$. La transformación T, dada por $T(r, \theta) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)$, transforma D^* en el disco D de ecuación $x^2 + y^2 \leqslant a^2$ en el plano xy. Esta transformación representa el cambio de coordenadas cartesianas a coordenadas polares. Sin embargo T no satisface los requisitos del teorema de cambio de variables ya que no es inyectiva en D^*: en particular, T transforma todos los puntos con $r = 0$ en $(0, 0)$ (*véase* la Figura 6.2.7 y el Ejemplo 6.3). No obstante, el teorema del cambio de variables es válido en este caso. La razón es, básicamente, que el conjunto de puntos en los que T no es inyectiva está contenido en uno de los lados de D^*, que es la gráfica de una curva suave y, por tanto, es irrelevante a efectos de integración. En resumen, la Fórmula:

Cambio de variables: coordenadas polares

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta)\,r\,dr\,d\theta \qquad (7)$$

es válida cuando T transforma D^* en D de forma inyectiva salvo quizás los puntos de la frontera de D^*.

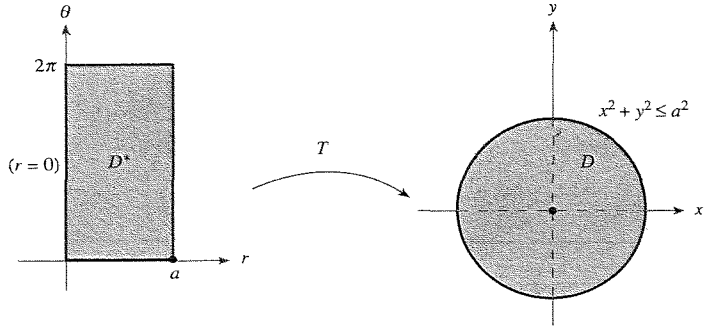


Figura 6.2.7. La imagen del rectángulo D^* por medio de la transformación a coordenadas polares es el círculo D.

EJEMPLO 6.11 Calcular $\iint_D \log(x^2 + y^2)dx\,dy$, donde D es la región del primer cuadrante comprendida entre los arcos de circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 = b^2$, donde $0 < a < b$ (Figura 6.2.8).

Solución

Estas circunferencias tienen en coordenadas polares las sencillas ecuaciones $r = a$, $r = b$. Además, $r^2 = x^2 + y^2$ aparece en el integrando; por tanto, un cambio a coordenadas polares simplificará tanto el integrando como la región de integración. Según el Ejemplo 6.7 la transformación

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

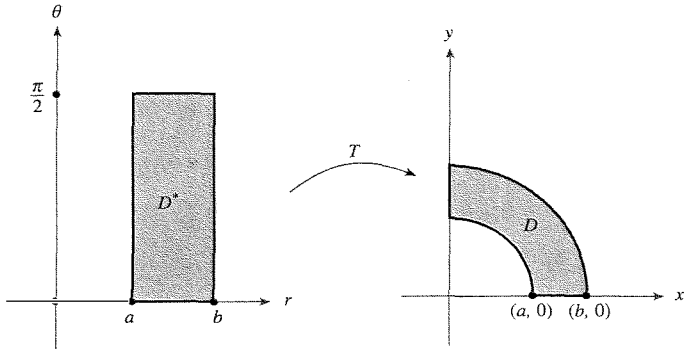


Figura 6.2.8. La aplicación de cambio a coordenadas polares transforma el rectánguo D^* en parte del anillo D.

que pasa de coordenadas polares a coordenadas cartesianas, transforma el rectángulo D^* dado por $a \leqslant r \leqslant b$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ en la región D. Esta transformación es inyectiva en D^* y por tanto, por la Fórmula (7), tenemos

$$\iint_D \log(x^2 + y^2)\, dx\, dy = \int_a^b \int_0^{\pi/2} r \log r^2\, d\theta\, dr$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_a^b r \log r^2\, dr = \frac{\pi}{2} \int_a^b 2r \log r\, dr.$$

Aplicando integración por partes o utilizando la fórmula

$$\int x \log x\, dx = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4}$$

de la tabla de *integrales* del libro, obtenemos el resultado

$$\frac{\pi}{2} \int_a^b 2r \log r\, dr = \frac{\pi}{2} \left[b^2 \log b - a^2 \log a - \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \right].$$

EJEMPLO 6.12 **La integral gaussiana** Una de las aplicaciones de mayor belleza de la fórmula del cambio de variables a coordenadas polares y la reducción a integrales iteradas es su uso en la fórmula siguiente, conocida como ***integral gaussiana***:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

No sólo es esta fórmula muy elegante en sí misma sino que además es útil en áreas como la estadística. Ilustra además la unidad que existe entre los números trascendentes e y π casi tan bien como lo hace la fórmula clásica $e^{i\pi} = -1$.

Para llevar a cabo la integración de la integral gaussiana[2], calculamos primeramente la integral doble

$$\iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy,$$

donde D_a es el disco $x^2 + y^2 \leqslant a^2$. Dado que $r^2 = x^2 + y^2$, y $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$, la fórmula del cambio de variables da:

$$\iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^a e^{-r^2} r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Big|_0^a d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(e^{-a^2} - 1)\,d\theta = \pi(1 - e^{-a^2}).$$

Si hacemos $a \to \infty$ en esta expresión, damos sentido a la integral impropia y obtenemos

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \pi.$$

Si suponemos (como se hace en el suplemento de Internet) que también podemos evaluar esta integral impropia como el límite de las integrales sobre los rectángulos $R_a = [-a, a] \times [-a, a]$, cuando $a \to \infty$, obtenemos

$$\lim_{a\to\infty}\iint_{R_a} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \pi.$$

Por reducción a integrales iteradas podemos escribir esto último como

$$\lim_{a\to\infty}\left[\int_{-a}^a e^{-x^2}\,dx\int_{-a}^a e^{-y^2}\,dy\right] = \left[\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^a e^{-x^2}\,dx\right]^2 = \pi;$$

esto es

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right]^2 = \pi.$$

Por tanto, si tomamos raíces cuadradas llegamos al resultado deseado.

Una variante de la integral gaussiana: evaluar

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2}\,dx.$$

[2] El método que sigue no es en forma alguna directo, sino que requiere un truco. El truco consiste en comenzar con la fórmula deseada y elevar al cuadrado ambos miembros. Se observará entonces que el primer miembro parece una integral iterada. Hay otras formas de calcular la integral gaussiana pero todas ellas requieren métodos que no son obvios. Para ver cómo se calcula usando métodos de variable compleja consúltese, por ejemplo, J. Marsden y M. Hoffman, *Basic Complex Analysis*, 3.ª ed., W. H. Freeman, New York, 1998.

Para hacerlo, utilizar la fórmula del cambio de variables con $y = \sqrt{2}x$ a fin de reducir el problema a la integral gaussiana recién calculada:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} e^{-2x^2}\,dx = \lim_{a\to\infty}\int_{-\sqrt{2}a}^{\sqrt{2}a} e^{-y^2}\,\frac{dy}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Fórmula del cambio de variables para integrales triples

Para enunciar esta fórmula definimos primeramente el jacobiano de una transformación de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ —es una extensión fácil del caso de dos variables.

DEFINICIÓN Sea T: $W \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una función C^1 definida por las ecuaciones $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$. Entonces el ***jacobiano*** de T, que se denota por $\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$, es el determinante

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

El valor absoluto de este determinante es igual al volumen del paralelepípedo determinado por los tres vectores

$$\mathbf{T}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\,\mathbf{k},$$

$$\mathbf{T}_v = \frac{\partial x}{\partial v}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\,\mathbf{k},$$

$$\mathbf{T}_w = \frac{\partial x}{\partial w}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial w}\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial w}\,\mathbf{k}.$$

Igual que en el caso de dos variables, el jacobiano mide cómo la transformación T distorsiona el volumen de su dominio; por tanto, para las integrales de volumen (triples) la fórmula del cambio de variables toma la forma siguiente:

Fórmula de cambio de variables: integrales triples

$$\iiint_W f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$
$$= \iiint_{W^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| du\,dv\,dw, \tag{8}$$

donde W^* es una región elemental en el espacio uvw que se corresponde con W en el espacio xyz por una aplicación T: $(u, v, w) \mapsto (x,(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$, supuesto que T es de clase C^1 y que es inyectiva excepto, posiblemente, en un conjunto que es unión de gráficas de funciones de dos variables.

Coordenadas cilíndricas

Vamos a aplicar la Fórmula (8) primero a coordenadas cilíndricas y después a coordenadas esféricas. Primeramente calculamos el jacobiano de la aplicación que define el cambio a coordenadas cilíndricas. Dado que

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta, \qquad z = z,$$

tenemos

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta & 0 \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Por tanto obtenemos la fórmula

Cambio de variables: coordenadas cilíndricas

$$\iiint_W f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{W^*} f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, z)r\,dr\,d\theta\,dz. \tag{9}$$

Coordenadas esféricas

A continuación consideramos el sistema de coordenadas esféricas. Recuérdese que se define por

$$x = \rho\,\text{sen}\,\phi\cos\theta, \qquad y = \rho\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta, \qquad z = \rho\cos\phi.$$

Por tanto, tenemos

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\phi\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\operatorname{sen}\theta \\ \cos\phi & 0 & -\rho\operatorname{sen}\phi \end{vmatrix}.$$

Desarrollando por la última fila obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} &= \cos\phi \begin{vmatrix} -\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\ \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\operatorname{sen}\theta \end{vmatrix} - \rho\operatorname{sen}\phi \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\phi\cos\theta & -\rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta & \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta \end{vmatrix} \\ &= -\rho^2\cos^2\phi\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}^2\theta - \rho^2\cos^2\phi\operatorname{sen}\phi\cos^2\theta \\ &\quad - \rho^2\operatorname{sen}^3\phi\cos^2\theta - \rho^2\operatorname{sen}^3\phi\operatorname{sen}^2\theta \\ &= -\rho^2\cos^2\phi\operatorname{sen}\phi - \rho^2\operatorname{sen}^3\phi = -\rho^2\operatorname{sen}\phi. \end{aligned}$$

Llegamos, por tanto, a la fórmula:

Cambio de variables: coordenadas esféricas

$$\iiint_W f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{W^*} f(\rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \rho\cos\phi)\rho^2\operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi. \quad (10)$$

Para demostrar la Fórmula (10) se debe mostrar que la transformación S en el conjunto W^* es inyectiva excepto en un conjunto que es unión finita de gráficas de funciones continuas. Dejamos esta verificación como Ejercicio 34.

EJEMPLO 6.13 Calcular

$$\iiint_W \exp(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}\,dV,$$

donde W es la bola unidad de $\mathbb{R}^3$.

Solución

Nótese primeramente que no podemos integrar *fácilmente* esta función usando integrales iteradas (¡inténtese!). Por tanto (empleando la estrategia de la cita que abre este capítulo) intentemos un cambio de variables. La transformación a coordenadas esféricas parece apropiada, ya que la expresión completa $x^2 + y^2 + z^2$ se puede sustituir por una variable: ρ^2. Si W^* es la región tal que

$$0 \leqslant \rho \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi,$$

podemos aplicar la Fórmula (10) y escribir

$$\iiint_W \exp(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}\, dV = \iiint_{W*} \rho^2 e^{\rho^3} \operatorname{sen} \phi \; d\rho \, d\theta \, d\phi.$$

Esta integral es igual a la integral iterada

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{\rho^3} \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\theta \, d\phi \, d\rho &= 2\pi \int_0^1 \int_0^\pi e^{\rho^3} \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\phi \, d\rho \\ &= -2\pi \int_0^1 \rho^2 e^{\rho^3} [\cos \phi]_0^\pi \, d\rho \\ &= 4\pi \int_0^1 e^{\rho^3} \rho^2 \, d\rho = \frac{4}{3}\pi \int_0^1 e^{\rho^3} (3\rho^2) \, d\rho \\ &= \left[\frac{4}{3}\pi e^{\rho^3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\pi(e - 1).\end{aligned}$$

EJEMPLO 6.14 Sea W la bola de radio R y centro $(0, 0, 0)$ en $\mathbb{R}^3$. Hallar el volumen de W.

Solución

El volumen de W es $\iiint_W dx\, dy\, dz$. Esta integral se puede calcular reduciéndola a integrales iteradas o considerando W como un volumen de revolución, pero vamos a evaluarla aquí por medio de coordenadas esféricas. Obtenemos

$$\begin{aligned}\iiint_W dx\, dy\, dz &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho^2 \operatorname{sen} \phi \; d\rho \, d\theta \, d\phi = \frac{R^3}{3} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \phi \; d\theta \, d\phi \\ &= \frac{2\pi R^3}{3} \int_0^\pi \operatorname{sen} \phi \; d\phi = \frac{2\pi R^3}{3} \{-[\cos(\pi) - \cos(0)]\} = \frac{4\pi R^3}{3},\end{aligned}$$

que es la fórmula usual del volumen de la esfera.

EJERCICIOS

1. Sea D el disco unidad $x^2 + y^2 \leq 1$. Calcular

$$\iint_D \exp(x^2 + y^2)\, dx\, dy$$

por medio de un cambio de variables a coordenadas polares.

2. Sea D la región $0 \leqslant y \leqslant x$, y $0 \leqslant x \leqslant 1$. Calcular

$$\iint_D (x + y)\,dx\,dy$$

por medio del cambio de variables $x = u + v$, $y = u - v$. Comprobar el resultado por medio del cálculo directo de la integral resolviendo una integral iterada.

3. Sea $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ la aplicación definida por $T(u, v) = (4u, 2u + 3v)$. Sea D^* el rectángulo $[0, 1] \times [1, 2]$. Hallar $D = T(D^*)$ y calcular

a) $\iint_D xy\,dx\,dy$, **b)** $\iint_D (x - y)\,dx\,dy$,

por medio de un cambio de variables que las calcule como integrales sobre D^*.

4. Repetir el Ejercicio 3 con $T(u, v) = (u, v(1 + u))$.

5. Calcular

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{1 + x + 2y}},$$

donde $D = [0, 1] \times [0, 1]$, haciendo $T(u, v) = (u, v/2)$ y calculando una integral sobre D^*, donde $T(D^*) = D$.

6. Definir $T(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$. Sea D^* el conjunto de (u, v) con $u^2 + v^2 \leqslant 1$, $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$. Hallar $T(D^*) = D$. Calcular $\iint_D dx\,dy$.

7. Sea $T(u, v)$ como en el Ejercicio 6. Por medio de un cambio de variables calcular «formalmente» la integral «impropia»

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

NOTA: Esta integral (y la del ejercicio siguiente) es *impropia*, ya que el integrando $1/\sqrt{x^2 + y^2}$ no es ni continuo ni acotado en el dominio de integración (la teoría de integrales impropias se estudiará en la Sección 6.4).

8. Calcular $\iint_R \frac{1}{x + y}\,dy\,dx$, donde R es la región acotada por $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$, $x + y = 4$, por medio de la aplicación $T(u, v) = (u - uv, uv)$.

9. Calcular $\iint_D (x^2 + y^2)^{3/2}\,dx\,dy$, donde D es el disco $x^2 + y^2 \leqslant 4$.

10. Sea D^* una región v-simple en el plano uv acotada por $v = g(u)$ y $v = h(u) \leqslant g(u)$ con $a \leqslant u \leqslant b$. Sea $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación dada por $x = u$, $y = \psi(u, v)$ donde ψ es de clase C^1 y $\partial\psi/\partial v$ nunca se anula. Suponer que $T(D^*) = D$ es una región y-simple; demostrar que si $f: D \to \mathbb{R}$ es continua entonces

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(u, \psi(u, v)) \left|\frac{\partial\psi}{\partial v}\right| du\,dv.$$

11. Usar integrales dobles para hallar el área encerrada por la curva $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$.

12. **a)** Expresar $\int_0^1 \int_0^{x^2} xy\,dy\,dx$ como una integral sobre el triángulo D^*, que es el conjunto de puntos (u, v) que cumplen $0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant u$ [INDICACIÓN: hallar una aplicación biyectiva T de D^* en la región de integración dada.]

b) Calcular directamente esta integral como una integral sobre D^*.

13. Integrar $ze^{x^2+y^2}$ sobre el cilindro $x^2 + y^2 \leqslant 4$, $2 \leqslant z \leqslant 3$.

14. Sea D el disco unidad. Expresar $\iint_D (1 + x^2 + y^2)^{3/2}\,dx\,dy$ como una integral sobre $[0, 1] \times [0, 2\pi]$ y calcularla.

15. Hallar el área acotada por la *lemniscata* $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$, utilizando coordenadas polares.

16. Hacer de nuevo el Ejercicio 11 de la Sección 5.3 por medio de un cambio de variables y comparar los esfuerzos requeridos en cada método.

17. Calcular $\iint_R (x + y)^2 e^{x-y}\,dx\,dy$, donde R es la región acotada por $x + y = 1$, $x + y = 4$, $x - y = -1$, y $x - y = 1$.

18. Sea T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación definida por

$$T(u, v, w) = (u \cos v \cos w,\ u \operatorname{sen} v \cos w,\ u \operatorname{sen} w).$$

a) Demostrar que T es sobreyectiva sobre la esfera unidad; es decir, todo (x, y, z) con $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ se puede escribir como $(x, y, z) = T(u, v, w)$ para algún (u, v, z).

b) Demostrar que T no es inyectiva.

19. Integrar $x^2 + y^2 + z^2$ sobre el cilindro $x^2 + y^2 \leqslant 2$, $-2 \leqslant z \leqslant 3$.

20. Calcular $\int_0^\infty e^{-4x^2}\,dx$.

21. Sea B la bola unidad. Calcular

$$\iiint_B \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{2 + x^2 + y^2 + z^2}}$$

por medio de un cambio de variables apropiado.

22. Calcular $\iint_A [1/(x^2 + y^2)^2]\,dx\,dy$, donde A está determinado por las condiciones $x^2 + y^2 \leqslant 1$ y $x + y \geqslant 1$.

23. Calcular $\iiint_W \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$, donde W es el sólido acotado por las dos esferas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, donde $0 < b < a$.

24. Calcular $\iint_D x^2\,dx\,dy$, donde D esta determinado por las dos condiciones $0 \leqslant x \leqslant y$, y $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

25. Integrar $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, e^{-(x^2+y^2+z^2)}$ sobre la región descrita en el Ejercicio 23.

26. Calcular las siguientes integrales usando coordenadas cilíndricas.

a) $\iiint_B z\,dx\,dy\,dz$, donde B es la región dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ por encima del plano xy, y por debajo del cono $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

b) $\iiint_W (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}\,dx\,dy\,dz$, donde W es la región determinada por las condiciones $\frac{1}{2} \leqslant z \leqslant 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$.

27. Calcular $\iint_B (x + y)\,dx\,dy$, donde B es el rectángulo del plano xy con vértices en (0, 1), (1, 0), (3, 4) y (4, 3).

28. Calcular $\iint_D (x + y)\,dx\,dy$, donde D es el cuadrado con vértices en (0, 0), (1, 2), (3, 1) y (2, −1).

29. Sea E el elipsoide $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) \leqslant 1$, donde a, b y c son positivos.

a) Hallar el volumen de E.

b) Calcular $\iiint_E [(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2)]\,dx\,dy\,dz$ [INDICACIÓN: cambiar variables y después utilizar coordenadas esféricas.]

30. Utilizando coordenadas esféricas, calcular la integral de $f(\rho, \phi, \theta) = 1/\rho$ sobre la región del primer octante de $\mathbb{R}^3$ que está acotada por los conos $\phi = \pi/4$, $\phi = \arctan 2$ y la esfera $\rho = \sqrt{6}$.

31. La aplicación $T(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$ transforma el rectángulo $1 \leqslant u \leqslant 2$, $1 \leqslant v \leqslant 3$ del plano uv en una región R del plano xy.

a) Demostrar que T es inyectiva.

b) Hallar el área de R utilizando la fórmula de cambio de variables.

32. Sea R denota la región interior a $x^2 + y^2 = 1$, y exterior a $x^2 + y^2 = 2y$ con $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

a) Esbozar esta región.

b) Sea $u = x^2 + y^2$, $v = x^2 + y^2 - 2y$. Esbozar la región D del plano uv que se corresponde con R bajo este cambio de coordenadas.

c) Calcular $\iint_R xe^y\,dx\,dy$ usando este cambio de coordenadas.

33. Sea D la región acotada por $x^{3/2} + y^{3/2} = a^{3/2}$, para $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, y los ejes coordenados $x = 0$, $y = 0$. Expresar $\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$ como una integral sobre el triángulo D^*, que es el conjunto de puntos $0 \leqslant u \leqslant a$, $0 \leqslant v \leqslant a - u$ (no intentar calcularla).

34. Demostrar que $S(\rho, \theta, \phi) = (\rho \operatorname{sen} \phi \cos\theta, \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen}\theta, \rho \cos\phi)$, la aplicación de cambio a coordenadas polares, es inyectiva salvo en un conjunto que es unión finita de gráficas de funciones continuas.

6.3. Aplicaciones

En esta sección discutiremos medias, centros de masa, momentos de inercia y el potencial gravitacional como aplicaciones.

Medias

Si $x_1, \ldots, x_n$ son n números su ***media*** se define como

$$[x_i]_{\mathrm{m}} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Nótese que si todos los x_i tienen el mismo valor c entonces su media es también, por supuesto, igual a c.

Este concepto lleva a definir los valores medios de las funciones como sigue.

Valores medios El ***valor medio*** de una función de una variable en el intervalo $[a, b]$ se define como

$$[f]_{\mathrm{m}} = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b - a}.$$

De igual forma, para funciones de dos variables la razón de la integral al área de D,

$$[f]_{\mathrm{m}} = \frac{\iint_D f(x, y)\,dx\,dy}{\iint_D dx\,dy} \tag{1}$$

se llama ***valor medio*** de f sobre D. Análogamente, el ***valor medio*** de una función f en una región W en el espacio de tres dimensiones se define como

$$[f]_{\mathrm{m}} = \frac{\iiint_W f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_W dx\,dy\,dz}.$$

Nótese de nuevo que el denominador se ha elegido de forma que si f es una constante, digamos c, entonces $[f]_{\mathrm{m}} = c$.

EJEMPLO 5.15 Hallar el valor medio de $f(x, y) = x \operatorname{sen}^2(xy)$ en la región $D = [0, \pi] \times [0, \pi]$.

Solución

Primeramente calculamos

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} x \operatorname{sen}^2(xy)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{\pi} \left[\int_0^{\pi} \frac{1 - \cos(2xy)}{2}\,x\,dy \right] dx$$

$$= \int_0^{\pi} \left[\frac{y}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2xy)}{4x} \right] x \Big|_{y=0}^{\pi} dx$$

$$= \int_0^{\pi} \left[\frac{\pi x}{2} - \frac{\operatorname{sen}(2\pi x)}{4} \right] dx = \left[\frac{\pi x^2}{4} + \frac{\cos(2\pi x)}{8\pi} \right] \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi^3}{4} + \frac{\cos(2\pi^2) - 1}{8\pi}.$$

Por tanto, el valor medio de f, por la Fórmula (1), es:

$$\frac{\pi^3/4 + [\cos(2\pi^2) - 1]/8\pi}{\pi^2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\cos(2\pi^2) - 1}{8\pi^3} \approx 0{,}7839.$$

EJEMPLO 6.16 La temperatura en los puntos del cubo $W = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ es proporcional al cuadrado de la distancia al origen.

a) ¿Cuál es la temperatura media?

b) ¿En qué puntos del cubo es la temperatura igual a la temperatura media?

Solución

a) Sea c la constante de proporcionalidad de forma que $T = c(x^2 + y^2 + z^2)$ y la temperatura media es $[T]_m = \frac{1}{8} \iiint_W T\,dx\,dy\,dz$, ya que el volumen del cubo es 8. Por tanto,

$$[T]_m = \frac{c}{8} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} (x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz.$$

La integral triple es la suma de las integrales de x^2, de y^2, y de z^2. Dado que el papel de x, y, z en la descripción del cubo es simétrico, las tres integrales serán iguales; por tanto

$$[T]_m = \frac{3c}{8} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} z^2\,dx\,dy\,dz = \frac{3c}{8} \int_{-1}^{1} z^2 \left(\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} dx\,dy \right) dz.$$

La integral interior es igual al área del cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$. El área del cuadrado es 4, luego

$$[T]_m = \frac{3c}{8} \int_{-1}^{1} 4z^2\,dz = \frac{3c}{2} \left(\frac{z^3}{3} \right) \Big|_{-1}^{1} = c.$$

b) La temperatura es igual a la temperatura media en todos los puntos que satisfacen $c(x^2 + y^2 + z^2) = c$, es decir, que están en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, que es la esfera inscrita en el cubo W.

Centros de masa

Si se sitúan masas $m_1, \ldots, m_n$ en los puntos $x_1, \ldots, x_n$ del eje x, su ***centro de masa*** se define como

$$\bar{x} = \frac{\Sigma\, m_i x_i}{\Sigma\, m_i}. \tag{2}$$

Esta definición se justifica por medio de la siguiente observación: si se equilibran varias masas sobre una palanca (Figura 6.3.1) el punto de equilibrio $\bar{x}$ es el punto en el que el momento total (masa por distancia al punto de equilibrio) es cero, es decir, para el que $\sum m_i(x_i - \bar{x}) = 0$. Un principio físico que se remonta a Arquímedes y, en su forma general, a Newton, establece que esta condición es equivalente a que la palanca no tenga tendencia a rotar.

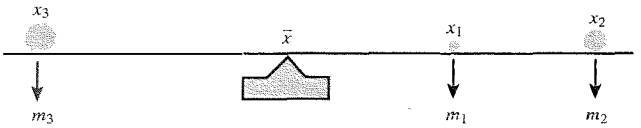


Figura 6.3.1. La palanca está equilibrada si $\sum(x_i - \bar{x})m_i = 0$.

Para una densidad de masa continua $\delta(x)$ sobre la palanca (medida, digamos, en gramos/cm) la fórmula análoga a (2) es

$$\bar{x} = \frac{\int x\delta(x)\,dx}{\int \delta(x)\,dx}. \tag{3}$$

Para superficies planas, lo anterior se generaliza a:

Centro de masa de una superficie plana

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\delta(x, y)\,dx\,dy}{\iint_D \delta(x, y)\,dx\,dy} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y\delta(x, y)\,dx\,dy}{\iint_D \delta(x, y)\,dx\,dy}, \tag{4}$$

donde, de nuevo, $\delta(x, y)$ es la densidad de masa (*véase* la Figura 6.3.2).

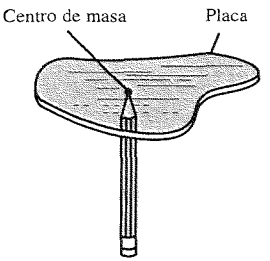


Figura 6.3.2. La placa se equilibra cuando se apoya en el centro de masa.

EJEMPLO 6.17 Hallar el centro de masa del rectángulo $[0, 1] \times [0, 1]$ si la densidad de masa es e^{x+y}.

Solución

Primeramente calculamos la masa total:

$$\iint_{\blacksquare} e^{x+y}\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^1 e^{x+y}\,dx\,dy = \int_0^1 (e^{x+y}|_{x=0}^1)\,dy = \int_0^1 (e^{1+y} - e^y)\,dy$$
$$= (e^{1+y} - e^y)|_{y=0}^1 = e^2 - e - (e-1) = e^2 - 2e + 1.$$

El numerador de $\bar{x}$ en la Fórmula (4) es

$$\int_0^1 \int_0^1 xe^{x+y}\,dx\,dy = \int_0^1 (xe^{x+y} - e^{x+y})|_{x=0}^1\,dy = \int_0^1 [e^{1+y} - e^{1+y} - (0e^y - e^y)]\,dy$$
$$= \int_0^1 e^y\,dy = e^y|_{y=0}^1 = e - 1;$$

por tanto

$$\bar{x} = \frac{e-1}{e^2 - 2e + 1} = \frac{e-1}{(e-1)^2} = \frac{1}{e-1} \approx 0{,}582.$$

Los papeles de x y de y pueden intercambiarse en estos cálculos, por lo que también $\bar{y} = 1/(e-1) \approx 0{,}582$.

Para una región en el espacio W con densidad de masa $\delta(x, y, z)$ sabemos que

$$\text{volumen} = \iiint_W dx\,dy\,dz, \tag{5}$$

$$\text{masa} = \iiint_W \delta(x, y, z)\,dx\,dy\,dz. \tag{6}$$

Si las coordenadas del centro de masa se denotan por $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, entonces la generalización de las fórmulas en el recuadro precedente es la siguiente:

Coordenadas del centro de masa de regiones tridimensionales

$$\bar{x} = \frac{\iiint_W x\delta(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}{\text{masa}},$$
$$\bar{y} = \frac{\iiint_W y\delta(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}{\text{masa}}, \tag{7}$$
$$\bar{z} = \frac{\iiint_W z\delta(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}{\text{masa}},$$

EJEMPLO 6.18 El cubo $[1, 2] \times [1, 2] \times [1, 2]$ tiene densidad de masa dada por $d(x, y, z)) = (1 + x)e^z y$. Hallar su masa total.

Solución

La masa del cubo, por la Fórmula (6), es

$$\int_1^2 \int_1^2 \int_1^2 (1 + x)e^z y \, dx \, dy \, dz = \int_1^2 \int_1^2 \left[\left(x + \frac{x^2}{2} \right) e^z y \right]_{x=1}^{x=2} dy \, dz$$

$$= \int_1^2 \int_1^2 \frac{5}{2} e^z y \, dy \, dz = \int_1^2 \frac{15}{4} e^z \, dz = \left[\frac{15}{4} e^z \right]_{z=1}^{z=2} = \frac{15}{4} (e^2 - e).$$

Si tanto una región como su densidad de masa son simétricas respecto de un plano, el centro de masa cae en ese plano. Por ejemplo, en la fórmula de $\bar{x}$ en (7) si la región y la densidad de masa son ambas simétricas respecto del plano yz, entonces el integrando es impar en x y por tanto $\bar{x} = 0$. Esta forma de usar la simetría se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 6.19 Hallar el centro de masa de W, la región semiesférica definida por las desigualdades $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$, $z \geqslant 0$ (supóngase que la densidad es igual a 1).

Solución

Por simetría, el centro de masa debe caer sobre el eje z, por tanto $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Para hallar $\bar{z}$ debemos calcular, por la Fórmula (7), el numerador $I = \iiint_W z \, dx \, dy \, dz$. La semiesfera es una región elemental y por tanto la integral es

$$I = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \int_{-\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} z \, dx \, dy \, dz.$$

Dado que z es constante en las integraciones respecto de x y de y, podemos extraerla de los dos primeros signos de integración y obtener

$$I = \int_0^1 z \left(\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \int_{-\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} dx \, dy \right) dz.$$

En vez de calcular explícitamente la integral iterada entre paréntesis, observamos que ésta es igual a la integral doble $\iint_{\mathcal{D}} dx \, dy$ sobre el disco $x^2 + y^2 \leqslant 1 - z^2$, considerado como región x-simple del plano. El área de este disco es $\pi(1 - z^2)$ y por tanto

$$I = \pi \int_0^1 z(1 - z^2) \, dz = \pi \int_0^1 (z - z^3) \, dz = \pi \left[\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

El volumen de la semiesfera es $\frac{2}{3}\pi$ y entonces $\bar{z} = (\pi/4)/(\frac{2}{3}\pi) = \frac{3}{8}$.

Nota Histórica

Es bien sabido que fue Arquímedes quien descubrió el principio de la palanca. Tal vez lo sea menos que también a él se deben los conceptos de centro de masa y centro de gravedad. Solamente dos de sus trabajos en mecánica han llegado hasta nosotros: *Sobre los cuerpos flotantes* y *Sobre el equilibrio y los centros de masa de las figuras planas*. Ambos fueron traducidos al latín por Niccolo Tartaglia, alrededor de 1543.

En *Sobre el equilibrio*... Arquímedes dio los primeros pasos en el campo de las matemáticas aplicadas haciendo para la mecánica lo que Euclides había logrado para la geometría. En este tratado describe los principios en los que se basan todas las máquinas de la antigüedad, incluyendo la palanca, el plano inclinado y el sistema de poleas.

Sorprendentemente, Arquímedes nunca definió con precisión el centro de masa; la primera definición propiamente dicha la dio Pappus de Alejandría en 340 d.C. El concepto de equilibrio iba a tener una notable influencia en el desarrollo de la ingeniería mecánica (mediante la introducción de engranajes), la arquitectura y el arte, al permitir la construcción de máquinas complejas, edificios de grandes dimensiones y esculturas. La Figura 6.3.3 muestra esbozos de Leonardo da Vinci que ilustran posiciones de equilibrio del cuerpo humano.

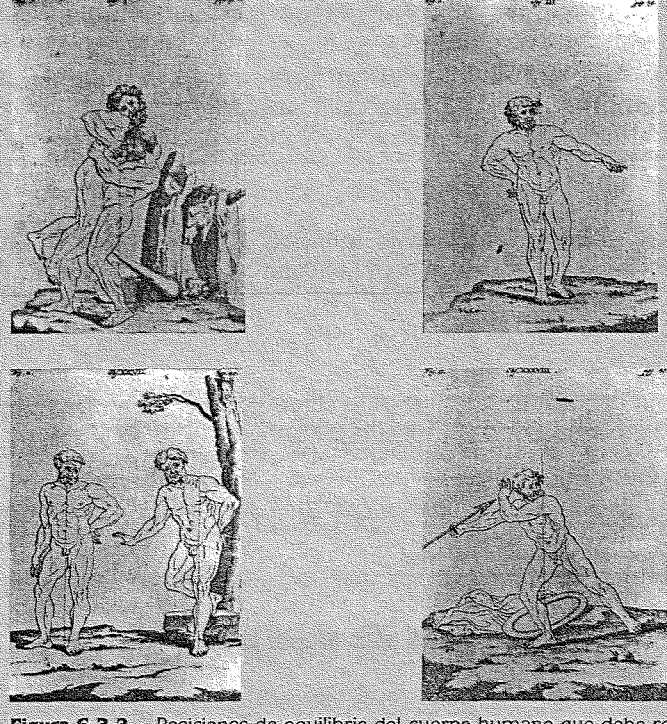


Figura 6.3.3. Posiciones de equilibrio del cuerpo humano que debe respetar el pintor. La proyección del centro de masa ha de caer en la base de apoyo a fin de mantener el equilibrio.

Momentos de inercia

Otro concepto importante en mecánica, necesario para estudiar la dinámica de un cuerpo rígido en rotación, es el de *momento de inercia*. Si el sólido W tiene densidad uniforme δ, los ***momentos de inercia*** I_x, I_y, I_z respecto de los ejes x, y, z, respectivamente, se definen por

Momentos de inercia respecto de los ejes coordenados

$$I_x = \iiint_W (y^2 + z^2)\delta\, dx\, dy\, dz, \qquad I_y = \iiint_W (x^2 + z^2)\delta\, dx\, dy\, dz,$$

$$I_z = \iiint_W (x^2 + y^2)\delta\, dx\, dy\, dz. \tag{8}$$

El momento de inercia mide la respuesta de un cuerpo a los esfuerzos para someterlo a rotaciones; como por ejemplo, cuando uno trata de hacer girar un tiovivo. El concepto de momento de inercia es análogo al de masa, que mide la respuesta de un cuerpo a los esfuerzos para someterlo a traslaciones. Sin embargo, a diferencia del movimiento de translación, los momentos de inercia *dependen de la forma y no solamente de la masa total.* Es más difícil hacer girar una placa grande que una bola compacta de la misma masa.

Por ejemplo, I_x mide la respuesta del cuerpo a las fuerzas que intentan hacerlo rotar alrededor del eje x. El factor $y^2 + z^2$, que es el cuadrado de la distancia al eje x, pondera más las masas más alejadas del eje de rotación, cosa que coincide con la idea intuitiva que acabamos de dar.

EJEMPLO 6.20 Calcular el momento de inercia I_z del sólido por encima del plano xy, acotado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y por el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, si se supone que a y la densidad de masa son constantes.

Solución

El paraboloide y el cilindro se intersecan sobre el plano $z = a^2$. Utilizando coordenadas cilíndricas hallamos, a partir de la Ecuación (8), que

$$I_z = \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{r^2} \delta r^2 \cdot r\, dz\, d\theta\, dr = \delta \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^{r^2} r^3\, dz\, d\theta\, dr = \frac{\pi\delta a^6}{3}.$$

Campos gravitatorios de cuerpos sólidos

Otra aplicación física interesante de la integración triple es la determinación de los campos gravitatorios de cuerpos sólidos. El Ejemplo 2.52 mostraba que el campo de fuerzas gravitatorias $\mathbf{F}(x, y, z)$ de una partícula es el gradiente cambiado de signo de una función $V(x, y, z)$ llamada ***potencial gravitatorio***. Si en el punto (x, y, z) hay una masa puntual M entonces

el potencial gravitatorio que actúa sobre una masa m en el punto (x_1, y_1, z_1) debido a ella es $-GmM\,[(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2]^{-1/2}$, donde G es la constante de gravitación universal.

Si el objeto atractor ocupa un dominio W con densidad de masa $\delta(x, y, z)$, podemos imaginarlo como constituido por regiones cúbicas infinitesimales con masa $dM = \delta(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ situada en cada punto (x, y, z). El potencial gravitatorio total V de W se obtiene «sumando» los potenciales debidos a las masas infinitesimales. De esta forma se llega a la integral triple (*véase* la Figura 6.3.4):

$$V(x_1, y_1, z_1) = -Gm \iiint_W \frac{\delta(x, y, z)\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}. \tag{9}$$

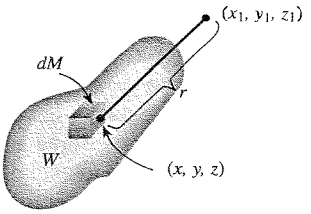


Figura 6.3.4. El potencial gravitatorio que produce sobre una masa m situada en el punto (x_1, y_1, z_1) una fuerza debida a la actuación de la masa $dM = \delta(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ desde el punto (x, y, z) es $-[Gm\delta(x, y, z)\,dx\,dy\,dz]/r$.

Nota Histórica

Sir Isaac Newton (1642-1727) desarrolló la teoría de campos de fuerzas y potenciales gravitatorios. Demoró la publicación de sus teorías durante largo tiempo. El resultado de que un planeta esférico tiene el mismo campo gravitatorio que tendría si toda su masa se concentrara en su centro apareció por primera vez en sus famosos *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, cuya primera edición vio la luz en 1687. Resolveremos aquí el problema de Newton utilizando integrales múltiples y coordenadas esféricas; sorprendentemente, la solución que Newton publicó utilizaba únicamente geometría euclídea.

EJEMPLO 6.21 Sea W una región con densidad constante y con masa total M. Demostrar que el potencial gravitatorio es

$$V(x_1, y_1, z_1) = \left[\frac{1}{r}\right]_m GMm,$$

donde $[1/r]_m$ es la media sobre W de

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}.$$

Solución

Según la Fórmula (9),

$$-V(x_1, y_1, z_1) = Gm\iiint_W \frac{\delta\, dx\, dy\, dz}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}}$$

$$= Gm\delta \iiint_W \frac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}}$$

$$= Gm\,[\delta \text{ volumen } (W)]\, \frac{\displaystyle\iiint_W \frac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}}}{\text{volumen } (W)}$$

$$= GmM\left[\frac{1}{r}\right]_{\mathrm{m}},$$

como se pedía.

Usemos ahora la Fórmula (9) y coordenadas esféricas para hallar el potencial gravitatorio $V(x_1, y_1, z_1)$ de una región W con densidad constante entre las esferas concéntricas $\rho = \rho_1$ y $\rho = \rho_2$. Antes de evaluar la integral de la Fórmula (9) vamos a hacer varias observaciones que simplificarán los cálculos. Dado que G, m y la densidad son constantes podemos primeramente ignorarlas. Dado que el cuerpo atractor W es simétrico respecto de las rotaciones con centro en el origen, el potencial $V(x_1, y_1, z_1)$ también debe ser simétrico y por tanto $V(x_1, y_1, z_1)$ depende solamente de $R = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$, la distancia al origen. Nuestro cálculo será lo más simple posible si lo efectuamos en el punto $(0, 0, R)$ que está sobre el eje z (*véase* la Figura 6.3.5). Por tanto tenemos que calcular la integral:

$$V(0, 0, R) = -\iiint_W \frac{dx\, dy\, dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-R)^2}}.$$

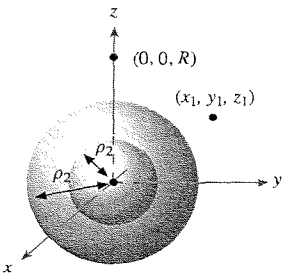


Figura 6.3.5. El potencial gravitatorio en (x_1, y_1, z_1) es el mismo que en $(0, 0, R)$, donde $R = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

En coordenadas esféricas, a W la definen las desigualdades $\rho_1 \leqslant \rho \leqslant \rho_2$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ y $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$; por tanto

$$-V(0, 0, R) = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 \operatorname{sen} \phi\, d\theta\, d\phi\, d\rho}{\sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi(\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) + (\rho \cos \phi - R)^2}}.$$

Sustituyendo $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta$ por 1 de forma que el integrando ya no depende de θ, podemos integrar en θ y obtener:

$$-V(0, 0, R) = 2\pi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \int_0^{\pi} \frac{\rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\rho}{\sqrt{\rho^2 \operatorname{sen}^2\phi + (\rho\cos\phi - R)^2}}$$

$$= 2\pi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^2 \left(\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}\phi \, d\phi}{\sqrt{\rho^2 - 2R\rho\cos\phi + R^2}} \right) d\rho.$$

La integral interior en ϕ puede evaluarse por medio del cambio $u = -2R\rho\cos\phi$. Obtenemos

$$\frac{1}{2R\rho} \int_{-2R\rho}^{2R\rho} (\rho^2 + u + R^2)^{-1/2} du = \frac{2}{2R\rho} (\rho^2 + u + R^2)^{1/2} \Big|_{-2R\rho}^{2R\rho}$$

$$= \frac{1}{R\rho} [(\rho^2 + 2R\rho + R^2)^{1/2} - (\rho^2 - 2R\rho + R^2)1^{1/2}$$

$$= \frac{1}{R\rho} \{[(\rho + R)^2]^{1/2} - [(\rho - R)^2]^{1/2}\}$$

$$= \frac{1}{R\rho} (\rho + R - |\rho - R|).$$

La expresión $\rho + R$ siempre es positiva, pero $\rho - R$ puede no serlo, por tanto debe mantenerse el signo de valor absoluto. Sustituyendo en la fórmula de V se obtiene

$$-V(0, 0, R) = 2\pi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\rho^2}{R\rho} (\rho + R - |\rho - R|) \, d\rho = \frac{2\pi}{R} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho(\rho + R - |\rho - R|) \, d\rho.$$

Consideramos para R dos posibilidades que corresponden a potenciales gravitatorios de objetos *en el interior* o *en el exterior* de la bola hueca W.

Caso 1. Si $R \geqslant \rho_2$ (es decir, si (x_1, y_1, z_1) está fuera de W), entonces $|\rho - \mathrm{R}| = R - \rho$ para todo ρ en el intervalo $[\rho_1, \rho_2]$ de forma que

$$-V(0, 0, R) = \frac{2\pi}{R} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho[\rho + R - (R - \rho)] \, d\rho = \frac{4\pi}{R} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^2 \, d\rho = \frac{1}{R} \frac{4\pi}{3} (\rho_2^3 - \rho_1^3).$$

El factor $(4\pi/3)(\rho_2^3 - \rho_1^3)$ es igual al volumen de W. Teniendo ahora en cuenta las constantes G, m y la densidad de masa llegamos a que *el potencial gravitatorio* es $-GmM/R$, *donde* M *es la masa de* W. *Por tanto,* V *es exactamente igual a lo que sería si toda la masa de* W *estuviera concentrada en el punto central.*

Caso 2. Si $R \leqslant \rho_1$ (es decir, si (x_1, y_1, z_1) está dentro del hueco), entonces $|\rho - R| = \rho - \mathrm{R}$ para ρ en $[\rho_1, \rho_2]$ y por tanto

$$-V(0, 0, R) = (Gm) \frac{2\pi}{R} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho[\rho + R - (\rho - R)] \, d\rho = (Gm)4\pi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho \, d\rho$$

$$= (Gm) \, 2\pi \, (\rho_2^2 - \rho_1^2).$$

El resultado es independiente de R y, por tanto, el potencial V es *constante* dentro del hueco. Dado que la fuerza de gravitación es menos el gradiente de V cambiado de signo, concluimos que *¡no hay fuerza de gravitación en el interior de un planeta hueco uniforme!*

Dejamos al lector el cálculo de $V(0, 0, R)$ en el caso $\rho_1 < R < \rho_2$.

Un razonamiento similar muestra que el potencial gravitatorio en el exterior de cualquier cuerpo de masa M con *simetría esférica* (incluso si la densidad es variable) es $V = GMm/R$, donde R es la distancia a su centro (que es su centro de masa).

EJEMPLO 6.22 Hallar el potencial gravitatorio producido por una estrella esférica con masa $M = 3{,}02 \times 10^{30}$ kg, que actúa sobre una unidad de masa situada a una distancia de $2{,}25 \times 10^{11}$ m de su centro ($G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$).

Solución

El potencial negativo es

$$-V = \frac{GM}{R} = \frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 3{,}02 \times 10^{30}}{2{,}25 \times 10^{11}} = 8{,}95 \times 10^{8}\ m^2/s^2.$$

EJERCICIOS

1. Hallar la media de $f(x, y) = y \operatorname{sen} xy$ sobre $D = [0, \pi] \times [0, \pi]$.
2. Hallar la media de $f(x, y) = e^{x+y}$ sobre el triángulo con vértices (0, 0), (0, 1) y (1, 0).
3. Hallar el centro de masa de la región entre $y = x^2$ e $y = x$, si la densidad es $x + y$.
4. Hallar el centro de masa de la región entre $y = 0$ e $y = x^2$, donde $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$.
5. Una placa de oro labrada D está definida por $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ y $0 \leqslant y \leqslant \pi$ (centímetros) y tiene densidad de masa $\delta(x, y) = y^2 \operatorname{sen}^2 4x + 2$ (gramos por centímetro cuadrado). Si el oro se vende a 7 euros por gramo, ¿cuánto vale el oro de la placa?
6. En el Ejercicio 5, ¿cuál es la densidad de masa media en gramos por centímetro cuadrado?
7. **a)** Hallar la masa del paralelepípedo $[0, \frac{1}{2}] \times [0, 1] \times [0, 2]$, suponiendo que la densidad es uniforme.
   b) Hallar lo mismo que en (a), pero con densidad de masa $\delta(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z + 1$.
8. Hallar la masa del sólido acotado por el cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ y por el cono $z^2 = x^2 + y^2$, si la densidad es $\delta = \sqrt{x^2 + y^2}$.
9. Hallar el centro de masa de la región acotada por $x + y + z = 2$, $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$, suponiendo que la densidad es uniforme.
10. Hallar el centro de masa del cilindro $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $1 \leqslant z \leqslant 2$, si la densidad es $\delta = (x^2 + y^2)z^2$.
11. Hallar el valor medio de $\operatorname{sen}^2 \pi z \cos^2 \pi x$ sobre el cubo $[0, 2] \times [0, 4] \times [0, 6]$.

12. Hallar el valor medio de e^{-z} sobre la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

13. Un sólido con densidad constante está acotado superiormente por el plano $z = a$ e inferiormente por el cono descrito en coordenadas polares por $\phi = k$, donde k es una constante, $0 < k < \pi/2$. Expresar por medio de una integral su momento de inercia respecto del eje z.

14. Hallar el momento de inercia respecto del eje y de la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ si la densidad de masa es una constante δ.

15. Hallar el potencial gravitatorio producido por un planeta esférico de masa $M = 3 \times 10^{26}$ kg sobre una masa m situada a una distancia de 2×10^8 m de su centro.

16. Hallar la fuerza gravitatoria ejercida sobre un objeto de 70 kg en la posición del Ejercicio 15.

17. Se dice que un cuerpo W es *simétrico respecto a un plano* si por cada partícula a un lado de dicho plano existe otra partícula de igual masa situada en la imagen especular de la primera respecto del plano.

a) Discutir los planos de simetría de la carrocería de un automóvil.

b) Sea el plano xy el plano de simetría, y sean W^+ y W^- las partes de W por encima y por debajo del plano respectivamente. Por hipótesis, la densidad de masa satisface $\delta(x, y, -z) = \delta(x, y, z)$. Justificar los pasos siguientes:

$$\begin{aligned}
\bar{z} \cdot \iiint_W \delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz &= \iiint_W z\delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \\
&= \iiint_{W^+} z\delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz + \iiint_{W^-} z\delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \\
&= \iiint_{W^+} z\delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz + \iiint_{W^+} -w\delta(u, v, -w)\, du\, dv\, dw \\
&= 0.
\end{aligned}$$

c) Explicar por qué la parte b) demuestra que si un cuerpo es simétrico respecto de un plano entonces su centro de masa cae sobre ese plano.

d) Deducir la siguiente ley de la mecánica: *Si un cuerpo es simétrico respecto de dos planos entonces su centro de masa cae en la recta de intersección.*

18. Una placa rectangular uniforme de acero de lados a y b rota alrededor de su centro de masa con velocidad angular constante ω.

a) La energía cinética es igual a $\frac{1}{2}$ (masa)(velocidad)^2. Justificar que la energía cinética de un elemento de masa $\delta\, dx\, dy$ (δ = constante) es igual a $\delta(\omega^2/2)(x^2 + y^2)\, dx\, dy$ siempre que el origen (0, 0) esté en el centro de masa de la placa.

b) Justificar la fórmula de la energía cinética:

$$\text{E. C.} = \iint_{\text{placa}} \delta \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2)\, dx\, dy.$$

c) Calcular la integral suponiendo que la placa esta definida por las desigualdades $-a/2 \leq x \leq a/2$, $-b/2 \leq y \leq b/2$.

19. Como es bien sabido, la densidad de un planeta no es uniforme. Supóngase que el planeta C. M. W. tiene radio 5×10^8 cm y densidad de masa (en gramos por centímetro cúbico):

$$\rho(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{3 \times 10^4}{r}, & r \geqslant 10^4 \text{ cm}, \\ 3, & r \leqslant 10^4 \text{ cm}, \end{cases}$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Hallar la fórmula del potencial gravitatorio en el exterior de C. M. W.

6.4. Integrales impropias

En esta sección estudiaremos integrales impropias, es decir, integrales en las que bien la función, bien la región de integración pueden ser no acotadas. Recordaremos en primer lugar lo que sucede con funciones de una variable.

Integrales impropias de una variable

En el estudio de las integrales de las funciones de una variable se encuentran varios tipos de integrales «impropias»; es decir, integrales de funciones no acotadas definidas sobre intervalos o integrales de funciones sobre intervalos no acotados. Por ejemplo,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \qquad \text{y} \qquad \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$$

son integrales impropias. Éstas se evalúan por medio de un paso al límite; por ejemplo,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \to 0} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \to 0} \left(2\sqrt{x} \Big|_a^1 \right) = \lim_{a \to 0} (2 - 2\sqrt{a}) = 2$$

y

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to \infty} \left(-\frac{1}{x} \Big|_1^b \right) = \lim_{b \to \infty} \left(1 - \frac{1}{b} \right) = 1.$$

Si en estos procesos de paso al límite éste no existe (o es infinito), decimos que la integral no existe (o que la integral diverge).

Integrales impropias en el plano

A continuación describimos tres tipos de integrales impropias de dos variables sobre una región D. Los dos primeros tipos se describen en el texto que sigue y el tercero (integrales sobre regiones no acotadas) se plantea en los ejercicios. Evaluaremos todas las integrales por medio de un proceso de paso al límite como en el caso de una variable.

A fin de simplificar la exposición, nos limitaremos a estudiar funciones no negativas —es decir, $f(x, y) \geqslant 0$ en todos los puntos $(x, y) \in D$— y regiones y-simples descritas como el conjunto de puntos (x, y) tales que

$$a \leqslant x \leqslant b, \qquad \phi_1(x) \leqslant y \leqslant \phi_2(x),$$

como en la Figura 6.4.1.

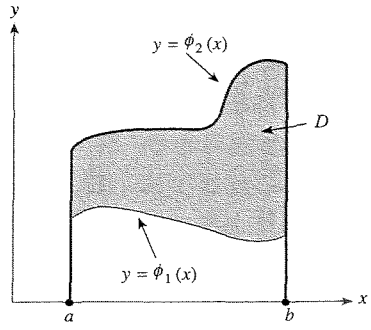


Figura 6.4.1. Un dominio y-simple.

En el primer caso que queremos tratar, supongamos que $f : D \to \mathbb{R}$ es continua excepto en los puntos de la frontera de D. Consideramos, por ejemplo,

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}},$$

donde D es el disco unidad $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. Claramente, f no está definida en la frontera de D, donde $x^2 + y^2 = 1$; aun así será de interés práctico calcular $\iint_D f(x, y)\, dA$, ya que esta integral representa el área de la semiesfera de radio 1 en el espacio de tres dimensiones.

Regiones exhaustivas

La idea básica es la de integrar f sobre regiones más pequeñas D', donde sepamos que la integral existe, y después hacer «tender» D' hacia D; es decir, «agotamos» D y vemos si $\iint_D f\, dA$ tiende hacia algún límite. Con esta idea en mente, elegimos una clase especial de D' como sigue.

Sea $\eta > 0$ lo suficientemente pequeño como para que $a + \eta < b - \eta$. Sea $d > 0$ lo suficientemente pequeño como para que $\phi_1(x) + \delta < \phi_2(x) - \delta$ para todo x, $a \leqslant x \leqslant b$ (*véase* la Figura 6.4.2). Si $\phi_2(x) = \phi_1(x)$ para algún x, no existirá tal δ, pero de este detalle mínimo nos ocuparemos cuando aparezca en nuestros últimos ejemplos. Entonces la región

$$D_{\eta, \delta} = \{(x, y) | a + \eta \leqslant x \leqslant b - \eta \quad \text{y} \quad \phi_2(x) + \delta \leqslant y \leqslant \phi_1(x) - \delta\}$$

es un subconjunto de D y cuando $(\eta, \delta) \to 0$, $D_{\eta, \delta}$ tiende a D.

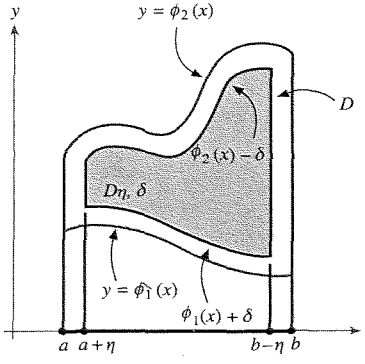


Figura 6.4.2. Un dominio reducido $D_{\eta, \delta}$ para integrales impropias.

Las integrales impropias como límites

Dado que f es continua y acotada en $D_{\eta,\delta}$, la integral $\iint_{D_{\eta,\delta}} f\,dA$ existe. Ahora podemos preguntarnos qué sucede cuando las regiones $D_{\eta,\delta}$ se expanden hasta llenar la región D —es decir, cuando $(\eta, \delta) \to (0, 0)$. Si

$$\lim_{(\eta,\delta)\to(0,0)} \iint_{D_{\eta,\delta}} f\,dA$$

existe, decimos que la integral de f sobre D es ***convergente*** o que f es ***integrable*** sobre D, y definimos $\iint_D f\,dx\,dy$ como este límite.

EJEMPLO 6.23 Calcular

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt[3]{xy}}\,dA,$$

donde D es el cuadrado unidad $[0, 1] \times [0, 1]$.

Solución

D es, claramente, una región y-simple. Elegimos $\eta > 0$ y $\delta > 0$ de forma que $D_{\eta,\delta} \subset D$, como en la Figura 6.4.3. Entonces, por el teorema de Fubini:

$$\begin{aligned}\iint_{D_{\eta,\delta}} \frac{1}{\sqrt[3]{xy}}\,dA &= \int_{\eta}^{1-\eta}\int_{\delta}^{1-\delta} \frac{1}{\sqrt[3]{xy}}\,dy\,dx \\ &= \int_{\eta}^{1-\eta} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx \int_{\delta}^{1-\delta} \frac{1}{\sqrt[3]{y}}\,dy \\ &= \frac{3}{2}\left((1-\eta)^{2/3} - \eta^{2/3}\right)\cdot\frac{3}{2}\left((1-\delta)^{2/3} - \delta^{2/3}\right).\end{aligned}$$

Si hacemos $(\eta, \delta) \to (0, 0)$ vemos que

$$\lim_{(\eta,\delta)\to(0,0)} \iint_{D_{\eta,\delta}} \frac{1}{\sqrt[3]{xy}}\,dy\,dx = \frac{3}{2}\,\frac{3}{2} = \frac{9}{4}.$$

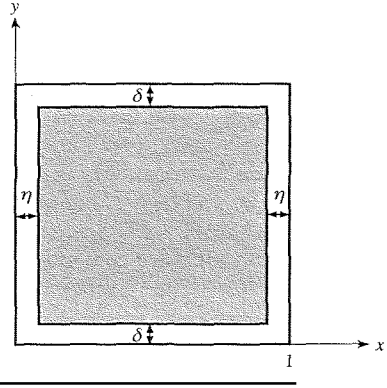


Figura 6.4.3. El cuadrado unidad ligeramente reducido.

Desafortunadamente, no siempre es posible evaluar estos límites tan directa y sencillamente. Éste es a menudo el caso en los ejemplos más interesantes, como ocurría con la superficie de la semiesfera, más arriba mencionada. ¡Es como si el «mundo real» siempre presentase los mayores retos al matemático! Por tanto, vamos a extender un poco nuestra discusión teórica.

Las integrales impropias como límites de integrales iteradas

Supongamos que f es integrable sobre $D_{\eta,\delta}$. Entonces podemos aplicar el teorema de Fubini y obtener

$$\iint_{D_{\eta,\delta}} f\,dA = \int_{a+\eta}^{b-\eta} \int_{\phi_1(x)+\delta}^{\phi_2(x)-\delta} f(x, y)\,dy\,dx.$$

Por tanto, si f es integrable sobre D,

$$\iint_D f\,dA = \lim_{(\eta,\delta)\to(0,0)} \int_{a+\eta}^{b-\eta} \int_{\phi_1(x)+\delta}^{\phi_2(x)-\delta} f(x, y)\,dy\,dx. \tag{1}$$

La función $F(\eta, \delta) = \iint_{D_{\eta,\delta}} f\,dA$ es una función de dos variables, η y δ, ya que al cambiar η y δ obtenemos valores diferentes. Ahora bien, si f es integrable entonces

$$\lim_{(\eta,\delta)\to 0} F(\eta, \delta) = L$$

existe. De aquí se sigue que los límites iterados

$$\lim_{\eta\to 0}\lim_{\delta\to 0} F(\eta, \delta) \quad \text{y} \quad \lim_{\delta\to 0}\lim_{\eta\to 0} F(\eta, \delta)$$

también existen y son ambos iguales a L, que en nuestro caso es $\iint_D f\,dA$. Por tanto, el límite iterado

$$\lim_{\eta\to 0}\lim_{\delta\to 0} \int_{a+\eta}^{b-\eta} \int_{\phi_1(x)+\delta}^{\phi_2(x)-\delta} f(x, y)\,dy\,dx.$$

también existe. Recíprocamente, aunque el límite iterado exista no se sigue, en general, que el límite $\lim_{(\eta,\delta)\to(0,0)} F(\eta, \delta)$ exista.

Por ejemplo, si resultara que $F(\eta, \delta) = \eta\delta/(\eta^2 + \delta^2)$, entonces $\lim_{\eta\to 0}\lim_{\delta\to 0} F(\eta, \delta) = \lim_{\delta\to 0} \lim_{\eta\to 0} F(\eta, \delta) = 0$, y sin embargo $\lim_{(\eta,\delta)\to 0} F(\eta, \delta)$ no existe, ya que $F(\eta, \eta) = 1/2$ (*véase* la Sección 2.2).

A la vista de lo anterior, consideramos la Expresión (1) de nuevo. Si f es integrable entonces

$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y)\,dA &= \lim_{(\eta,\delta)\to(0,0)} \int_{a+\eta}^{b-\eta} \int_{\phi_1(x)+\delta}^{\phi_2(x)-\delta} f(x, y)\,dy\,dx \\ &= \lim_{\eta\to 0}\lim_{\delta\to 0} \int_{a+\eta}^{b-\eta} \int_{\phi_1(x)+\delta}^{\phi_2(x)-\delta} f(x, y)\,dy\,dx.\end{aligned}$$

Supóngase ahora que para cada x

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{\phi_1(x)+\delta}^{\phi_2(x)-\delta} f(x, y)\, dy$$

existe. Denótese por $\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy$. Supóngase, además, que

$$\lim_{\eta \to 0} \int_{a+\eta}^{b-\eta} \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy$$

también existe. Denotamos este límite por $\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$. Entonces, si todos los límites existen *todos los límites deben ser iguales*. Por tanto, f es integrable y la integral impropia iterada existe, de donde se sigue necesariamente que

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx.$$

A continuación nos ocupamos de esta importante cuestión: ¿la existencia de las integrales iteradas *implica* la integrabilidad de f?

El teorema de Fubini para integrales impropias

Para las *integrales* sucede algo realmente *notable*. A diferencia de lo que ocurre en el caso general con los límites iterados (como en el contraejemplo considerado más arriba), la existencia de éstos *implica* la integrabilidad de f siempre que se tenga $f \geqslant 0$. Por tanto, si $f \geqslant 0$ y si $\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$ existe como límite iterado, entonces f es integrable y

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx.$$

Si D es una región x-simple con la coordenada x entre dos funciones ψ_1 y ψ_2, y si

$$\int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dy\, dx$$

existe como integral impropia, de nuevo se sigue que f es integrable y

$$\iint_D f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Todos estos resultados, que son los análogos *impropios* de los Teoremas 4 y 4′ de la Sección 5.3, se conocen como *Teorema de Fubini* para integrales impropias, que enunciamos formalmente.

TEOREMA 3: Teorema de Fubini Sea D una región elemental del plano y $f \geqslant 0$ una función continua excepto quizá en puntos de la frontera de D. Si cualquiera de las integrales

$$\iint_D f(x, y)\, dA,$$

$$\int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx, \qquad \text{para regiones } y\text{-simples},$$

$$\int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy, \qquad \text{para regiones } x\text{-simples},$$

existe como integral impropia, f es integrable y todas son iguales.

La demostración requiere conceptos avanzados de análisis y por tanto la omitiremos. Este resultado puede ser muy útil en los cálculos, como muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6.24 Sea $f(x, y) = 1/\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Demostrar que f es integrable y que $\iint_D f(x, y)\, dA = 2\pi$, la mitad del área de la superficie de una esfera de radio 1.

Solución

Para $-1 < x < 1$, tenemos que

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = \lim_{\delta \to 0} \int_{-\sqrt{1-x^2}+\delta}^{\sqrt{1+x^2}-\delta} \frac{dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \operatorname{arcsen}\left(\frac{y}{\sqrt{1 - x^2}}\right)\Bigg|_{-\sqrt{1-x^2}+\delta}^{\sqrt{1-x^2}-\delta}$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \left\{\operatorname{arcsen}\left(1 - \frac{\delta}{\sqrt{1 - x^2}}\right) - \operatorname{arcsen}\left(-1 + \frac{\delta}{\sqrt{1 - x^2}}\right)\right\}$$

$$= \operatorname{arcsen}(1) - \operatorname{arcsen}(-1) = \frac{\pi}{2} - \frac{(-\pi)}{2} = \pi.$$

Claramente,

$$\lim_{\eta \to 0} \int_{-1+\eta}^{1-\eta} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy\, dx}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = \lim_{\eta \to 0} \int_{-1+\eta}^{1-\eta} \pi\, dx = \lim_{\eta \to 0} \pi(2 - 2\eta) = 2\pi.$$

Por tanto, f es integrable. Para ver la gran utilidad que tiene este teorema, inténtese demostrar de forma directa a partir de la definición que f es integrable. ¡No es tan fácil hacerlo!

EJEMPLO 6.25 Sea $f(x, y) = 1/(x - y)$ y sea D el conjunto de (x, y) que satisfacen $0 \leqslant x \leqslant 1$ y $0 \leqslant y \leqslant x$. Demostrar que f *no* es integrable en D.

Solución

Dado que el denominador de f es cero sobre la recta $y = x$, f no está acotada sobre parte de la frontera de D. Sean $0 < \eta < 1$ y $0 < \delta < \eta$, y sea $D_{\eta,\delta}$ el conjunto de (x, y) que verifican $\eta \leqslant x \leqslant 1 - \eta$ y $\delta \leqslant y \leqslant x - \delta$ (Figura 6.4.4).

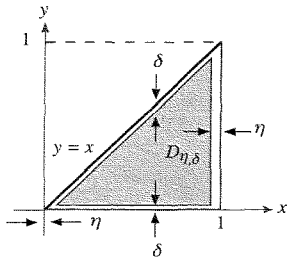


Figura 6.4.4. Dominio contraído $D_{\eta,\delta}$ para el dominio triangular D.

En este caso la región D es y-simple con $\phi_1(x) = 0$, $\phi_2(x) = x$ y $\phi_1(0) = \phi_2(0)$. Para asegurar que $D_{\eta,\delta} \subset D$, como muestra la figura, debemos elegir δ con un poco más de cuidado. Un sencillo razonamiento geométrico nos muestra que debemos elegir $2\delta \leqslant \eta$. Entonces

$$\begin{aligned}
\iint_{D_{\eta,\delta}} f\,dA &= \int_{\eta}^{1-\eta} \int_{\delta}^{x-\delta} \frac{1}{x-y}\,dy\,dx \\
&= \int_{\eta}^{1-\eta} [-\log(x-y)]\Big|_{\delta}^{x-\delta}\,dx \\
&= \int_{\eta}^{1-\eta} [-\log(\delta) + \log(x-\delta)]\,dx \\
&= [-\log\delta] \int_{\eta}^{1-\eta} dx + \int_{\eta}^{1-\eta} \log(x-\delta)\,dx \\
&= -(1-2\eta)\log\delta + [(x-\delta)\log(x-\delta) - (x-\delta)]\Big|_{\eta}^{1-\eta}.
\end{aligned}$$

En el último paso hemos usado que $\int \log u\,du = u \log u - u$. Si continuamos la anterior sucesión de igualdades obtenemos

$$\begin{aligned}
\iint_{D_{\eta,\delta}} f\,dA = &-(1-2\eta)\log\delta + (1-\eta-\delta)\log(1-\eta-\delta) \\
&- 1(1-\eta-\delta) - (\eta-\delta)\log(\eta-\delta) + (\eta-\delta).
\end{aligned}$$

Cuando $(\eta, \delta) \to (0, 0)$ el segundo término converge a $1 \log 1 = 0$, y el tercero y el quinto convergen a -1 y a 0, respectivamente. Sea $v = \eta - \delta$. Dado que $v \log v \to 0$ cuando $v \to 0$ (límite que se calcula por medio de la regla de L'Hôpital que se estudia en cálculo[3]), vemos que

[3] La regla de L'Hôpital fue descubierta por Bernoulli y se publicó en el libro de texto de L'Hôpital.

el cuarto término tiende a cero cuando $(\eta, \delta) \to (0, 0)$. El primer término es el que nos dará trabajo. Ahora bien:

$$-(1 - 2\eta)\log\delta = -\log\delta + 2\eta\log\delta, \tag{2}$$

expresión que no es difícil ver que no converge cuando $(\eta, \delta) \to (0, 0)$. Por ejemplo, sea $\eta = 2\delta$; entonces la Expresión (2) es igual a $-\log\delta + 4\delta\log\delta$. Como anteriormente, $4\delta\log\delta \to 0$ cuando $\delta \to 0$, pero $-\log\delta \to +\infty$ cuando $\delta \to 0$, lo que muestra que la Expresión (2) no converge. Por tanto, $\lim_{(\eta,\delta)\to(0,0)} \iint_{D_{\eta,\delta}} f\,dA$ no existe, por lo que f no es integrable.

Funciones no acotadas en puntos aislados

Consideramos ahora funciones no negativas f que se hacen «infinito» o no están definidas en puntos aislados de una región D que sea x-simple o y-simple. Por ejemplo, considérese la función $f(x, y) = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$ en el disco unidad $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. De nuevo $f \geqslant 0$, pero f no está acotada ni definida en el origen.

Sea (x_0, y_0) un punto de una región general D en el que una función no negativa f no está definida. Sea, además, $D_\delta = D_\delta(x_0, y_0)$ el disco de radio δ con centro en (x_0, y_0) y sea $D \backslash D_\delta$ la región D a la que se le ha quitado D_δ. Supóngase que f es continua en todos los puntos de D excepto en (x_0, y_0). Entonces $\iint_{D\backslash D_\delta} f\,dA$ está definida. Decimos que $\iint_D f\,dA$ es ***convergente***, o que f es ***integrable*** en D, si

$$\lim_{\delta\to 0} \iint_{D\backslash D_\delta} f\,dA$$

existe.

EJEMPLO 6.26 Demostrar que $f(x, y) = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$ es integrable en el disco unidad D y calcular $\iint_D f\,dA$.

Solución

Sea D_δ el disco de radio δ con centro en el origen. La función f es continua en todo D excepto en $(0, 0)$. Por tanto, $\iint_{D\backslash D_\delta} f\,dA$ existe. Para calcular esta integral cambiamos las variables a coordenadas polares, $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$. Entonces, $f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta) = 1/r$ y

$$\iint_{D\backslash D_\delta} f\,dA = \int_\delta^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} f\,d\theta\,dr = \int_\delta^1 \int_0^{2\pi} d\theta\,dr = 2\pi(1 - \delta).$$

Por tanto,

$$\iint_D f\,dA = \lim_{\delta\to 0} \iint_{D\backslash D_\delta} f\,dA = 2\pi.$$

Con mayor generalidad, de forma análoga se puede definir la integral de una función no negativa f continua salvo en un número finito de puntos de D. También pueden combinarse ambos tipos de integrales impropias; es decir, se pueden considerar funciones que sean continuas excepto en un número finito de puntos de D o de la frontera de D, y definir $\iint_D f\,dA$ apropiadamente.

Si f toma tanto valores positivos como negativos, puede utilizarse una teoría de integración más avanzada, llamada *integral de Lebesgue*, para generalizar la noción de integral convergente $\iint_D f\,dA$. Utilizando esta teoría, se puede demostrar que si $\iint_D f\,dA$ existe, entonces se puede evaluar como una integral iterada. Esta última propiedad se conoce con el nombre de teorema de Fubini.

Regiones no acotadas

Como se ha mencionado anteriormente, dejaremos el estudio de regiones no acotadas para la sección de ejercicios. Sin embargo debemos señalar que ya hemos apuntado la idea central en el Ejemplo 6.12 sobre la integral gaussiana. En ese ejemplo integramos $\exp(-x^2 - y^2)$ sobre todo $\mathbb{R}^2$, integrando primeramente sobre el disco de radio a y después tomando el límite cuando $a \to \infty$.

EJERCICIOS

En los ejercicios 1 a 4, calcular, si existen, las integrales siguientes (discutir cómo definir la integral si ésta no fue definida en el texto).

1. $\iint_D \frac{1}{\sqrt{xy}}\,dA$, donde $D = [0,1] \times [0, 1]$.

2. $\iint_D \frac{1}{\sqrt{|x - y|}}\,dx\,dy$, donde $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ y \leqslant x\}$.

3. $\iint_D (y/x)\,dx\,dy$, donde D está acotada por $x = 1$, $x = y$, y $x = 2y$.

4. $\int_0^1 \int_{\bullet}^{e^y} \log x\,dx\,dy$.

5. **a)** Calcular

$$\iint_D \frac{dA}{(x^2 + y^2)^{2/3}},$$

donde D es el disco unidad de $\mathbb{R}^2$.

b) Determinar los números reales λ para los que

$$\iint_D \frac{dA}{(x^2 + y^2)^{\lambda}}$$

es convergente, donde, de nuevo, D es el disco unidad.

6. **a)** Discutir cómo se definiría $\iint_D f\,dA$ si D fuera una región no acotada, por ejemplo, el conjunto de (x, y) tales que $a \leqslant x < \infty$ y, dadas $\phi_1(x) \leqslant y \leqslant \phi_2(x)$, $\phi_1 \leqslant \phi_2$ (*véase* Figura 6.4.5).

b) Calcular $\iint_D xye^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$, si $x \geqslant 0$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

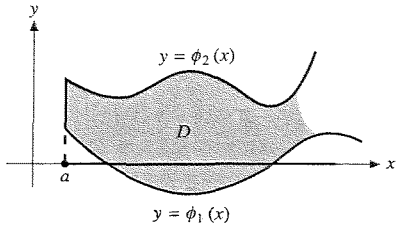


Figura 6.4.5. Una región no acotada D.

7. Usando el Ejercicio 6, integrar e^{-xy} para $x \geqslant 0$, $1 \leqslant y \leqslant 2$ de dos formas distintas. Suponiendo que se pueda usar el teorema de Fubini, demostrar que

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}\, dx = \log 2.$$

8. Demostrar que la integral

$$\int_0^1 \int_0^a (x/\sqrt{a^2 - y^2})\, dy\, dx$$

existe, y calcular su valor.

9. Discutir si la integral

$$\iint_D \frac{x + y}{x^2 + 2xy + y^2}\, dx\, dy$$

existe, donde $D = [0, 1] \times [0, 1]$. Si existe, calcular su valor.

10. También se pueden considerar integrales impropias de funciones que son discontinuas en una curva contenida en una región D. Por ejemplo, dividiendo $D = [0, 1] \times [0, 1]$ en dos regiones, definir y después discutir la convergencia de la integral

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{|x - y|}}\, dx\, dy.$$

11. Sea W el primer octante de la bola $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$, donde $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. Calcular la integral impropia

$$\iiint_W \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/4}}{\sqrt{z + (x^2 + y^2 + z^2)^2}}\, dx\, dy\, dz$$

por medio de un cambio de variables.

12. Sea f una función no negativa que puede ser no acotada y discontinua en la frontera de una región elemental D. Sea g una función similar tal que $f(x, y) \leqslant g(x, y)$ siempre que ambas estén definidas. Supóngase que $\iint_D g(x, y)\, dA$ existe. Razonar informalmente que esto implica la existencia de $\iint_D f(x, y)\, dA$.

13. Utilizar el Ejercicio 12 para demostrar que

$$\iint_D \frac{\operatorname{sen}^2(x - y)}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}\, dy\, dx$$

existe, donde D es el disco unidad $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

14. Sea f como en el Ejercicio 12 y sea g una función tal que $0 \leqslant g(x, y) \leqslant f(x, y)$ siempre que ambas estén definidas. Supóngase que $\iint_D g(x, y)\,dA$ no existe. Razonar informalmente por qué $\iint_D f(x, y)\,dA$ no puede existir.

15. Utilizar el Ejercicio 14 para demostrar que

$$\iint_D \frac{e^{x^2+y^2}}{x-y}\,dy\,dx$$

no existe, donde D es el conjunto de (x, y) tales que $0 \leqslant x \leqslant 1$ y $0 \leqslant y \leqslant x$.

16. Sea D una región no acotada definida como el conjunto de (x, y, z) tales que $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 1$. Por medio de un cambio de variables, calcular la integral impropia

$$\iiint_D \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

17. Calcular

$$\int_0^1 \int_0^y \frac{x}{y}\,dx\,dy \qquad \text{y} \qquad \int_0^1 \int_x^1 \frac{x}{y}\,dy\,dx.$$

¿Se puede aplicar el teorema de Fubini?

18. En el Ejercicio 11 de la Sección 5.2 demostramos que:

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy\,dx \neq \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy.$$

Por tanto, el teorema de Fubini no se verifica en este caso, aun cuando ambas integrales impropias iteradas existen. ¿Qué es lo que falla?

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 6

1. **a)** Hallar una transformación lineal que lleve el cuadrado $S = [0, 1] \times [0, 1]$ en el paralelogramo P con vértices (0, 0), (2, 0), (1, 2), (3, 2).

b) Dar una fórmula del cambio de variables apropiada para la transformación hallada en a).

2. **a)** Hallar la imagen del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ por la transformación $T(x, y) = (2x, x + 3y)$.

b) Dar una fórmula del cambio de variables apropiada a la transformación y a la región hallada en a).

3. Sea B la región del primer cuadrante acotada por las curvas $xy = 1$, $xy = 3$, $x^2 - y^2 = 1$, y $x^2 - y^2 = 4$. Calcular $\iint_B (x^2 + y^2)\,dx\,dy$ utilizando el cambio de variables $u = x^2 - y^2$, $v = xy$.

4. En los apartados a) a d), realizar el cambio de variables indicado (sin calcular la integral).

a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{(1-y^2)}}^{\sqrt{(1-y^2)}} (x^2 + y^2)^{1/2}\,dx\,dy\,dz$, coordenadas cilíndricas.

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{(1-y^2)}}^{\sqrt{(1-y^2)}}\int_{-\sqrt{(4-x^2-y^2)}}^{\sqrt{(4-x^2-y^2)}} xyz\ dz\,dx\,dy$, coordenadas cilíndricas.

c) $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{(2-y^2)}}^{\sqrt{(2-y^2)}}\int_{-\sqrt{(x^2+y^2)}}^{\sqrt{(4-x^2-y^2)}} z^2\,dz\,dx\,dy$, coordenadas esféricas.

d) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\pi}\rho^3 \operatorname{sen} 2\phi\ d\theta\,d\phi\,d\rho$, coordenadas cartesianas.

5. Hallar el volumen encerrado por las superficies $x^2 + y^2 = z$, y $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

6. Hallar el volumen encerrado entre el cono $x^2 + y^2 = z^2$ y el plano $2z - y - 2 = 0$.

7. Se perfora un orificio cilíndrico de diámetro 1 en una esfera de radio 2. Suponiendo que el eje del cilindro pasa por el centro de la esfera, hallar el volumen del sólido que resulta.

8. Sean C_1 y C_2 dos cilindros ilimitados de diámetro 2 cuyos ejes son los ejes coordenados x e y, respectivamente. Hallar el volumen de su intersección $C_1 \cap C_2$.

9. Hallar el volumen acotado por $x/a + y/b + z/c = 1$ y por los planos coordenados.

10. Hallar el volumen determinado por $z \leqslant 6 - x^2 - y^2$, y $z \geqslant \sqrt{x^2 + y^2}$.

11. El *tetraedro* definido por $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, $x + y + z \leqslant 1$ se corta en n secciones del mismo volumen por medio de planos paralelos al plano $x + y + z = 1$. ¿Dónde deben darse los cortes?

12. Sea E el elipsoide sólido $E = \{(x, y, z) | (x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) \leqslant 1\}$, donde $a > 0$, $b > 0$ y $c > 0$. Calcular

$$\iiint xyz\,dx\,dy\,dz,$$

a) sobre todo el elipsoide; y

b) sobre la parte del primer cuadrante:

$$x \geqslant 0, \qquad y \geqslant 0 \qquad \text{y} \qquad z \geqslant 0, \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1.$$

13. Hallar el volumen del «cucurucho de helado» definido por las desigualdades $x^2 + y^2 \leqslant \frac{1}{5} z^2$, y $0 \leqslant z \leqslant 5 + \sqrt{5 - x^2 - y^2}$.

14. Sean ρ, θ, ϕ coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^3$; supóngase que una función continua y positiva $\rho = f(\theta, \phi)$ describe una superficie que encierra el origen. Demostrar que el volumen encerrado por la superficie es

$$V = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} [f(\theta, \phi)]^3 \operatorname{sen} \phi\ d\phi\,d\theta.$$

15. Usando un cambio de variables adecuado, calcular

$$\iint_B \exp\left[(y - x)/(y + x)\right] dx\, dy$$

donde B es el interior del triángulo con vértices en (0, 0), (0, 1) y (1, 0).

16. Supóngase que la densidad de una bola de radio R está dada por $(1 + d^3)^{-1}$, donde d es la distancia al centro de la bola. Hallar la masa total de la bola.

17. La densidad del material de un casco esférico cuyo radio interior es de 1 m y cuyo radio exterior es de 2 m es de $0{,}4d^2$ g/cm^3, donde d es la distancia en metros al centro de la esfera. Hallar la masa total del casco.

18. Si el casco del Ejercicio 17 se echase en una gran balsa de agua pura, ¿flotaría?, ¿y si el casco hiciese agua? (supóngase que la densidad del agua es exactamente de 1 g/cm^3).

19. La temperatura en cada punto del cubo $C = \{(x, y, z) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1,\ -1 \leqslant y \leqslant 1,\ -1 \leqslant z \leqslant 1\}$ es de $32d^2$, donde d es la distancia del punto el origen.

a) ¿Cuál es la temperatura media?

b) ¿En qué puntos del cubo es la temperatura igual a la temperatura media?

20. Utilizar coordenadas cilíndricas para hallar el centro de masa de la región definida por

$$y^2 + z^2 \leqslant \frac{1}{4}, \qquad (x - 1)^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1, \qquad x \geqslant 1.$$

21. Hallar el centro de masa del hemisferio sólido

$$V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2 \text{ y } z \geqslant 0\}$$

si la densidad es constante.

22. Calcular $\iint_B e^{-x^2 - y^2}\, dx\, dy$, donde B está formado por los puntos (x, y) que satisfacen $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $y \leqslant 0$.

23. Calcular

$$\iiint_S \frac{dx\, dy\, dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}},$$

donde S es el sólido acotado por las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, y $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, donde $a > b > 0$.

24. Calcular $\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2)xyz\, dx\, dy\, dz$ sobre cada una de las siguientes regiones:

a) La esfera $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2\}$.

b) La semiesfera $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2,\ z \geqslant 0\}$.

c) El octante $D = \{(x, y, z) \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0, \text{ y } x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2\}$.

25. Sea C la región cónica $\{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 1\}$ en $\mathbb{R}^3$, calcular la integral

$$\iiint_C (1 + \sqrt{x^2 + y^2})\, dx\, dy\, dz.$$

26. Hallar $\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$, donde $f(x, y, z) = \exp[-(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}]$.

27. La *rigidez EI* de una viga uniforme es el producto de E, su módulo de elasticidad de Young, e I, el momento de inercia de la sección normal de la viga respecto de una línea horizontal l que pase por el centro de gravedad de esta sección. En este caso

$$I = \iint_R [d(x, y)]^2\,dx\,dy,$$

donde $d(x, y)$ = distancia de (x, y) a l, y R = sección normal de la viga considerada.

a) Supóngase que la sección normal R es el rectángulo $-1 \leqslant x \leqslant 1$, $-1 \leqslant y \leqslant 2$, y l es la recta $y = 1/2$. Hallar I.

b) Supóngase que la sección normal R es el círculo de radio 4 y l es el eje x. Hallar I usando coordenadas polares.

28. Hallar $\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ donde:

$$f(x, y, z) = \frac{1}{[1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}]^{3/2}}.$$

29. Supóngase que D es una región no acotada de $\mathbb{R}^2$ dada por el conjunto de (x, y) con $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y \leqslant x$. Sea $f(x, y) = x^{-3/2}e^{y-x}$. ¿Existe la integral impropia $\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$?

30. Si el mundo fuese bidimensional las leyes de la física predecirían que el potencial gravitatorio de una masa puntual sería proporcional al logaritmo de la distancia al punto. Utilizando coordenadas polares escribir una integral que dé el potencial gravitatorio de un disco con densidad constante.

31. **a)** Calcular la integral impropia

$$\int_0^{\infty} \int_0^{y} xe^{-y^3}\,dx\,dy.$$

b) Calcular

$$\iint_B (x^4 + 2x^2y^2 + y^4)\,dx\,dy,$$

donde B es la porción que hay en el primer cuadrante del disco de radio 2 centrado en el origen.

32. Sea f una función no negativa definida sobre una región x-simple o y-simple $D \subset \mathbb{R}^2$, que es continua salvo en puntos de la frontera de D y, a lo sumo, en un conjunto finito de puntos interiores de D. Dar una definición adecuada de $\iint_D f\,dA$.

33. Calcular $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\,dx\,dy$, donde $f(x, y) = 1/(1 + x^2 + y^2)^{3/2}$. [INDICACIÓN: puede suponerse que un cambio de variables y el teorema de Fubini son ambos válidos para integrales impropias.]

7

Integrales sobre curvas y superficies

Tengo como cierto: (1) que las partes pequeñas del espacio son de naturaleza análoga a pequeñas colinas en una superficie que es en promedio plana; (2) que esta propiedad de estar curvado o distorsionado se transmite continuamente de una parte del espacio a otra como si fuera una onda; (3) que esta variación de la curvatura del espacio es lo que realmente sucede en el fenómeno que llamamos movimiento de la materia, ya sea ponderable o etérea; (4) que en este mundo físico no ocurre sino esta variación, sujeta, posiblemente, a la ley de continuidad.

W. K. Clifford (1870)

En el Capítulo 5 se estudió la integración sobre regiones en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. En este capítulo estudiaremos la integración sobre curvas y superficies. Esto será fundamental para comprender el Capítulo 8, en el que consideraremos la relación básica entre el cálculo diferencial vectorial (Capítulo 4) y el cálculo integral vectorial (este capítulo), una relación que generaliza a varias variables el teorema fundamental del cálculo. Esta generalización se resume en los teoremas de Green, Gauss y Stokes.

7.1. La integral a lo largo de una trayectoria

En esta sección se introduce el concepto de integral sobre una trayectoria; ésta es una de las muchas formas en que se puede generalizar la integral de una función de una variable a funciones de varias variables. Además de aquéllas presentadas en el Capítulo 5, hay otras generalizaciones, que se tratarán en secciones posteriores.

Supongamos que nos dan una función escalar $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, de modo que f envía puntos de $\mathbb{R}^3$ a números reales. Será útil definir la integral de dicha función f a lo largo de una trayectoria

c: $I = [a, b] \to \mathbb{R}^3$, donde $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Para relacionar este concepto con algo tangible, supongamos que la imagen de $\mathbf{c}$ representa un alambre. Podemos hacer que $f(x, y, z)$ denote la densidad de masa en (x, y, z); entonces la integral de f será la masa total del alambre. Si $f(x, y, z)$ indica la temperatura, podemos usar la integral para determinar la temperatura media a lo largo del alambre. Comenzamos dando una definición formal de la integral a lo largo de una trayectoria y después, tras un ejemplo, la motivaremos un poco más.

DEFINICIÓN: Integrales a lo largo de trayectorias La *integral de* $f(x, y, z)$ *a lo largo de la trayectoria* $\mathbf{c}$ está definida cuando $\mathbf{c}$: $I = [a, b] \to \mathbb{R}^3$ es de clase C^1 y la función compuesta $t \mapsto f(x(t), y(t), z(t))$ es continua en I. Definimos esta integral por la ecuación

$$\int_{\mathbf{c}} f\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\|\mathbf{c}'(t)\|\,dt.$$

A veces $\int_{\mathbf{c}} f\,ds$ se denota por

$$\int_{\mathbf{c}} f(x, y, z)\,ds$$

o,

$$\int_a^b f(\mathbf{c}(t))\|\mathbf{c}'(t)\|\,dt.$$

Si $\mathbf{c}(t)$ sólo es C^1 a trozos o $f(\mathbf{c}(t))$ es continua a trozos, definimos $\int_{\mathbf{c}} f\,ds$ descomponiendo $[a, b]$ en segmentos sobre los cuales $f(\mathbf{c}(t))\|\mathbf{c}'(t)\|$ sea continua y sumando las integrales sobre los segmentos.

Cuando $f = 1$ recuperamos la definición de la longitud de $\mathbf{c}$. Nótese también que para que la definición anterior tenga sentido sólo se necesita que f esté definida en la curva C imagen de $\mathbf{c}$, y no necesariamente en todo el espacio.

EJEMPLO 7.1 Sea $\mathbf{c}$ la hélice $\mathbf{c}$: $[0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ (*véase* la Figura 2.4.9), y sea $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Evaluar la integral $\int_{\mathbf{c}} f(x, y, z)\,ds$.

Solución

En primer lugar calculamos $\|\mathbf{c}'(t)\|$:

$$\|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{\left[\frac{d(\cos t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{d(\operatorname{sen} t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dt}{dt}\right]^2} = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}.$$

A continuación, sustituimos x, y, y z en términos de t para obtener

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t + t^2 = 1 + t^2$$

a lo largo de $\mathbf{c}$. La inserción de esta información en la definición de la integral a lo largo de la trayectoria produce

$$\int_{\mathbf{c}} f(x, y, z)\, ds = \int_0^{2\pi} (1 + t^2)\sqrt{2}\, dt = \sqrt{2}\left[t + \frac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}(3 + 4\pi^2).$$

Para motivar la definición de la integral a lo largo de una trayectoria consideramos sumas S_N de «tipo Riemann» de forma análoga a lo que hicimos para definir la longitud de arco en la Sección 4.2. Para simplificar, sea $\mathbf{c}$ de clase C^1 en I. Subdividimos el intervalo $I = [a, b]$ por medio de una partición

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b.$$

Esto conduce a una descomposición de $\mathbf{c}$ en trayectorias $\mathbf{c}_i$ (Figura 7.1.1) definidas en $[t_i, t_{i+1}]$ para $0 \leqslant i \leqslant N - 1$. Denotemos la longitud de arco de $\mathbf{c}_i$ por Δs_i; así,

$$\Delta s_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\mathbf{c}'(t)\|\, dt.$$

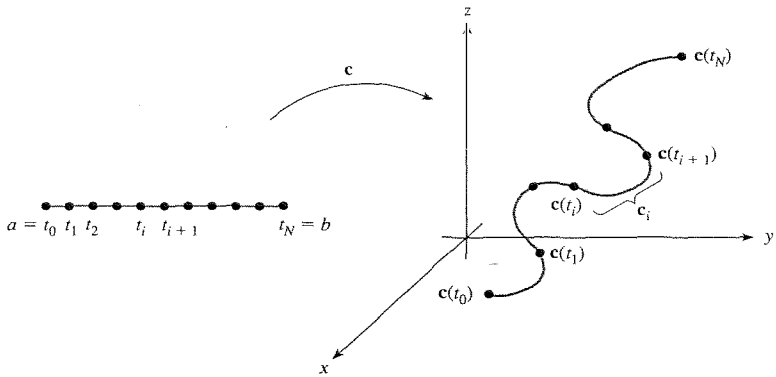


Figura 7.1.1 Descomposición de $\mathbf{c}$ en pequeñas $\mathbf{c}_i$.

Cuando N es grande, la longitud de arco Δs_i es pequeña y $f(x, y, z)$ es aproximadamente constante para puntos en $\mathbf{c}_i$. Consideramos las sumas

$$S_N = \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta s_i,$$

donde $(x_i, y_i, z_i) = \mathbf{c}(t)$ para algún $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Sabemos, por el teorema del valor medio, que $\Delta s_i = \|\mathbf{c}'(t_i^*)\|[\Delta t_i$, donde $t_i \leqslant t_i^* \leqslant t_{i+1}$ y $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$. A partir de la teoría de sumas de Riemann se puede demostrar que

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i, y_i, z_i)\|\mathbf{c}'(t_i^*)\|\Delta t_i = \int_I f(x(t), y(t), z(t)\|\mathbf{c}'(t)\|\, dt$$

$$= \int_{\mathbf{c}} f(x, y, z)\, ds.$$

Integrales a lo largo de trayectorias para curvas planas

Un caso particular importante de integral a lo largo de una trayectoria se presenta cuando la trayectoria $\mathbf{c}$ describe una curva plana. Supongamos que todos los puntos $\mathbf{c}(t)$ están en el plano xy, y que f es una función de dos variables con valores reales. La integral de f a lo largo de $\mathbf{c}$ es

$$\int_{\mathbf{c}} f(x, y)\, ds = \int_a^b f(x(t),\ y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.$$

Cuando $f(x, y) \geqslant 0$, esta integral admite una interpretación geométrica como el «área de una valla». Podemos construir una «valla» cuya base sea la imagen de $\mathbf{c}$ y cuya altura en (x, y) sea $f(x, y)$ (Figura 7.1.2). Si $\mathbf{c}$ recorre sólo una vez su imagen, la integral $\int_{\mathbf{c}} f(x, y)\, ds$ representa el área de un lado de esta valla. El lector debería intentar justificar esta interpretación, usando un argumento similar al utilizado para justificar la fórmula de la longitud de arco.

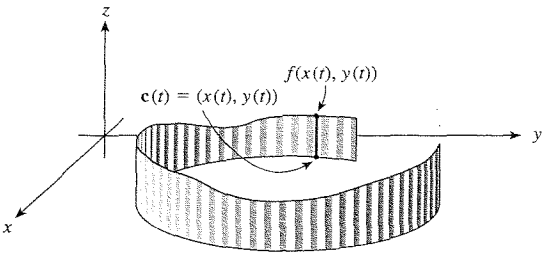


Figura 7.1.2. La integral a lo largo de una trayectoria como el área de una valla.

EJEMPLO 7.2 La tía de Tom Sawyer ha pedido a éste que pinte ambos lados de la vieja valla que se muestra en la Figura 7.1.3. Tom estima que por cada 2,5 m^2 que deje que alguien blanquee en su lugar, la victima voluntaria le pagará 50 centavos. ¿Cuánto espera ganar Tom, suponiendo que su tía le proporciona gratis la pintura?

Solución

Según la Figura 7.1.3, la base de la valla coincide en el primer cuadrante con la trayectoria $\mathbf{c}$: $[0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (3\cos^3 t,\ 3\operatorname{sen}^3 t)$, y la altura de la valla en (x, y) es $f(x, y) = 1 + y/3$. El área de un lado de la mitad de la valla es igual a la *integral* $\int_{\mathbf{c}} f(x, y)\, ds = \int_{\mathbf{c}}(1 + y/3)\, ds$. Como $\mathbf{c}'(t) = (-9\cos^2 t \operatorname{sen} t,\ 9\operatorname{sen}^2 t \cos t)$, tenemos $\|\mathbf{c}'(t)\| = 9 \operatorname{sen} t \cos t$. Así, la integral es

$$\int_{\mathbf{c}} \left(1 + \frac{y}{3}\right) ds = \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{3\operatorname{sen}^3 t}{3}\right) 9 \operatorname{sen} t \cos t\, dt$$

$$= 9 \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} t + \operatorname{sen}^4 t) \cos t\, dt$$

$$= 9\left[\frac{\operatorname{sen}^2 t}{2} + \frac{\operatorname{sen}^5 t}{5}\right]_0^{\pi/2} = 9\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) = 6{,}3,$$

que es el área de un lado en el primer cuadrante. Por consiguiente, el área de un lado de la valla es de 12,6 m^2. Como hay que blanquear ambos lados, tenemos que multiplicar por 2 para hallar el área total, que es de 25,2 m^2. Al dividir por 2,5 y multiplicar después por 50 centavos, hallamos que Tom puede ganar hasta 5,04 dólares por el trabajo.

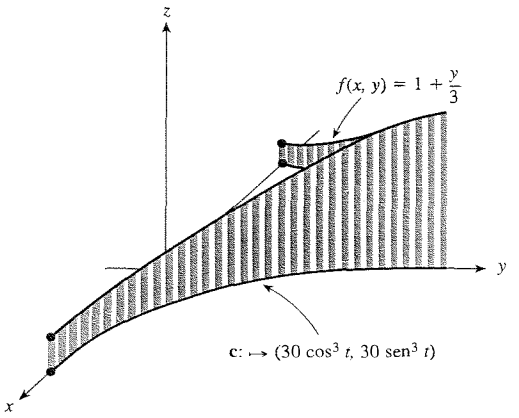


Figura 7.1.3. La valla de Tom Sawyer.

Esto concluye nuestro estudio de la integración de funciones *escalares* a lo largo de trayectorias. En la siguiente sección volveremos nuestra atención hacia la integración de *campos vectoriales* sobre trayectorias. Veremos más aplicaciones de la integral a lo largo de una trayectoria en el Capítulo 8, cuando estudiemos análisis vectorial.

Suplemento a la Sección 7.1: la curvatura total de una curva

Los ejercicios del 12 al 17 de la Sección 4.2 describen las nociones de curvatura κ y torsión τ de una curva suave C en el espacio. Si $\mathbf{c}\colon [a, b] \to C \subset \mathbb{R}^3$ es una parametrización de C por longitud de arco, de manera que $\|\mathbf{c}'(t)\| = 1$, entonces la *curvatura* $\kappa(p)$ en $p \in C$ se define por $\kappa(p) = \|\mathbf{c}''(t)\|$, donde $p = \mathbf{c}(t)$. Un resultado de la geometría diferencial dice que si dos curvas parametrizadas por su longitud de arco tienen la misma curvatura y la misma torsión, entonces una se puede obtener a partir de la otra por medio de una traslación, una rotación y una simetría.

La curvatura $\kappa\colon C \to \mathbb{R}$ es una función con valores reales sobre el conjunto C, de modo que definimos la *curvatura total* como la integral a lo largo de C: $\int_C \kappa\, ds$. Los matemáticos han sido capaces de probar algunos hechos sorprendentes sobre la curvatura total. Por ejemplo, si C es una curva plana cerrada (esto es, $\mathbf{c}(a) = \mathbf{c}(b)$), entonces

$$\int_C \kappa\, ds \geqslant 2\pi,$$

y es igual a 2π sólo si C es una circunferencia. Si C es una curva cerrada en el espacio con

$$\int_C \kappa\, ds \leqslant 4\pi,$$

entonces C «no tiene nudos»; es decir, C se puede deformar de manera continua (sin cortarse nunca a sí misma) en una circunferencia. Por consiguiente, para curvas con nudos,

$$\int_C \kappa \, ds > 4\pi.$$

Véase la Figura 7.1.4.

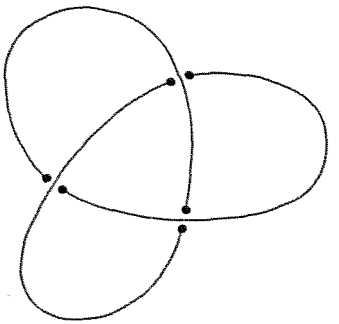


Figura 7.1.4. Una curva con nudos en $\mathbb{R}^3$.

El enunciado formal de este hecho se conoce como *teorema de Fary-Milnor*. Cuenta la leyenda que John Milnor, compañero de John Nash[1] en la Universidad de Princeton, estaba dormido en una clase de matemáticas mientras el profesor escribía en la pizarra tres problemas *sin resolver* de teoría de nudos. Al final de la clase, Milnor (todavía un estudiante de licenciatura) se despertó y, creyendo que los problemas de la pizarra habían sido propuestos como ejercicios para casa, los anotó rápidamente. A la semana siguiente regresó con la solución de los tres problemas —¡uno de los cuales era la prueba del teorema de Fary-Milnor! Algunos años más tarde consiguió un puesto de profesor en Princeton y en 1962 recibió (si bien por otro trabajo) la Medalla Fields, el mayor reconocimiento en matemáticas, considerado generalmente como el Premio Nobel de matemáticas.

EJERCICIOS

1. Sea $f(x, y, z) = y$, y $\mathbf{c}(t) = (0, 0, t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Demostrar que $\int_{\mathbf{c}} f \, ds = 0$.

2. Evaluar las siguientes integrales a lo largo de trayectorias $\int_{\mathbf{c}} f(x, y, z)\, ds$, donde
   a) $f(x, y, z) = x + y + z$ y $\mathbf{c}$: $t \mapsto (\operatorname{sen} t, \cos t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.
   b) $f(x, y, z) = \cos z$, y $\mathbf{c}$ como en a).

3. Evaluar las siguientes integrales a lo largo de trayectorias $\int_{\mathbf{c}} f(x, y, z)\, ds$, donde
   a) $f(x, y, z) = \exp\sqrt{z}$, y $\mathbf{c}$: $t \mapsto (1, 2, t^2)$, $t \in [0, 1]$.
   b) $f(x, y, z) = yz$, y $\mathbf{c}$: $t \mapsto (t, 3t, 2t)$, $t \in [1, 3]$.

[1] John Nash es el protagonista de la famosa biografía *Una mente maravillosa*, de Sylvia Nasar, llevada al cine en 2001.

4. Evaluar la integral de $f(x, y, z)$ a lo largo de la trayectoria $\mathbf{c}$ donde

a) $f(x, y, z) = x \cos z$, $\mathbf{c}$: $t \mapsto t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, $t \in [0, 1]$.

b) $f(x, y, z) = (x + y)/(y + z)$, y $\mathbf{c}$: $t \mapsto (t, \frac{2}{3}t^{3/2}, t)$, $t \in [1, 2]$.

5. Sea f: $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{plano } xz\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = 1/y^3$. Evaluar $\int_{\mathbf{c}} f(x, y, z)\, ds$, donde $\mathbf{c}$:$[1, e] \to \mathbb{R}^3$ está dada por $\mathbf{c}(t) = (\log t)\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

6. **a)** Demostrar que la integral de $f(x, y)$ a lo largo de una trayectoria dada en coordenadas polares por $r = r(\theta)$, $\theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_2$, es:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta,\ r\,\text{sen}\,\theta)\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

b) Calcular la longitud de la trayectoria $r = 1 + \cos\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

7. Sea $f(x, y) = 2x - y$, y consideremos la trayectoria $x = t^4$, $y = t^4$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$.

a) Calcular la integral de f a lo largo de esta trayectoria e interpretar la respuesta geométricamente.

b) Evaluar la función longitud de arco $s(t)$ y rehacer la parte a) en términos de s (puede ser conveniente consultar el Ejercicio 2 de la Sección 4.2).

Los Ejercicios 8 al 11 tratan de la aplicación de la integral a lo largo de una trayectoria al problema de definir el valor promedio de una función escalar a lo largo de la misma. Definimos el ***valor promedio*** *de f a lo largo de $\mathbf{c}$ como el número*

$$\frac{\int_{\mathbf{c}} f(x, y, z)\, ds}{l(\mathbf{c})}.$$

Aquí $l(\mathbf{c})$ es la longitud de la trayectoria:

$$l(\mathbf{c}) = \int_{\mathbf{c}} \|\mathbf{c}'(t)\|\, dt.$$

(Esto es el análogo al promedio de una función sobre una región, definido en la Sección 6.3.)

8. **a)** Justificar la fórmula $[\int_{\mathbf{c}} f(x, y, z)\, ds]/l(\mathbf{c})$ para el valor promedio de f a lo largo de $\mathbf{c}$ utilizando sumas de Riemann.

b) Demostrar que el valor promedio de f a lo largo de $\mathbf{c}$ en el Ejemplo 7.1 es $(1 + \frac{4}{3}\pi^2)$.

c) En el Ejercicio 2 a) y b) anterior, hallar el valor promedio de f sobre las curvas dadas.

9. Hallar el promedio de la coordenada y de los puntos sobre la semicircunferencia parametrizada por $\mathbf{c}$: $[0, \pi] \to \mathbb{R}^3$, $\theta \mapsto (0, a\,\text{sen}\,\theta, a\cos\theta)$; $a > 0$.

10. Supongamos que la semicircunferencia del Ejercicio 9 está hecha de un alambre con una densidad uniforme de 2 gramos por unidad de longitud.

a) ¿Cuál es la masa total del alambre?

b) ¿Dónde está el centro de masa de este alambre? (Consultar la Sección 6.3.)

11. Sea $\mathbf{c}$ la trayectoria dada por $\mathbf{c}(t) = (t^2, t, 3)$ para $t \in [0, 1]$.

a) Hallar la longitud de la trayectoria, $l(\mathbf{c})$.

b) Hallar el promedio de la coordenada y a lo largo de la trayectoria $\mathbf{c}$.

12. Si f: $[a, b] \to \mathbb{R}$ es diferenciable con continuidad a trozos, definimos la *longitud de la gráfica* de f en $[a, b]$ como la longitud de la trayectoria $t \mapsto (t, f(t))$ para $t \in [a, b]$.

a) Demostrar que la longitud de la gráfica de f en $[a, b]$ es

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

b) Hallar la longitud de la gráfica de $y = \log x$ de $x = 1$ a $x = 2$.

13. Hallar la masa de un alambre formado por la intersección de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 0$ si la densidad en (x, y, z) está dada por $\rho(x, y, z) = x^2$ gramos por unidad de longitud del alambre.

14. Evaluar $\int_{\mathbf{c}} f\, ds$, donde $f(x, y, z) = z$ y $\mathbf{c}(t) = (t \cos t, t \operatorname{sen} t, t)$ para $0 \leqslant t \leqslant t_0$.

15. Escribir el siguiente límite como la integral de $f(x, y, z) = xy$ sobre alguna trayectoria $\mathbf{c}$ en $[0, 1]$ y evaluarlo:

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N-1} t_i^2 (t_{i+1}^2 - t_i^2),$$

donde $t_1, \ldots, t_N$ es una partición de $[0, 1]$.

16. Consideramos trayectorias que conectan los puntos $A = (0, 1)$ y $B = (1, 0)$ en el plano xy, como en la Figura 7.1.5[2].

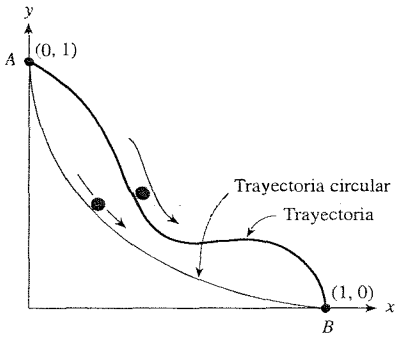


Figura 7.1.5. Una curva que une los puntos A y B.

Galileo se había planteado la siguiente pregunta: ¿si una cuenta de collar se deslizase bajo la influencia de la gravedad caería de A a B en el *menor tiempo posible* describiendo una curva que fuera un arco de circunferencia?

Para una trayectoria dada, el tiempo de caída es la integral a lo largo de la misma

$$T = \int \frac{dt}{v},$$

donde la velocidad de la cuenta es $v = \sqrt{2gy}$, siendo g la constante gravitatoria. En 1697 Johann Bernoulli retó al mundo matemático a encontrar la trayectoria a lo largo de la cual la cuenta se

[2] Agradecemos a Tanya Leise el habernos sugerido este ejercicio.

deslizaría desde A hasta B en el menor tiempo. Esta solución determinaría si las reflexiones de Galileo habían sido acertadas.

a) Calcular T para la trayectoria rectilínea $y = 1 - x$.

b) Escribir una fórmula para T para el caso de la trayectoria circular de Galileo, dada por $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$.

Por cierto, Newton fue el primero en enviar la solución (que resultó ser una cicloide, la misma curva (invertida) que estudiamos en el Ejemplo 2.35), pero lo hizo anónimamente. Sin embargo, no engañó a Bernoulli. Cuando éste recibió la solución, se dio cuenta inmediatamente de quién era su autor y exclamó: «Reconozco al León por sus garras». Aunque la solución de este problema es una cicloide, se la conoce en la literatura como la *braquistocrona*. Éste fue el comienzo del importante campo conocido como *cálculo de variaciones*.

7.2. La integral de línea

Consideramos ahora el problema de integrar un *campo vectorial* a lo largo de una trayectoria. Comenzaremos por considerar la noción de *trabajo*, con el fin de motivar la definición general.

Trabajo ejercido por un campo de fuerza

Si $\mathbf{F}$ es un campo de fuerza en el espacio, entonces una partícula de prueba (por ejemplo, una pequeña carga unidad en un campo eléctrico o una unidad de masa en un campo gravitatorio) experimentará una fuerza $\mathbf{F}$. Supongamos que la partícula se mueve a lo largo de la imagen de una trayectoria $\mathbf{c}$ mientras $\mathbf{F}$ actúa sobre ella. Un concepto fundamental es el de *trabajo realizado* por $\mathbf{F}$ sobre la partícula a medida que recorre la trayectoria $\mathbf{c}$. Si $\mathbf{c}$ es un desplazamiento rectilíneo dado por el vector $\mathbf{d}$ y si $\mathbf{F}$ es una fuerza constante, entonces el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ para mover la partícula a lo largo de la trayectoria es el producto escalar $\mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{d} = (\text{magnitud de la fuerza}) \times (\text{desplazamiento en la dirección de la fuerza}).$$

Si la trayectoria es curva, podemos imaginar que está formada por una sucesión de desplazamientos rectilíneos infinitesimales o que se puede *aproximar* por un número finito de desplazamientos rectilíneos. Entonces (como en nuestra deducción de las fórmulas para la integral a lo largo de una trayectoria de la sección anterior) llegamos a la siguiente fórmula para el trabajo realizado por el campo de fuerza $\mathbf{F}$ sobre una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria $\mathbf{c}$: $[a, b] \to \mathbb{R}^3$:

$$\text{trabajo realizado por } \mathbf{F} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)\, dt.$$

Podemos justificar un poco más esta deducción como sigue. A medida que t varía sobre un pequeño intervalo de t a $t + \Delta t$, la partícula se mueve de $\mathbf{c}(t)$ a $\mathbf{c}(t + \Delta t)$, lo que supone un vector de desplazamiento $\Delta \mathbf{s} = \mathbf{c}(t + \Delta t) - \mathbf{c}(t)$ (*véase* la Figura 7.2.1).

A partir de la definición de derivada obtenemos la aproximación $\Delta \mathbf{s} \approx \mathbf{c}'(t)\Delta t$. Por lo tanto, el trabajo realizado al ir de $\mathbf{c}(t)$ a $\mathbf{c}(t + \Delta t)$ es aproximadamente

$$\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \Delta \mathbf{s} \approx \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)\Delta t.$$

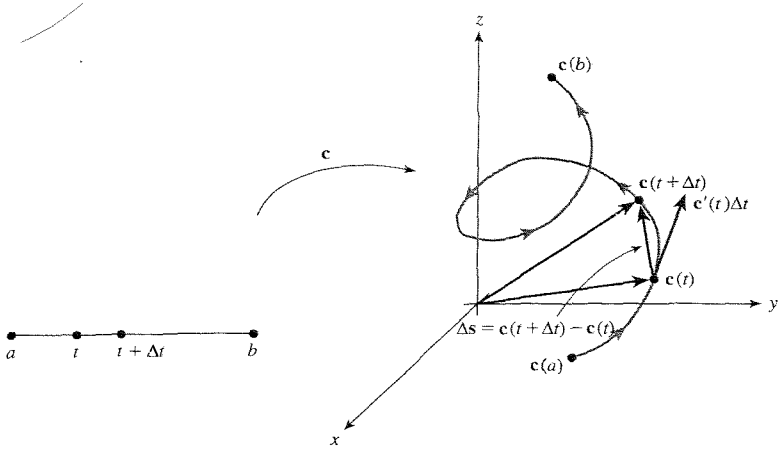


Figura 7.2.1. Para Δt pequeño, $\Delta \mathbf{s} = \mathbf{c}(t + \Delta t) - \mathbf{c}(t) \approx \mathbf{c}'(t)\Delta t$.

Si subdividimos el intervalo $[a, b]$ en n partes iguales $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, con $\Delta t = t_{i+1} - t_i$, entonces el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ es aproximadamente

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{F}(\mathbf{c}(t_i)) \cdot \Delta \mathbf{s} \approx \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{F}(\mathbf{c}(t_i)) \cdot \mathbf{c}'(\mathbf{t}_i)\Delta t.$$

Cuando $n \to \infty$, esta aproximación se vuelve cada vez mejor, de modo que es razonable definir el trabajo como el límite de la suma anterior cuando $n \to \infty$. Este límite está dado por la integral

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)\, dt.$$

Definición de la integral de línea

Las consideraciones anteriores sobre el trabajo motivan la siguiente definición.

DEFINICIÓN: Integrales de línea Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ continuo sobre la trayectoria C^1 $\mathbf{c}$: $[a, b] \to \mathbb{R}^3$. Definimos $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, la ***integral de línea*** de $\mathbf{F}$ a lo largo de $\mathbf{c}$, por la fórmula

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)\, dt;$$

es decir, integramos el producto escalar de $\mathbf{F}$ con $\mathbf{c}'$ sobre el intervalo $[a, b]$.

Como sucede con las funciones escalares, también podemos definir $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ si $\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)$ es sólo continua a trozos.

Para trayectorias que satisfagan $\mathbf{c}'(t) \neq \mathbf{0}$, hay otra fórmula útil para la integral de línea: a saber, si $\mathbf{T}(t) = \mathbf{c}'(t)/\|\mathbf{c}'(t)\|$ denota al vector tangente unitario, tenemos

$$\begin{aligned}\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)\, dt && \text{(por definición)} \\ &= \int_a^b \left[\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|}\right] \|\mathbf{c}'(t)\|\, dt && \text{(cancelando } \|\mathbf{c}'(t)\|\text{)} \qquad (1) \\ &= \int_a^b [\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{T}(t)] \|\mathbf{c}'(t)\|\, dt.\end{aligned}$$

Esta fórmula dice que $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ es la integral de $\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{T}(t)$, la componente tangencial de $\mathbf{F}$ a lo largo de la trayectoria $\mathbf{c}$. De hecho, la última parte de la Fórmula (1) es la integral de una función escalar a lo largo de $\mathbf{c}$[3].

Para calcular una integral de línea en un caso particular se puede usar la definición original o integrar la componente tangencial de $\mathbf{F}$ a lo largo de $\mathbf{c}$, como dice la Fórmula (1), dependiendo de qué sea más fácil o más apropiado.

EJEMPLO 7.3 Sea $\mathbf{c}(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, t)$ con $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Sea el campo vectorial $\mathbf{F}$ definido por $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Calcular $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$.

Solución

Aquí $\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) = \mathbf{F}(\operatorname{sen} t, \cos t, t) = (\operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, y $\mathbf{c}'(t) = (\cos t)\mathbf{i} - (\operatorname{sen} t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Por consiguiente,

$$\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) = \operatorname{sen} t \cos t - \cos t \operatorname{sen} t + t = t,$$

y por tanto

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} t\, dt = 2\pi^2.$$

Otra manera común de escribir la integrales de línea es

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}} F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz,$$

donde F_1, F_2 y F_3 son las componentes del campo vectorial $\mathbf{F}$. Decimos que la expresión $F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz$ es una ***forma diferencial***[4]. Por *definición*, la integral de una forma diferencial a lo largo de una trayectoria $\mathbf{c}$, donde $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, es:

$$\int_{\mathbf{c}} F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz = \int_a^b \left(F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} + F_3 \frac{dz}{dt}\right) dt = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

---

[3] Si $\mathbf{c}$ no se corta a sí misma (esto es, si $\mathbf{c}(t_1) = \mathbf{c}(t_2)$ implica que $t_1 = t_2$), entonces cada punto P sobre C (la curva imagen de $\mathbf{c}$) se puede escribir de manera única como $\mathbf{c}(t)$ para algún t. Si definimos $f(\mathbf{P}) = f(\mathbf{c}(t)) = \mathbf{F}(\mathbf{c}) \cdot \mathbf{T}(t)$, f es una función de C; por definición, su integral a lo largo de $\mathbf{c}$ viene dada por la Fórmula (1) y no hay ninguna dificultad en interpretar literalmente $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ como una integral a lo largo de una trayectoria. Si $\mathbf{c}$ se corta a sí misma, no es posible definir f como función de C como hicimos antes (¿por qué?); sin embargo, en este caso sigue siendo útil pensar en el lado derecho de la Fórmula (1) como una integral a lo largo de una trayectoria.

[4] *Véase* la Sección 8.6 para un breve estudio de la teoría general de formas diferenciales.

Nótese que podemos pensar en $d\mathbf{s}$ como la forma diferencial $d\mathbf{s} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$. Así, la forma diferencial $F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz$ se puede escribir como el producto escalar $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$.

EJEMPLO 7.4 Evaluar la integral de línea

$$\int_{\mathbf{c}} x^2\,dx + xy\,dy + dz,$$

donde $\mathbf{c}$: $[0, 1] \to \mathbb{R}^3$ está dada por $\mathbf{c}(t) = (t, t^2, 1) = (x(t), y(t), z(t))$.

Solución

Calculamos $dx/dt = 1$, $dy/dt = 2t$, $dz/dt = 0$; por consiguiente,

$$\int_{\mathbf{c}} x^2\,dx + xy\,dy + dz = \int_0^1 \left([x(t)]^2 \frac{dx}{dt} + [x(t)\,y(t)] \frac{dy}{dt} \right) dt$$

$$= \int_0^1 (t^2 + 2t^4)\,dt = \left[\frac{1}{3}\,t^3 + \frac{2}{5}\,t^5 \right]_0^1 = \frac{11}{15}.$$

EJEMPLO 7.5 Evaluar la integral de línea

$$\int_{\mathbf{c}} \cos z\,dx + e^x\,dy + e^y\,dz,$$

donde la trayectoria $\mathbf{c}$ se define por $\mathbf{c}(t) = (1, t, e^t)$ y $0 \leqslant t \leqslant 2$.

Solución

Calculamos $dx/dt = 0$, $dy/dt = 1$, $dz/dt = e^t$, de modo que

$$\int_{\mathbf{c}} \cos z\,dx + e^x\,dy + e^y\,dz = \int_0^2 (0 + e + e^{2t})\,dt$$

$$= \left[et + \frac{1}{2}\,e^{2t} \right]_0^2 = 2e + \frac{1}{2}\,e^4 - \frac{1}{2}.$$

EJEMPLO 7.6 Sea $\mathbf{c}$ la trayectoria

$$x = \cos^3\theta, \qquad y = \operatorname{sen}^3\theta, \qquad z = \theta, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{7\pi}{2}$$

(*véase* la Figura 7.2.2). Evaluar la integral $\int_{\mathbf{c}} \operatorname{sen} z\,dx + \cos z\,dy - (xy)^{1/3}\,dz$.

Solución

En este caso tenemos

$$\frac{dx}{d\theta} = -3\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta, \qquad \frac{dy}{d\theta} = 3\operatorname{sen}^2\theta \cos\theta, \qquad \frac{dz}{d\theta} = 1,$$

de modo que la integral es

$$\int_c \operatorname{sen} z\, dx + \cos z\, dy - (xy)^{1/3}\, dz$$

$$= \int_0^{7\pi/2} (-3\cos^2\theta \operatorname{sen}^2\theta + 3\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta - \cos\theta \operatorname{sen}\theta)\, d\theta.$$

Los dos primeros términos se cancelan, de manera que tenemos

$$-\int_0^{7\pi/2} \cos\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta = -\left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\theta\right]_0^{7\pi/2} = -\frac{1}{2}.$$

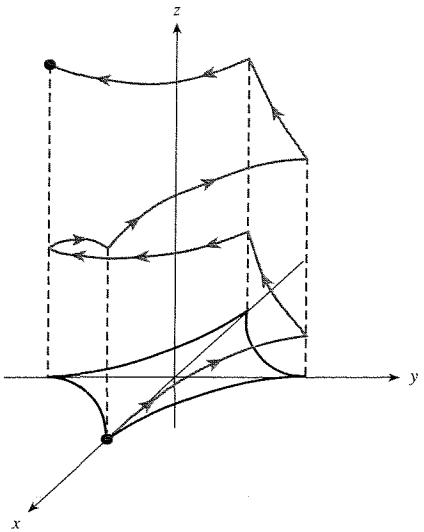


Figura 7.2.2. Imagen de la trayectoria $x = \cos^3\theta$, $y = \operatorname{sen}^3\theta$, $z = \theta$; $0 \leqslant \theta \leqslant 7\pi/2$.

EJEMPLO 7.7 Supongamos que $\mathbf{F}$ es el campo vectorial de fuerza $\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Parametrizar la circunferencia de radio a en el plano yz haciendo que $\mathbf{c}(\theta)$ tenga componentes

$$x = 0, \qquad y = a\cos\theta, \qquad z = a\operatorname{sen}\theta, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

Como $\mathbf{F}(\mathbf{c}(\theta)) \cdot \mathbf{c}'(\theta) = 0$, el campo de fuerzas $\mathbf{F}$ es normal a la circunferencia en cada punto de la misma, por lo que $\mathbf{F}$ no realizará ningún trabajo sobre una partícula que se mueva a lo largo de la circunferencia (Figura 7.2.3).

Podemos comprobar mediante un cálculo directo que el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ es cero:

$$W = \int_c \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_c x^3\, dx + y\, dy + z\, dz$$

$$= \int_0^{2\pi} (0 - a^2\cos\theta \operatorname{sen}\theta + a^2\cos\theta \operatorname{sen}\theta)\, d\theta = 0.$$

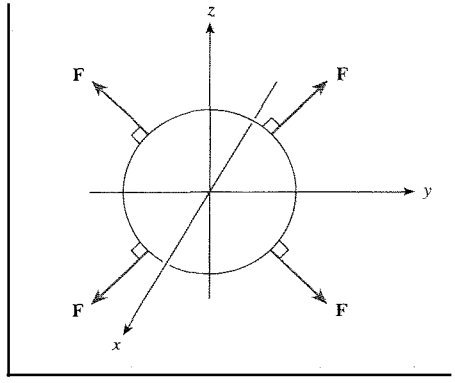


Figura 7.2.3. Campo vectorial **F** normal a una circunferencia en el plano *yz*.

EJEMPLO 7.8 Si consideramos el campo y la curva del Ejemplo 7.6, vemos que el trabajo realizado por el campo es $-\frac{1}{2}$, una cantidad negativa. Esto significa que el campo se opone al movimiento a lo largo de la trayectoria.

Reparametrizaciones

La integral de línea $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ no depende sólo del campo **F**, sino también de la trayectoria $\mathbf{c}\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$. En general, si $\mathbf{c}_1$ y $\mathbf{c}_2$ son dos trayectorias diferentes en $\mathbb{R}^3$, $\int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \neq \int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$. Por otra parte, veremos que $\int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \pm \int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ se cumple para todo campo vectorial **F** si $\mathbf{c}_1$ es lo que llamamos una ***reparametrización*** de $\mathbf{c}_2$; para entendernos, esto significa que $\mathbf{c}_1$ y $\mathbf{c}_2$ son descripciones diferentes de la misma curva geométrica.

DEFINICIÓN Sea $h\colon I \to I_1$ una biyección C^1 entre los intervalos $I = [a, b]$ e $I_1 = [a_1, b_1]$. Sea $\mathbf{c}\colon I_1 \to \mathbb{R}^3$ una trayectoria C^1 a trozos. Diremos entonces que la composición

$$\mathbf{p} = \mathbf{c} \circ h\colon I \to \mathbb{R}^3$$

es una ***reparametrización*** de **c**.

Esto significa que $\mathbf{p}(t) = \mathbf{c}(h(t))$, de modo que h cambia la variable; de manera alternativa, se puede pensar que h cambia la rapidez con la que un punto se mueve a lo largo de la trayectoria. En efecto, obsérvese que $\mathbf{p}'(t) = \mathbf{c}'(h(t))\,h'(t)$, de manera que el vector velocidad de **p** es igual al de **c**, pero multiplicado por el factor escalar $h'(t)$.

Está implícito en la definición que h debe enviar los extremos del intervalo a extremos del intervalo; esto es, o bien $h(a) = a_1$ y $h(b) = b_1$, o bien $h(a) = b_1$ y $h(b) = a_1$. Distinguimos así dos tipos de reparametrización. Si $\mathbf{c} \circ h$ es una reparametrización de **c**, entonces o bien

$$(\mathbf{c} \circ h)(a) = \mathbf{c}(a_1) \qquad \text{y} \qquad (\mathbf{c} \circ h)(b) = \mathbf{c}(b_1)$$

o

$$(\mathbf{c} \circ h)(a) = \mathbf{c}(b_1) \qquad \text{y} \qquad (\mathbf{c} \circ h)(b) = \mathbf{c}(a_1).$$

En el primer caso se dice que la reparametrización ***conserva la orientación***, y una partícula que recorra la trayectoria $\mathbf{c} \circ h$ se mueve en la *misma dirección y sentido* que la partícula que recorre **c**. En el segundo caso se dice que la reparametrización ***invierte la orientación***, y una partícula que

recorra la trayectoria $\mathbf{c} \circ h$ se mueve en el *sentido opuesto* al de la partícula que recorre $\mathbf{c}$ (Figura 7.2.4).

Por ejemplo, si C es la imagen de una trayectoria $\mathbf{c}$, como se muestra en la Figura 7.2.5, esto es, $C = \mathbf{c}([a_1, b_1])$, y si h conserva la orientación, entonces $\mathbf{c} \bullet h(t)$ irá de $\mathbf{c}(a_1)$ a $\mathbf{c}(b_1)$ a medida que t vaya de a a b; y si h invierte la orientación , $\mathbf{c} \circ h(t)$ irá de $\mathbf{c}(a_1)$ a $\mathbf{c}(b_1)$ a medida que t vaya de a a b.

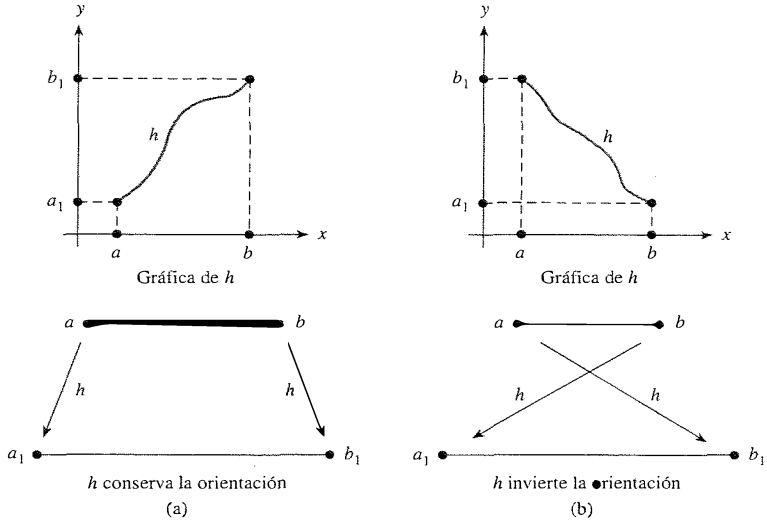


Figura 7.2.4. Ilustración de (a) una reparametrización que conserva la orientación y (b) una reparametrización que invierte la orientación.

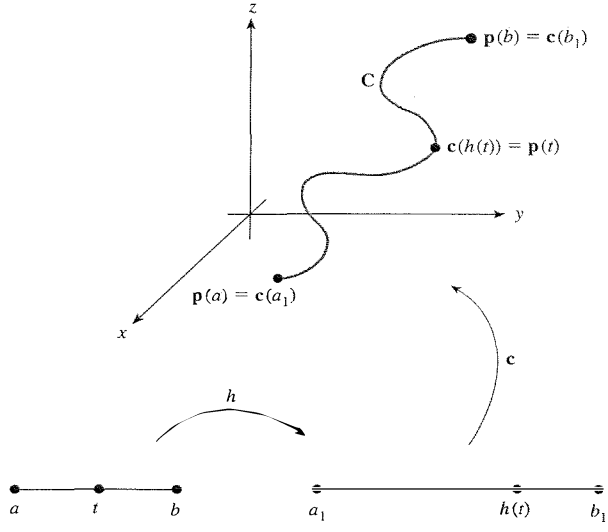


Figura 7.2.5. La trayectoria $\mathbf{p} = \mathbf{c} \circ h$ es una reparametrización de $\mathbf{c}$.

EJEMPLO 7.9 Sea $\mathbf{c}$: $[a, b] \to \mathbb{R}^3$ una trayectoria C^1 a trozos. Entonces:

a) La trayectoria $\mathbf{c}_{op}$: $[a, b] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \mathbf{c}(a + b - t)$, es una reparametrización de $\mathbf{c}$ que corresponde a la aplicación h: $[a, b] \to [b, a]$, $t \mapsto a + b - t$; a $\mathbf{c}_{op}$ se la llama ***trayectoria opuesta*** a $\mathbf{c}$. Esta reparametrización invierte la orientación.

b) La trayectoria $\mathbf{p}$: $[0, 1] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \mathbf{c}(a + (b - a)t)$, es una reparametrización de $\mathbf{c}$ que conserva la orientación, correspondiente al cambio de coordenadas h: $[0, 1] \to [a, b]$, $t \mapsto a + (b - a)t$.

TEOREMA 1: Cambio de parametrización para integrales de línea Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial continuo sobre la trayectoria C^1 $\mathbf{c}$: $[a_1, b_1] \to \mathbb{R}^3$, y sea $\mathbf{p}$: $[a, b] \to \mathbb{R}^3$ una reparametrización de $\mathbf{c}$. Si $\mathbf{p}$ conserva la orientación, entonces

$$\int_{\mathbf{p}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

y si $\mathbf{p}$ invierte la orientación, entonces

$$\int_{\mathbf{p}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

DEMOSTRACIÓN Por hipótesis, tenemos una aplicación h tal que $\mathbf{p} = \mathbf{c} \circ h$. Por la regla de la cadena

$$\mathbf{p}'(t) = \mathbf{c}'(h(t))\, h'(t),$$

y por tanto

$$\int_{\mathbf{p}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b [\mathbf{F}(\mathbf{c}(h(t))) \cdot \mathbf{c}'(h(t))]\, h'(t)\, dt.$$

Haciendo el cambio de variables $s = h(t)$, esto se convierte en

$$\int_{h(a)}^{h(b)} \mathbf{F}(\mathbf{c}(s)) \cdot \mathbf{c}'(s)\, ds$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{a_1}^{b_1} \mathbf{F}(\mathbf{c}(s)) \cdot \mathbf{c}'(s)\, ds = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, & \text{si } \mathbf{p} \text{ conserva la orientación,} \\ \displaystyle\int_{b_1}^{a_1} \mathbf{F}(\mathbf{c}(s)) \cdot \mathbf{c}'(s)\, ds = -\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, & \text{si } \mathbf{p} \text{ invierte la orientación.} \end{cases}$$

El Teorema 1 también es cierto para trayectorias C^1 a trozos, como se puede ver descomponiendo los intervalos en segmentos sobre los cuales las trayectorias sean de clase C^1 y sumando los resultados obtenidos al integrar sobre cada trozo.

Si cuando calculamos una integral conviene reparametrizar la trayectoria, el Teorema 1 garantiza que el valor de la integral no se verá afectado, excepto tal vez por el signo, dependiendo de la orientación.

EJEMPLO 7.10 Sean $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$, y $\mathbf{c}$: $[-5, 10] \to \mathbb{R}^3$ definida por $t \mapsto (t, t^2, t^3)$. Evaluar $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ y $\int_{\mathbf{c}_{op}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$.

Solución

Para la trayectoria $\mathbf{c}$ tenemos $dx/dt = 1$, $dy/dt = 2t$, $dz/dt = 3t^2$, y $\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) = t^5\mathbf{i} + t^4\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$. Por lo tanto,

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{-5}^{10} \left(F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} + F_3 \frac{dz}{dt} \right) dt = \int_{-5}^{10} (t^5 + 2t^5 + 3t^5)\, dt = [t^6]_{-5}^{10} = 984.375.$$

Por otra parte, para

$$\mathbf{c}_{op}\colon [-5, 10] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \mathbf{c}(5 - t) = (5 - t, (5 - t)^2, (5 - t)^3),$$

tenemos $dx/dt = -1$, $dy/dt = -10 + 2t = -2(5 - t)$, $dz/dt = -75 + 30t - 3t^2 = -3(5 - t)^2$, y $\mathbf{F}(\mathbf{c}_{op}(t)) = (5 - t)^5\mathbf{i} + (5 - t)^4\mathbf{j} + (5 - t)^3\mathbf{k}$. Por consiguiente,

$$\int_{\mathbf{c}_{op}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{-5}^{10} [-(5 - t)^5 - 2(5 - t)^5 - 3(5 - t)^5]\, dt = [(5 - t)^6]_{-5}^{10} = -984.375.$$

Estamos interesados en las reparametrizaciones porque, si la imagen de una $\mathbf{c}$ particular se puede representar de muchas maneras, queremos estar seguros de que las integrales sobre trayectorias de funciones escalares y de campos vectoriales dependen sólo de la curva imagen, y no de la parametrización utilizada. Por ejemplo, para algunos problemas conviene representar la circunferencia unidad por medio de la aplicación $\mathbf{p}$ dada por

$$x(t) = \cos 2t, \qquad y(t) = \operatorname{sen} 2t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant \pi.$$

El Teorema 1 garantiza que cualquier integral calculada con esta representación coincide con la obtenida representando la circunferencia por medio de la aplicación $\mathbf{p}$ dada por

$$x(t) = \cos t, \qquad y(t) = \operatorname{sen} t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

puesto que $\mathbf{p} = \mathbf{c} \bullet h$, donde $h(t) = 2t$, siendo por tanto $\mathbf{p}$ una reparametrización de $\mathbf{c}$ que mantiene la orientación. Sin embargo, nótese que la aplicación γ dada por

$$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 4\pi$$

no es una reparametrización de $\mathbf{c}$; aunque recorre la misma curva imagen (la circunferencia), lo hace dos veces (¿por qué implica esto que γ no es una reparametrización de $\mathbf{c}$?).

La integral de línea es una *integral orientada*, en la que el signo cambia (como hemos visto en el Teorema 1) si se invierte la orientación de la curva. La *integral a lo largo de una trayectoria* no tiene esta propiedad. Esto es una consecuencia del hecho de que al cambiar t por $-t$ (al invertir la orientación) sólo cambia el signo de $\mathbf{c}'(t)$, no su longitud. Ésta es una de las diferencias entre las integrales de línea y las integrales a lo largo de trayectorias. El siguiente teorema,

que se demuestra por el mismo método que el Teorema 1, muestra que las integrales a lo largo de trayectorias no cambian bajo reparametrizaciones, incluso si invierten la orientación.

TEOREMA 2: Cambio de parametrización para integrales a lo largo de trayectorias Sea $\mathbf{c}$ una trayectoria C^1 a trozos, sea f una función continua (con valores reales) definida sobre la imagen de $\mathbf{c}$, y sea $\mathbf{p}$ cualquier reparametrización de $\mathbf{c}$. Entonces

$$\int_{\mathbf{c}} f(x, y, z)\, ds = \int_{\mathbf{p}} f(x, y, z)\, ds. \tag{2}$$

Integrales de línea de campos gradiente

A continuación consideramos una técnica útil para evaluar ciertos tipos de integrales de línea. Recordemos que un campo vectorial $\mathbf{F}$ es un *campo vectorial gradiente* si $\mathbf{F} = \nabla f$ para alguna función f con valores reales. Así,

$$\mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathbf{k}.$$

Supongamos que g y G son funciones continuas con valores reales definidas sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, que G es diferenciable en (a, b) y que $G' = g$. Entonces, por el teorema fundamental del cálculo,

$$\int_a^b g(x)\, dx = G(b) - G(a).$$

Así, el valor de la integral de g depende sólo del valor de G en los extremos del intervalo $[a, b]$. Como ∇f representa a la derivada de f, podemos preguntarnos si $\int_{\mathbf{c}} \nabla f \cdot d\mathbf{s}$ está determinada completamente por el valor de f en los extremos $\mathbf{c}(a)$ y $\mathbf{c}(b)$. La respuesta está contenida en la siguiente *generalización del teorema fundamental del cálculo.*

TEOREMA 3: Integrales de línea de campos vectoriales gradiente Supongamos que $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es de clase C^1 y que $\mathbf{c}\colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ es una trayectoria C^1 a trozos. Entonces

$$\int_{\mathbf{c}} \nabla f \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{f}(\mathbf{c}(b)) - f(\mathbf{c}(a)).$$

DEMOSTRACIÓN Al aplicar la regla de la cadena a la función compuesta

$$F\colon t \mapsto f(\mathbf{c}(t))$$

obtenemos

$$F'(t) = (f \circ \mathbf{c})'(t) = \nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t).$$

La función F es una función con valores reales de la variable t y, por tanto, por el teorema fundamental del cálculo de una variable,

$$\int_a^b F'(t)\,dt = F(b) - F(a) = f(\mathbf{c}(b)) - f(\mathbf{c}(a)).$$

Por consiguiente,

$$\int_{\mathbf{c}} \nabla f \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \nabla f(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)\,dt = \int_a^b F'(t)\,dt = F(b) - F(a)$$
$$= f(\mathbf{c}(b)) - f(\mathbf{c}(a)).$$

EJEMPLO 7.11 Sea $\mathbf{c}$ la trayectoria $\mathbf{c}(t) = (t^4/4, \operatorname{sen}^3(t\pi/2), 0)$, $t \in [0, 1]$. Evaluar

$$\int_{\mathbf{c}} y\,dx + x\,dy$$

(que significa $\int_{\mathbf{c}} y\,dx + x\,dy + 0\,dz$).

Solución

Reconocemos $y\,dx + x\,dy$ o, de manera equivalente, el campo vectorial $y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$, como el gradiente de la función $f(x, y, z) = xy$. Así,

$$\int_{\mathbf{c}} y\,dx + x\,dy = f(\mathbf{c}(1)) - f(\mathbf{c}(0)) = \frac{1}{4} \cdot 1 - 0 = \frac{1}{4}.$$

Obviamente, si se consigue identificar el integrando con un gradiente, la evaluación de la integral será mucho más fácil. Como ejemplo, el lector debería tratar de obtener la integral del Ejemplo 7.11 directamente. En cálculo de una variable toda integral se puede obtener, en principio, hallando una primitiva; sin embargo, para campos vectoriales esto no siempre es cierto, pues un campo vectorial dado no es necesariamente un gradiente. Examinaremos este punto en detalle en la Sección 8.3, donde obtendremos un criterio para determinar cuándo un campo vectorial F es un gradiente; esto es, cuándo $F = \nabla f$ para alguna f.

Integrales de línea sobre curvas geométricas

Hemos visto cómo definir integrales a lo largo de trayectorias (integrales de funciones escalares) e integrales de línea (integrales de funciones vectoriales) sobre curvas parametrizadas. También hemos visto que nuestro trabajo se simplifica si elegimos la parametrización con sensatez. Como estas integrales no cambian con la parametrización (excepto tal vez por el signo), parece natural expresar la teoría en una forma que sea independiente de la misma y que sea, por tanto, más «geométrica». Haremos esto brevemente y de manera algo informal a continuación.

DEFINICIÓN Definimos una ***curva simple*** C como la imagen de una aplicación C^1 a trozos $\mathbf{c}$: $I \to \mathbb{R}^3$, que es inyectiva en un intervalo I; $\mathbf{c}$ recibe el nombre de ***parametrización*** de C. Así, una curva simple es aquella que no se corta a sí misma (Figura 7.2.6). Si $I = [a, b]$, llamamos a $\mathbf{c}(a)$ y $\mathbf{c}(b)$ ***extremos*** de la curva.

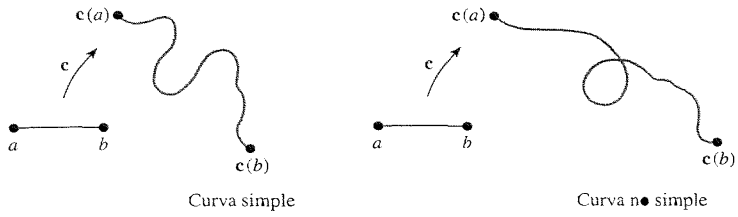


Figura 7.2.6. A la izquierda se muestra una curva simple, que no se corta a sí misma. A la derecha tenemos una curva que se corta a sí misma, y que por tanto no es simple.

Cada curva simple C tiene dos orientaciones o sentidos asociados. Si P y Q son los extremos de la curva, entonces podemos considerar a C como dirigida, bien de P a Q o de Q a P. La curva simple C junto con una de estas dos orientaciones es una ***curva simple orientada*** o ***curva simple dirigida*** (Figura 7.2.7).

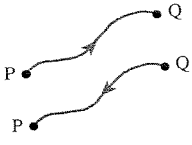


Figura 7.2.7. Una curva simple que une P y Q tiene dos posibles orientaciones.

DEFINICIÓN: Curvas cerradas simples Por ***curva cerrada simple*** entendemos la imagen de una trayectoria C^1 a trozos $\mathbf{c}$: $[a, b] \to \mathbb{R}^3$ inyectiva en $[a, b)$ y tal que $\mathbf{c}(a) = \mathbf{c}(b)$ (Figura 7.2.8). Si $\mathbf{c}$ satisface la condición $\mathbf{c}(a) = \mathbf{c}(b)$, pero no es necesariamente inyectiva en $[a, b)$, diremos que su imagen es una ***curva cerrada***. Las curvas cerradas simples tienen dos orientaciones, correspondientes a los dos posibles sentidos de movimiento a lo largo de la curva (Figura 7.2.9).

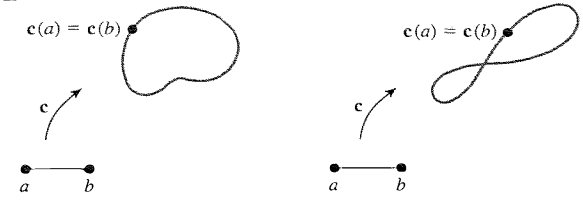


Figura 7.2.8. Una curva cerrada simple (izquierda) y una curva cerrada que no es simple (derecha).

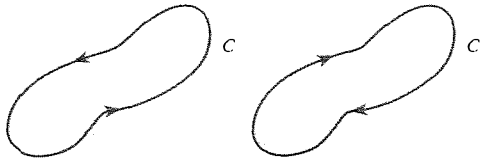


Figura 7.2.9. Las dos posibles orientaciones de una curva cerrada simple C.

Si C es una curva simple orientada o una curva cerrada simple orientada, podemos definir integrales de línea a lo largo de la misma sin ninguna ambigüedad.

Integrales de línea e integrales de trayectoria sobre curvas simples orientadas y curvas cerradas simples orientadas C

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} \quad \text{y} \quad \int_C f\,ds = \int_{\mathbf{c}} f\,ds, \tag{3}$$

donde $\mathbf{c}$ es una parametrización de C que conserva la orientación.

En virtud de los Teoremas 1 y 2[5], estas integrales no dependen de la elección de $\mathbf{c}$, siempre y cuando $\mathbf{c}$ sea inyectiva (salvo quizá en los extremos). El punto que queremos destacar aquí es que *si bien hay que parametrizar la curva para poder integrar a lo largo de la misma, no es necesario incluir la parametrización en la notación de la integral.*

EJEMPLO 7.12 Si $I = [a, b]$ es un intervalo cerrado en el eje x, entonces I, como curva, tiene dos orientaciones: una corresponde al movimiento de a a b (izquierda a derecha) y la otra corresponde al movimiento de b a a (derecha a izquierda). Si f es una función continua en I con valores reales, entonces, denotando a I con la primera orientación por I^+ y a I con la segunda orientación por I^-, tenemos

$$\int_{I^+} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx = -\int_{I^-} f(x)\,dx.$$

Una curva cerrada simple dada se puede parametrizar de muchas maneras. La Figura 7.2.10 muestra a C representada como la imagen de una función $\mathbf{p}$, con $\mathbf{p}(t)$ avanzando en una dirección prescrita alrededor de una curva orientada C a medida que t varía de a a b. Nótese que

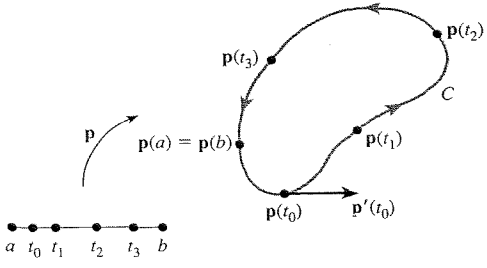


Figura 7.2.10. A medida que t va de a a b, $\mathbf{p}(t)$ se mueve alrededor de la curva C en algún sentido fijo.

[5] No hemos probado que dos trayectorias inyectivas cualesquiera $\mathbf{c}$ y $\mathbf{p}$ con la misma imagen sean reparametrización una de la otra, pero omitiremos este detalle técnico.

también $\mathbf{p}'(t)$ apunta en este sentido. La velocidad con la que recorremos C puede variar de parametrización a parametrización pero, de acuerdo con los Teoremas 1 y 2, en tanto la orientación se conserve la integral no cambia.

Respecto a estas observaciones debe tomarse la siguiente precaución. Es posible que dos funciones $\mathbf{c}$ y $\mathbf{p}$ tengan la misma imagen, que induzcan la misma orientación en la imagen y que, sin embargo,

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \neq \int_{\mathbf{p}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Por ejemplo, sean $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$ y $\mathbf{p}(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t, 0)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, con $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, 0, 0)$. Entonces $F_1(x, y, z) = y$, $F_2(x, y, z) = 0$ y $F_3(x, y, z) = 0$, de modo que

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} F_1(\mathbf{c}(t)) \frac{dx}{dt}\, dt = -\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t\, dt = -\pi.$$

Sin embargo, $\int_{\mathbf{p}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -2 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 2t\, dt = -2\pi$. Claramente, $\mathbf{c}$ y $\mathbf{p}$ tienen la misma imagen, concretamente la circunferencia unidad en el plano xy. Además, ambas recorren la circunferencia unidad en el mismo sentido; no obstante, $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \neq \int_{\mathbf{p}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$. La razón es que $\mathbf{c}$ es inyectiva, pero $\mathbf{p}$ no ($\mathbf{p}$ recorre la circunferencia unidad *dos veces* en sentido contrario al de las agujas del reloj); por consiguiente, $\mathbf{p}$ no es una parametrización de la circunferencia unidad considerada como curva cerrada simple.

Como consecuencia del Teorema 1 y generalizando la notación del Ejemplo 7.12, adoptamos el siguiente convenio:

Integrales de línea sobre curvas con orientaciones opuestas Sea C^- la misma curva que C, pero con la orientación opuesta. Entonces

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\int_{C^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

También se tiene lo siguiente.

Integrales de línea sobre curvas formadas por varias componentes Sea C una curva orientada compuesta por varias curvas orientadas C_i, $i = 1, \ldots, k$, como en la Figura 7.2.11. Entonces escribiremos $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_k$. Como podemos parametrizar C parametrizando las componentes $C_1, \ldots, C_k$ por separado, se puede demostrar que

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \cdots + \int_{C_k} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}. \tag{4}$$

Una razón para escribir una curva como una suma de componentes es que puede ser más fácil parametrizar individualmente las componentes C_i que parametrizar a C como un todo. Si éste es el caso, la Fórmula (4) proporciona una manera conveniente de evaluar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$.

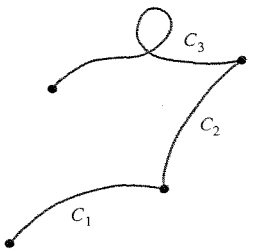


Figura 7.2.11. Una curva puede estar formada por varias componentes.

La notación *d*r para las integrales de línea

A veces se escribe la integral de línea, como haremos nosotros ocasionalmente más adelante, utilizando la notación

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

El motivo es que podemos pensar en describir una trayectoria C^1, $\mathbf{c}$, términos de un *vector posición* móvil que parta del origen y tenga como extremo el punto $\mathbf{c}(t)$ en el instante t. Los vectores de posición se denotan con frecuencia por $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, y en consecuencia se describe la curva por medio de la notación $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ en lugar de $\mathbf{c}(t)$. Por definición, la integral de línea está dada por

$$\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt.$$

Si cancelamos formalmente los dt y usamos la independencia de la parametrización para sustituir los límites de integración por la curva geométrica C, llegamos a la notación $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

EJEMPLO 7.13 Consideramos C, el perímetro del cuadrado unidad en $\mathbb{R}^2$, orientado en el sentido contrario al de las agujas del reloj (*véase* la Figura 7.2.12). Evaluar la integral de línea

$$\int_C x^2\, dx + xy\, dy.$$

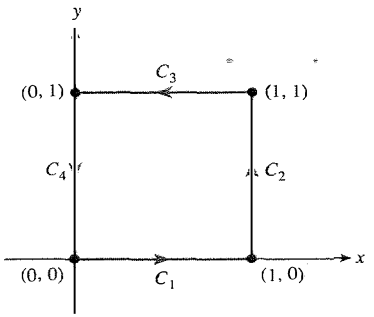


Figura 7.2.12. Perímetro del cuadrado unidad parametrizado en cuatro trozos.

Solución

Evaluamos la integral utilizando una parametrización de C conveniente que induzca la orientación dada. Por ejemplo:

$$\mathbf{c}\colon [0, 4] \to \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto \begin{cases} (t, 0), & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ (1, t-1), & 1 \leqslant t \leqslant 2, \\ (3-t, 1), & 2 \leqslant t \leqslant 3, \\ (0, 4-t), & 3 \leqslant t \leqslant 4. \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_C x^2\,dx + xy\,dy &= \int_0^1 (t^2 + 0)\,dt + \int_1^2 [0 + (t-1)]\,dt \\ &\quad + \int_2^3 [-(3-t)^2 + 0]\,dt + \int_3^4 (0 + 0)\,dt \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{3}\right) + 0 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ahora evaluamos otra vez esta integral de línea, utilizando la Fórmula (4) y parametrizando las C_i por separado. Nótese que $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$, donde las C_i son las curvas orientadas que se muestran en la Figura 7.2.12. Éstas se pueden parametrizar como sigue:

$$\begin{aligned} C_1&\colon \mathbf{c}_1(t) = (t, 0),\ 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ C_2&\colon \mathbf{c}_2(t) = (1, t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ C_3&\colon \mathbf{c}_3(t) = (1-t, 1),\ 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ C_4&\colon \mathbf{c}_4(t) = (0, 1-t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1. \end{aligned}$$

Por tanto

$$\int_{C_1} x^2\,dx + xy\,dy = \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}$$

$$\int_{C_2} x^2\,dx + xy\,dy = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$$

$$\int_{C_3} x^2\,dx + xy\,dy = \int_0^1 -(1-t)^2\,dt = -\frac{1}{3}$$

$$\int_{C_4} x^2\,dx + xy\,dy = \int_0^1 0\,dt = 0$$

Así, de nuevo

$$\int_C x^2\,dx + xy\,dy = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{2}.$$

EJEMPLO 7.14 Una aplicación interesante de la integral de línea es la formulación matemática de la ley de Ampère, que relaciona corrientes eléctricas con sus efectos magnéticos[6]. Supongamos que **H** denota un campo magnético en $\mathbb{R}^3$ y sea C una curva orientada cerrada en $\mathbb{R}^3$. Con las unidades físicas adecuadas, la ley de Ampère asegura que

$$\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I,$$

donde I es la corriente neta que pasa a través de cualquier superficie limitada por C (*véase* la Figura 7.2.13).

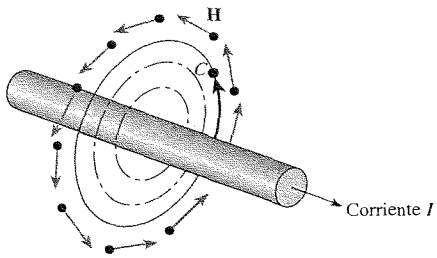


Figura 7.2.13. El campo magnético **H** que rodea a un alambre por el que circula una corriente I satisface la ley de Ampère $\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I$.

Finalmente, mencionemos que la integral de línea tiene otro significado físico importante, concretamente, la interpretación de $\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$ como *circulación*, donde **V** es el campo de velocidades de un fluido, como veremos en la Sección 8.2. Así, con la ayuda de las integrales de línea es posible analizar una amplia variedad de conceptos físicos, desde la noción de trabajo hasta los campos electromagnéticos y los del movimiento de fluidos.

EJERCICIOS

1. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Evaluar la integral de **F** a lo largo de cada una de las siguientes trayectorias:
   a) $\mathbf{c}(t) = (t, t, t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.
   b) $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.
   c) $\mathbf{c}(t) = (\operatorname{sen} t, 0, \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.
   d) $\mathbf{c}(t) = (t^2, 3t, 2t^3)$, $-1 \leqslant t \leqslant 2$.

2. Evaluar cada una de las siguientes integrales de línea:
   a) $\int_{\mathbf{c}} x\,dy - y\,dx$, $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.
   b) $\int_{\mathbf{c}} x\,dx + y\,dy$, $\mathbf{c}(t) = (\cos \pi t, \operatorname{sen} \pi t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2$.

[6] El descubrimiento de que las corrientes eléctricas producen efectos magnéticos lo hizo Haas Christian Oersted alrededor de 1820. *Véase* cualquier texto de física elemental para el estudio de los fundamentos físicos de estas ideas.

c) $\int_{\mathbf{c}} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$, donde $\mathbf{c}$ está formada por los segmentos rectilíneos que unen (1, 0, 0) con (0, 1, 0), y éste con (0, 0, 1).

d) $\int_{\mathbf{c}} x^2\,dx - xy\,dy + dz$, donde $\mathbf{c}$ es la parábola $z = x^2$, $y = 0$, de $(-1, 0, 1)$ a (1, 0, 1).

3. Consideremos el campo de fuerza $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Calcular el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de la parábola $y = x^2$, $z = 0$, de $x = -1$ a $x = 2$.

4. Sea $\mathbf{c}$ una trayectoria suave.

a) Supongamos que $\mathbf{F}$ es perpendicular a $\mathbf{c}'(t)$ en el punto $\mathbf{c}(t)$. Demostrar que

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

b) Si $\mathbf{F}$ es paralelo a $\mathbf{c}'(t)$ en $\mathbf{c}(t)$, demostrar que

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}} \|\mathbf{F}\|\, d\mathbf{s}.$$

(Por paralelo a $\mathbf{c}'(t)$ se entiende que $\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) = \lambda(t)\,\mathbf{c}'(t)$, donde $\lambda(t) > 0$.)

5. Supongamos que la trayectoria $\mathbf{c}$ tiene longitud l y que $\|\mathbf{F}\| \leqslant M$. Demostrar que

$$\left| \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \right| \leqslant Ml.$$

6. Evaluar $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ y la trayectoria $\mathbf{c}$ está definida por $\mathbf{c}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

7. Evaluar

$$\int_{\mathbf{c}} y\,dx + (3y^3 - x)\,dy + z\,dz$$

para cada una de las trayectorias $\mathbf{c}(t) = (t, t^n, 0)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, donde $n = 1, 2, 3, \ldots$

8. Este ejercicio hace referencia al Ejemplo 7.14. Sea L un alambre muy largo, del cual se muestra una sección transversal (con el plano perpendicular al alambre) en la Figura 7.2.14. Supongamos que este plano es el plano xy. Los experimentos muestran que $\mathbf{H}$ es tangente a toda circunferencia en el plano xy cuyo centro sea el eje de L, y que la magnitud de $\mathbf{H}$ es constante en cada una de esas

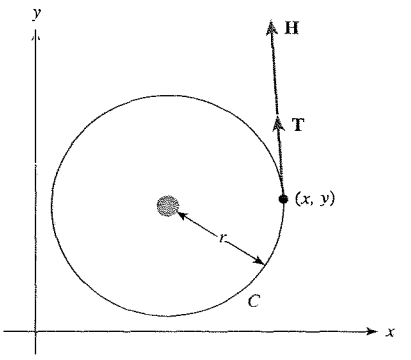


Figura 7.2.14. Sección transversal de un alambre largo y una curva C alrededor del alambre.

circunferencias. Así, $\mathbf{H} = H\mathbf{T}$, donde $\mathbf{T}$ es el vector tangente unitario a C, y H es algún escalar. Usando esta información, probar que $H = I/2\pi r$, donde r es el radio de la circunferencia e I es la corriente que circula por el alambre.

9. En la Figura 7.2.15 se muestra la imagen de la trayectoria plana $t \mapsto (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Evaluar la integral del campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ a lo largo de esta curva.

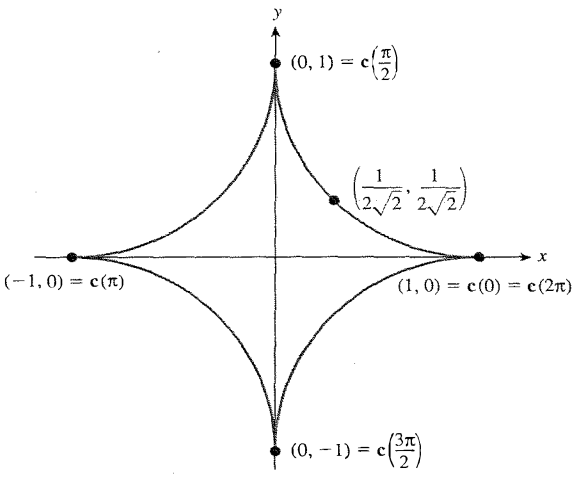


Figura 7.2.15. La hipocicloide $\mathbf{c}(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t)$.

10. Supongamos que $\mathbf{c}_1$ y $\mathbf{c}_2$ son dos trayectorias con los mismos extremos y que $\mathbf{F}$ es un campo vectorial. Demostrar que $\int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ es equivalente a $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$, donde C es la curva cerrada que se obtiene al moverse primero a lo largo de $\mathbf{c}_1$ y después a lo largo de $\mathbf{c}_2$ en el sentido opuesto.

11. Sea $\mathbf{c}(t)$ una trayectoria y $\mathbf{T}$ el vector tangente unitario. ¿Qué es $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{T} \cdot d\mathbf{s}$?

12. Sea $\mathbf{F} = (z^3 + 2xy)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 3xz^2\mathbf{k}$. Demostrar que la integral de $\mathbf{F}$ a lo largo del perímetro del cuadrado unidad con vértices $(\pm 1, \pm 1)$ es cero.

13. Usando la trayectoria del Ejercicio 9, observar que una aplicación $\mathbf{c}$: $[a, b] \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 puede tener una imagen que no «parece suave». ¿Podría suceder esto si $\mathbf{c}'(t)$ fuera siempre distinto de cero?

14. ¿Cuál es el valor de la integral de un campo gradiente a lo largo de una curva cerrada C?

15. Evaluar la integral de línea

$$\int_C 2xyz\,dx + x^2z\,dy + x^2y\,dz,$$

donde C es una curva simple orientada que conecta (1, 1, 1) con (1, 2, 4).

16. Supongamos que $\nabla f(x, y, z) = 2xyze^{x^2}\mathbf{i} + ze^{x^2}\mathbf{j} + ye^{x^2}\mathbf{k}$. Si $f(0, 0, 0) = 5$, hallar $f(1, 1, 2)$.

17. Consideramos el campo de fuerzas gravitatorio (con $G = m = M = 1$) definido (para $(x, y, z) \neq \neq (0, 0, 0)$) por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}).$$

Demostrar que el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria cuando la partícula se mueve de (x_1, y_1, z_1) a (x_2, y_2, z_2) a lo largo de cualquier trayectoria depende sólo de los radios $R_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ y $R_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$.

18. Una ciclista sube una montaña a lo largo de la trayectoria que se muestra en la Figura 7.2.16. Realiza un giro completo alrededor de la montaña para alcanzar la cima, siendo su pendiente de subida constante. Durante el viaje ejerce una fuerza descrita por el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

¿Cuál es el trabajo realizado por la ciclista al viajar de A a B? ¿Qué es poco realista en este modelo de ciclista?

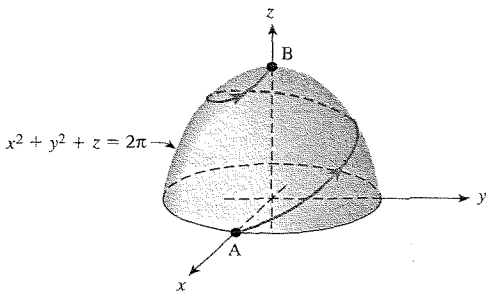


Figura 7.2.16. ¿Cuánto trabajo se realiza al subir en bicicleta esta montaña?

19. Sea $\mathbf{c}$: $[a, b] \to \mathbb{R}^3$ una trayectoria tal que $\mathbf{c}'(t) \neq \mathbf{0}$. Recordemos de la Sección 4.1 que cuando se cumple esta condición se dice que $\mathbf{c}$ es ***regular***. Sea la función f definida por la fórmula $f(x) = \int_a^x \|\mathbf{c}'(t)\|\, dt$.

a) ¿Qué es df/dx?

b) Utilizando la respuesta de a), demostrar que f: $[a, b] \to [0, L]$, donde L es la longitud de $\mathbf{c}$, tiene una inversa diferenciable g: $[0, L] \to [a, b]$ que satisface $f \circ g(s) = s$, $g \circ f(x) = x$ (se puede usar el teorema de la función inversa de una variable que se enunció al comienzo de la Sección 3.5).

c) Calcular dg/ds.

d) Recordemos que se dice que una trayectoria $s \mapsto \mathbf{b}(s)$ tiene rapidez unidad, o que está parametrizada por longitud de arco, si $\|\mathbf{b}'(s)\| = 1$. Demostrar que la reparametrización de $\mathbf{c}$ dada por $\mathbf{b}(s) = \mathbf{c} \circ g(s)$ tiene rapidez unidad. Concluir que cualquier trayectoria regular se puede reparametrizar por longitud de arco (así, por ejemplo, las fórmulas de Frenet del Ejercicio 17 de la Sección 4.2 se pueden aplicar a la reparametrización $\mathbf{b}$).

20. A lo largo de una «trayectoria termodinámica» C en el espacio (V, T, P),

i) El calor ganado es $\int_C \Lambda_V dV + K_V dT$, donde Λ_V, K_V son funciones de (V, T, P), dependiendo del sistema físico particular.

ii) El trabajo realizado es $\int_C P\, dV$.

Para un gas de van der Waals se tiene que

$$P(V, T) = \frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2}, \qquad J\Lambda_V = \frac{RT}{V - b} \qquad \text{y} \qquad K_V = \text{constante},$$

donde R, b, a y J son constantes conocidas. Inicialmente el gas está a una temperatura T_0 y tiene un volumen V_0.

a) Un proceso ***adiabático*** es una evolución termodinámica $(V(t), T(t), P(t))$ para el cual

$$\frac{dT}{dV} = \frac{dT/dt}{dV/dt} = -\frac{\Lambda_V}{K_V}.$$

Si el gas de van der Waals se somete a un proceso adiabático en el cual el volumen se duplica hasta $2V_0$, calcular

1) el calor ganado;
2) el trabajo realizado; y
3) el volumen, la temperatura y la presión finales.

b) Después del proceso indicado en a), el gas se enfría (o calienta) a volumen constante hasta que se alcanza la temperatura original T_0. Calcular:

1) el calor ganado;
2) el trabajo realizado; y
3) el volumen, la temperatura y la presión finales.

c) Después del proceso indicado en b), se comprime el gas hasta que regresa a su volumen original V_0. Calcular:

1) el calor ganado;
2) el trabajo realizado; y
3) el volumen, la temperatura y la presión finales.

d) Para el proceso cíclico descrito en a), b) y c), calcular:

1) el calor total ganado; y
2) el trabajo total realizado.

7.3. Superficies parametrizadas

En las Secciones 7.1 y 7.2 hemos estudiado integrales de funciones escalares y vectoriales a lo largo de curvas. Pasaremos ahora a integrales sobre superficies y comenzaremos por estudiar la geometría de las propias superficies.

Las gráficas son muy restrictivas

Ya estamos acostumbrados a un tipo de superficie, a saber, la gráfica de una función $f(x, y)$. En el Capítulo 2 se hizo un estudio exhaustivo de gráficas, y sabemos cómo calcular sus planos tangentes. Sin embargo, nos limitaríamos indebidamente si nos restringiéramos a este caso. Por ejemplo, muchas superficies surgen como superficies de nivel de funciones. Supongamos que nuestra superficie S es el conjunto de los puntos (x, y, z) tales que $x - z + z^3 = 0$. Aquí S es una hoja que se dobla (respecto al plano xy) sobre sí misma (*véase* la Figura 7.3.1). Evidentemente, queremos llamar a S una superficie, pues se trata simplemente de un plano con un pliegue. Sin embargo, S *no* es la gráfica de ninguna función $z = f(x, y)$, pues esto significa que para cada $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ debe haber *un* z_0 tal que $(x_0, y_0, z_0) \in S$. Como se ilustra en la Figura 7.3.1, esta condición se viola.

Otro ejemplo es la superficie de un donuts, llamada toro, que aparece dibujada en la Figura 7.3.2. Todo el mundo diría que el toro es una superficie; sin embargo, por el mismo razonamiento que antes, un toro no puede ser la gráfica de una función diferenciable de dos variables. Estas observaciones nos animan a extender nuestra definición de superficie.

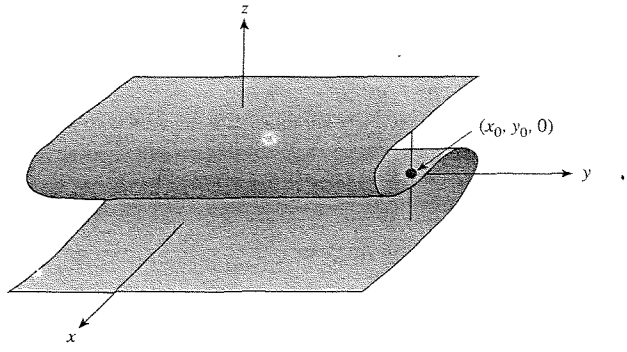


Figura 7.3.1. Una superficie que no es la gráfica de una función $z = f(x, y)$.

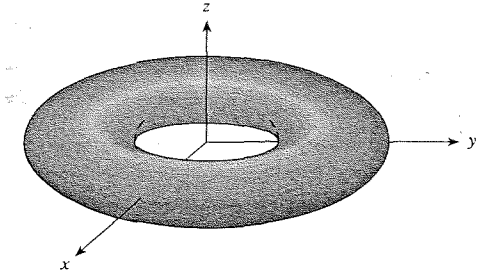


Figura 7.3.2. El toro no es la gráfica de ninguna función de la forma $z = f(x, y)$.

La motivación para la definición ampliada que damos a continuación es, en parte, que se puede pensar en una superficie como algo que se obtiene a partir del plano, «enrollando», «doblando» y «empujando». Por ejemplo, para obtener un toro, tomamos una parte del plano y la enrollamos (*véase* la Figura 7.3.3), después tomamos los dos «extremos» y los acercamos hasta que se juntan (Figura 7.3.4).

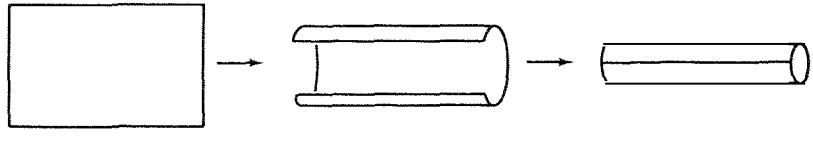


Figura 7.3.3. El primer paso para obtener un toro a partir de un rectángulo es hacer un cilindro.



Figura 7.3.4. Se dobla el cilindro y se pegan los extremos para obtener un toro.

Las superficies parametrizadas vistas como aplicaciones

En nuestro estudio del cálculo diferencial hemos tratado las aplicaciones $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Tomar $n = 2$ y $m = 3$ corresponde al caso de una superficie bidimensional en el espacio tridimensional. Con las superficies, igual que con las curvas, queremos distinguir entre una aplicación (una parametrización) y su imagen (un objeto geométrico). Esto nos lleva a la siguiente definición.

DEFINICIÓN: Superficies parametrizadas Una *parametrización de una superficie* es una función Φ: $D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, donde D es algún dominio en $\mathbb{R}^2$. La ***superficie*** S correspondiente a la función Φ es su imagen: $S = \Phi(D)$. Podemos escribir:

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

Si Φ es diferenciable o de clase C^1 [que es lo mismo que decir que $x(u, v)$, $y(u, v)$ y $z(u, v)$ son diferenciables o funciones C^1 de (u, v)], llamamos a S ***superficie diferenciable o*** C^1.

Podemos pensar que Φ tuerce o dobla la región D del plano para producir la superficie S (*véase* la Figura 7.3.5). Así, cada punto (u, v) de D se convierte en una etiqueta para un punto $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ de S.

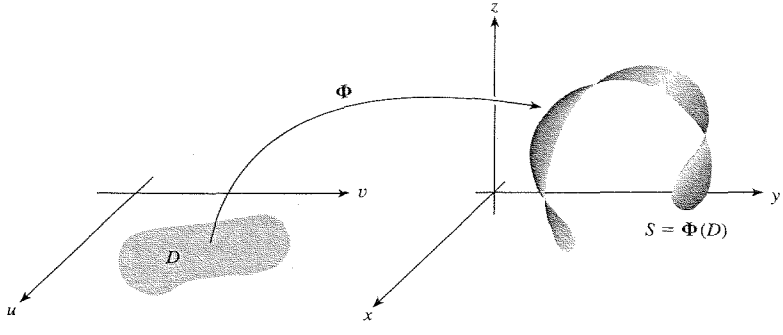


Figura 7.3.5. Φ «tuerce» y «dobla» D produciendo una superficie $S = \Phi(D)$.

Por supuesto, las superficies no tienen por qué doblarse o retorcerse en absoluto. De hecho, los planos son superficies, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 7.15 En la Sección 1.3 estudiamos la ecuación de un plano P. Lo hicimos en términos de gráficas y conjuntos de nivel. Ahora examinamos la misma noción utilizando una parametrización.

Sea P un plano que es paralelo a los dos vectores α y β, y pasa por el extremo de otro vector γ, como en la Figura 7.3.6.

Nuestro objetivo en este ejemplo es hallar una parametrización de este plano. Obsérvese que el vector $\alpha \times \beta = \mathbf{N}$, que también podemos escribir como $A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$, es normal a P. Si el

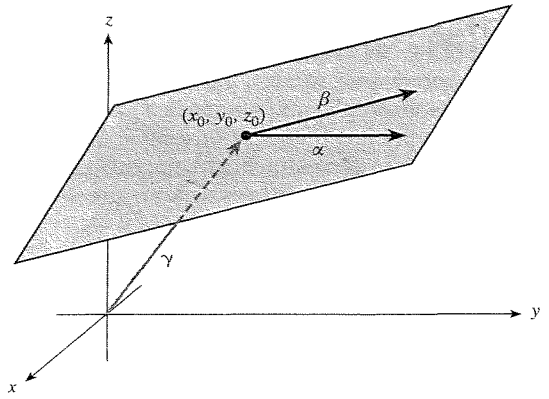


Figura 7.3.6. Descripción paramétrica de un plano.

extremo de γ es el punto (x_0, y_0, z_0), entonces la ecuación de P como un conjunto de nivel (tal como vimos en la Sección 1.3) viene dada por:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Sin embargo, el conjunto de todos los puntos del plano P también se puede describir como el conjunto de todos los vectores que son γ más una combinación lineal de α y β. Utilizando nuestra elección favorita de parámetros reales, u y v, llegamos a la ***ecuación paramétrica del plano*** P:

$$\mathbf{\Phi}(u, v) = \alpha u + \beta v + \gamma.$$

Vectores tangentes a una superficie parametrizada

Supongamos que $\mathbf{\Phi}$ es una superficie parametrizada que es diferenciable en $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$. Fijando u en u_0, obtenemos una aplicación $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $t \mapsto \mathbf{\Phi}(u_0, t)$ cuya imagen es una curva sobre la superficie (Figura 7.3.7). Sabemos, por los Capítulos 2 y 4, que el vector tangente a esta curva en el punto $\mathbf{\Phi}(u_0, v_0)$, que denotamos por $\mathbf{T}_v$, está dado por

$$\mathbf{T}_v = \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{k}.$$

De manera análoga, si fijamos v y consideramos la curva $t \mapsto (t, v_0)$, obtenemos el vector tangente a esta curva en $\mathbf{\Phi}(u_0, v_0)$, dado por

$$\mathbf{T}_u = \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{k}.$$

Superficies regulares

Como los vectores $\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$ son tangentes a dos curvas sobre la superficie en un punto dado, el vector $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ debería ser normal a la superficie en dicho punto.

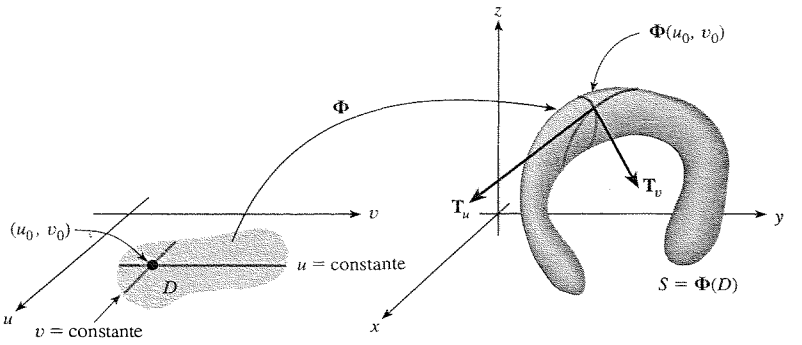


Figura 7.3.7. Los vectores $\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$ son tangentes a curvas sobre la superficie S y, por lo tanto, son tangentes a S.

Decimos que una superficie S es ***regular*** o ***suave***[7] en $\mathbf{\Phi}(u_0, v_0)$, si $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$ en (u_0, v_0). Se dice que la superficie es ***regular*** si es regular en todos los puntos $\mathbf{\Phi}(u_0, v_0) \in S$. El vector no nulo $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ es *normal* a S (recordemos que el producto vectorial de $\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$ es perpendicular al plano generado por $\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$); el hecho de que sea no nulo asegura que habrá un plano tangente. Intuitivamente, una superficie suave no tiene «esquinas»[8].

EJEMPLO 7.16 Consideramos la superficie dada por las ecuaciones

$$x = u \cos v, \qquad y = u \operatorname{sen} v, \qquad z = u, \qquad u \geqslant 0.$$

¿Es diferenciable? ¿Es regular?

Solución

Estas ecuaciones describen la superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (para verificarlo, elevar al cuadrado las ecuaciones para x, y, y z), que se muestra en la Figura 7.3.8. Esta superficie es un cono con «vértice» en (0, 0, 0); es una superficie diferenciable porque cada función componente es diferenciable como función de u y v. Sin embargo, *la superficie no es regular en* (0, 0, 0). Para ver esto, calculamos $\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$ en $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{T}_u = \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}(0, 0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(0, 0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(0, 0)\mathbf{k} = (\cos 0)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} 0)\mathbf{j} + \mathbf{k} = \mathbf{i} + \mathbf{k},$$

[7] Hablando estrictamente, la regularidad depende de la parametrización $\mathbf{\Phi}$, y no sólo de su imagen S. Por consiguiente, esta terminología es algo imprecisa; sin embargo, es descriptiva y, y no debería causar confusión (*véase* el Ejercicio 17 de esta sección).

[8] En la Sección 3.5 mostramos que las superficies de nivel $f(x, y, z) = 0$ eran de hecho gráficas de funciones de dos variables en un entorno de cualquier punto (x_0, y_0, z_0) tal que $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Esto unificaba dos conceptos de superficie —gráficas y conjuntos de nivel—. Asimismo, usando el teorema de la función implícita es posible demostrar que la imagen de una superficie parametrizada $\mathbf{\Phi}$ es también la gráfica de una función de dos variables en el entorno de todo punto (u_0, v_0) donde $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$. Así, todas las definiciones de superficie son consistentes (*véase* el Ejercicio 18 de esta sección).

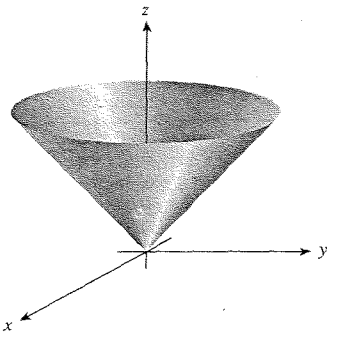


Figura 7.3.8. La superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ es un cono; no es regular en su vértice.

y, de manera semejante,

$$\mathbf{T}_v = \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v} = 0(-\operatorname{sen} 0)\mathbf{i} + 0(\cos 0)\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Así, $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = \mathbf{0}$, de modo que, por definición, la superficie no es regular en (0, 0, 0).

El plano tangente a una superficie parametrizada

Podemos usar que $\mathbf{n} = \mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ es normal a la superficie tanto para definir formalmente el plano tangente como para calcularlo.

DEFINICIÓN: El plano tangente a una superficie Si una superficie parametrizada $\mathbf{\Phi}$: $D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es regular en $\mathbf{\Phi}(u_0, v_0)$, esto es, si $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$ en (u_0, v_0), definimos el ***plano tangente*** a la superficie en $\mathbf{\Phi}(u_0, v_0)$ como el plano determinado por los vectores $\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$. Así, $\mathbf{n} = \mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ es un vector normal y

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \mathbf{n} = 0, \tag{1}$$

donde $\mathbf{n}$ está evaluado en (u_0, v_0), es una ecuación del plano tangente a la superficie en (x_0, y_0, z_0); es decir, el plano tangente es el conjunto de los puntos (x, y, z) que satisfacen (1). Si $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) = n_1\mathbf{1} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}$, entonces la Fórmula (1) se convierte en

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0. \tag{1'}$$

EJEMPLO 7.17 Sea $\mathbf{\Phi}$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$x = u\cos v, \qquad y = u \operatorname{sen} v, \qquad z = u^2 + v^2.$$

¿Dónde existe un plano tangente? Hallar el plano tangente en $\mathbf{\Phi}(1, 0)$.

Solución

Calculamos

$$\mathbf{T}_u = (\cos v)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} v)\mathbf{j} + 2u\mathbf{k} \qquad \text{y} \qquad T_v = -u(\operatorname{sen} v)\mathbf{i} + u(\cos v)\mathbf{j} + 2v\mathbf{k},$$

de manera que el plano tangente en el punto $\mathbf{\Phi}(u_0, v_0)$ es el conjunto de vectores que pasan por $\mathbf{\Phi}(u_0, v_0)$ perpendiculares a

$$(\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)(u_0, v_0) = (-2u_0^2 \cos v_0 + 2v_0 \operatorname{sen} v_0, \ -2u_0^2 \operatorname{sen} v_0 - 2v_0 \cos v_0, \ u_0),$$

si este vector es distinto de cero. Como $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ es igual a $\mathbf{0}$ en $(u_0, v_0) = (0, 0)$, no podemos hallar el plano tangente en $\mathbf{\Phi}(0, 0) = (0, 0, 0)$. Sin embargo, podemos hallar la ecuación del plano tangente en todos los demás puntos, donde $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$. En el punto $\mathbf{\Phi}(1, 0) = (1, 0, 1)$,

$$\mathbf{n} = (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)(1, 0) = (-2, 0, 1) = -2\mathbf{i} + \mathbf{k}.$$

Como tenemos el vector $\mathbf{n}$ normal a la superficie y un punto $(1, 0, 1)$ sobre la superficie, podemos usar la Fórmula (1′) para obtener una ecuación del plano tangente:

$$-2(x - 1) + (z - 1) = 0; \text{ esto es, } z = 2x - 1.$$

EJEMPLO 7.18 Supongamos que una superficie S es la gráfica de una función diferenciable $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Escribir S en forma paramétrica y demostrar que la superficie es suave en todos sus puntos $(u_0, v_0, g(u_0, v_0)) \in \mathbb{R}^3$.

Solución

Escribimos S en forma paramétrica como sigue:

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = g(u, v),$$

que es lo mismo que $z = g(x, y)$. Entonces, en los puntos (u_0, v_0),

$$\mathbf{T}_u = \mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{k} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{T}_v = \mathbf{j} + \frac{\partial g}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{k},$$

y para $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{n} = \mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = -\frac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{j} + \mathbf{k} \neq \mathbf{0}. \tag{2}$$

Esto es distinto de cero, pues el coeficiente de $\mathbf{k}$ es 1; en consecuencia, la parametrización $(u, v) \mapsto (u, v, g(u, v))$ es regular en todo los puntos. Además, por la Fórmula (1), el plano tangente en el punto $(x_0, y_0, z_0) = (u_0, v_0, g(u_0, v_0))$ está dado por:

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \left(-\frac{\partial g}{\partial u}, -\frac{\partial g}{\partial v}, 1 \right) = 0,$$

donde las derivadas parciales están evaluadas en (u_0, v_0). Recordando que $x = u$ e $y = v$, podemos escribir esto como

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)(x - x_0) + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)(y - y_0), \tag{3}$$

donde $\partial g/\partial x$ y $\partial g/\partial y$ están evaluadas en (x_0, y_0).

Este ejemplo muestra también que la definición del plano tangente para superficies parametrizadas coincide con la que hemos dado para superficies consideradas como gráficas, pues la Ecuación (3) es la misma fórmula que obtuvimos (en el Capítulo 2) para el plano tangente a S en el punto $(x_0, y_0, z_0) \in S$.

También es útil considerar superficies suaves a trozos, es decir, superficies compuestas de un cierto número de imágenes de superficies parametrizadas suaves; por ejemplo, la superficie de un cubo en $\mathbb{R}^3$ es una superficie de este tipo. Estas superficies se estudian en la Sección 7.4.

EJEMPLO 7.19 Hallar una parametrización para el hiperboloide de una hoja:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

Solución

Como x e y aparecen en la forma $x^2 + y^2$, la superficie es invariante bajo rotaciones alrededor del eje z, así que es natural escribir

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\operatorname{sen}\theta.$$

Entonces $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ se convierte en $r^2 - z^2 = 1$. Esto se puede parametrizar convenientemente por[9]

$$r = \cosh u, \qquad z = \operatorname{senh} u.$$

Así, una parametrización es

$$x = (\cosh u)(\cos\theta), \qquad y = (\cosh u)(\operatorname{sen}\theta), \qquad z = \operatorname{senh} u,$$

donde $0 \leq \theta < 2\pi$, $-\infty < u < \infty$.

EJERCICIOS

En los ejercicios del 1 al 3, hallar una ecuación para el plano tangente a la superficie dada en el punto especificado.

1. $x = 2u, \quad y = u^2 + v, \quad z = v^2, \quad$ en $(0, 1, 1)$.
2. $x = u^2 - v^2, \quad y = u + v, \quad z = u^2 + 4v, \quad$ en $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2)$.
3. $x = u^2, \quad y = u\operatorname{sen} e^v, \quad z = \frac{1}{3}u\cos e^v, \quad$ en $(13, -2, 1)$.
4. ¿En qué puntos son suaves las superficies de los Ejercicios 1 y 2?
5. Hallar una expresión para un vector unitario normal a la superficie

   $$x = \cos v \operatorname{sen} u, \qquad y = \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, \qquad z = \cos u$$

   en la imagen de un punto (u, v) para u en $[0, \pi]$ y v en $[0, 2\pi]$. Identificar esta superficie.

[9] Recordemos del cálculo de una variable que $\cosh u = (e^u + e^{-u})/2$ y $\operatorname{senh} u = (e^u - e^{-u})/2$. A partir de estas definiciones se puede comprobar fácilmente que $\cosh^2 u - \operatorname{senh}^2 u = 1$.

6. Repetir el Ejercicio 5 para la superficie

$$x = 3\cos\theta \operatorname{sen}\phi, \qquad y = 2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, \qquad z = \cos\phi$$

para θ en $[0, 2\pi]$ y ϕ *en* $[0, \pi]$.

7. Repetir el Ejercicio 5 para la superficie

$$x = \operatorname{sen} v, \qquad y = u, \qquad z = \cos v$$

para $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$ y $-1 \leqslant u \leqslant 3$.

8. Repetir el Ejercicio 5 para la superficie

$$x = (2 - \cos v)\cos u, \qquad y = (2 - \cos v)\operatorname{sen} u, \qquad z = \operatorname{sen} v$$

para $-\pi \leqslant u \leqslant \pi$, $-\pi \leqslant v \leqslant \pi$. ¿Es regular esta superficie?

9. **a)** Obtener una fórmula para el plano tangente a la superficie $x = h(y, z)$.

b) Obtener una fórmula similar para $y = k(x, z)$.

10. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $x = u^2$, $y = v^2$, $z = u^2 + v^2$ en el punto $u = 1$, $v = 1$.

11. Hallar una parametrización de la superficie $z = 3x^2 + 8xy$ y usarla para hallar el plano tangente en $x = 1, y = 0, z = 3$. Comparar la respuesta con la que se obtiene viendo la superficie como una gráfica.

12. Hallar una parametrización de la superficie $x^3 + 3xy + z^2 = 2$, $z > 0$, y usarla para hallar el plano tangente en el punto $x = 1$, $y = \frac{1}{3}$, $z = 0$. Comparar la respuesta con la que se obtiene viendo la superficie como un conjunto de nivel.

13. Considerar la superficie en $\mathbb{R}^3$ parametrizada por

$$\mathbf{\Phi}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \theta), \qquad 0 \leqslant r \leqslant 1 \qquad \text{y} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 4\pi.$$

a) Esbozar y describir la superficie.

b) Hallar una expresión para una normal unitaria a la superficie.

c) Hallar una ecuación para el plano tangente a la superficie en el punto (x_0, y_0, z_0).

d) Si (x_0, y_0, z_0) es un punto sobre la superficie, demostrar que el segmento de recta horizontal de longitud uno que va del eje z hacia (x_0, y_0, z_0) está contenido en la superficie y en el plano tangente a la superficie en (x_0, y_0, z_0).

14. Dada una esfera de radio 2 centrada en el origen, hallar la ecuación del plano tangente a ella en el punto $(1, 1, \sqrt{2})$ considerando la esfera como:

a) una superficie parametrizada por $\mathbf{\Phi}(\theta, \phi) = (2\cos\theta\operatorname{sen}\phi, 2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, 2\cos\phi)$;

b) un conjunto de nivel de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; y

c) la gráfica de $g(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

15. **a)** Hallar una parametrización para el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 25$.

b) Hallar una expresión para una normal unitaria a esta superficie.

c) Hallar una ecuación para el plano tangente a la superficie en $(x_0, y_0, 0)$, donde $x_0^2 + y_0^2 = 25$.

d) Demostrar que las rectas $(x_0, y_0, 0) + t(-y_0, x_0, 5)$ y $(x_0, y_0, 0) + t(y_0, -x_0, 5)$ están en la superficie y en el plano tangente hallado en c).

16. Una superficie parametrizada se describe por una función diferenciable $\mathbf{\Phi}$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. De acuerdo con el Capítulo 2, la derivada debería proporcionar una aproximación lineal que produce una representación del plano tangente. Este ejercicio demuestra que, en efecto, éste es el caso.

a) Suponiendo que $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$, demostrar que el rango de la aplicación lineal $\mathbf{D\Phi}(u_0, v_0)$ es el plano generado por $\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$ (aquí $\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$ están evaluados en (u_0, v_0)).

b) Demostrar que $\mathbf{w} \perp (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)$ si y sólo si $\mathbf{w}$ está en el rango de $\mathbf{D\Phi}(u_0, v_0)$.

c) Demostrar que el plano tangente según se ha definido en esta sección coincide con el «plano parametrizado»

$$(u, v) \mapsto \mathbf{\Phi}(u_0, v_0) + \mathbf{D\Phi}(u_0, v_0)\begin{bmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{bmatrix}.$$

17. Considerar las superficies $\mathbf{\Phi}_1(u, v) = (u, v, 0)$ y $\mathbf{\Phi}_2(u, v) = (u^3, v^3, 0)$.

a) Demostrar que las imagenes de $\mathbf{\Phi}_1$ y $\mathbf{\Phi}_2$ son el plano xy.

b) Demostrar que $\mathbf{\Phi}_1$ describe una superficie regular, pero $\mathbf{\Phi}_2$ no. Concluir que la noción de regularidad de una superficie S depende de la existencia de al menos una parametrización regular para S.

c) Probar que el plano tangente a S está bien definido independientemente de la parametrización regular (biyectiva) (será necesario utilizar el teorema de la función inversa de la Sección 3.5).

d) Después de estas observaciones, ¿cree que será usted capaz de hallar una parametrización regular del cono de la Figura 7.3.7?

18. Sea $\mathbf{\Phi}$ una superficie regular en (u_0, v_0); esto es, $\mathbf{\Phi}$ es de clase C^1 y $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$ en (u_0, v_0).

a) Usar el teorema de la función implícita (Sección 3.5) para demostrar que la imagen de $\mathbf{\Phi}$ *cerca de* (u_0, v_0) es la gráfica de una función C^1 de dos variables. Si la componente z de $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ es distinta de cero, podemos escribirla como $z = f(x, y)$.

b) Demostrar que el plano tangente a $\mathbf{\Phi}(u_0, v_0)$ definido por el plano generado por $\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$ coincide con el plano tangente a la gráfica de $z = f(x, y)$ en este punto.

7.4. El área de una superficie

Antes de pasar a las integrales de superficie en general, consideremos primero el problema de calcular el área de una superficie, igual que consideramos el problema de hallar la longitud de una curva antes de estudiar integrales sobre trayectorias.

Definición del área de una superficie

En la Sección 7.3 definimos una superficie parametrizada S como la imagen de una función $\mathbf{\Phi}$: $D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, escrita como $\mathbf{\Phi}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$. A la función $\mathbf{\Phi}$ se la llamó la parametrización de S y se dijo que era regular en $\mathbf{\Phi}(u, v) \in S$ si $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$, donde

$$\mathbf{T}_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u, v)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u, v)\mathbf{j} = \frac{\partial z}{\partial u}(u, v)\mathbf{k}$$

y,

$$\mathbf{T}_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u, v)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u, v)\mathbf{j} = \frac{\partial z}{\partial v}(u, v)\mathbf{k}.$$

Recordemos que una superficie regular (hablando informalmente) es aquella que no tiene esquinas ni roturas.

En el resto de este capítulo y en el siguiente consideraremos sólo superficies regulares a trozos que sean unión de imágenes de superficies parametrizadas $\mathbf{\Phi}_i$: $D_i \to \mathbb{R}^3$, para las cuales:

i) D_i es una región elemental en el plano;

ii) $\mathbf{\Phi}_i$ es de clase C^1 e inyectiva, salvo quizá en la frontera de D_i; y

iii) S_i, la imagen de $\mathbf{\Phi}_i$, es regular, excepto quizá en un número finito de puntos.

DEFINICIÓN: Área de una superficie parametrizada Definimos el área[10] $A(S)$ de una superficie parametrizada por:

$$A(S) = \iint_D \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| \, du \, dv \tag{1}$$

donde $\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|$ es la norma de $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$. Si S es una unión de superficies S_i, su área es la suma de las áreas de las S_i.

Como el lector puede comprobar fácilmente, tenemos

$$\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| = \sqrt{\left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}\right]^2}, \tag{2}$$

donde

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

y así sucesivamente. De este modo, la Fórmula (1) se convierte en

$$A(S) = \iint_D \sqrt{\left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}\right]^2} \, du \, dv. \tag{3}$$

Justificación de la fórmula del área

Podemos justificar la definición del área de una superficie analizando la integral $\iint_D \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| \, du \, dv$ en términos de sumas de Riemann. Por simplicidad, supongamos que D es un rectángulo; consideramos la n-ésima partición regular de D y sea $\boldsymbol{R}_{ij}$ el ij-ésimo rectángulo de la partición con vértices (u_i, v_j), (u_{i+1}, v_j), (u_i, v_{j+1}) y (u_{i+1}, v_{j+1}), $0 \leqslant i \leqslant n - 1$, $0 \leqslant j \leqslant n - 1$. Denotamos los valores de $\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$ en (u_i, v_j) por $\mathbf{T}_{u_i}$ y $\mathbf{T}_{v_j}$. Podemos pensar en los vectores $\Delta u \mathbf{T}_{u_i}$ y $\Delta v \mathbf{T}_{v_j}$ como tangentes a la superficie en $\mathbf{\Phi}(u_i, v_j) = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$, donde $\Delta u = u_{i+1} - u_i$, $\Delta v = v_{j+1} - v_j$. Entonces, estos vectores forman un paralelogramo P_{ij} que está en el plano tangente a la superficie en (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) (*véase* la Figura 7.4.1).

[10] Como todavía no hemos considerado la independencia de la parametrización, podría parecer que $A(S)$ depende de la parametrización $\mathbf{\Phi}$. Estudiaremos la independencia de la parametrización en la Sección 7.6; el uso de esta notación aquí no debería causar confusión.

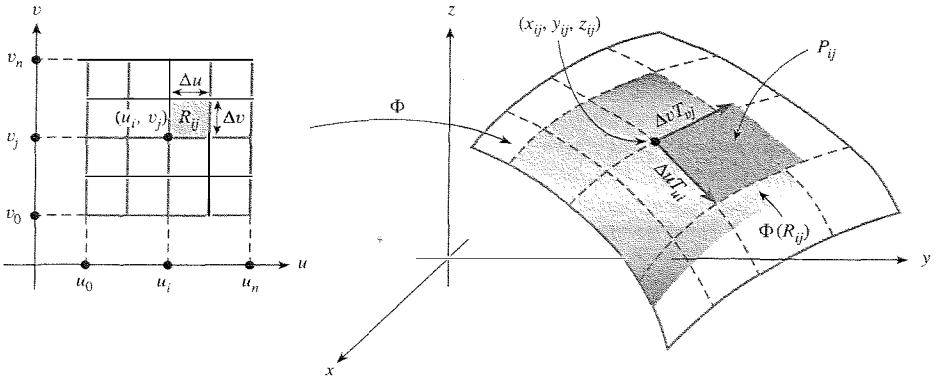


Figura 7.4.1. $\|\mathbf{T}_{u_i} \times \mathbf{T}_{v_j}\| \Delta u \Delta v$ es igual al área de un paralelogramo que aproxima el área de un trozo de la superficie $S = \Phi(D)$.

Tenemos así una «aproximación» de la superficie por los P_{ij}. Para n grande, el área de P_{ij} es muy parecida al área de $\Phi(R_{ij})$. Como el área del paralelogramo generado por los dos vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ es $\|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\|$ (*véase* el Capítulo 1), vemos que

$$A(P_{ij}) = \|\Delta u \mathbf{T}_{u_i} \times \Delta v \mathbf{T}_{v_j}\| = \|\mathbf{T}_{u_i} \times \mathbf{T}_{v_j}\| \Delta u \Delta v.$$

Por consiguiente, el área de la aproximación es

$$A_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} A(P_{ij}) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \|\mathbf{T}_{u_i} \times \mathbf{T}_{v_j}\| \Delta u \Delta v.$$

Cuando $n \to \infty$, las sumas A_n convergen a la integral

$$\iint_D \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| \, du \, dv.$$

Como A_n debería acercarse al área de la superficie cada vez más a medida que $n \to \infty$, llegamos a la Fórmula (1) como una definición razonable de $A(S)$.

EJEMPLO 7.20 Sea D la región determinada por $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant r \leqslant 1$, y sea Φ: $D \to \mathbb{R}^3$ una parametrización del cono S definida por:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta, \qquad z = r$$

(*véase* la Figura 7.3.8). Hallar el área de la superficie.

Solución

En la Fórmula (3),

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r,$$

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \text{sen}\,\theta & +r\cos\theta \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -r\cos\theta,$$

y,

$$\frac{\partial(x, z)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,\text{sen}\,\theta \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = r\,\text{sen}\,\theta,$$

de modo que el integrando del área es

$$\|\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta\| = \sqrt{r^2 + r^2\cos^2\theta + r^2\,\text{sen}^2\,\theta} = r\sqrt{2}.$$

Claramente, $\|\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta\|$ se anula para $r = 0$, pero $\mathbf{\Phi}(0, \theta) = (0, 0, 0)$ para cualquier θ. Así, $(0, 0, 0)$ es el único punto donde la superficie no es regular. Tenemos

$$\iint_D \|\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta\|\, dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{2} r\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sqrt{2}\, d\theta = \sqrt{2}\,\pi.$$

Para confirmar que ésta es el área de $\mathbf{\Phi}(D)$, tenemos que verificar que $\mathbf{\Phi}$ es inyectiva (para puntos que no estén en la frontera de D). Sea D^0 el conjunto de los (r, θ) con $0 < r < 1$ y $0 < \theta < 2\pi$. Entonces D^0 es D sin su frontera. Para ver que $\mathbf{\Phi}: D^0 \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva, supongamos que $\mathbf{\Phi}(r, \theta) = \mathbf{\Phi}(r', \theta')$ para (r, θ) y $(r', \theta') \in D^0$. Entonces

$$r\cos\theta = r'\cos\theta', \qquad r\,\text{sen}\,\theta = r'\,\text{sen}\,\theta', \qquad r = r'.$$

De estas ecuaciones se deduce que $\cos\theta = \cos\theta'$ y $\text{sen}\,\theta = \text{sen}\,\theta'$. Así, o bien $\theta = \theta'$ o $\theta = \theta' + 2\pi n$. Pero el segundo caso es imposible si n es un entero distinto de cero, pues tanto θ como θ' pertenecen al intervalo abierto $(0, 2\pi)$, y por tanto no pueden distar más de 2π radianes. Esto prueba que fuera de la frontera $\mathbf{\Phi}$ es inyectiva (¿es $\mathbf{\Phi}: D \to \mathbb{R}^3$ inyectiva?) En futuros ejemplos por lo general no comprobaremos que la parametrización es inyectiva cuando esto sea intuitivamente claro.

EJEMPLO 7.21 Un ***helicoide*** se define por $\mathbf{\Phi}: D \to \mathbb{R}^3$, donde:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta, \qquad z = \theta$$

y D es la región donde $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ y $0 \leqslant r \leqslant 1$ (Figura 7.4.2). Hallar su área.

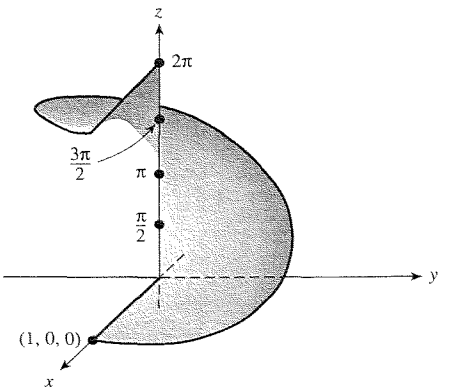


Figura 7.4.2. El helicoide $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, $z = \theta$.

Solución

Calculamos $\partial(x, y)/\partial(r, \theta) = r$ como en el Ejemplo 7.20 y

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \operatorname{sen}\theta,$$

$$\frac{\partial(x, z)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos\theta.$$

El integrando del área es por tanto $\sqrt{r^2 + 1}$, que no se anula nunca, de modo que la superficie es regular. El área del helicoide es

$$\iint_D \|\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta\| dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{r^2 + 1}\, dr\, d\theta = 2\pi \int_0^1 \sqrt{r^2 + 1}\, dr.$$

Después de unos pocos cálculos (usando la tabla de integrales), hallamos que esta integral es igual a

$$\pi\left[\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2})\right].$$

Área de una superficie expresada como una gráfica

Una superficie S dada en la forma $z = g(x, y)$, donde $(x, y) \in D$, admite la parametrización

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = g(u, v)$$

para $(u, v) \in D$. Cuando g es de clase C^1 esta parametrización es suave, y la fórmula para el área de la superficie se reduce a

$$A(S) = \iint_D \left(\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1}\right) dA, \tag{4}$$

después de aplicar las fórmulas

$$\mathbf{T}_u = \mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial u}\mathbf{k}, \qquad \mathbf{T}_v = \mathbf{j} + \frac{\partial g}{\partial v}\mathbf{k},$$

y,

$$\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = -\frac{\partial g}{\partial u}\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial v}\mathbf{j} + \mathbf{k} = -\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

como se hizo notar en el Ejemplo 7.18.

Superficies de revolución

En la mayoría de los libros de cálculo de una variable se muestra que el área de la superficie lateral generada al girar la gráfica de una función $y = f(x)$ alrededor del eje x está dada por

$$A = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \tag{5}$$

Si la gráfica se gira alrededor del eje y, el área de la superficie es

$$A = 2\pi \int_a^b |x| \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \tag{6}$$

Deduciremos la Fórmula (5) utilizando los métodos que acabamos de desarrollar; la Fórmula (6) se puede obtener de una manera similar (Ejercicio 10 de esta sección).

Para deducir la Fórmula (5) a partir de la Fórmula (3), tenemos que dar una parametrización de S. Definimos la parametrización por

$$x = u, \qquad y = f(u)\cos v, \qquad z = f(u)\operatorname{sen} v$$

sobre la región D dada por

$$a \leqslant u \leqslant b, \qquad 0 \leqslant v \leqslant 2\pi.$$

Ésta es, en efecto, una parametrización de S, porque para u fija el punto

$$(u, f(u)\cos v, f(u)\operatorname{sen} v)$$

describe un círculo de radio $|f(u)|$ con centro $(u, 0, 0)$ (Figura 7.4.3).

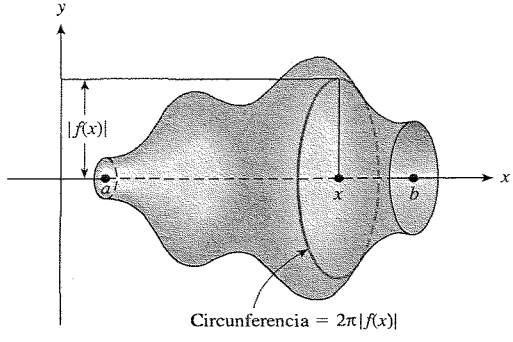


Figura 7.4.3. La curva $y = f(x)$ girada alrededor del eje x.

Calculamos

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = -f(u)\operatorname{sen} v, \qquad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = f(u)f'(u), \qquad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} = f(u)\cos v,$$

y así, por la Fórmula (3),

$$A(S) = \iint_D \sqrt{\left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}\right]^2}\, du\, dv$$

$$= \iint_D \sqrt{[f(u)]^2 \operatorname{sen}^2 v + [f(u)]^2[f'(u)]^2 + [f(u)]^2 \cos^2 v}\, du\, dv$$

$$= \iint_{\blacksquare} |f(u)| \sqrt{1 + [f'(u)]^2}\, du\, dv$$

$$= \int_a^b \int_0^{2\pi} |f(u)| \sqrt{1 + [f'(u)]^2}\, dv\, du$$

$$= 2\pi \int_a^b |f(u)| \sqrt{1 + [f'(u)]^2}\, du,$$

que es la Fórmula (5).

Si S es la superficie de revolución, entonces $2\pi|f(x)|$ es la longitud de la circunferencia perímetro de la sección vertical de S perpendicular al eje en el punto x (Figura 7.4.3). Obsérvese que podemos escribir

$$2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_{\mathbf{c}} 2\pi |f(x)|\, ds,$$

donde la expresión de la derecha es la integral de $2\pi|f(x)|$ a lo largo de la trayectoria dada por $\mathbf{c}$: $[a, b] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, f(t))$. Por consiguiente, *la superficie lateral de un sólido de revolución se obtiene integrando las longitudes de las circunferencias que limitan las secciones a lo largo de la trayectoria determinada por la gráfica de la función dada.*

Nota Histórica

Arquímedes fue el matemático más famoso de la antigüedad. Además de un matemático extraordinariamente dotado, fue también un genio de la ingeniería a un nivel nunca visto antes. Fue enormemente admirado por sus contemporáneos y por los escritores posteriores a causa de su talento para la mecánica. Fueron estas habilidades las que ayudaron a los ciudadanos de Siracusa en el 214 a. C. a defender su ciudad frente al ataque de las legiones romanas bajo el mando de Marcelo.

Cuando los romanos sitiaron la ciudad, se encontraron con un enemigo al que Arquímedes había dotado —de forma completamente inesperada— de poderosas armas, incluyendo artillería y espejos que, según cuenta la leyenda, sirvieron para incendiar la flota romana.

El sitio de Siracusa duró dos años, y la ciudad finalmente cayó como resultado de una traición. Durante el asalto, el anciano científico fue asesinado por un soldado romano, a pesar de que Marcelo había pedido a sus hombres que respetaran la vida de Arquímedes. Según cuenta la historia, Arquímedes estaba sentado a la puerta de su casa estudiando

algunas figuras geométricas que había dibujado sobre la arena. Cuando se acercó el soldado, Arquímedes gritó «¡No estropees mis figuras!». El rufián, sintiéndose insultado, mató a Arquímedes.

Para honrar al gran hombre, Marcelo erigió una tumba en la cual, de acuerdo con los deseos del propio Arquímedes, se dibujaron un cono, una esfera y un cilindro (Figura 7.4.4).

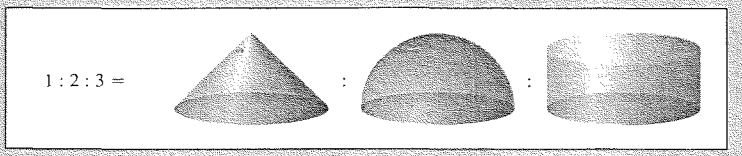


Figura 7.4.4. Teorema de Arquímedes: las proporciones de los volúmenes de un cono, una semiesfera y un cilindro, todos de la misma altura y radio, son 1 : 2 : 3.

Arquímedes estaba increíblemente orgulloso de su cálculo del volumen y del área de la superficie de la esfera, que justificadamente se consideraron como logros verdaderamente sobresalientes para su época. Como en sus trabajos sobre centros de gravedad, para los cuales no dio una definición precisa, Arquímedes fue capaz de calcular el área de la superficie de la esfera sin tener una definición clara de lo que era exactamente; sin embargo, como sucede con muchos trabajos matemáticos, se conoce la respuesta mucho antes de que se pueda hallar una prueba, o incluso la definición correcta.

El problema de definir el área de una superficie adecuadamente es difícil. Hay que decir en descargo de Arquímedes que hasta el siglo veinte no se consiguió una teoría rigurosa de áreas de superficies, tras un largo desarrollo que comenzó en el siglo XVII con el descubrimiento del cálculo.

Christiaan Huygens (1629-1695) fue la primera persona desde Arquímedes en dar resultados acerca de las áreas de otras superficies distintas de la esfera, y calculó las áreas de porciones de superficies de revolución, tales como el paraboloide y el hiperboloide.

El brillante y prolífico matemático Leonhard Euler (1707-1783) presentó el primer trabajo fundamental sobre la teoría de superficies en 1760 con *Recherches sur la courbure des surfaces*; sin embargo, ya en 1728, en un artículo sobre trayectorias más cortas sobre superficies, Euler había definido una superficie como una gráfica $z = f(x, y)$. Euler estaba interesado en estudiar la curvatura de superficies, y en 1771 introdujo la noción de superficies parametrizadas que hemos descrito en esta sección.

Tras el rápido desarrollo del cálculo a principios del siglo XVIII, se obtuvieron fórmulas para las longitudes de curvas y áreas de superficies. Aunque no sabemos cuándo aparecieron por primera vez todas las fórmulas del área presentadas en esta sección, estamos seguros de que eran comúnmente conocidas a finales del siglo XVIII. Los conceptos subyacentes de longitud de una curva y de área de una superficie se entendían intuitivamente antes de esta época, y el uso de fórmulas del cálculo para calcular áreas fue considerado un gran avance.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) fue el primero en dar el paso de definir los conceptos de longitud y área de una superficie mediante integrales, como hemos hecho en este libro. La cuestión de cómo definir el área de una superficie independientemente de las integrales se planteó algo más adelante, pero esto dio lugar a muchos problemas difíciles que no fueron resueltos de manera adecuada hasta el siglo XX.

Terminaremos esta sección describiendo el fascinante y clásico problema de áreas de Plateau, que tiene una larga historia en las matemáticas. El físico belga Joseph Plateau (1801-1883) llevó a cabo, de 1830 a 1869, muchos experimentos relacionados con la tensión superficial y con fenómenos de capilaridad, experimentos que tuvieron un enorme impacto en su época y que fueron repetidos por físicos notables del siglo XIX, como Michael Faraday (1791-1867). El gran matemático francés Henri Lebesgue (1875-1941) dio, en 1904, el nombre de «problemas de Plateau» a la correspondiente colección de problemas matemáticos relativos a películas de jabón.

Si se sumerge un alambre en una solución de jabón o glicerina, se suele producir una película de jabón tendida sobre el alambre. En la Figura 7.4.5 se dan algunos ejemplos, aunque quizás los lectores prefieran realizar ellos mismos el experimento. Plateau formuló así la pregunta en términos matemáticos: dada una frontera (un alambre), ¿cómo se demuestra la existencia de una de estas superficies (la película de jabón) y cuántas superficies puede haber? El principio físico subyacente es que la naturaleza tiende a minimizar el área; esto es, la superficie que se forma debería ser la superficie de menor área entre todas las posibles que tienen la curva dada como su frontera.

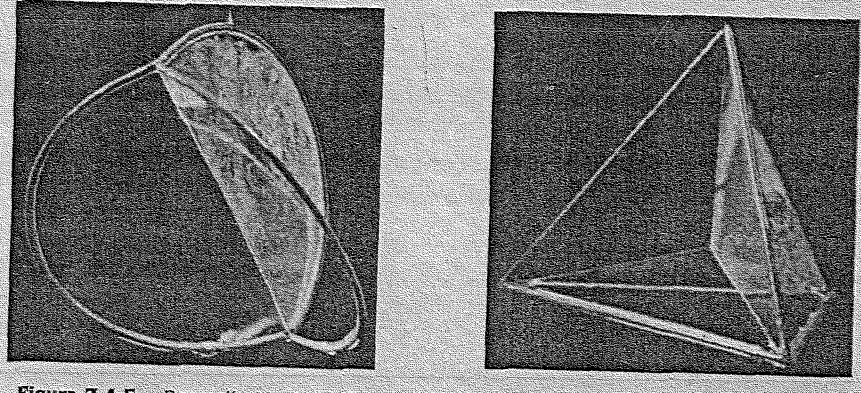


Figura 7.4.5. Dos películas de jabón tendidas sobre alambres.

Para superficies de películas jabonosas que tienen forma de disco, el problema se puede formular de la siguiente manera. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ el disco unidad definido como el conjunto $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ y sea ∂D su frontera. Supongamos además que la imagen Γ de $\mathbf{c}$: $[0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ es una curva cerrada simple, Γ, que representa un alambre en $\mathbb{R}^3$.

Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de todas las funciones $\mathbf{\Phi}$: $D \to \mathbb{R}^3$ tales que $\mathbf{\Phi}(\partial D) = \Gamma$, $\mathbf{\Phi}$ es de clase C^1 y $\mathbf{\Phi}$ es inyectiva en ∂D. Cada $\mathbf{\Phi} \in \mathcal{S}$ representa una superficie paramétrica C^1 «con forma de disco» tendida sobre el alambre Γ.

Las películas de jabón de la Figura 7.4.5 no son semejantes a discos, pero representan un sistema de múltiples superficies con forma de disco. La Figura 7.4.6 muestra un contorno que acota a dos superficies con forma de disco y a una que no lo es.

Para cada $\mathbf{\Phi} \in \mathcal{S}$, consideramos el área de la superficie imagen, a saber, $A(\mathbf{\Phi}) = \iint_D \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| \, du \, dv$. Esta función asigna a cada superficie parametrizada su área. Plateau se preguntó si A tiene un mínimo en $\mathcal{S}$; esto es, ¿existe una $\mathbf{\Phi}_0$ tal que $A(\mathbf{\Phi}_0) \leqslant A(\mathbf{\Phi})$ para todo $\mathbf{\Phi} \in \mathcal{S}$? Desgraciadamente, los métodos de este libro no son adecuados para

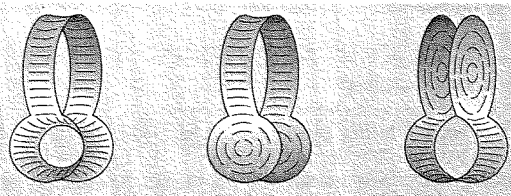


Figura 7.4.6. Superficies de películas de jabón; (b) y (c) son semejantes al disco, pero (a) no lo es.

resolver este problema. Podemos abordar cuestiones sobre cómo hallar mínimos de funciones de valores reales de varias variables, pero no hay manera de interpretar $\mathcal{S}$ como una región de $\mathbb{R}^n$ ¡para *ningún n!*

En su propio estudio de superficies de área mínima, Weierstrass probó que si existiera algún mínimo

$$\mathbf{\Phi}_0(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

tendría que satisfacer (después de las normalizaciones adecuadas) las ecuaciones en derivadas parciales

i) $\nabla^2 \mathbf{\Phi}_0 = 0,$

ii) $\dfrac{\partial \mathbf{\Phi}_0}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial \mathbf{\Phi}_0}{\partial v} = 0,$

iii) $\left\| \dfrac{\partial \mathbf{\Phi}_0}{\partial u} \right\| = \left\| \dfrac{\partial \mathbf{\Phi}_0}{\partial v} \right\|,$

donde $\|\mathbf{w}\|$ denota la «norma» o longitud del vector $\mathbf{w}$. Este ejemplo ilustra la estrecha conexión existente entre los problemas de máximos y mínimos (el cálculo de variaciones), y la disciplina de ecuaciones en derivadas parciales.

Durante más de setenta años, matemáticos tales como Riemann, Weierstrass, H. A. Schwarz, Darboux y Lebesgue se devanaron los sesos con el reto lanzado por Plateau. El problema se resolvió por fin en 1931, cuando Jesse Douglas demostró la existencia de una tal $\mathbf{\Phi}_0$. No obstante, todavía quedan sin resolver muchas preguntas sobre películas de jabón, y está área de investigación sigue activa hoy en día[11].

EJERCICIOS

1. Hallar el área de la superficie de la esfera unidad S representada paramétricamente por $\mathbf{\Phi}$: $D \to S \subset \mathbb{R}^3$, donde D es el rectángulo $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$, y $\mathbf{\Phi}$ está dada por las ecuaciones:

$$x = \cos\theta \operatorname{sen}\phi, \qquad y = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \qquad z = \cos\phi.$$

[11] Para más información sobre este fascinante tema, el lector puede consultar *The Parsimonious Universe: Shape and Form in the Natural World*, por S. Hildebrandt y A. Tromba, Springer-Verlag, NuevaYork/Heidelberg, 1995.

Nótese que podemos representar toda la esfera paramétricamente, pero que no podemos representarla en la forma $z = f(x, y)$.

2. En el Ejercicio 1, ¿qué pasa si permitimos que ϕ varíe de $-\pi/2$ a $\pi/2$?, ¿y de 0 a 2π? ¿Por qué obtenemos respuestas distintas?

3. Hallar el área del helicoide del Ejemplo 7.21 si el dominio D es $0 \leqslant r \leqslant 1$ y $0 \leqslant \theta \leqslant 3\pi$.

4. El toro T se puede representar paramétricamente por la función $\mathbf{\Phi}$: $D \to \mathbb{R}^3$, donde $\mathbf{\Phi}$ viene dada por las funciones coordenadas $x = (R + \cos\phi)\cos\theta$, $y = (R + \cos\phi)\operatorname{sen}\theta$, $z = \operatorname{sen}\phi$; D es el rectángulo $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, esto es, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$; y el valor $R > 1$ está fijado (*véase* la Figura 7.4.7). Demostrar que $A(T) = (2\pi)^2 R$, en primer lugar usando la Fórmula (3) y después usando la Fórmula (6).

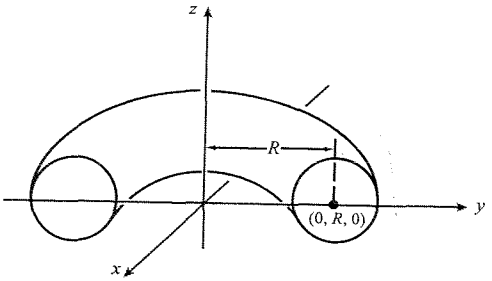


Figura 7.4.7. Una sección transversal de un toro.

5. Sea $\mathbf{\Phi}(u, v) = (u - v, u + v, uv)$ y sea D el disco unidad en el plano uv. Hallar el área de $\mathbf{\Phi}(D)$.

6. Hallar el área de la porción de la esfera unidad contenida en el cono $z \geqslant \sqrt{x^2 + y^2}$ (*véase* el Ejercicio 1).

7. Demostrar que la superficie $x = 1/\sqrt{y^2 + z^2}$, donde $1 \leqslant x < \infty$, ¡se puede llenar pero no se puede pintar!

8. Hallar una parametrización de la superficie $x^2 - y^2 = 1$, donde $x > 0$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$, y $0 \leqslant z \leqslant 1$. Utilizar la respuesta para expresar el área de la superficie como una integral.

9. Representar el elipsoide E:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

paramétricamente y escribir la integral que da el área $A(E)$ de esta superficie (no evaluar la integral).

10. Rotamos la curva $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, alrededor del eje y. Demostrar que el área de la superficie barrida viene dada por la Ecuación (6); esto es,

$$A = 2\pi \int_a^b |x| \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

Interpretar la fórmula geométricamente utilizando la longitud de arco y la distancia al eje de rotación.

11. Hallar el área de la superficie obtenida rotando la curva $y = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, alrededor del eje y.

12. Utilizar la Fórmula (4) para calcular el área de la superficie del cono del Ejemplo 7.20.

13. Hallar el área de la superficie definida por $x + y + z = 1$, $x^2 + 2y^2 \leqslant 1$.

14. Demostrar que para los vectores $\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$ se tiene la fórmula

$$\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| = \sqrt{\left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}\right]^2}.$$

15. Calcular el área de la superficie dada por

$$x = r\cos\theta, \qquad y = 2r\cos\theta, \qquad z = \theta, \qquad 0 \leqslant r \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

Esbozarla.

16. Demostrar el *teorema de Pappus*: sea $\mathbf{c}$: $[a, b] \to \mathbb{R}^2$ una trayectoria C^1 cuya imagen es una curva cerrada simple contenida en el semiplano derecho. El área de la superficie lateral generada al rotar la imagen de $\mathbf{c}$ alrededor del eje y es igual a $2\pi \bar{x}\, l(\mathbf{c})$, donde $\bar{x}$ es el valor promedio de la coordenada x de los puntos de la imagen de $\mathbf{c}$, y $l(\mathbf{c})$ es la longitud de $\mathbf{c}$ (*véanse* los Ejercicios 8 al 11 de la Sección 7.1 para un estudio de valores promedio).

17. El cilindro $x^2 + y^2 = x$ divide la esfera unidad S en dos regiones S_1 y S_2, donde S_1 está dentro del cilindro y S_2 fuera. Hallar el cociente de las áreas $A(S_2)/A(S_1)$.

18. Supongamos que una superficie S es el grafo de una función $z = f(x, y)$, donde $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, que también se puede describir como el conjunto de los $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ con $F(x, y, z) = 0$ (un conjunto de nivel). Deducir una fórmula para $A(S)$ que involucre sólo a F.

19. Calcular el área del cono truncado que se muestra en la Figura 7.4.8 usando a) sólo geometría y, en segundo lugar, b) una fórmula para el área de una superficie.

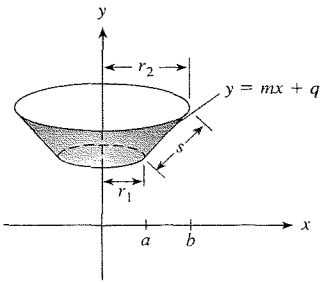


Figura 7.4.8. Un segmento de recta rotado alrededor del eje y genera un cono truncado.

20. Se perfora un agujero cilíndrico de radio 1 a través de una bola maciza de radio 2 para formar una junta anular, como se muestra en la Figura 7.4.9. Hallar el volumen y el área de la superficie exterior de esta junta.

21. Hallar el área de la gráfica de la función $f(x, y) = \frac{2}{3}(x^{3/2} + y^{3/2})$ que está sobre el dominio $[0, 1] \times [0, 1]$.

22. Expresar el área de la superficie de las siguientes gráficas sobre la región indicada como una integral doble. No hay que evaluarlas.

a) $(x + 2y)^2$; $D = [-1, 2] \times [0, 2]$.

b) $xy + x/(y + 1)$; $D = [1, 4] \times [1, 2]$.

c) $xy^3 e^{x^2 y^2}$; $D =$ círculo unidad centrado en el origen.

d) $y^3 \cos^2 x$; $D =$ triángulo con vértices $(-1, 1)$, $(0, 2)$ y $(1, 1)$.

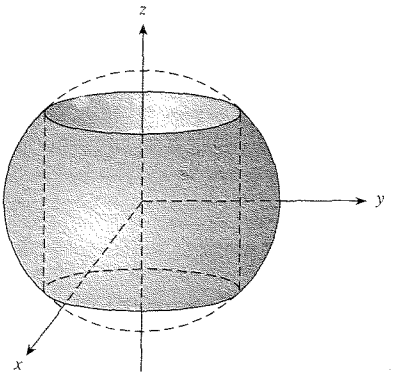


Figura 7.4.9. Hallar el área de la superficie exterior y el volumen de la región sombreada.

23. Demostrar que el área de la superficie de la semiesfera superior de radio R, $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, se puede calcular por medio de la Fórmula (4), evaluada como una integral impropia.

7.5. Integrales de funciones escalares sobre superficies

Ahora estamos preparados para definir la integral de una función *escalar* f *sobre una superficie* S. Este concepto es una generalización natural del área de una superficie, que corresponde a la integral sobre S de la función escalar $f(x, y, z) = 1$. Esto es bastante parecido a considerar la integral a lo largo de una trayectoria como una generalización de la longitud de arco. En la siguiente sección estudiaremos la integral de una función *vectorial* $\mathbf{F}$ sobre una superficie. Estos conceptos desempeñarán un papel especial en el análisis vectorial que se trata en el capítulo final.

Comenzamos con una superficie S parametrizada por la aplicación $\mathbf{\Phi}: D \to S \subset \mathbb{R}^3$, donde D es una región elemental, que escribimos como $\mathbf{\Phi}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.

DEFINICIÓN: La integral de una función escalar sobre una superficie Si $f(x, y, z)$ es una función continua con valores reales, definida sobre una superficie parametrizada S, definimos la ***integral de*** f ***sobre*** S como

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_S f\, dS = \iint_D f(\mathbf{\Phi}(u, v))\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|\, du\, dv. \tag{1}$$

Desarrollada, la Ecuación (1) se convierte en:

$$\iint_S f\, dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{\left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}\right]^2}\, du\, dv. \tag{2}$$

Así, si f es idénticamente 1, recuperamos la Fórmula del área (3) de la Sección 7.4. Al igual que el área de una superficie, la integral de superficie es independiente de la parametrización particular empleada. Esto se estudiará en la Sección 7.6.

Podemos obtener algún conocimiento intuitivo sobre esta integral al considerarla como un límite de sumas. Sea D un rectángulo dividido en n^2 rectángulos R_{ij} con áreas $\Delta u\,\Delta v$. Sea $S_{ij} = \Phi(R_{ij})$ *el trozo de la superficie* $\Phi(D)$ correspondiente a R_{ij} (*véase* la Figura 7.5.1) y sea $A(S_{ij})$ el área de esta porción de la superficie. Para n grande, f será aproximadamente constante en S_{ij}, y formamos la suma

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(\Phi(u_i, v_j))\, A(S_{ij}), \tag{3}$$

donde $(u_i, v_j) \in R_{ij}$. De la Sección 7.4 tenemos una fórmula para $A(S_{ij})$:

$$A(S_{ij}) = \iint_{R_{ij}} \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|\, du\, dv,$$

que, por el teorema del valor medio para integrales, es igual a $\|\mathbf{T}_{u_i^*} \times \mathbf{T}_{v_j^*}\|\,\Delta u\,\Delta v$ para algún punto (u_i^*, v_j^*) en R_{ij}. Por lo tanto, nuestra suma se convierte en

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(\Phi(u_i, v_j))\|\mathbf{T}_{u_i^*} \times \mathbf{T}_{v_j^*}\|\,\Delta u\,\Delta v,$$

que es una suma que se aproxima a la última integral de la Fórmula (1). Por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \iint_S f\, dS.$$

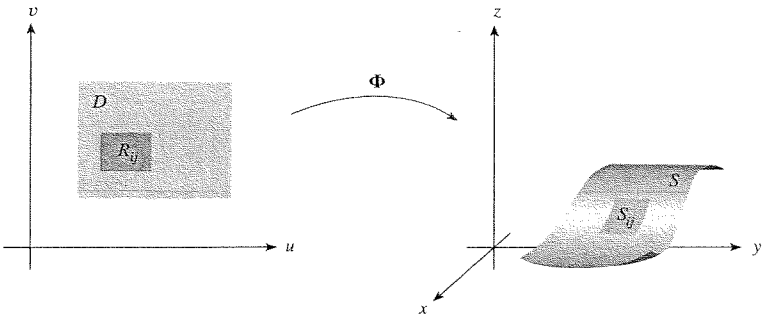


Figura 7.5.1. Φ envía una porción R_{ij} de D a una porción de S.

Nótese que cada término en la suma de la Fórmula (3) es el valor de f en algún punto $\Phi(u_i, v_j)$ multiplicado por el área de S_{ij}. Compárese esto con la interpretación en términos de sumas de Riemann de la integral sobre una trayectoria que hicimos en la Sección 7.1.

Si S es una unión de superficies parametrizadas S_i, $i = 1, \ldots, N$, que no se cortan salvo tal vez a lo largo de las curvas que definen sus fronteras, entonces la integral de f sobre S se define por

$$\iint_S f\, dS = \sum_{i=1}^{N} \iint_{S_i} f\, dS,$$

como era de esperar. Por ejemplo, la integral sobre la superficie de un cubo se puede expresar como la suma de integrales sobre las seis caras.

EJEMPLO 7.22 Supongamos que el helicoide se describe como en el Ejemplo 7.21, y sea f dada por $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$. Hallar $\iint_S f\,dS$.

Solución

Como en los Ejemplos 7.20 y 7.21,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r, \qquad \frac{\partial(y, z)}{\partial(r, \theta)} = \operatorname{sen}\theta, \qquad \frac{\partial(x, z)}{\partial(r, \theta)} = \cos\theta.$$

Además, $f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \theta) = \sqrt{r^2 + 1}$. Por consiguiente,

$$\iint_S f(x, y, z)\,dS = \iint_D f(\Phi(r, \theta))\|\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta\|\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{r^2 + 1}\sqrt{r^2 + 1}\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{4}{3}\,d\theta = \frac{8}{3}\pi.$$

Integrales de superficie sobre gráficas

Supongamos que S es la gráfica de una función C^1, $z = g(x, y)$. Recordemos de la Sección 7.4 que podemos parametrizar S por

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = g(u, v),$$

y que en este caso

$$\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2},$$

de modo que

$$\iint_S f(x, y, z)\,dS = \iint_D f(x, y, g(x, y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy. \tag{4}$$

EJEMPLO 7.23 Sea S una superficie definida por $z = x^2 + y$, donde D es la región $0 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$. Evaluar $\iint_S x\,dS$.

Solución

Si hacemos $z = g(x, y) = x^2 + y$, la Fórmula (4) da:

$$\iint_S x\,dS = \iint_D x\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy = \int_{-1}^1\int_0^1 x\sqrt{1 + 4x^2 + 1}\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{8}\int_{-1}^1 \left[\int_0^1 (2 + 4x^2)^{1/2} 8x\,dx\right]dy = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}\int_{-1}^1 [(2 + 4x^2)^{3/2}]\Big|_0^1\,dy$$

$$= \frac{1}{12}\int_{-1}^1 (6^{3/2} - 2^{3/2})\,dy = \frac{1}{6}(6^{3/2} - 2^{3/2}) = \sqrt{6} - \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$= \sqrt{2}\left(\sqrt{3} - \frac{1}{3}\right).$$

EJEMPLO 7.24 Evaluar $\iint_S z^2\, dS$, donde S es la esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Solución

Para este problema es conveniente usar coordenadas esféricas y representar la esfera paramétricamente mediante las ecuaciones $x = \cos\theta \operatorname{sen}\phi$, $y = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$, $z = \cos\phi$, sobre la región D del plano $\theta\phi$, dadas por las desigualdades $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. De la Ecuación (1) obtenemos que

$$\iint_S z^2\, dS = \iint_D (\cos\phi)^2 \|\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_\phi\|\, d\theta\, d\phi.$$

Un pequeño cálculo (usar la Fórmula (2) de la Sección 7.4; *véase* el Ejercicio 6 de esta sección) muestra que:

$$\|\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_\phi\| = \operatorname{sen}\phi.$$

(Nótese que para $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$, tenemos $\operatorname{sen}\phi \geqslant 0$.) Así,

$$\iint_S z^2\, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \cos^2\phi \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} [-\cos^3\phi]\Big|_0^{\pi} d\theta = \frac{2}{3}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{4\pi}{3}.$$

Este ejemplo también muestra que sobre una esfera de radio R,

$$\iint_S f\, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\phi, \theta) R^2 \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta,$$

o, abreviadamente, el *elemento de área sobre la esfera* está dado por

$$dS = R^2 \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta.$$

Integrales sobre gráficas

A continuación obtendremos otra fórmula para integrales de superficie cuando la superficie se puede representar como una gráfica. Sea S la gráfica de $z = g(x, y)$ y consideremos la Fórmula (4). Afirmamos que

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_D \frac{f(x, y, g(x, y))}{\cos\theta}\, dx\, dy, \tag{5}$$

donde θ es el ángulo que forma la normal a la superficie con el vector unitario $\mathbf{k}$ en el punto $(x, y, g(x, y))$ (*véase* la Figura 7.5.2). Si describimos la superficie por la Ecuación $\phi(x, y, z) = z - g(x, y) = 0$, un vector normal $\mathbf{N}$ es $\nabla\phi$; esto es,

$$\mathbf{N} = -\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k} \tag{6}$$

(*véase* el Ejemplo 7.18, o recuérdese que la normal a una superficie con ecuación $g(x, y, z) =$ constante está dada por ∇g). Así,

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{N}\cdot\mathbf{k}}{\|\mathbf{N}\|} = \frac{1}{\sqrt{(\partial g/\partial x)^2 + (\partial g/\partial y)^2 + 1}}.$$

Si sustituimos esta fórmula en la Ecuación (4), se obtiene (5). Nótese que $\cos\theta = \mathbf{n}\cdot\mathbf{k}$, donde $\mathbf{n} = \mathbf{N}/\|\mathbf{N}\|$ es la normal unitaria. Así, podemos escribir:

$$d\mathbf{S} = \frac{dx\,dy}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}}$$

El resultado es, de hecho, geométricamente obvio, ya que si un pequeño rectángulo en el plano xy tiene área ΔA, entonces el área de la porción de la superficie que está sobre él es $\Delta S = \Delta A/\cos\theta$ (Figura 7.5.2). Este enfoque intuitivo nos puede ayudar a recordar la Fórmula (5), así como a aplicarla a problemas.

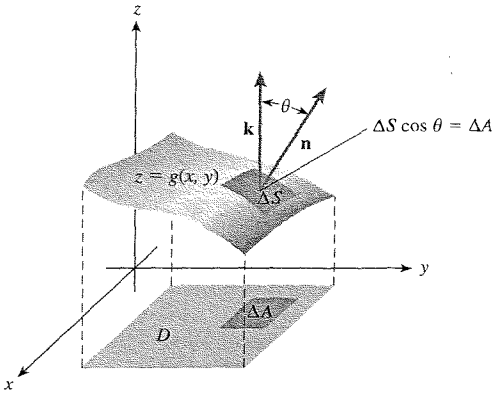


Figura 7.5.2. El área ΔS del trozo de la superficie sobre el rectangulo ΔA es aproximadamente $\Delta S = \Delta A/\cos\theta$, donde θ es el ángulo que la normal unitaria $\mathbf{n}$ forma con $\mathbf{k}$.

EJEMPLO 7.25 Calcular $\iint_S x\,dS$, donde S es el triángulo con vértices (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) (*véase* la Figura 7.5.3).

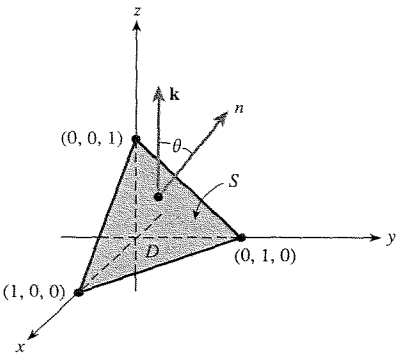


Figura 7.5.3. Al calcular una integral de superficie concreta, como paso previo para aplicar la Fórmula (5) hay que encontrar una fórmula para la normal unitaria $\mathbf{n}$ y calcular el ángulo θ.

Solución

Esta superficie es el plano descrito por la ecuación $x + y + z = 1$. Como la superficie es un plano, el ángulo θ es constante y un vector normal unitario es $\mathbf{n} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$. Así, $\cos\theta = \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = 1/\sqrt{3}$, y por la Ecuación (5),

$$\iint_S x\, dS = \sqrt{3} \iint_D x\, dx\, dy,$$

donde D es el dominio en el plano xy. Pero

$$\sqrt{3} \iint_D x\, dx\, dy = \sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-x} x\, dy\, dx = \sqrt{3} \int_0^1 x(1 - x)\, dx = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Las integrales de funciones sobre superficies son útiles para calcular la masa de una superficie cuando se conoce la función densidad de masa m. La masa total de una superficie con densidad de masa (por unidad de área) m está dada por

$$M(S) = \iint_S m(x, y, z)\, dS. \tag{7}$$

EJEMPLO 7.26 Sea $\mathbf{\Phi}$: $D \to \mathbb{R}^3$ la parametrización del helicoide $S = \mathbf{\Phi}(D)$ del Ejemplo 7.21. Recordemos que $\mathbf{\Phi}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta, \theta)$, donde $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ y $0 \leqslant r \leqslant 1$. Supongamos que S tiene una densidad de masa en $(x, y, z) \in S$ igual al doble de la distancia de (x, y, z) al eje central (*véase* la Figura 7.4.2), esto es, $m(x, y, z) = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2r$, en el sistema de coordenadas cilíndricas. Hallar la masa total de la superficie.

Solución

Aplicando la Fórmula (7),

$$M(S) = \iint_S 2\sqrt{x^2 + y^2}\, dS = \iint_D 2r\, dS = \iint_D 2r\, \|\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta\|\, dr\, d\theta.$$

Del Ejemplo 7.21 vemos que $\|\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta\| = \sqrt{1 + r^2}$. Así,

$$M(S) = \iint_D 2r\sqrt{1 + r^2}\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r\sqrt{1 + r^2}\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{2}{3}(1 + r^2)^{3/2}\right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2}{3}(2^{3/2} - 1)\, d\theta = \frac{4\pi}{3}(2^{3/2} - 1).$$

EJERCICIOS

1. Calcular $\iint_S xy\, dS$, donde S es la superficie del tetraedro de caras $z = 0$, $y = 0$, $x + z = 1$ y $x = y$.
2. Evaluar $\iint_S xyz\, dS$, donde S es el triángulo con vértices (1, 0, 0), (0, 2, 0) y (0, 1, 1).

3. Evaluar $\iint_S z\,dS$, donde S es la semiesfera superior de radio a, esto es, el conjunto de los (x, y, z) con $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

4. Evaluar $\iint_S (x + y + z)\,dS$, donde S es la frontera de la bola unidad B; esto es, S es el conjunto de los (x, y, z) con $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. [INDICACIÓN: Usar la simetría del problema.]

5. **a)** Calcular el área del trozo del cono $x^2 + y^2 = z^2$ con $z \geqslant 0$ que está dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$, donde R es una constante positiva.

b) ¿Cuál es el área del trozo de la esfera que está dentro del cono?

6. Comprobar que en coordenadas esféricas, sobre una esfera de radio R,

$$\|\mathbf{T}_\phi \times \mathbf{T}_\theta\|\,d\phi\,d\theta = R^2 \operatorname{sen} \phi\,d\phi\,d\theta.$$

7. Evaluar $\iint_S z\,dS$, donde S es la superficie $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

8. Evaluar la integral de superficie $\iint_S z^2\,dS$, donde S es la frontera del cubo $C = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$. [INDICACIÓN: Hacer cada cara por separado y sumar los resultados.]

9. Hallar la masa de una superficie esférica S de radio R tal que en cada punto $(x, y, z) \in S$ la densidad de masa es igual a la distancia de (x, y, z) a algún punto fijo $(x_0, y_0, z_0) \in S$.

10. Una superficie metálica S tiene la forma de un hemisferio $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, donde (x, y) satisface $0 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant R^2$. La densidad de masa en $(x, y, z) \in S$ está dada por $m(x, y, z) = x^2 + y^2$. Hallar la masa total de S.

11. Sea S la esfera de radio R.

a) Razonar por simetría que:

$$\iint_S x^2\,dS = \iint_S y^2\,dS = \iint_S z^2\,dS.$$

b) Usar este hecho y algún razonamiento ingenioso para evaluar, con muy poco cálculo, la integral

$$\iint_S x^2\,dS.$$

c) ¿Ayuda esto en el Ejercicio 10?

12. **a)** Utilizar sumas de Riemann para justificar la fórmula

$$\frac{1}{A(S)} \iint_S f(x, y, z)\,dS$$

para el *valor promedio* de f sobre la superficie S.

b) En el Ejemplo 7.24, demostrar que el promedio de $f(x, y, z) = z^2$ sobre la esfera es $\frac{1}{3}$.

c) Definimos el ***centro de gravedad*** $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de una superficie S de manera que $\bar{x}$, $\bar{y}$, y $\bar{z}$ sean los valores promedio de las coordenadas x, y, y z sobre S. Demostrar que el centro de gravedad del triángulo del Ejemplo 7.25 es $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

13. Hallar las coordenadas x, y, y z del centro de gravedad del octante de la esfera de radio R centrada en el origen, determinada por $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. [INDICACIÓN: Escribir este octante como una superficie parametrizada —*véanse* el Ejemplo 7.24 y el Ejercicio 12 de esta sección.]

14. Hallar la coordenada z del centro de gravedad (el promedio de la coordenada z) de la superficie de una semiesfera ($z \leq 0$) con radio r (*véase* el Ejercicio 12). Razonar por simetría que los valores promedio de las coordenadas x e y son ambos cero.

15. Sea $\mathbf{\Phi}$: $D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de una superficie S definida por

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v).$$

a) Sea

$$\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

esto es, $\partial\mathbf{\Phi}/\partial u = \mathbf{T}_u$ y $\partial\mathbf{\Phi}/\partial v = \mathbf{T}_v$, y definamos

$$E = \left\|\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u}\right\|^2, \qquad F = \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v}, \qquad G = \left\|\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v}\right\|^2.$$

Demostrar que

$$\sqrt{EG - F^2} = \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|,$$

y que el área de la superficie S es

$$A(S) = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

Con esta notación, ¿cómo podemos expresar $\iint_S f\, dS$ para una función f general?

b) ¿En qué se convierte la fórmula para $A(S)$ si los vectores $\partial\mathbf{\Phi}/\partial u$ y $\partial\mathbf{\Phi}/\partial v$ son ortogonales?

c) Utilizar a) y b) para calcular el área de la superficie de una esfera de radio a.

16. Se define el ***funcional de Dirichlet*** para una superficie parametrizada $\mathbf{\Phi}$: $D \to \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ por[12]

$$J(\mathbf{\Phi}) = \frac{1}{2} \iint_D \left(\left\|\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v}\right\|^2\right) du\, dv.$$

Utilizar el Ejercicio 15 para razonar que $A(\mathbf{\Phi}) \leq J(\mathbf{\Phi})$ y que la igualdad se satisface si

$$\text{a)} \quad \left\|\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u}\right\|^2 = \left\|\frac{\mathbf{\Phi}}{\partial v}\right\|^2 \quad \text{y} \quad \text{b)} \quad \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v} = 0.$$

Comparar estas ecuaciones con el Ejercicio 15 y las observaciones del final de la Sección 7.4. Si una parametrización $\mathbf{\Phi}$ satisface las condiciones a) y b) se dice que es ***conforme***.

17. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ y sea $\mathbf{\Phi}$: $D \to \mathbb{R}^2$ una función suave $\mathbf{\Phi}(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ que satisface las condiciones a) y b) del Ejercicio 16, y supongamos que

$$\det \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} > 0.$$

[12] El funcional de Dirichlet desempeñó un papel protagonista en las matemáticas del siglo XIX. El matemático Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) lo utilizó para desarrollar su teoría de funciones complejas y para dar una prueba del famoso teorema de la aplicación de Riemann. Hoy en día sigue siendo una herramienta muy utilizada en el estudio de ecuaciones en derivadas parciales.

Demostrar que x e y satisfacen las ***ecuaciones de Cauchy-Riemann*** $\partial x/\partial u = \partial y/\partial v$, $\partial x/\partial v = -\partial y/\partial u$. Concluir que $\nabla^2 \Phi = 0$ (es decir, cada componente de Φ es armónica).

18. Sea S una esfera de radio r y $\mathbf{p}$ un punto en el interior o el exterior de la esfera (pero no sobre ella). Demostrar que

$$\iint_S \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|}\, dS = \begin{cases} 4\pi r & \text{si } \mathbf{p} \text{ está dentro de } S, \\ 4\pi r^2/d & \text{si } \mathbf{p} \text{ está fuera de } S, \end{cases}$$

donde d es la distancia de $\mathbf{p}$ al centro de la esfera y la integración es sobre la esfera.

19. Hallar el área de la superficie de la parte del cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2ay$ y también en el octante positivo ($x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$). Suponer que $a > 0$.

20. Sea una superficie S definida implícitamente por $F(x, y, z) = 0$ para (x, y) en un dominio D de $\mathbb{R}^2$. Demostrar que

$$\iint_S \left|\frac{\partial F}{\partial z}\right| dS = \iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}\, dx\, dy.$$

Comparar con el Ejercicio 18 de la Sección 7.4.

7.6. Integrales de campos vectoriales sobre superficies

El objetivo de esta sección es desarrollar la noción de integral de un campo vectorial sobre una superficie. Recordemos que la definición de integral de línea de un campo vectorial estaba motivada por la noción física fundamental de *trabajo*. De forma semejante, la noción física básica de *flujo* motiva la definición de la integral de superficie de un campo vectorial.

Por ejemplo, si el campo vectorial es el campo de velocidades de un fluido (tal vez el campo de velocidades de un río) y ponemos una superficie imaginaria en el fluido, podemos preguntarnos: «¿Cuál es la tasa con la que el fluido cruza la superficie dada (medida en, digamos, metros cúbicos por segundo)?». La respuesta viene dada por la integral de superficie del campo vectorial de velocidades del fluido sobre la superficie.

Volveremos a la interpretación física en breve y la explicaremos en términos de la definición formal que damos en primer lugar.

Definición de integral de superficie

Definimos ahora la integral de un campo vectorial, denotado por $\mathbf{F}$, sobre una superficie S. Empezaremos dando la definición y en una parte posterior de la sección daremos su interpretación física. Ésta se puede utilizar también como *motivación* de la definición si el lector así lo desea. Comenzaremos con una superficie parametrizada Φ y más adelante estudiaremos la independencia de la parametrización.

D - CONCEPCIÓN DEL URUGUAY

DEFINICIÓN: La integral de superficie de un campo vectorial Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial definido sobre S, la imagen de una superficie parametrizada $\mathbf{\Phi}$. La ***integral de superficie*** de $\mathbf{F}$ sobre $\mathbf{\Phi}$, denotada por:

$$\iint_{\mathbf{\Phi}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S},$$

se define por (*véase* la Figura 7.6.1):

$$\iint_{\mathbf{\Phi}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{D} \mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)\, du\, dv.$$

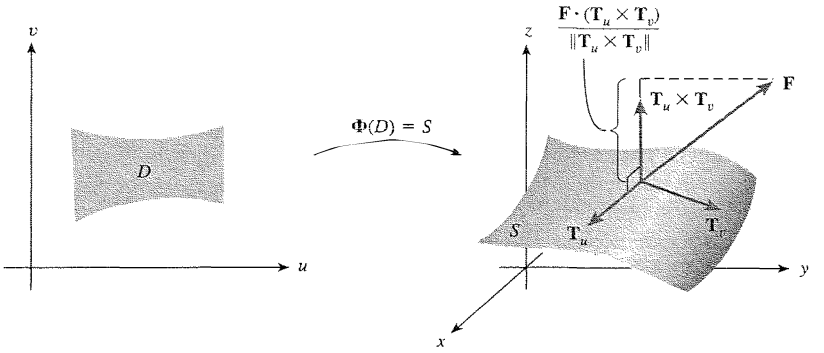


Figura 7.6.1. Significado geométrico de $\mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)$.

EJEMPLO 7.27 Sea D el rectángulo en el plano $\theta\phi$ definido por

$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi,$$

y sea S la superficie definida por la parametrización $\mathbf{\Phi}$: $D \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$x = \cos\theta \operatorname{sen}\phi, \qquad y = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \qquad z = \cos\phi.$$

(Así, θ y ϕ son los ángulos de las coordenadas esféricas y S es la esfera unidad parametrizada por $\mathbf{\Phi}$). Sea $\mathbf{r}$ el vector posición $\mathbf{r}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Calcular $\iint_{\mathbf{\Phi}} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}$.

Solución

En primer lugar hallamos

$$\mathbf{T}_\theta = (-\operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\phi \cos\theta)\mathbf{j},$$

$$\mathbf{T}_\phi = (\cos\theta \cos\phi)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\theta \cos\phi)\mathbf{j} - (\operatorname{sen}\phi)\mathbf{k},$$

de donde

$$\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_\phi = (-\operatorname{sen}^2\phi \cos\theta)\mathbf{i} - (\operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}\theta)\mathbf{j} - (\operatorname{sen}\phi \cos\phi)\mathbf{k}.$$

Evaluamos entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{r}\cdot(\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_\phi) &= (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})\cdot(\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_\phi)\\ &= [(\cos\theta \operatorname{sen}\phi)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi)\mathbf{j} + (\cos\phi)\mathbf{k}]\\ &\quad\cdot(-\operatorname{sen}\phi)[(\operatorname{sen}\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta)\mathbf{j} + (\cos\phi)\mathbf{k}]\\ &= (-\operatorname{sen}\phi)(\operatorname{sen}^2\phi\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\phi\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\phi) = -\operatorname{sen}\phi.\end{aligned}$$

Así,

$$\iint_{\Phi} \mathbf{r}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{D} -\operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta = \int_0^{2\pi} (-2)\, d\theta = -4\pi.$$

Orientación

Se puede establecer una analogía entre la integral de superficie $\iint_{\Phi} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ y la integral de línea $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$. Recordemos que la integral de línea es una integral orientada. Necesitábamos la noción de orientación de una curva para extender la definición de $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ a integrales de línea $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ sobre curvas orientadas. Extendemos la definición de Φ *a superficies orientadas* de forma similar; esto es, dada una superficie S parametrizada por una aplicación Φ, queremos definir $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Phi} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ y demostrar que esto es independiente de la parametrización, excepto tal vez por el signo. Para llevar a cabo esto, necesitamos la noción de orientación de una superficie.

DEFINICIÓN: Superficies orientadas Una ***superficie orientada*** es una superficie con dos caras en la que se especifica una de ellas como ***cara exterior*** o ***positiva***; la otra cara recibe el nombre de ***cara interior*** o ***negativa***[13]. En cada punto $(x, y, z) \in S$ hay dos vectores normales unitarios $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$, donde $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$ (*véase* la Figura 7.6.2). Cada una de estas dos normales se puede asociar con un lado de la superficie. Así, para especificar una cara de una superficie S, en cada punto elegimos un vector normal unitario $\mathbf{n}$ que apunta hacia fuera desde la cara positiva de S en ese punto.

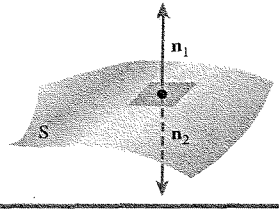


Figura 7.6.2. Las dos posibles normales unitarias a una superficie en un punto.

[13] Utilizamos el término «cara» en un sentido intuitivo. Este concepto se puede definir rigurosamente, pero no lo haremos aquí. También, la elección de la cara que se va a denotar como positiva viene dictada con frecuencia por la propia superficie, como, por ejemplo, en el caso de la esfera. En otros casos la elección es un tanto arbitraria (*véase*, por ejemplo, el trozo de superficie representado en la Figura 7.6.2).

Esta definición asume que nuestra superficie tiene dos caras. De hecho, esto es necesario, porque ¡hay ejemplos de superficies con una sola cara! El primer ejemplo de una superficie tal fue la banda de Möbius (llamada así por el matemático y astrónomo alemán A. F. Möbius quien, junto con el matemático J. B. Listing, la descubrió en 1858). En la Figuras 7.6.3 se da dibujo de esta superficie. En cada punto de M hay dos normales unitarias $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$. Sin embargo, $\mathbf{n}_1$ no determina una única cara de M y tampoco lo hace $\mathbf{n}_2$. Para verlo de forma intuitiva, podemos deslizar $\mathbf{n}_2$ a lo largo de la curva cerrada C (Figura 7.6.3). Cuando $\mathbf{n}_2$ regresa a un punto p de C dado, coincidirá con $\mathbf{n}_1$, mostrando que tanto $\mathbf{n}_1$ como $\mathbf{n}_2$ apuntan hacia fuera del mismo lado de M y que, en consecuencia, M sólo tiene una cara.

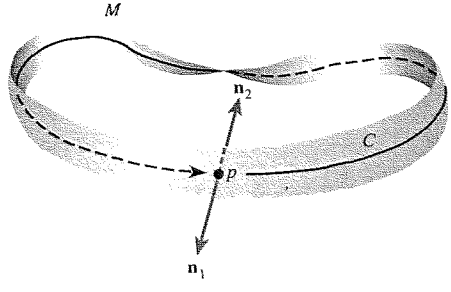


Figura 7.6.3. La banda de Möbius: deslizamos $\mathbf{n}_2$ alrededor de C una vez; cuando $\mathbf{n}_2$ regrese a su punto inicial, coincidirá con $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$.

Sea $\mathbf{\Phi}$: $D \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de una superficie orientada S y supongamos que S es regular en $\mathbf{\Phi}(u_0, v_0)$, $(u_0, v_0) \in D$; así, el vector $(\mathbf{T}_{u_0} \times \mathbf{T}_{v_0})/\|\mathbf{T}_{u_0} \times \mathbf{T}_{v_0}\|$ está definido. Si $\mathbf{n}\,\mathbf{\Phi}(u_0, v_0))$ denota la normal unitaria a S en $\mathbf{\Phi}(u_0, v_0)$, se sigue que

$$(\mathbf{T}_{u_0} \times \mathbf{T}_{v_0})/\|\mathbf{T}_{u_0} \times \mathbf{T}_{v_0}\| = \pm \mathbf{n}(\mathbf{\Phi}(u_0, v_0)).$$

Se dice que la parametrización $\mathbf{\Phi}$ ***conserva la orientación*** si tenemos el signo $+$; esto es, si $(\mathbf{T}_u + \mathbf{T}_v)/\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| = \mathbf{n}(\mathbf{\Phi}(u, v))$ en todos los $(u, v) \in D$ para los cuales S es regular en $\mathbf{\Phi}(u, v)$. En otras palabras, $\mathbf{\Phi}$ conserva la orientación si el vector $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ apunta hacia el exterior de la superficie. Si $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ apunta hacia el interior de la superficie en todos los puntos $(u, v) \in D$ para los que S es regular en $\mathbf{\Phi}(u, v)$, entonces se dice que $\mathbf{\Phi}$ ***invierte la orientación***. Usando la notación precedente, esta condición corresponde a la elección $(\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)/\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| = -\mathbf{n}(\mathbf{\Phi}(u, v))$.

Se sigue de este análisis que la banda de Möbius no se puede parametrizar por una única parametrización para la cual $\mathbf{n} = \mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$, siendo $\mathbf{n}$ continua sobre toda la superficie[14]

[14] Hay una única parametrización que se obtiene cortando una tira de papel, retorciéndola y pegando los extremos, pero produce una $\mathbf{n}$ discontinua sobre la superficie.

(si hubiera una parametrización tal, entonces M tendría en realidad dos caras, una determinada por $\mathbf{n}$ y otra determinada por $-\mathbf{n}$). La esfera del Ejemplo 7.27 se puede parametrizar por medio de una única parametrización, pero no por una que sea inyectiva en todas partes —*véase* la discusión al comienzo de la Sección 7.4.

Así, cualquier superficie parametrizada inyectiva para la cual $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ *nunca se anule se puede considerar como una superficie orientada con una cara positiva determinada por la dirección de* $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$.

EJEMPLO 7.28 Podemos dar una orientación a la esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en $\mathbb{R}^3$ (Figura 7.6.4) seleccionando el vector unitario $\mathbf{n}(x, y, z) = \mathbf{r}$, donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, que apunta hacia el exterior de la superficie. Esta elección corresponde a nuestra noción intuitiva del exterior para la esfera.

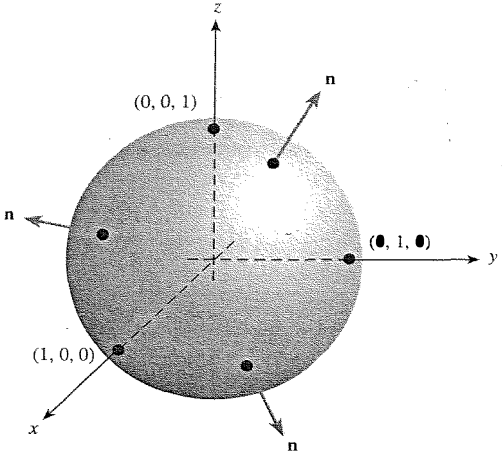


Figura 7.6.4. La esfera unidad orientada por su normal exterior $\mathbf{n}$.

Ahora que la esfera S es una superficie orientada, consideramos la parametrización Φ de S dada en el Ejemplo 7.27. El producto vectorial de los vectores tangentes $\mathbf{T}_\theta$ y $\mathbf{T}_\phi$ —esto es, una normal a S— está dado por

$$(-\operatorname{sen}\phi)[(\cos\theta \operatorname{sen}\phi)\mathbf{i} + (\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi)\mathbf{j} + (\cos\phi)\mathbf{k}] = -\mathbf{r}\operatorname{sen}\phi.$$

Como $-\operatorname{sen}\phi \leq 0$ para $0 \leq \phi \leq \pi$, este vector normal apunta hacia el interior de la esfera. Así, la parametrización dada *invierte la orientación*. Intercambiando el orden de θ y ϕ obtendríamos una parametrización que conserva la orientación.

La orientación y el elemento vectorial de superficie de la esfera

Consideramos la esfera de radio R, a saber, $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Es costumbre orientar la esfera con la *normal exterior unitaria*. En términos del vector posición $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, la normal exterior unitaria está dada por

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{R}.$$

El orden de las coordenadas esféricas que corresponde a esta orientación, como es evidente a partir del Ejemplo 7.28, está dado por el orden (ϕ, θ). El cálculo del Ejemplo 7.28 muestra que el elemento de área de esta superficie está dado entonces por

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{T}_\phi \times \mathbf{T}_\theta)\, d\phi\, d\theta = \mathbf{r}R \operatorname{sen} \phi\, d\phi\, d\theta = \mathbf{n}R^2 \operatorname{sen} \phi\, d\phi\, d\theta.$$

La orientación de gráficas

El siguiente ejemplo considera los convenios sobre orientación para gráficas. Calcularemos el elemento de área para gráficas más adelante en esta sección.

EJEMPLO 7.29 Sea S una superficie descrita por $z = g(x, y)$. Como en la Ecuación (6) de la Sección 7.5, hay dos vectores unitarios normales a S en $(x_0, y_0, g(x_0, y_0))$, a saber, $\pm\mathbf{n}$, donde

$$\mathbf{n} = \frac{-\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)\mathbf{i} - \dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{\left[\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)\right]^2 + \left[\dfrac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)\right]^2 + 1}}.$$

Podemos orientar todas las superficies de este tipo tomando como cara positiva de S la cara de la cual se aleja $\mathbf{n}$ (Figura 7.6.5). Así, la cara positiva de una superficie tal está determinada por la normal unitaria $\mathbf{n}$ con componente $\mathbf{k}$ positiva —esto es, *apunta hacia arriba*. Si parametrizamos esta superficie por $\Phi(u, v) = (u, v, g(u, v))$, entonces Φ conservará la orientación.

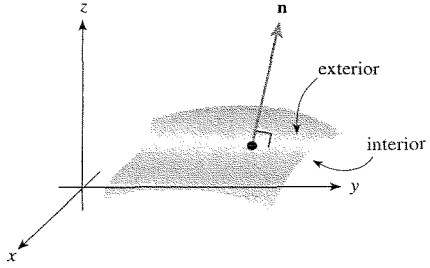


Figura 7.6.5. $\mathbf{n}$ se aleja de la parte exterior de la superficie.

Independencia de la parametrización

Ahora enunciamos sin prueba un teorema que muestra que la integral sobre una superficie orientada es independiente de la parametrización. La prueba de este teorema es análoga a la del Teorema 1 (Sección 7.2); el núcleo de la prueba es nuevamente la fórmula del cambio de variables —esta vez aplicada a integrales dobles.

TEOREMA 4: Independencia de la parametrización de las integrales de superficie Sea S una superficie orientada, y sean $\mathbf{\Phi}_1$ y $\mathbf{\Phi}_2$ dos parametrizaciones regulares que conservan la orientación, y sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial continuo definido sobre S. Entonces,

$$\iint_{\mathbf{\Phi}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\mathbf{\Phi}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Si $\mathbf{\Phi}_1$ conserva la orientación y $\mathbf{\Phi}_2$ la invierte, entonces

$$\iint_{\mathbf{\Phi}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -\iint_{\mathbf{\Phi}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Si f es una función continua con valores reales definida sobre S y $\mathbf{\Phi}_1$ y $\mathbf{\Phi}_2$ son parametrizaciones de S, entonces

$$\iint_{\mathbf{\Phi}_1} f\,dS = \iint_{\mathbf{\Phi}_2} f\,dS.$$

Nótese que si $f = 1$ obtenemos:

$$A(S) = \iint_{\mathbf{\Phi}_1} dS = \iint_{\mathbf{\Phi}_2} dS,$$

lo que demuestra que el área no depende de la parametrización.

Por consiguiente, podemos usar la notación

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\mathbf{\Phi}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

sin ninguna ambigüedad (o una suma de tales integrales, si S es una unión de superficies parametrizadas que se cortan sólo a lo largo de sus curvas de frontera), donde $\mathbf{\Phi}$ es una parametrización que conserva la orientación. El Teorema 4 garantiza que el valor de la integral no depende de la elección de $\mathbf{\Phi}$.

Relación con las integrales escalares

Recordemos de la Fórmula (1) de la Sección 7.2 que una integral de línea se puede ver como la integral de la componente tangencial de $\mathbf{F}$ a lo largo de la trayectoria $\mathbf{c}$ (aunque para el caso en que $\mathbf{c}$ se cruza consigo misma la integral obtenida no sea técnicamente una integral sobre una trayectoria). En el caso de las integrales de superficie se da una situación similar, puesto que estamos suponiendo que las aplicaciones $\mathbf{\Phi}$ que definen la superficie S son inyectivas salvo, tal vez, sobre la frontera de D, que se puede ignorar para los propósitos de la integración. Así, al

definir integrales sobre superficies, en este libro supondremos que las superficies no se cortan a sí mismas.

Para una superficie orientada suave S y una parametrización $\mathbf{\Phi}$ de S que conserve la orientación, podemos expresar $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ como una integral de una función f de valores reales sobre la superficie. Sea $\mathbf{n} = (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)/\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|$ la normal unitaria que apunta hacia el exterior de S. Entonces

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{\mathbf{\Phi}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)\, du\, dv \\ &= \iint_D \mathbf{F} \cdot \left(\frac{\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v}{\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|} \right) \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|\, du\, dv \\ &= \iint_D (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|\, du\, dv = \iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iint_S f\, dS,\end{aligned}$$

donde $f = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$. Hemos probado así el siguiente teorema.

TEOREMA 5 La integral de superficie de $\mathbf{F}$ sobre S, $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, es igual a la integral de la componente normal de $\mathbf{F}$ sobre la superficie. En resumen,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS.$$

La observación del Teorema 5 permite ahorrar con frecuencia esfuerzo de cálculo, como demuestra el Ejemplo 7.30.

Interpretación física de las integrales de superficie

El significado geométrico y físico de la integral de superficie se puede comprender expresándola como un límite de sumas de Riemann. Para simplificar, supondremos que D es un rectángulo. Fijamos una parametrización $\mathbf{\Phi}$ de S que conserve la orientación y descomponemos la región D en n^2 trozos D_{ij}, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$. Denotamos por Δu a la longitud del lado horizontal de D_{ij} y por Δv a la longitud del lado vertical de D_{ij}. Sea (u, v) un punto de D_{ij} y $(x, y, z) = \mathbf{\Phi}(u, v)$ el punto correspondiente sobre la superficie. Consideramos el paralelogramo con lados $\Delta u\mathbf{T}_u$ y $\Delta v\mathbf{T}_v$ que está en el plano tangente a S en (x, y, z), y el paralelepípedo formado por $\mathbf{F}$, $\Delta u\mathbf{T}_u$ y $\Delta v\mathbf{T}_v$. El volumen del paralelepípedo es el valor absoluto del producto mixto

$$\mathbf{F} \cdot (\Delta u\mathbf{T}_u \times \Delta v\mathbf{T}_v) = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)\Delta u \Delta v.$$

El vector $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ es normal a la superficie en (x, y, z) y apunta hacia fuera desde el exterior de la superficie. Así, el número $\mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)$ es positivo cuando el paralelepípedo está en el exterior de la superficie (Figura 7.6.6).

En general, el paralelepípedo está en la cara de la superficie de la que se aleja $\mathbf{F}$. Si pensamos en $\mathbf{F}$ como el campo de velocidades de un fluido, $\mathbf{F}(x, y, z)$ apunta en la dirección en la que se está moviendo el fluido a través de la superficie cerca de (x, y, z). Es más, el número

$$|\mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \Delta u \times \mathbf{T}_v \Delta v)|$$

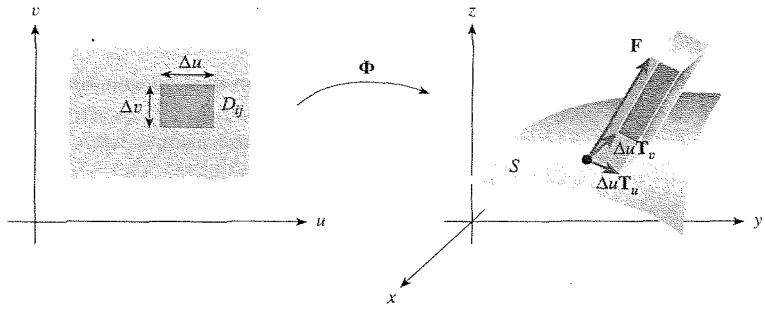


Figura 7.6.6. $\mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v) > 0$ cuando el paralelepípedo formado por $\Delta v\mathbf{T}v$, $\Delta u\,\mathbf{T}u$, y $\mathbf{F}$ está en el «exterior» de la superficie S.

mide la cantidad de fluido que pasa a través del paralelogramo tangente por unidad de tiempo. Como el signo de $\mathbf{F} \cdot (\Delta u\mathbf{T}_u \times \Delta v\mathbf{T}_v)$ es positivo si el vector $\mathbf{F}$ apunta hacia fuera en (x, y, z) y negativo si $\mathbf{F}$ apunta hacia dentro, $\sum_{i,j} \mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)\Delta u\Delta v$ es una medida aproximada de la cantidad neta de fluido que fluye hacia fuera a través de la superficie por unidad de tiempo (recordemos que «fuera» o «dentro» dependen de nuestra elección de la parametrización. La Figura 7.6.7 ilustra a $\mathbf{F}$ dirigido hacia fuera y hacia dentro, dados $\mathbf{T}_u$ y $\mathbf{T}_v$). Por lo tanto, *la integral* $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ *es la cantidad neta de fluido que atraviesa la superficie por unidad de tiempo.* Esta integral recibe el nombre de ***flujo*** de $\mathbf{F}$ a través de la superficie.

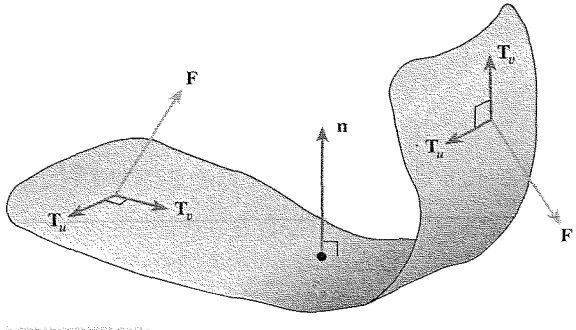


Figura 7.6.7. Cuando $\mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_u) > 0$ (izquierda), $\mathbf{F}$ apunta hacia fuera; cuando $\mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_u) < 0$ (derecha), $\mathbf{F}$ apunta hacia dentro.

En el caso en que $\mathbf{F}$ represente un campo eléctrico o magnético, $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ también se conoce comúnmente como el flujo. Puede que el lector esté familiarizado con leyes físicas (tales como la *ley de Faraday*) que relacionan el flujo de un campo vectorial a través de una superficie con la circulación (o corriente) a lo largo de la curva que la limita. Ésta es la base histórica y física del teorema de Stokes, que consideraremos en la Sección 8.2. El principio correspondiente de mecánica de fluidos se conoce como *teorema de la circulación de Kelvin*.

Las integrales de superficie también se aplican al estudio del flujo de calor. Sea $T(x, y, z)$ la temperatura en un punto $(x, y, z) \in W \subset \mathbb{R}^3$, donde W es alguna región y T es una función C^1. Entonces

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\,\mathbf{k}$$

representa el gradiente de la temperatura y el calor «fluye» con el campo vectorial $-k\nabla T = \mathbf{F}$, donde k es una constante positiva (*véase* la Sección 8.5). Por consiguiente, $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ es el flujo de calor a través de la superficie S.

EJEMPLO 7.30 Supongamos que una función de temperatura en $\mathbb{R}^3$ viene dada por la fórmula $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, y sea S la esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ orientada según la normal exterior (*véase* el Ejemplo 7.28). Hallar el flujo de calor a través de la superficie S si $k = 1$.

Solución

Tenemos

$$\mathbf{F} = -\nabla T(x, y, z) = -2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}.$$

Sobre S, el vector $\mathbf{n}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ es la normal «exterior» unitaria a S en (x, y, z) y $f(x, y, z) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -2x^2 - 2y^2 - 2z^2 = -2$ es la componente normal de $\mathbf{F}$. Por el Teorema 5 podemos ver que la integral de superficie de $\mathbf{F}$ es igual a la integral de su componente normal $f = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ sobre S. Así,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S f\,dS = -2 \iint_S dS = -2A(S) = -2(4\pi) = -8\pi.$$

El flujo de calor está dirigido hacia el centro de la esfera (¿por qué hacia dentro?). Claramente, nuestra observación de que $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S f\,dS$ nos ha ahorrado un tiempo de cálculo considerable.

En este ejemplo $\mathbf{F}(x, y, z) = -2x\mathbf{j} - 2y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$ podría representar también un campo eléctrico, en cuyo caso $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -8\pi$ sería el flujo eléctrico a través de S.

EJEMPLO 7.31 **Ley de Gauss** Hay una ley física importante, debida al gran matemático y físico K. F. Gauss, que relaciona el flujo de un campo eléctrico $\mathbf{E}$ sobre una superficie «cerrada» S (por ejemplo, una esfera o un elipsoide) con la carga neta Q encerrada por la superficie, concretamente (en las unidades adecuadas)

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q \tag{1}$$

(*véase* la Figura 7.6.8). Examinaremos la ley de Gauss con detalle en el Capítulo 8. Esta ley es análoga a la ley de Ampère (*véase* el Ejemplo 7.14).

Supongamos que $\mathbf{E} = E\mathbf{n}$; esto es, $\mathbf{E}$ es un múltiplo escalar constante de la normal unitaria a S. Entonces la ley de Gauss, la Ecuación (1) de este ejemplo, se convierte en

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S E\,dS = E \iint_S dS = Q$$

ya que $E = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$. Así,

$$E = \frac{Q}{A(S)}. \tag{2}$$

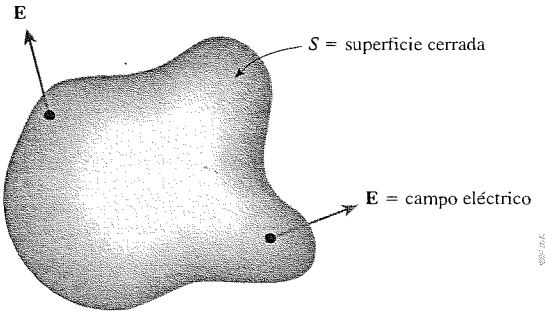


Figura 7.6.8. La ley de Gauss: $\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q$, donde Q es la carga neta en el interior de S.

En el caso en que S es la esfera de radio R, la Ecuación (2) se transforma en

$$E = \frac{Q}{4\pi R^2} \tag{3}$$

(*véase* la Figura 7.6.9).

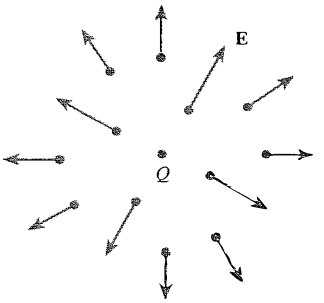


Figura 7.6.9. El campo **E** debido a una carga puntual Q es $\mathbf{E} = Q\mathbf{n}/4\pi R^2$.

Supongamos ahora que **E** está generado por carga puntual aislada Q. Por simetría, es razonable que $\mathbf{E} = E\mathbf{n}$, donde $\mathbf{n}$ es la normal unitaria a cualquier esfera centrada en Q. Por tanto, se satisface la Ecuación (3). Consideramos una segunda carga puntual, Q_0, situada a una distancia R de Q. La fuerza **F** que actúa sobre esta segunda carga, Q_0, está dada por

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}Q_0 = EQ_0\mathbf{n} = \frac{QQ_0}{4\pi R^2}\,\mathbf{n}.$$

Si F es la magnitud de **F**, tenemos:

$$F = \frac{QQ_0}{4\pi R^2},$$

que es la ***ley de Coulomb*** para la fuerza entre dos cargas puntuales[15].

[15] En ocasiones se ve la fórmula $F = (1/4\pi\varepsilon_0)QQ_0/R^2$ La constante extra ε_0 aparece cuando se utilizan las unidades MKS para medir la carga. Estamos utilizando unidades CGS, o gaussianas.

Integrales de superficie sobre gráficas

Finalmente, vamos a deducir las fórmulas de las integrales de superficie para campos vectoriales $\mathbf{F}$ sobre superficies S que son gráficas de funciones. Consideramos la superficie S descrita por $z = g(x, y)$ con $(x, y) \in D$, donde S está orientada con la normal unitaria que apunta hacia arriba:

$$\mathbf{n} = \frac{-\dfrac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \dfrac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1}}.$$

Hemos visto que podemos parametrizar S por $\mathbf{\Phi}$: $D \to \mathbb{R}^3$ dado por $\mathbf{\Phi}(x, y) = (x, y, g(x, y))$. En este caso, $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ se puede escribir de una forma especialmente simple. Tenemos:

$$\mathbf{T}_x = \mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{k}, \qquad \mathbf{T}_y = \mathbf{j} + \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{k}.$$

Así, $\mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y = -(\partial g/\partial x)\mathbf{i} - (\partial g/\partial y)\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Si $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ es un campo vectorial continuo, entonces obtenemos:

La integral de superficie de un campo vectorial sobre una gráfica S

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y)\, dx\, dy \\ &= \iint_D \left[F_1\left(-\frac{\partial g}{\partial x}\right) + F_2\left(-\frac{\partial g}{\partial y}\right) + F_3 \right] dx\, dy.\end{aligned} \tag{4}$$

EJEMPLO 7.32 Las ecuaciones

$$z = 12, \qquad x^2 + y^2 \leq 25$$

describen un disco de radio 5 contenido en el plano $z = 12$. Supongamos que $\mathbf{r}$ es el campo vectorial

$$\mathbf{r}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Calcular $\iint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}$.

Solución

Haremos el cálculo de tres maneras. Primero, tenemos $\partial z/\partial x = \partial z/\partial y = 0$, ya que $z = 12$ es constante en el disco, de modo que

$$\mathbf{r}(x, y, z) \cdot (\mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y) = \mathbf{r}(x, y, z) \cdot (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{r}(x, y, z) \cdot \mathbf{k} = z.$$

Utilizando la definición original del comienzo de la sección, la integral pasa a ser:

$$\iint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\blacksquare} z\,dx\,dy = \iint_D 12\,dx\,dy = 12\,(\text{área de } D) = 300\pi.$$

Una segunda forma de resolver el problema: como el disco es paralelo al plano xy, la normal exterior unitaria es $\mathbf{k}$. Por lo tanto, $\mathbf{n}(x, y, z) = \mathbf{k}$, y $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = z$. Por otra parte, $\|\mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y\| = \|\mathbf{k}\| = 1$, y por tanto sabemos, por las consideraciones que preceden al Teorema 5, que

$$\iint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\,dS = \iint_S z\,dS = \iint_D 12\,dx\,dy = 300\pi.$$

Tercera forma: podemos resolver el problema utilizando la Fórmula (4) directamente, con $g(x, y) = 12$ y D el disco $x^2 + y^2 \leqslant 25$:

$$\iint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D (x \cdot 0 + y \cdot 0 + 12)\,dx\,dy = 12\,(\text{área de } D) = 300\pi.$$

Resumen: fórmulas para integrales de superficie

1. **Superficie parametrizada:** $\Phi(u, v)$.

   a) Integral de una función escalar f:

   $$\iint_S f\,dS = \iint_D f(\Phi(u, v))\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|\,du\,dv.$$

   b) Elemento de superficie escalar:

   $$dS = \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|\,du\,dv.$$

   c) Integral de un campo vectorial $\mathbf{F}$:

   $$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)\,du\,dv.$$

   d) Elemento de superficie vectorial:

   $$d\mathbf{S} = (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)\,du\,dv = \mathbf{n}\,dS.$$

2. **Gráfica:** $z = g(x, y)$.

   a) Integral de una función escalar f:

   $$\iint_S f\,dS = \iint_D \frac{f(x, y, g(x, y))}{\cos\theta}\,dx\,dy.$$

   b) Elemento de superficie escalar:

   $$dS = \frac{dx\,dy}{\cos\theta} = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1}\,dx\,dy,$$

   donde $\cos\theta = \mathbf{n} \cdot \mathbf{k}$, y $\mathbf{n}$ es el vector normal unitario a la superficie.

c) Integral de un campo vectorial **F**:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left(-F_1 \frac{\partial g}{\partial x} - F_2 \frac{\partial g}{\partial y} + F_3 \right) dx\, dy.$$

d) Elemento de superficie vectorial:

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} \cdot dS = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k} \right) dx\, dy.$$

3. Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

a) Elemento de superficie escalar:

$$dS = R^2 \operatorname{sen} \phi\, d\phi\, d\theta.$$

b) Elemento de superficie vectorial:

$$d\mathbf{S} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})R \operatorname{sen} \phi\, d\phi\, d\theta = \mathbf{r}\, R \operatorname{sen} \phi\, d\phi\, d\theta = \mathbf{n}R^2 \operatorname{sen} \phi\, d\phi\, d\theta.$$

EJERCICIOS

1. Supongamos que la temperatura de un punto en $\mathbb{R}^3$ viene dada por $T(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2$. Calcular el flujo de calor a través de la superficie $x^2 + z^2 = 2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$, si $k = 1$.

2. Calcular el flujo de calor a través de la esfera unidad S si $T(x, y, z) = x$. ¿Puede interpretar su respuesta físicamente?

3. Sea S la superficie cerrada formada por el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geqslant 0$, y su base $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $z = 0$. Sea **E** el campo eléctrico definido por $\mathbf{E}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$. Hallar el flujo eléctrico a través de S. [INDICACIÓN: Descomponer S en dos trozos, S_1 y S_2, y evaluar $\iint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ y $\iint_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ por separado.]

4. Supongamos que el campo de velocidades de un fluido está descrito por $\mathbf{F} = \sqrt{y}\mathbf{i}$ (medido en metros por segundo). Calcular cuántos metros cúbicos de fluido están atravesando la superficie $x^2 + z^2 = 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ en cada segundo.

5. Evaluar $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$, donde S es la superficie $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$, $z \leqslant 0$, y **F** es el campo vectorial $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + zx^3y^2\mathbf{k}$ (supondremos que **n**, la normal unitaria, apunta hacia arriba).

6. Evaluar $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F} = (x^2 + y - 4)\mathbf{i} + 3xy\mathbf{j} + (2xz + z^2)\mathbf{k}$ y S es la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \geqslant 0$ (supondremos que **n**, la normal unitaria, apunta hacia arriba).

7. Calcular la integral $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde S es toda la superficie de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$, $z \geqslant 0$ y $\mathbf{F} = (x + 3y^5)\mathbf{i} + (y + 10xz)\mathbf{j} + (z - xy)\mathbf{k}$ (supondremos que S está orientada por la normal que apunta hacia el exterior).

8.[16] Se está construyendo un restaurante en la ladera de una montaña. En la Figura 7.6.10 se muestran los planos del arquitecto.

[16] La resolución de este problema puede llevar bastante tiempo.

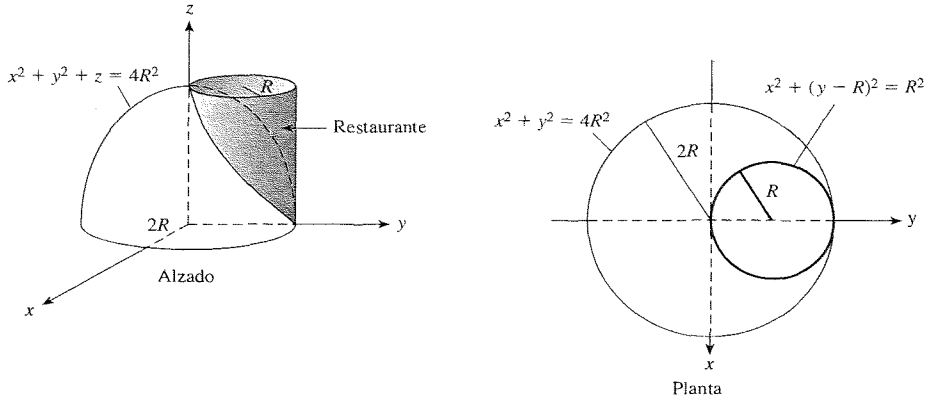


Figura 7.6.10. Planos del restaurante.

a) La pared curvada vertical del restaurante se va a construir de cristal. ¿Cuál es el área de esta pared?

b) El ingeniero consultor informa al promotor de que para ser rentable el volumen del interior éste tiene que exceder $\pi R^4/2$. ¿Para qué R satisface la estructura propuesta este requisito?

c) Durante un día de verano típico, los alrededores del restaurante están sometidos a un campo de temperaturas dado por

$$T(x, y, z) = 3x^2 + (y - R)^2 + 16z^2.$$

Una densidad de flujo de calor $\mathbf{V} = -k\nabla T$ (k es una constante que depende del grado de aislamiento que se va a utilizar) a través de toda la superficie del restaurante (incluyendo el techo y la pared que está en contacto con la colina) produce un flujo de calor. ¿Cuál es el flujo de calor total? (La respuesta depende de R y k.)

9. Hallar el flujo del campo vectorial $\mathbf{V}(x, y, z) = 3xy^2\mathbf{i} + 3x^2y\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ hacia el exterior de la esfera unidad.

10. Evaluar la integral de superficie $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + z(x^2 + y^2)^2\mathbf{k}$ y S es la superficie del cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

11. Sea S la superficie de la esfera unidad. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial y F_r su componente radial. Demostrar que

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} F_r \operatorname{sen} \phi \, d\phi \, d\theta.$$

¿Cuál es la fórmula correspondiente para funciones f con valores reales?

12. Demostrar el siguiente teorema del valor medio para integrales de superficie: Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial continuo, entonces

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = [\mathbf{F}(\mathrm{Q}) \cdot \mathbf{n}(\mathrm{Q})]A(S)$$

para algún punto $\mathrm{Q} \in S$, donde $A(S)$ es el área de S. [INDICACIÓN: Demostrarlo primero para funciones reales, reduciendo el problema a una integral doble. Más concretamente, demostrar que si $g \geq 0$, entonces

$$\iint_D fg\, dA = f(\mathrm{Q}) \iint_D g\, dA$$

para algún $Q \in D$ (hacer esto considerando $(\iint_D fg\,dA)/(\iint_D g\,dA)$ y usando el teorema de los valores intermedios).]

13. Deducir una fórmula análoga a la del Ejercicio 11 para la integración sobre la superficie de un cilindro.

14. Sea S una superficie en $\mathbb{R}^3$, que es en realidad un subconjunto D del plano xy. Demostrar que la integral de una función escalar $f(x,y,z)$ sobre S se reduce a la integral de $f(x, y, z)$ sobre D. ¿En qué se convierte la integral de un campo vectorial sobre S? (Comprobar que la respuesta es compatible con el Ejemplo 7.32.)

15. Supongamos que el campo de velocidades de un fluido está descrito por $\mathbf{F} = \mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ (medido en metros por segundo). Calcular cuántos metros cúbicos de fluido están cruzando la superficie descrita por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geqslant 0$ en cada segundo.

16. **a)** Un fluido uniforme que fluye verticalmente hacia abajo (lluvia intensa) es descrito por el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, -1)$. Hallar el flujo total a través del cono $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$, $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

b) La lluvia es desviada lateralmente por un fuerte viento, de manera que cae con un ángulo de 45°, lo que se describe por $\mathbf{F}(x, y, z) = -(\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$. ¿Cuál es ahora el flujo a través del cono?

17. Para $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, sea S la mitad superior del elipsoide

$$S = \left\{(x, y, z) \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ z \geqslant 0\right\},$$

con la orientación determinada por la normal hacia arriba. Calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3, 0, 0)$.

18. Si S es la semiesfera superior $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geqslant 0\}$ orientada según la normal que apunta hacia el exterior de la esfera, calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ para los apartados a) y b).

a) $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

b) $\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$.

c) Para cada uno de los campos vectoriales anteriores, calcular $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$ y $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde C es la circunferencia unidad en el plano xy recorrida en sentido contrario al de las agujas del reloj (vista desde la parte positiva del eje z). (Obsérvese que C es la frontera de S. El fenómeno ilustrado en este ejemplo se estudiará más a fondo en el capítulo siguiente, usando el teorema de Stokes.)

7.7. Aplicaciones a la geometría diferencial, la Física y a las formas de la vida[17]

En la primera mitad del siglo XIX, el gran matemático alemán Karl Friedrich Gauss desarrolló una teoría de las superficies curvadas en $\mathbb{R}^3$. Más de un siglo antes, Isaac Newton había definido una medida de la curvatura de una curva en el espacio, y Gauss fue capaz de hallar extensiones de esta idea de curvatura que podían aplicarse a las superficies. Al hacer esto, Gauss realizó varios descubrimientos destacables.

[17] Esta sección se puede omitir en una primera lectura, sin pérdida de continuidad.

Curvatura de superficies

Para trayectorias $\mathbf{c}$: $[a, b] \to \mathbb{R}^3$ parametrizadas por longitud de arco —esto es, $\|\mathbf{c}'(t)\| = 1$— la curvatura κ de la curva imagen en el punto $\mathbf{c}(t)$, $\kappa(\mathbf{c}(t))$, se define como la longitud del vector aceleración. Es decir, $\|\mathbf{c}''(t)\| = \kappa(\mathbf{c}(t))$. Para trayectorias $\mathbf{c}$ en el espacio, la curvatura es realmente una medida de la curvatura de la curva imagen geométrica C. Como vimos al final de la Sección 7.1, la «curvatura total» $\int \kappa\, ds$ sobre C tiene implicaciones «topológicas». Lo mismo, e incluso más, sucederá con la definición de Gauss de la curvatura total de una superficie. Comenzamos con algunas definiciones.

Sea $\mathbf{\Phi}$: $D \to \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada suave. Entonces, como sabemos,

$$\mathbf{T}_u = \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \quad \text{y} \quad \mathbf{T}_v = \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v}$$

son vectores tangentes a la superficie imagen $S = \mathbf{\Phi}(D)$ en el punto $\mathbf{\Phi}(u, v)$. Supondremos además que existe un vector normal bien definido; es decir, supondremos que la superficie es regular: $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$.

Sean

$$E = \left\| \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \right\|^2, \qquad F = \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v}, \qquad G = \left\| \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial v} \right\|^2.$$

En el Ejercicio 15 de la Sección 7.5, vimos que

$$\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|^2 = EG - F^2.$$

Por razones de notación, denotaremos $EG - F^2$ mediante W. Además, denotaremos mediante

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v}{\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|} = \frac{\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v}{\sqrt{W}}$$

al vector normal *unitario* a la superficie imagen en el punto $p = \mathbf{\Phi}(u, v)$. A continuación definiremos dos nuevas medidas de la curvatura de una superficie en p —la «curvatura gaussiana», $K(p)$, y la «curvatura media», $H(p)$. Ambos conceptos tienen profundas conexiones con la noción de curvatura de las curvas en el espacio, que esclarecen el significado de sus definiciones, pero no las investigaremos aquí.

Para definir estas dos curvaturas, primero definimos tres nuevas funciones ℓ, m, n sobre S del modo siguiente:

$$\begin{aligned} \ell(p) &= \mathbf{N}(u, v) \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{\Phi}}{\partial u^2} = \mathbf{N}(u, v) \cdot \mathbf{\Phi}_{uu}, \\ m(p) &= \mathbf{N}(u, v) \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{\Phi}}{\partial u \partial v} = \mathbf{N}(u, v) \cdot \mathbf{\Phi}_{uv}, \\ n(p) &= \mathbf{N}(u, v) \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{\Phi}}{\partial v^2} = \mathbf{N}(u, v) \cdot \mathbf{\Phi}_{vv}. \end{aligned} \tag{1}$$

La ***curvatura gaussiana*** $K(p)$ de S en el punto p viene dada por

$$K(p) = \frac{\ell n - m^2}{W}, \tag{2}$$

y la ***curvatura media*** $H(p)$ de S en el punto p se define mediante[18]

$$H(p) = \frac{G\ell + En - 2Fm}{2W}, \tag{3}$$

donde los miembros de la derecha de ambas expresiones están calculados en el punto $p = \mathbf{\Phi}(u, v)$.

EJEMPLO 7.33 **Los planos tienen curvatura nula** Sea $\mathbf{\Phi}(u, v) = \alpha u + \beta v + \gamma$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, donde α, β, γ son vectores en $\mathbb{R}^3$. Según el Ejemplo 7.15, esto determina un plano parametrizado en $\mathbb{R}^3$. Demostrar que en cualquier punto, tanto la curvatura gaussiana como la curvatura media son cero, y que por tanto K y H son funciones idénticamente nulas.

Solución

Puesto que $\mathbf{\Phi}_{uu} = \mathbf{\Phi}_{uv} = \mathbf{\Phi}_{vv} \equiv 0$, las funciones ℓ, m, n se anulan en todos los puntos, de manera que lo mismo ocurre con H y K. Así, un plano tiene curvatura nula. Por tanto, al menos en este ejemplo, deberíamos estar convencidos de que H y K miden efectivamente lo «llano» que es el plano. Recíprocamente, se puede demostrar que si H y K son idénticamente cero, entonces S es un trozo de plano (*véase* el Ejercicio 10 de esta sección).

EJEMPLO 7.34 **Curvatura de una semiesfera** Sea:

$$\mathbf{\Phi}(u, v) = (u, v, g(u, v)),$$

donde $g(u, v) = \sqrt{R^2 - u^2 - v^2}$ es una parametrización de la «semiesfera superior» de radio R. Demostrar que la curvatura gaussiana en cada punto es $1/R^2$ y la curvatura media es $1/R$.

Solución

En primer lugar debemos calcular las siguientes cantidades:

$$\mathbf{T}_u,\ \mathbf{T}_v,\ \mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v,\ \mathbf{\Phi}_{uu},\ \mathbf{\Phi}_{vv},\ \mathbf{\Phi}_{uv},\ E,\ G,\ F,\ \ell,\ m,\ n.$$

Antes de nada, tenemos

$$\mathbf{\Phi}_u = \mathbf{T}_u = \mathbf{i} - \frac{u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}\,\mathbf{k},$$

$$\mathbf{\Phi}_v = \mathbf{T}_v = \mathbf{j} - \frac{v}{\sqrt{R^2 - v^2 - v^2}}\,\mathbf{k}.$$

Según la Fórmula (2) de la Sección 7.3, tenemos

$$\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = -\frac{\partial g}{\partial u}\,\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial v}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$= \frac{u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}\,\mathbf{i} + \frac{v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}\,j + k.$$

[18] En rigor, $K(p)$ y $H(p)$ podrían depender, en principio, de la parametrización $\mathbf{\Phi}$ de S, pero se puede demostrar que en realidad son independientes de $\mathbf{\Phi}$.

Por tanto,

$$E = \|\mathbf{\Phi}_u\|^2 = 1 + \frac{u^2}{R^2 - u^2 - v^2} = \frac{R^2 - v^2}{R^2 - u^2 - v^2},$$

$$G = \|\mathbf{\Phi}_v\| = \frac{R^2 - u^2}{R^2 - u^2 - v^2},$$

$$F = \mathbf{\Phi}_u \cdot \mathbf{\Phi}_v = \frac{uv}{R^2 - u^2 - v^2}.$$

A partir del Ejercicio 15 de la Sección 7.5, sabemos que

$$\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|^2 = EG - F^2 = \frac{(R^2 - v^2)(R^2 - u^2) - u^2v^2}{(R^2 - u^2 - v^2)^2}$$

$$= \frac{R^4 - R^2u^2 - R^2v^2}{(R^2 - u^2 - v^2)^2} = \frac{R^2}{(R^2 - u^2 - v^2)} = W.$$

Ahora un cálculo directo muestra que

$$\mathbf{\Phi}_{uu} = \frac{R^2 - v^2}{(R^2 - u^2 - v^2)^{3/2}}\,\mathbf{k},$$

$$\mathbf{\Phi}_{vv} = \frac{R^2 - u^2}{(R^2 - u^2 - v^2)^{3/2}}\,\mathbf{k},$$

$$\mathbf{\Phi}_{uv} = \frac{uv}{(R^2 - u^2 - v^2)^{3/2}}\,\mathbf{k}.$$

Además,

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v}{\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|} = \frac{\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v}{\sqrt{W}}$$

$$= \frac{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}{R} \cdot \left(\frac{u}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}\,\mathbf{i} + \frac{v}{\sqrt{R^2 - u^2 - v^2}}\,\mathbf{j} + \mathbf{k} \right)$$

$$= \frac{1}{R}\left(u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + \sqrt{R^2 + u^2 - v^2}\,\mathbf{k}\right).$$

Así,

$$\ell = \mathbf{N} \cdot \mathbf{\Phi}_{uv} = \frac{1}{R}\left(\frac{R^2 - v^2}{R^2 - u^2 - v^2}\right),$$

$$n = \mathbf{N} \cdot \mathbf{\Phi}_{vv} = \frac{1}{R}\left(\frac{R^2 - u^2}{R^2 - u^2 - v^2}\right),$$

$$m = \mathbf{N} \cdot \mathbf{\Phi}_{uv} = \frac{1}{R}\left(\frac{uv}{R^2 - u^2 - v^2}\right).$$

Por consiguiente,

$$\ell n - m^2 = \frac{1}{R^2}\left(\frac{(R^2 - v^2)(R^2 - u^2) - u^2v^2}{(R^2 - u^2 - v^2)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{R^2 - u^2 - v^2}.$$

Dividiendo esta cantidad por W obtenemos $K = 1/R^2$. Así, la curvatura gaussiana no cambia de un punto a otro de la semiesfera; es decir, es constante. Esto confirma nuestra intuición de que la esfera es perfectamente simétrica y de que su curvatura es igual en todas partes. Por tanto, la curvatura media también debería ser constante. Esto se comprueba mediante el siguiente cálculo:

$$H = \frac{G\ell + En - 2Fm}{2W}$$

$$= \frac{1}{2W}\left\{\left(\frac{R^2 - u^2}{R^2 - u^2 - v^2}\right)\frac{1}{R}\left(\frac{R^2 - v^2}{R^2 - u^2 - v^2}\right)\right.$$

$$\left. + \left(\frac{R^2 - v^2}{R^2 - u^2 - v^2}\right)\frac{1}{R}\left(\frac{R^2 - u^2}{R^2 - u^2 - v^2}\right) - 2\,\frac{u^2v^2}{(R^2 - u^2 - v^2)^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{W}\left\{\frac{R}{R^2 - u^2 - v^2}\right\} = \frac{1}{R}.$$

Superficies de curvatura constante

Las superficies con curvatura gaussiana y curvatura media constantes son de gran interés para los matemáticos. En el siglo XIX se sabía que las únicas superficies suaves cerradas y acotadas, «sin frontera» y con curvatura gaussiana constante eran las esferas. En el siglo XX, el matemático ruso Alexandrov demostró que las únicas superficies suaves cerradas y acotadas, sin frontera, que no tienen autointersecciones y tienen curvatura media constante también debían ser esferas. Los matemáticos creían que el resultado de Alexandrov debía ser cierto incluso si se permitían autointersecciones en la superficie, pero nadie pudo hallar una prueba. En 1984, el profesor Henry Wente (Toledo, Ohio) sorprendió al mundo al encontrar un toro con autointersecciones y curvatura media constante.

Las superficies con curvatura media constante son importantes físicamente, y aparecen por todas partes en la Naturaleza. Las pompas de jabón tienen curvatura media constante distinta de cero, y las películas jabonosas (que no encierran aire) tienen curvatura media constante igual a cero (*véanse* las Figuras 7.7.1 y 7.7.2).

Al principio del siglo XIX, el matemático francés Delaunay descubrió todas las superficies de revolución que tienen curvatura media constante: el cilindro, la esfera, la catenoide, la unduloide y la nodoide. La catenoide puede construirse mediante una película jabonosa tendida entre dos contornos circulares.

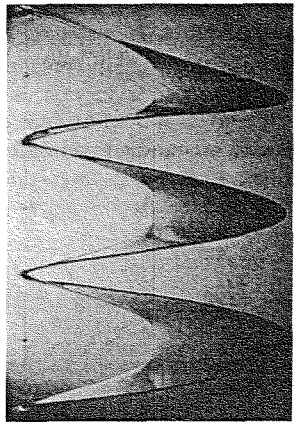


Figura 7.7.1. Un helicoide, $H = 0$.

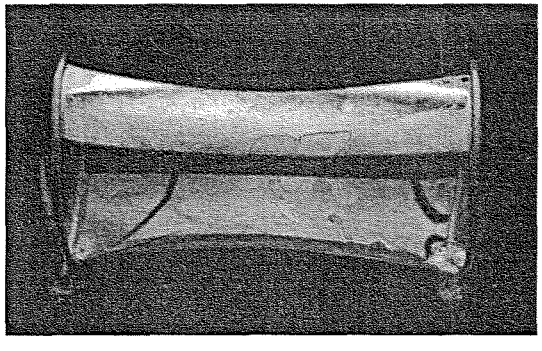


Figura 7.7.2. Una película jabonosa, $H = 0$, tendida entre dos alambres circulares; esta superficie es la catenoide.

Formas óptimas en la Naturaleza

A lo largo de todas las edades, el hombre se ha preguntado el por qué de las formas de las cosas. ¿Por qué la Tierra y las estrellas son «redondas» y no cúbicas? ¿Por qué los seres vivos tienen las formas que tienen?

En 1917, el filósofo de la Naturaleza británico D'Arcy Thompson publicó un provocativo trabajo titulado *Sobre el Crecimiento y la Forma*, en el que investigaba las fuerzas que actuaban tras la creación de formas vivas en la Naturaleza. Él escribió:

> «En un organismo, grande o pequeño, no es simplemente la naturaleza de los movimientos de la sustancia viva lo que debemos interpretar en términos de fuerzas (de acuerdo con la cinética), sino también la configuración del propio organismo, cuya permanencia o equilibrio se explica mediante la interacción o balance de fuerzas, como describe la estática.»

ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA

Sorprendentemente, Thompson descubrió *todas* las superficies de Delaunay en las formas de organismos unicelulares (*véase* la Figura 7.7.3). La curvatura media constante de estos organismos se puede explicar por principios del mínimo semejantes a los descritos en la *Nota Histórica* de la Sección 3.3. En 1952, Watson y Crick determinaron que la estructura del ADN era una doble hélice, un descubrimiento que sentó las bases de la revolución genética. Observando películas de jabón, como las de la Figura 7.7.1, vemos que la Naturaleza gusta de las formas helicoidales y que tiende a repetir sus diseños. Conocer mejor los principios científicos que subyacen a la vida podría ayudar en última instancia a que los matemáticos jugasen un papel más prominente en esta área de la biología teórica.

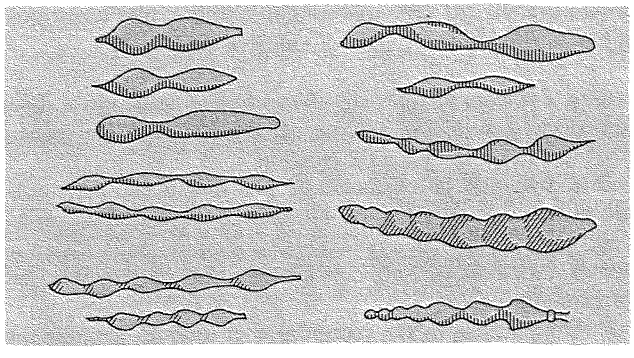


Figura 7.7.3. Superficies de revolución con curvatura media constante como organismos unicelulares.

Curvatura y física

La teoría de las superficies curvadas, iniciada por Gauss, tuvo un profundo efecto sobre la Física. Gauss comprendió que la curvatura gaussiana K de una superficie sólo dependía de la medida de las distancias *sobre la propia superficie*; es decir, la curvatura gaussiana era una propiedad *intrínseca de la superficie*. Esto no es cierto para la curvatura media H. Así, seres «viviendo» sobre una superficie deberían ser capaces de decir que la superficie está curvada, sin hacer ninguna referencia a un mundo «externo». El propio Gauss encontró tan asombroso su resultado matemático, que lo llamó «teorema egregio», o «teorema extraordinario». La teoría de Gauss fue generalizada por su estudiante Bernhard Riemann a superficies n-dimensionales para las cuales es posible describir una noción de curvatura.

Recordemos que Newton introdujo la idea de una fuerza de atracción gravitatoria actuando a través de las vastas distancias galácticas. Al principio del siglo XX, Albert Einstein utilizó las ideas de Riemann para desarrollar la *teoría general de la relatividad*, una teoría de la gravitación que eliminaba la necesidad de considerar fuerzas (como hizo Newton) actuando a grandes distancias. La teoría de Einstein explicó la curvatura de la luz a causa del Sol, los agujeros negros, la expansión del Universo, la formación de las galaxias y el propio Big Bang. Para muchas aplicaciones, incluyendo la dinámica de nuestro sistema solar, la teoría de Newton es suficiente, y se usa comúnmente hoy en día por la NASA para diseñar misiones espaciales, como vimos en

la Sección 4.1. Pero para aplicaciones cosmológicas a grandes escalas, la teoría de Einstein sustituyó a la de Isaac Newton, publicada en sus *Principia* en 1687.

Como un testamento de su genio, y a pesar del increíble éxito de su teoría, Newton estaba preocupado por *cómo* actuaba esta fuerza gravitatoria. No pudo dar más explicación que decir: «Yo no he sido capaz de deducir a partir de los fenómenos la razón para estas propiedades de la gravitación, y yo no invento hipótesis; puesto que cualquier cosa que no pueda ser deducida a partir de los fenómenos debe ser denominada como una hipótesis». Además, en una carta dirigida a su amigo, Richard Bentley, Newton escribió:

> «El que la gravedad debe ser innata, inherente y esencial a la materia, de modo que un cuerpo puede actuar a distancia sobre otro, a través del cual su acción puede ser dirigida de uno a otro, es para mí un absurdo tan grande que creo que ningún hombre, que tenga una facultad aceptable para pensar en temas filosóficos, pueda ni siquiera caer en él.»

Newton acuñó el término *acción a distancia* (que significa «fuerza actuando a distancia») para describir el misterioso efecto de la gravitación a largas distancias. Este efecto es actualmente tan difícil de entender como lo fue en la época de Newton.

Johann Bernoulli encontraba difícil aceptar la existencia de una fuerza que actuara a través del espacio vacío a distancias de cientos de millones de kilómetros. Consideraba esta fuerza como algo repulsivo para las mentes acostumbradas a no aceptar principios de la Física a no ser que fueran incontestables y evidentes. Además, Leibniz consideró la gravitación como un poder incorpóreo e inexplicable, filosóficamente vacío.

Quizá la mayor inspiración de Albert Einstein fue reemplazar el modelo newtoniano de la gravitación por un modelo que habría encantado a los antiguos griegos —*un modelo geométrico de la gravitación*—. En la teoría de Einstein, el concepto de fuerza actuando a grandes distancias ha sido sustituido por la *curvatura* de un mundo espacio-temporal[19]. Como ilustra la cita del principio del capítulo, ¡W. K. Clifford tuvo una premonición de los acontecimientos por venir! Para aclarar el esquema de Einstein, presentaremos un modelo muy simplificado, que transmite algunas de sus ideas básicas.

Representamos el espacio como una superficie que imaginamos como una cama elástica originalmente plana (el estado correspondiente al vacío), que está fuertemente deformada en algún punto por el peso de una gigantesca bola de acero (el Sol). Una pequeña bola de acero rodando por la cama elástica es nuestro planeta Tierra (*véase* la Figura 7.7.4).

Si la bola pequeña rueda por la cama elástica plana, se moverá siguiendo una trayectoria rectilínea. Sin embargo, si colocamos la bola gigante de acero en el centro de la cama elástica, provocará que su superficie se doble, o «curve», incluso «muy lejos» de la bola grande. Si empujamos entonces nuestra bola pequeña, ya no se moverá en línea recta, sino que seguirá una

---

[19] El espacio-tiempo es localmente como $\mathbb{R}^4$ con tres coordenadas espaciales y una coordenada temporal.

trayectoria curva. La gran bola afecta a la trayectoria de la bola pequeña curvando el espacio alrededor suyo. Con el empujón preciso, la bola pequeña debería incluso orbitar alrededor de la grande durante cierto tiempo. Este modelo de la cama elástica explica cómo un cuerpo masivo puede, curvando el espacio, influir sobre otro pequeño a gran distancia.

Einstein afirmó que el espacio-tiempo está curvado por la materia y por la energía. En este espacio-tiempo curvado, incluso los rayos de luz se *tuercen* cuando pasan cerca de objetos con una gran masa, como el Sol. Gracias a Gauss y a Riemann, la curvatura del espacio-tiempo no requiere ningún universo «externo» para ser explicada.

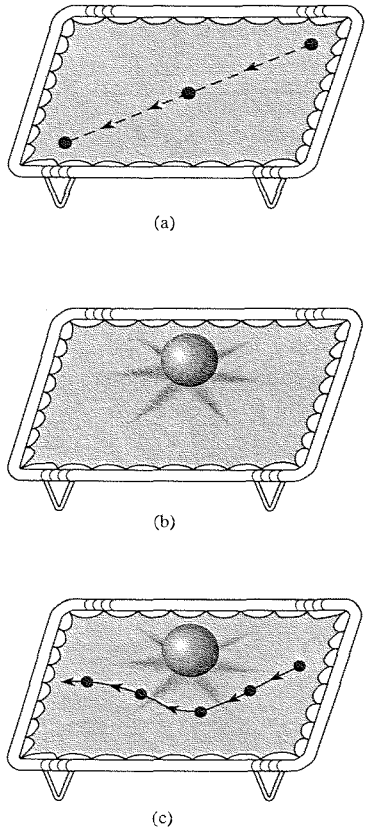


Figura 7.7.4. (a) Una partícula sobre una cama elástica tensa se mueve en línea recta. (b) Una pesada bola de acero distorsiona la cama elástica. (c) Una partícula que se mueve sobre la cama elástica distorsionada sigue una trayectoria curva.

Las ecuaciones que nos dicen cuánto están curvados el espacio y el tiempo a causa de la materia y la energía se conocen como las *ecuaciones del campo de Einstein*. Una descripción de estas ecuaciones está más allá del contenido de este libro, pero no así el núcleo matemático del cual surgen; este núcleo está basado en otro resultado destacable de las investigaciones de Gauss y Bonnet.

El Teorema de Gauss-Bonnet

En el Ejemplo 7.34 calculamos la curvatura gaussiana K de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ de radio R y hallamos que era igual a la constante $1/R^2$. La curvatura gaussiana K es una función con valores escalares sobre la superficie y, como tal, podemos integrarla sobre la misma. Queremos considerar una constante multiplicada por esta integral, más precisamente:

$$\frac{1}{2\pi}\iint_S K\,dA.$$

Para la esfera de radio R, esta cantidad resulta ser

$$\frac{1}{2\pi R^2}\iint_S dA = \frac{4\pi R^2}{2\pi R^2} = 2.$$

Lo que descubrieron Gauss y Bonnet fue que si S es una superficie cualquiera cerrada y «parecida a la esfera» (cerrada y acotada, pero sin frontera, como en la Figura 7.7.5), entonces

$$\frac{1}{2\pi}\iint_S K\,dA = 2$$

sigue siendo cierto[20].

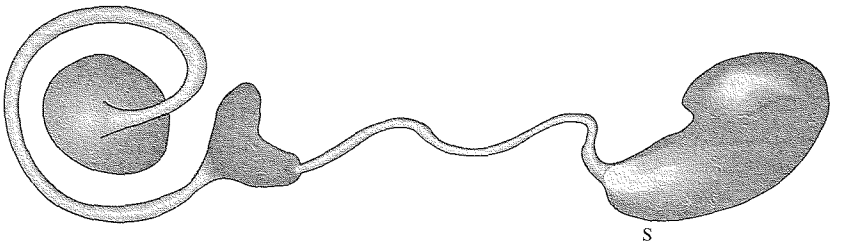


Figura 7.7.5. Una esfera deformada. $1/2\pi \iint_S K\,dA = 2$.

Así, la integral

$$\frac{1}{2\pi}\iint_S K\,dA$$

[20] De modo informal, esto significa que S puede obtenerse a partir de la esfera mediante dobleces y estiramientos (como un globo) pero sin romperse (¡el globo explotaría!).

siempre es igual al entero 2, y es por tanto un *invariante topológico* de la superficie. El que la integral de la curvatura debería ser una cantidad interesante, debería estar ya claro, a partir de la discusión del final de la Sección 7.1.

Consideremos ahora un toro, superficie con forma de rosquilla. Podemos considerar que el toro se obtiene a partir de la esfera, recortando dos pequeños discos y pegando en ese lugar un asa (*véase* la Figura 7.7.6).

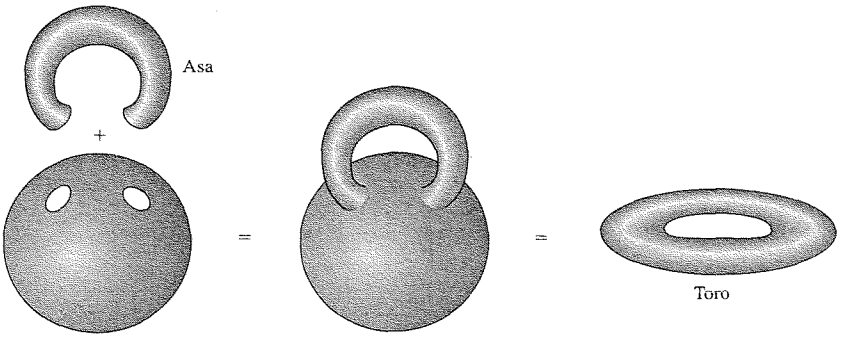


Figura 7.7.6. Pegando un asa a una esfera se obtiene un toro.

Además, podemos continuar este proceso añadiendo 1, 2, 3, ..., g asas a la esfera. Si pegamos g asas, diremos que la superficie resultante tiene género g, como en la Figura 7.7.7. Obsérvese que el toro tiene género 1.

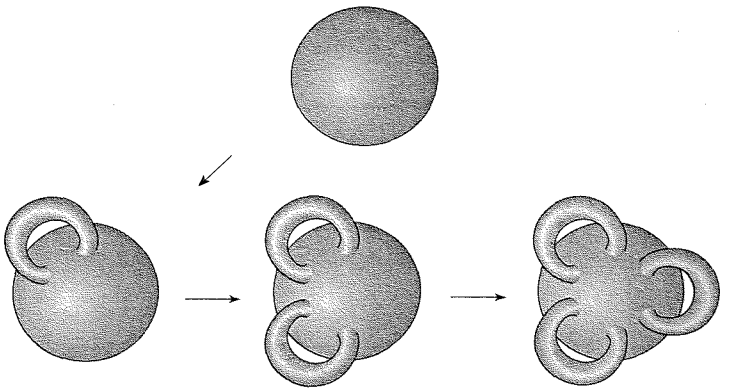
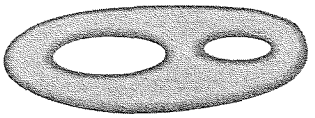
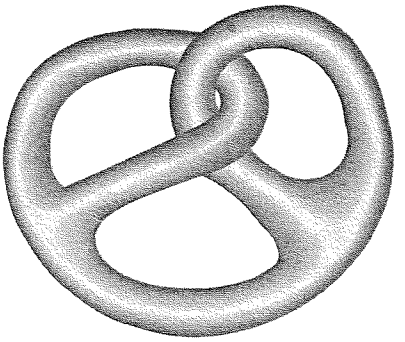


Figura 7.7.7. Una esfera con 0, 1, 2, 3 asas pegadas.

Si dos superficies tienen género diferente, son topológicamente distintas, y no se puede obtener una a partir de la otra mediante dobleces o estiramientos. Dos superficies con el mismo género se pueden colocar en el espacio en formas muy diferentes y complejas, como en la Figura 7.7.8. Sorprendentemente, incluso aunque la integral (o curvatura total) dada por $(1/2\pi)\iint_S K\,dA$ dependa del género, no depende de cómo se sitúa la superficie en el espacio (y por tanto no depende de K).



Rosquilla doble simple



«La galleta del panadero»

Figura 7.7.8. Dos manifestaciones de una superficie S de género 2 en $\mathbb{R}^3$.

Gaus y Bonnet demostraron que

$$\frac{1}{2\pi}\iint_S K\,dA = 2 - 2g.$$

Así, para la esfera ($g = 0$), siempre es igual a 2 (como ya comprobamos); para el toro, siempre es 0 (*véase* el Ejercicio 8 de esta sección).

Hay algo todavía más notable en relación con el teorema de Gauss-Bonnet, observado por el gran matemático alemán David Hilbert (Figura 7.7.9).

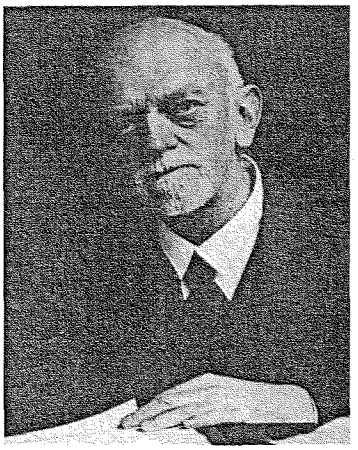


Figura 7.7.9. David Hilbert (1862-1943) fue un matemático destacado en su época.

Hilbert observó que el teorema de Gauss-Bonnet es, en efecto, una versión bidimensional de las ecuaciones de campo de Einstein. En la literatura física, este hecho se conoce como *principio de acción de Hilbert* de la relatividad general[21]. No resulta extraño que los investigadores actuales empleen ideas geométricas similares en su esfuerzo por unificar la gravedad y la mecánica cuántica —por «cuantizar» la gravedad, por así decirlo.

[21] *Véase* C. Misner, K. Thorne y A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, Nueva York, 1972.

EJERCICIOS

1. El helicoide puede describirse mediante:

$$\Phi(u, v) = (u \cos v,\ u \operatorname{sen} v, bv), \text{ donde } b \neq 0.$$

Demostrar que $H = 0$ y que $K = -b^2/(b^2 + u^2)^2$. En las Figuras 7.7.1 y 7.7.5 vemos que el helicoide es en realidad una superficie formada por una película de jabón. Las superficies en las cuales $H = 0$ reciben el nombre de ***superficies mínimas***.

2. Considerar la superficie con forma de silla de montar $z = xy$. Demostrar que

$$K = \frac{-1}{(1 + x^2 + y^2)^2},$$

y que

$$H = \frac{-xy}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

3. Demostrar que $\Phi(u, v) = (u, v, \log\cos v - \log\cos u)$ tiene curvatura media cero (y por tanto es una superficie mínima; *véase* el Ejercicio 1).

4. Hallar la curvatura gaussiana del paraboloide elíptico

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

5. Hallar la curvatura gaussiana del paraboloide hiperbólico

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

6. Hallar la curvatura gaussiana del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

7. Demostrar que la superficie de Enneper

$$\Phi(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2,\ v - \frac{v^3}{3} + u^2 v,\ u^2 - v^2\right)$$

es una superficie mínima ($H = 0$).

8. Considerar el toro T dado en el Ejercicio 4 de la Sección 7.4. Calcular su curvatura gaussiana y comprobar que se cumple el teorema de Gauss-Bonnet. [INDICACIÓN: Demostrar que $\|T_\theta \times T_\phi\|^2 = (R + \cos\phi)^2$ y $K = \cos\phi/(R + \cos\phi)$.]

9. Sea la superficie de revolución $\Phi(u, v) = (u, h(u)\cos v, h(u) \operatorname{sen} v)$, $h > 0$. Demostrar que $K = -h''/h\{1 + (h')^2\}^2$.

10. Diremos que una parametrización Φ de una superficie S es ***conforme*** (*véase* la Sección 7.4), si $E = G$, $F = 0$. Supongamos que Φ parametriza de manera conforme a la superficie S[22]. Demostrar que si H y K son idénticamente cero, entonces S debe ser un trozo de un plano en $\mathbb{R}^3$.

---

[22] Gauss demostró que siempre existe una parametrización conforme de una superficie. El resultado de este ejercicio sigue siendo válido incluso aunque Φ no sea conforme, pero la prueba es más difícil.

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 7

1. Integrar $f(x, y, z) = xyz$ a lo largo de las trayectorias siguientes:

a) $\mathbf{c}(t) = (e^t \cos t,\ e^t \operatorname{sen} t,\ 3),\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

b) $\mathbf{c}(t) = (\cos t,\ \operatorname{sen} t,\ t),\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

c) $\mathbf{c}(t) = \frac{3}{2}t^2\,\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k},\ 0 \leqslant t \leqslant 1$.

d) $\mathbf{c}(t) = t\mathbf{i} + (1/\sqrt{2})t^2\mathbf{j} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{k},\ 0 \leqslant t \leqslant 1$.

2. Calcular la integral de f a lo largo de la trayectoria $\mathbf{c}$ en cada uno de los casos siguientes:

a) $f(x, y, z) = x + y + yz$; $\mathbf{c}(t) = (\operatorname{sen} t,\ \cos t,\ t),\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

b) $f(x, y, z) = x + \cos^2 z$; $\mathbf{c}(t) = (\operatorname{sen} t,\ \cos t,\ t),\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

c) $f(x, y, z) = x + y + z$; $\mathbf{c}(t) = (t,\ t^2,\ \frac{2}{3}t^3),\ 0 \leqslant t \leqslant 1$.

3. Calcular cada una de las siguientes integrales de línea:

a) $\int_C (\operatorname{sen} \pi x)\,dy - (\cos \pi y)\,dz$, donde C es el triángulo cuyos vértices son (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 1), en ese orden.

b) $\int_C (\operatorname{sen} z)\,dx + (\cos z)\,dy - (xy)^{1/3}\,dz$, donde C es la trayectoria $\mathbf{c}(\theta) = (\cos^3 \theta,\ \operatorname{sen}^3 \theta,\ \theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant 7\pi/2$.

4. Si $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ es ortogonal a $\mathbf{c}'(t)$ en cada punto de la curva $x = \mathbf{c}(t)$, ¿qué se puede decir de $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$?

5. Hallar el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$ para desplazar una partícula en sentido contrario al de las agujas del reloj alrededor del cuadrado con vértices (0, 0), $(a, 0)$, (a, a), $(0, a)$, $a > 0$.

6. Un anillo cuya forma se describe mediante la curva $x^2 + y^2 = a^2$ está hecho con un alambre fino, que pesa $|x| + |y|$ gramos por unidad de longitud en (x, y). Hallar la masa del anillo.

7. Hallar una parametrización para cada una de las siguientes superficies:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y = 12$.

b) $2x^2 + y^2 + z^2 - 8x = 1$.

c) $4x^2 + 9y^2 - 2z^2 = 8$.

8. Hallar el área de la superficie definida por $\mathbf{\Phi}$: $(u, v) \mapsto (x, y, z)$, donde

$$x = h(u, v) = u + v, \qquad y = g(u, v) = u, \qquad z = f(u, v) = v;$$

$0 \leqslant u \leqslant 1$, $0 \leqslant v \leqslant 1$. Hacer un dibujo.

9. Escribir una fórmula para el área de la superficie $\mathbf{\Phi}$: $(r, \theta) \mapsto (x, y, z)$, donde

$$x = r\cos\theta, \qquad y = 2r\operatorname{sen}\theta, \qquad z = r;$$

$0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Describir la superficie.

10. Supongamos que $z = f(x, y)$ y que $(\partial f/\partial x)^2 + (\partial f/\partial y)^2 = c$, $c > 0$. Demostrar que el área del trozo de la gráfica de f situado por encima de una región D contenida en el plano xy es $\sqrt{1 + c}$ veces el área de D.

11. Calcular la integral de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sobre la superficie del Ejercicio de repaso número 8.

12. Hallar $\iint_S f\,dS$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $f(x, y, z) = x$; S es el trozo del plano $x + y + z = 1$ contenido en el primer octante, definido por $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

b) $f(x, y, z) = x^2$; S es el trozo del plano $x = z$ contenido dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

c) $f(x, y, z) = x$; S es el trozo del cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ con $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}$.

13. Calcular la integral de $f(x, y, z) = xyz$ sobre el rectángulo de vértices (1, 0, 1), (2, 0, 0), (1, 1, 1) y (2, 1, 0).

14. Calcular la integral de $x + y$ sobre la superficie de la esfera unitaria.

15. Calcular la integral de superficie de x sobre el triángulo de vértices (1, 1, 1), (2, 1, 1) y (2, 0, 3).

16. Un paraboloide de revolución S está parametrizado por $\mathbf{\Phi}(u, v) = (u \cos v,\ u \operatorname{sen} v,\ u^2)$, $0 \leqslant u \leqslant 2$, $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$.

a) Hallar una ecuación en x, y, z que describa la superficie.

b) ¿Cuál es el significado geométrico de los parámetros u y v?

c) Hallar un vector unitario ortogonal a la superficie en $\mathbf{\Phi}(u, v)$.

d) Hallar la ecuación del plano tangente en $\mathbf{\Phi}(u_0, v_0) = (1, 1, 2)$ y expresar el resultado de las dos maneras siguientes:

i) parametrizado en términos de u, v; y

ii) en términos de x, y, z.

e) Hallar el área de S.

17. Sea $f(x, y, z) = xe^y \cos \pi z$.

a) Calcular $\mathbf{F} = \nabla f$.

b) Evaluar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde $\mathbf{c}(t) = (3 \cos^4 t,\ 5 \operatorname{sen}^7 t,\ 0)$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

18. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde S es la mitad superior de la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

19. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Calcular $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde $\mathbf{c}(t) = (e^t,\ t,\ t^2)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

20. Sea $\mathbf{F} = \nabla f$, donde f es una función escalar dada. Sea $\mathbf{c}(t)$ una curva cerrada, es decir, $\mathbf{c}(b) = \mathbf{c}(a)$. Demostrar que $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$.

21. Considerar la superficie $\mathbf{\Phi}(u, v) = (u^2 \cos v,\ u^2 \operatorname{sen} v,\ u)$. Calcular la normal unitaria en $u = 1$, $v = 0$. Hallar la ecuación del plano tangente en ese punto.

22. Sea S el trozo del cono $z^2 = x^2 + y^2$ con z entre 1 y 2, orientado mediante la normal que apunta hacia fuera del cono. Calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$.

23. Sea $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$ un campo vectorial que representa el campo de velocidades de un fluido (con la velocidad medida en metros por segundo). Calcular cuántos metros cúbicos de fluido cruzan el plano xy a través del cuadrado $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ en cada segundo.

24. Demostrar que el área del trozo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ situado encima del rectángulo contenido en el plano xy $[-a, a] \times [-a, a]$, donde $2a^2 < 1$, es

$$A = 2 \int_{-a}^{a} \operatorname{arcsen}\left(\frac{a}{\sqrt{1 - x^2}}\right) dx.$$

25. Sea S una superficie y C una curva cerrada que la limita. Comprobar la identidad

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

si $\mathbf{F}$ es un campo gradiente (utilizar el Ejercicio de repaso número 20).

26. Calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, -y)$ y S es la superficie cilíndrica definida por $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, con la orientación dada por la normal que apunta hacia el exterior del cilindro.

27. Sea S el trozo del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ limitado por los planos $z = 0$, $z = x + 3$. Calcular las integrales siguientes:

a) $\iint_S x^2\, dS$.

b) $\iint_S y^2\, dS$.

c) $\iint_S z^2\, dS$.

28. Sea Γ la curva formada por la intersección del plano $z = ax + by$ con el cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Hallar todos los valores de los números reales a y b tales que $a^2 + b^2 = 1$ y

$$\int_\Gamma y\, dx + (z - x)\, dy - y\, dz = 0.$$

29. Una hélice circular contenida en el cilindro $x^2 + y^2 = R^2$, con pendiente p, se puede describir paramétricamente mediante

$$x = R\cos\theta, \qquad y = R\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad z = p\theta, \qquad \theta \geqslant 0.$$

Una partícula se desliza a lo largo de la hélice bajo la acción de la gravedad (que actúa paralelamente al eje z) sin rozamiento. Si la partícula comienza a la altura $z_0 > 0$, entonces cuando alcanza la altura z, $0 \leqslant z < z_0$, sobre la hélice su rapidez viene dada por

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{(z_0 - z)2g},$$

donde s es la longitud de arco a lo largo de la hélice, g es la constante gravitatoria, y t es el tiempo.

a) Hallar la longitud del trozo de hélice comprendido entre los planos $z = z_0$ y $z = z_1$, $0 \leqslant z_1 < z_0$.

b) Calcular el tiempo T_0 que tarda la partícula en alcanzar el plano $z = 0$.

8

Los teoremas de integración del análisis vectorial

Toda la teoría del movimiento de los fluidos ha sido reducida a la solución de fórmulas analíticas.

Leonhard Euler

Los fluidos son mucho más sencillos de beber que de entender.

Alan Newell

Ahora ya estamos preparados para relacionar el cálculo diferencial vectorial con el cálculo integral vectorial. Esto se hará mediante los importantes teoremas de Green, Gauss y Stokes. Además, destacaremos algunas de las aplicaciones físicas de estos teoremas para el estudio de la electricidad y el magnetismo, la hidrodinámica, la conducción del calor y las ecuaciones diferenciales.

Los teoremas básicos del análisis vectorial tienen su origen en las aplicaciones. Por ejemplo, el teorema de Green, descubierto hacia 1828, surgió en conexión con la teoría del potencial (que incluye los potenciales gravitatorios y eléctricos). El teorema de Gauss —el teorema de la divergencia— apareció en relación con el estudio de la capilaridad (este teorema debería ser atribuido conjuntamente a Gauss y al matemático ruso Ostrogradsky, quien lo descubrió aproximadamente al mismo tiempo). El teorema de Stokes fue sugerido por primera vez en una carta enviada a Stokes por el físico Lord Kelvin en 1850, y fue utilizado por Stokes en los exámenes para el Premio Smith en 1854.

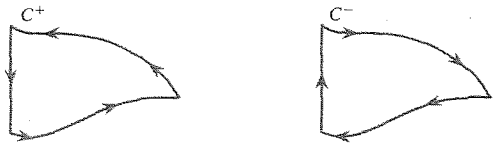
8.1. El teorema de Green

El teorema de Green relaciona una integral de línea a lo largo de una curva cerrada C en el plano $\mathbb{R}^2$ con una integral doble en la región encerrada por C. Este importante resultado se

generalizará en las secciones siguientes a curvas y superficies en $\mathbb{R}^3$. Nos referiremos a integrales de línea a lo largo de curvas que son la frontera de regiones elementales (*véase* la Sección 5.3). Para entender las ideas de esta sección puede ser necesario remitirse a la Sección 7.2.

Regiones simples y elementales, y sus fronteras

Una curva cerrada simple C que es la frontera de una región elemental tiene dos orientaciones —la contraria al sentido de las agujas del reloj (positiva) y la del sentido de las agujas del reloj (negativa). Denotaremos C con la orientación opuesta a la de las agujas del reloj por C^+, y con la orientación correspondiente a la de las agujas del reloj por C^- (*véase* la Figura 8.1.1).



Orientación positiva (a) Orientación negativa (b)

Figura 8.1.1. (a) Orientación positiva de C. (b) Orientación negativa de C.

La frontera C de una región y-simple se puede descomponer en sus partes inferior y superior, C_1 y C_2, y (en su caso) segmentos verticales a izquierda y derecha, B_1 y B_2. Siguiendo la Figura 8.1.2, escribimos,

$$C^+ = C_1^+ + B_2^+ + C_2^- + B_1^-,$$

donde el superíndice «+» indica que las curvas están orientadas de izquierda a derecha o de abajo a arriba, y el superíndice «−» indica que las curvas están orientadas de derecha a izquierda o de arriba a abajo.

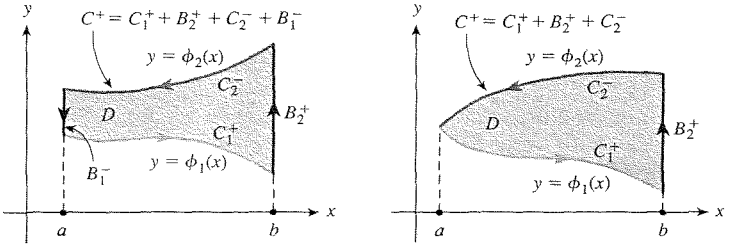


Figura 8.1.2. Dos ejemplos que muestran cómo descomponer la frontera positivamente orientada de una región y-simple D en varias componentes orientadas.

Podemos hacer una descomposición semejante de la frontera de una región x-simple en trozos izquierdo y derecho, y (en su caso) segmentos horizontales superior e inferior (Figura 8.1.3).

Análogamente, la frontera de una región simple tiene dos descomposiciones —una en mitad superior y mitad inferior, y otra en mitad izquierda y mitad derecha.

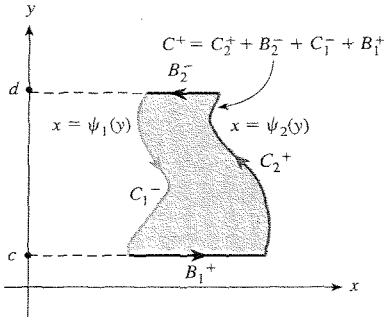


Figura 8.1.3. Un ejemplo que demuestra cómo descomponer la frontera positivamente orientada de una región x-simple en componentes orientadas.

El teorema de Green

A continuación vamos a demostrar dos lemas previos al teorema de Green.

LEMA 1 Sea D una región y-simple y sea C su frontera. Supongamos que $P: D \to \mathbb{R}$ es de clase C^1. Entonces

$$\int_{C^+} P\,dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy.$$

(El término de la izquierda denota la integral de línea $\int_{C^+} P\,dx + Q\,dy$, donde $Q = 0$.)

DEMOSTRACIÓN Supongamos que la región D está descrita por

$$a \leqslant x \leqslant b, \qquad \phi_1(x) \leqslant y \leqslant \phi_2(x).$$

Descomponemos C^+ escribiendo $C^+ = C_1^+ + B_2^+ + C_2^- + B_1^-$ (*véase* la Figura 8.1.2). Por el teorema de Fubini, podemos calcular la integral doble como una integral iterada, y usar entonces el teorema fundamental del cálculo:

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\,dy\,dx$$

$$= \int_a^b [P(x, \phi_2(x)) - P(x, \phi_1(x))]\,dx.$$

Por otra parte, como C_1^+ puede parametrizarse mediante $x \mapsto (x, \phi_1(x))$, $a \leqslant x \leqslant b$, y C_2^+ puede parametrizarse mediante $x \mapsto (x, \phi_2(x))$, $a \leqslant x \leqslant b$, tenemos

$$\int_a^b P(x, \phi_1(x))\,dx = \int_{C_1^+} P(x, y)\,dx$$

y,

$$\int_a^b P(x,\ \phi_2(x))\,dx = \int_{C_2^+} P(x,\ y)\,dx.$$

Entonces, invirtiendo las orientaciones:

$$-\int_a^b P(x,\ \phi_2(x))\,dx = \int_{C_2^-} P(x,\ y)\,dx.$$

Por tanto,

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_{C_1^+} P\,dx - \int_{C_2^-} P\,dx.$$

Como x es constante en B_2^+ y B_1^-, tenemos

$$\int_{B_2^+} P\,dx = 0 = \int_{B_1^-} P\,dx,$$

de modo que

$$\int_{C^+} P\,dx = \int_{C_1^+} P\,dx + \int_{B_2^+} P\,dx + \int_{C_2^-} P\,dx + \int_{B_1^-} P\,dx = \int_{C_1^+} P\,dx + \int_{C_2^-} P\,dx,$$

de donde finalmente obtenemos

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_{C_1^+} P\,dx - \int_{C_2^-} P\,dx = -\int_{C^+} P\,dx.$$

A continuación probamos un lema análogo intercambiando los papeles de x e y.

LEMA 2 Sea D una región x-simple con frontera C. Entonces, si Q: $D \to \mathbb{R}$ es C^1,

$$\int_{C^+} Q\,dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy.$$

El signo negativo no aparece aquí, porque intercambiar los papeles de x e y se corresponde con un cambio de orientación en el plano.

DEMOSTRACIÓN Supongamos que D está dada por

$$\psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y), \qquad c \leqslant y \leqslant d.$$

Utilizando la notación de la Figura 8.1.3 y observando que y es constante en B_1^+ y B_2^-, tenemos

$$\int_{C^+} Q\,dy = \int_{C_1^- + B_1^+ + C_2^+ + B_2^-} Q\,dy = \int_{C_2^+} Q\,dy + \int_{C_1^-} Q\,dy,$$

donde C_2^+ es la curva parametrizada por $y \mapsto (\psi_2(y), y)$, $c \leqslant y \leqslant d$, y C_1^+ es la curva $y \mapsto (\psi_1(y), y)$, $c \leqslant y \leqslant d$. Aplicando el teorema de Fubini y el teorema fundamental del cálculo, obtenemos

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \int_c^d [Q(\psi_2(y), y) - Q(\psi_1(y), y)]\, dy$$

$$= \int_{C_2^+} Q\, dy - \int_{C_1^+} Q\, dy = \int_{C_2^+} Q\, dy + \int_{C_1^-} Q\, dy = \int_{C^+} Q\, dy.$$

Sumando los resultados de los Lemas 1 y 2, se prueba el siguiente (e importante) teorema.

TEOREMA 1: Teorema de Green Sea D una región simple y sea C su frontera. Suponga-mos que P: $D \to \mathbb{R}$ y Q: $D \to \mathbb{R}$ son de clase C^1. Entonces

$$\int_{C^+} P\, dx + Q\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

La orientación correcta (positiva) para la curva frontera de D se puede recordar usando el siguiente truco: *si caminamos a lo largo de la curva C con la orientación correcta, la región D debe estar a nuestra izquierda* (*véase* la Figura 8.1.4).

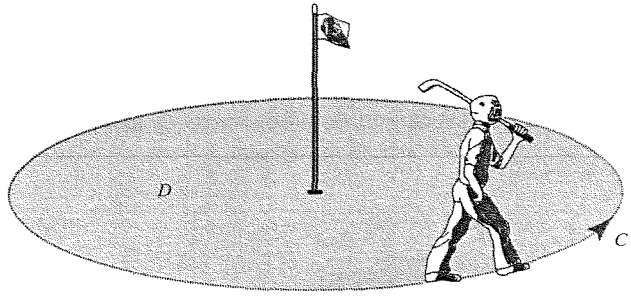


Figura 8.1.4. La orientación correcta para la frontera de una región D.

Una generalizacion del teorema de Green

El teorema de Green en realidad es válido para cualquier región «decente» en $\mathbb{R}^2$. Por ejemplo, el teorema de Green es válido en regiones que no son simples, pero que se pueden descomponer en varios trozos, cada uno de los cuales es simple. Se muestra un ejemplo en la Figura 8.1.5. La región D es un anillo; su frontera consiste en dos curvas $C = C_1 + C_2$ con las orientaciones indicadas. (Obsérvese que para la región interna la orientación correcta para asegurar la validez del teorema de Green es *en el sentido de las agujas del reloj*; ¡*el truco de la Figura* 8.1.4 *continúa sirviendo para recordar la orientación*!) Si se aplica el Teorema 1 a cada una de las regiones D_1, D_2, D_3 y D_4, y se suman los resultados, se obtiene la identidad dada por el teorema de Green para D y su frontera C. El resultado es válido porque las integrales a lo largo de las líneas

interiores en direcciones opuestas se cancelan entre sí. Este truco, en efecto, muestra que el teorema de Green es cierto para prácticamente todas las regiones con fronteras razonables que uno puede esperar encontrarse (*véase* el Ejercicio 8 de esta sección).

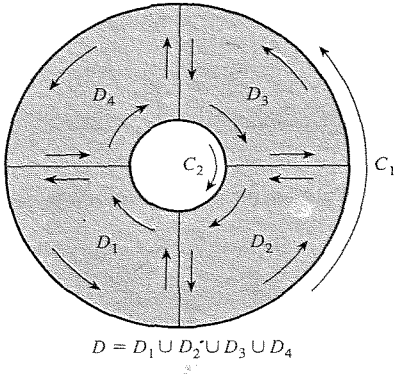


Figura 8.1.5. El teorema de Green es válido en $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$.

Utilicemos la notación ∂D para la curva orientada C^+, es decir, la curva frontera de D orientada en el sentido descrito por la regla ilustrada en la Figura 8.1.4. Entonces podemos escribir el teorema de Green como:

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

El teorema de Green es muy útil porque relaciona una integral de línea a lo largo de la frontera de una región con una integral de área sobre el interior de la región, y en muchos casos será más fácil evaluar la integral de línea que la integral de área, o viceversa. Por ejemplo, si sabemos que P se anula en la frontera, podemos concluir inmediatamente que $\iint_D (\partial P/\partial y)\,dx\,dy = 0$ incluso aunque $\partial P/\partial y$ no se anule en el interior. (¿Puede el lector construir una tal P en el cuadrado unidad?)

EJEMPLO 8.1 Comprobar el teorema de Green para $P(x, y) = x$ y $Q(x, y) = xy$, donde D es el círculo unidad $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

Solución

Haremos la comprobación evaluando directamente ambos lados del teorema de Green. La frontera de D es la circunferencia unidad parametrizada por $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, y por tanto:

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \int_0^{2\pi} [(\cos t)(-\operatorname{sen} t) + \cos t \operatorname{sen} t \cos t]\,dt$$

$$= \left[\frac{\cos^2 t}{2}\right]_0^{2\pi} + \left[-\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Por otro lado,

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_D y\,dx\,dy,$$

que también es cero, por simetría. Por tanto, el teorema de Green se satisface en este caso.

Áreas

Podemos usar el teorema de Green para obtener una fórmula para el área de una región acotada por una curva cerrada simple.

TEOREMA 2: Área de una región Si C es una curva cerrada simple que acota una región en la cual es aplicable el teorema de Green, entonces el área de la región D acotada por $C = \partial D$ es

$$A = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,dy - y\,dx.$$

DEMOSTRACIÓN Sea $P(x, y) = -y$, $Q(x, y) = x$; entonces, por el teorema de Green tenemos

$$\frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\iint_D \left[\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right] dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\iint_D [1 + 1]\,dx\,dy = \iint_D dx\,dy = A.$$

EJEMPLO 8.2 Sea $a > 0$. Calcular el área (*véase* la Figura 8.1.6) de la región encerrada por la hipocicloide definida por $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ usando la parametrización

$$x = a\cos^3\theta, \qquad y = a\,\mathrm{sen}^3\,\theta, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

Solución

Según el teorema anterior, y usando las identidades trigonométricas $\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta = 1$, $\mathrm{sen}\,2\theta = 2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta$, y $\mathrm{sen}^2\,\phi = (1 - \cos 2\phi)/2$, obtenemos

$$A = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,dy - y\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [(a\cos^3\theta)(3a\,\mathrm{sen}^2\,\theta\cos\theta) - (a\,\mathrm{sen}^3\,\theta)(-3a\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta)]\,d\theta$$

$$= \frac{3}{2}a^2 \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^2\theta \cos^4\theta + \cos^2\theta \operatorname{sen}^4\theta)\, d\theta = \frac{3}{2}a^2 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{3}{8}a^2 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 2\theta\, d\theta = \frac{3}{8}a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - \cos 4\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \frac{3}{16}a^2 \int_0^{2\pi} d\theta - \frac{3}{16}a^2 \int_0^{2\pi} \cos 4\theta\, d\theta = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

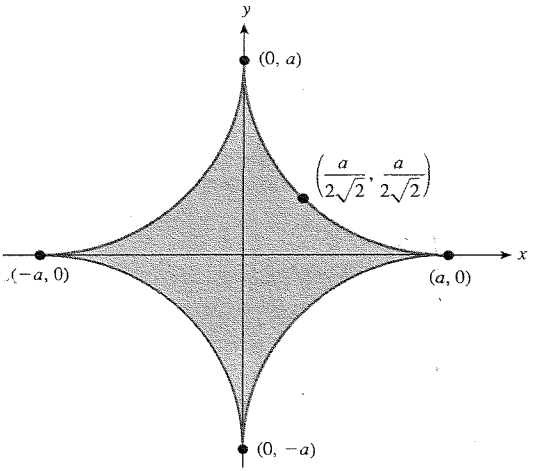


Figura 8.1.6. La hipocicloide $x = a\cos^3\theta$, $y = a\operatorname{sen}^3\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

Forma vectorial utilizando el rotacional

El enunciado del teorema de Green admite una expresión particularmente simple utilizando el lenguaje de los campos vectoriales. Como veremos, esta expresión indica el camino para una posible extensión del teorema a $\mathbb{R}^3$.

TEOREMA 3: Forma vectorial del Teorema de Green Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región en la cual es aplicable el teorema de Green, sea ∂D su frontera (orientada en el sentido positivo), y sea $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ un campo vectorial C^1 definido sobre D. Entonces

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_D (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dA = \iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dA$$

(*véase* la Figura 8.1.7).

Este resultado se sigue del Teorema 1 y de la fórmula $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \partial Q/\partial x - \partial P/\partial y$. Sugerimos al lector que complete los detalles en el Ejercicio 14 de esta sección.

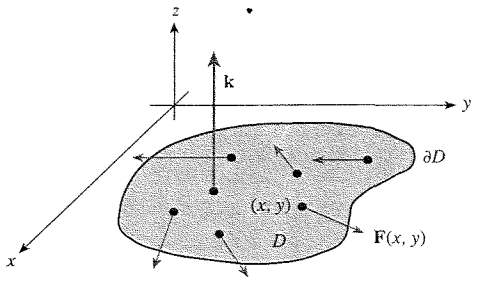


Figura 8.1.7. La forma vectorial del teorema de Green.

EJEMPLO 8.3 Sea $\mathbf{F}(x, y) = (xy^2, y + x)$. Integrar $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}$ en la región contenida en el primer cuadrante acotada por las curvas $y = x^2$, $y = x$.

Solución

Método 1. Primero calculamos el rotacional,

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) = (1 - 2xy)\mathbf{k}.$$

Por tanto, $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = 1 - 2xy$. Esta función se puede integrar sobre la región D (*véase* la Figura 8.1.8) utilizando integrales iteradas del modo siguiente:

$$\iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dx\, dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} (1 - 2xy)\, dy\, dx = \int_0^1 [y - xy^2]\Big|_{x^2}^{x} dx$$

$$= \int_0^1 [x - x^3 - x^2 + x^5]\, dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

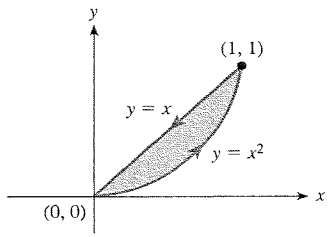


Figura 8.1.8. La región acotada por las curvas $y = x^2$ e $y = x$.

Método 2. Utilizamos el Teorema 3 para obtener:

$$\iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dx\, dy = \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

La integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de la curva $y = x$ de izquierda a derecha es:

$$\int_0^1 F_1\, dx + F_2\, dy = \int_0^1 (x^3 + 2x)\, dx = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}.$$

A lo largo de la curva $y = x^2$ obtenemos

$$\int_0^1 F_1\,dx + F_2\,dy = \int_0^1 x^5\,dx + (x + x^2)(2x\,dx) = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4}{3}.$$

Por tanto, recordando que la integral a lo largo de $y = x$ ha de tomarse de derecha a izquierda, como en la Figura 8.1.8,

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \frac{4}{3} - \frac{5}{4} = \frac{1}{12}.$$

Forma vectorial usando la divergencia

Hay otra versión del teorema de Green que se puede generalizar a $\mathbb{R}^3$.

TEOREMA 4: Teorema de la divergencia en el plano Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región en la que el teorema de Green es válido, y sea ∂D su frontera. Sea $\mathbf{n}$ la normal unitaria exterior a ∂D. Si $\mathbf{c}$: $[a, b] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$ es una parametrización orientada positivamente de ∂D, $\mathbf{n}$ viene dada por

$$\mathbf{n} = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}}$$

(*véase* la Figura 8.1.9). Sea $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ un campo vectorial C^1 sobre D. Entonces

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,ds = \iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}\,dA.$$

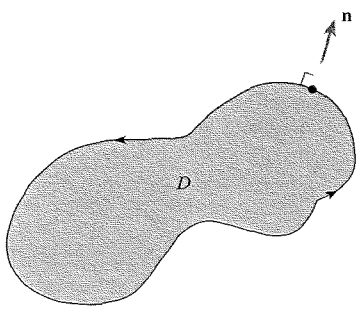


Figura 8.1.9. $\mathbf{n}$ es la normal unitaria exterior a ∂D.

DEMOSTRACIÓN Recordemos que $\mathbf{c}'(t) = (x'(t), y'(t))$ es tangente a ∂D, y observemos que $\mathbf{n} \cdot \mathbf{c}' = 0$. Por tanto, $\mathbf{n}$ es normal a la frontera. El signo de $\mathbf{n}$ se elige de manera que corresponda a la dirección hacia el exterior de la región (en lugar de hacia el interior). Por la definición de integral de línea (*véase* la Sección 7.2),

$$\int_{\partial D} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \int_a^b \frac{P(x(t),\ y(t))y'(t) - Q(x(t),\ y(t))x'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt$$

$$= \int_a^b [P(x(t),\ y(t))y'(t) - Q(x(t),\ y(t))x'(t)]\,dt$$

$$= \int_{\partial D} P\,dy - Q\,dx.$$

Por el teorema de Green, esto es igual a

$$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\,dA.$$

EJEMPLO 8.4 Sea $\mathbf{F} = y^3\mathbf{i} + x^5\mathbf{j}$. Calcular la integral de la componente normal del campo $\mathbf{F}$ a lo largo del cuadrado unidad.

Solución

Esto puede resolverse usando el teorema de la divergencia. En efecto,

$$\int_{\partial D} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = \iint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\,dA.$$

Pero $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$, y por tanto la integral es nula.

EJERCICIOS

1. Usando el teorema de Green, evaluar $\int_C y\,dx - x\,dy$, donde C es la frontera del cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$ orientada en la dirección contraria al sentido de las agujas del reloj.

2. Hallar el área del círculo D de radio R usando el teorema de Green.

3. Comprobar el teorema de Green para el círculo D de centro $(0, 0)$ y radio R, y las funciones:
   a) $P(x, y) = xy^2$, $Q(x, y) = -yx^2$.
   b) $P(x, y) = x + y$, $Q(x, y) = y$.
   c) $P(x, y) = xy = Q(x, y)$.
   d) $P(x, y) = 2y$, $Q(x, y) = x$.

4. Utilizando el teorema de la divergencia, demostrar que $\int_{\partial D} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds = 0$, donde $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ y D es el círculo unidad. Comprobarlo además directamente.

5. Hallar el área limitada por un arco de la cicloide $x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$, donde $a > 0$ y $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, y el eje x (usar el teorema de Green).

6. Bajo las condiciones del teorema de Green, demostrar:

a) $$\int_{\partial D} PQ\,dx + PQ\,dy = \iint_D \left[Q\left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) + P\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\right] dx\,dy.$$

b) $$\int_{\partial D} \left(Q\,\frac{\partial P}{\partial x} - P\,\frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx + \left(P\,\frac{\partial Q}{\partial y} - Q\,\frac{\partial P}{\partial y}\right) dy = 2\iint_D \left(P\,\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} - Q\,\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y}\right) dx\,dy.$$

7. Evaluar la integral de línea

$$\int_C (2x^3 - y^3)\,dx + (x^3 + y^3)\,dy,$$

donde C es la circunferencia unidad, y comprobar el teorema de Green para este caso.

8. Demostrar la siguiente generalización del teorema de Green: Sea D una región en el plano xy cuya frontera está formada por un número finito de curvas orientadas simples y cerradas. Supongamos que, utilizando un numero finito de segmentos paralelos a los ejes coordenados, D puede descomponerse en un número finito de regiones simples D_i, con la frontera de cada D_i orientada en el sentido contrario al de las agujas del reloj (*véase* la Figura 8.1.5). Entonces, si P y Q son de clase C^1 en D,

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy,$$

donde ∂D es la frontera orientada de D. (INDICACIÓN: Aplicar el teorema de Green a cada D_i.)

9. Comprobar el teorema de Green para el integrando del Ejercicio 7 (es decir, $P = 2x^3 - y^3$ y $Q = x^3 + y^3$) y la región anular descrita por $a \leqslant x^2 + y^2 \leqslant b$, con la frontera orientada como en la Figura 8.1.5.

10. Sea D una región en la cual es válido el teorema de Green. Supongamos que f es armónica; es decir,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

en D. Demostrar que

$$\int_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial y}\,dx - \frac{\partial f}{\partial x}\,dy = 0.$$

11. **a)** Comprobar el teorema de la divergencia para $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ y D el círculo unidad $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

b) Evaluar la integral de la componente normal de $2xy\mathbf{i} - y^2\mathbf{j}$ a lo largo de la elipse definida por $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

12. Sea $P(x, y) = -y/(x^2 + y^2)$ y $Q(x, y) = x/(x^2 + y^2)$. Suponiendo que D es el círculo unidad, analizar por qué no es cierto el teorema de Green para P y Q en esta región.

13. Utilizar el teorema de Green para evaluar $\int_{C^+} (y^2 + x^3)\,dx + x^4\,dy$, donde C^+ es el perímetro del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ recorrido en la dirección contraria a la de las agujas del reloj.

14. Comprobar el Teorema 3 demostrando que $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \partial Q/\partial x - \partial P/\partial y$.

15. Usar el Teorema 2 para calcular el área encerrada por la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

16. Usar el Teorema 2 para recuperar la fórmula del área para una región expresada en coordenadas polares; $A = \frac{1}{2}\int_a^b r^2\, d\theta$.

17. Esbozar la prueba del teorema de Green para la región mostrada en la Figura 8.1.10.

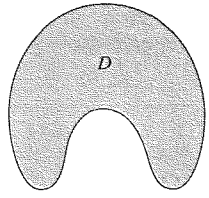


Figura 8.1.10. Demostrar el teorema de Green para esta región.

18. Demostrar la identidad

$$\int_{\partial D} \phi \nabla\phi \cdot \mathbf{n}\, ds = \iint_D (\phi\nabla^2\phi + \nabla\phi \cdot \nabla\phi)\, dA.$$

19. Utilizar el teorema de Green para hallar el área de un lazo de la rosa de cuatro pétalos $r = 3\,\text{sen}\,2\theta$. [INDICACIÓN: $x\,dy - y\,dx = r^2\,d\theta$].

20. Demostrar que si C es una curva cerrada simple que acota una región en la cual es aplicable el teorema de Green, entonces el área de la región D encerrada por C es:

$$A = \int_{\partial D} x\, dy = -\int_{\partial D} y\, dx.$$

Demostrar que de esto se deduce el Teorema 2.

Los ejercicios del 21 al 29 ilustran la aplicación del teorema de Green a las ecuaciones en derivadas parciales. (En el suplemento de Internet se tratan aplicaciones más avanzadas.) En particular, se refieren a propiedades de soluciones de la ecuación de Laplace, es decir, funciones armónicas. Para estos ejercicios, sea D una región abierta en $\mathbb{R}^2$ con frontera ∂D. Sea u: $D \cup \partial D \to \mathbb{R}$ una función continua que es de clase C^2 en D. Supongamos que $\mathbf{p} \in D$ es un punto de D y que la bola cerrada $B_\rho = B_\rho(\mathbf{p})$ de radio ρ centrada en $\mathbf{p}$ está contenida en D para $0 < \rho \leqslant R$. Definimos $I(\rho)$ mediante la fórmula

$$I(\rho) = \frac{1}{\rho}\int_{\partial B_\rho} u\, ds.$$

21. Demostrar que $\lim_{\rho \to 0} I(\rho) = 2\pi u(\mathbf{p})$.

22. Sea $\mathbf{n}$ la normal exterior unitaria a ∂B_ρ y $\partial u/\partial n = \nabla u \cdot \mathbf{n}$. Demostrar que

$$\int_{\partial B_\rho} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = \iint_{B_\rho} \nabla^2 u\, dA.$$

23. Usando el Ejercicio 22, demostrar que $I'(\rho) = (1/\rho)\iint_{B_\rho} \nabla^2 u\, dA$.

24. Supongamos que u satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2 u = 0$ en $\mathcal{D}$. Usar el ejercicio anterior para demostrar que

$$u(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B_R} u \, ds.$$

(Esto expresa el hecho de que el valor de una función armónica en un punto es la media de sus valores a lo largo de cualquier circunferencia centrada en él.)

25. Utilizar el Ejercicio 24 para demostrar que si u es armónica (es decir, si $\nabla^2 u = 0$), entonces $u(\mathbf{p})$ puede expresarse como una integral de área:

$$u(\mathbf{p}) = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{B_R} u \, dA.$$

26. Supongamos que u es una función armónica definida en D (es decir, $\nabla^2 u = 0$ en D) y que u tiene un máximo (o mínimo) local en un punto $\mathbf{p}$ de D.

a) Demostrar que u debe ser constante en algún círculo centrado en $\mathbf{p}$. [INDICACIÓN: Utilizar el resultado del Ejercicio 25.]

b) Supongamos que D es conexo por arcos (es decir, dados dos puntos cualesquiera $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ contenidos en D, existe un camino continuo $\mathbf{c}$: $[0, 1] \to D$ tal que $\mathbf{c}(0) = \mathbf{p}$ y $\mathbf{c}(1) = \mathbf{q}$) y que para algún $\mathbf{p}$ el máximo o mínimo en $\mathbf{p}$ es absoluto; entonces $u(\mathbf{q}) \leqslant u(\mathbf{p})$ o $u(\mathbf{q}) \geqslant u(\mathbf{p})$ para todo $\mathbf{q}$ en D. Demostrar que u debe ser constante en D.

(El resultado de este ejercicio se llama ***principio del máximo fuerte*** (o ***principio del mínimo fuerte***) para funciones armónicas. Compárese esto con los ejercicios del 36 al 40 de la Sección 3.3.)

27. Se dice que una función es ***subarmónica*** en D si $\nabla^2 u \geqslant 0$ para todos los puntos de D. Se dice que es ***superarmónica*** si $\nabla^2 u \leqslant 0$.

a) Deducir un principio del máximo fuerte para funciones subarmónicas.

b) Deducir un principio del mínimo fuerte para funciones superarmónicas.

28. Supongamos que D es el círculo $\{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ y C es la circunferencia $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$. En el suplemento de Internet demostraremos que si f es una función continua con valores reales en C, entonces existe una función continua u definida en $D \cup C$ que coincide con f sobre C y es armónica en D. Es decir, f tiene una extensión armónica al círculo. Suponiendo cierto este resultado, demostrar lo siguiente:

a) Si q es una función continua no constante en $D \cup C$ que es subarmónica (pero no armónica) en D, entonces existe una función continua u definida en $D \cup C$ que es armónica en D tal que u coincide con q sobre C y $q < u$ en todos los puntos de D.

b) El mismo resultado sigue siendo válido si «subarmónica» se sustituye por «superarmónica», y «$q < u$» por «$q > u$».

29. Sea D como en el Ejercicio 28. Sea $f: D \to \mathbb{R}$ una función continua. Demostrar que hay una única solución de la ecuación $\nabla^2 u = 0$ que satisfaga $u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \partial D$.

30. Usar el teorema de Green para demostrar el siguiente caso particular de la fórmula del cambio de variables:

$$\iint_D dx \, dy = \iint_{D^*} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du \, dv$$

para una transformación $(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$.

8.2. El teorema de Stokes

El teorema de Stokes relaciona la integral de línea de un campo vectorial a lo largo de una curva simple cerrada C en $\mathbb{R}^3$ con una integral sobre una superficie S cuya frontera es C. En este sentido, es muy similar al teorema de Green.

El teorema de Stokes para gráficas

Comencemos por recordar algunos hechos estudiados en el Capítulo 7. Consideremos una superficie S que es la gráfica de una función $f(x, y)$, de manera que S puede parametrizarse por

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) = f(x, y) \end{cases}$$

para (u, v) en algún dominio D en el plano. La integral de una función vectorial $\mathbf{F}$ sobre S fue desarrollada en la Sección 7.6 como:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left[F_1\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right) + F_2\left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right) + F_3 \right] dx\, dy, \tag{1}$$

donde $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$.

En la Sección 8.1 comenzamos por suponer que considerábamos regiones D simples; aunque esta hipótesis se usaba en la prueba del teorema de Green, observamos que en realidad el teorema es válido para una clase más amplia de regiones. En esta sección supondremos que D es una región cuya frontera es una curva cerrada simple, y en la cual el teorema de Green es aplicable. El teorema de Green exige elegir una orientación de la frontera de D, como se explicó en la Sección 8.1. La elección de la orientación coherente con el teorema de Green se llamará **positiva**. Recuérdese que si D es simple, entonces la orientación positiva es la opuesta al sentido de las agujas del reloj.

Supongamos que $\mathbf{c}$: $[a, b] \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$ es una parametrización de ∂D en la dirección positiva. Entonces definimos la ***curva frontera*** ∂S como la curva orientada cerrada y simple que es la imagen de la aplicación $\mathbf{p}$: $t \mapsto (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$, con la orientación inducida por $\mathbf{p}$ (Figura 8.2.1).

Para recordar esta orientación (es decir, la dirección positiva) sobre ∂S, el lector puede imaginar que es un «observador» que camina a lo largo de la frontera de la superficie de manera que el vector normal señala hacia arriba; entonces la dirección del movimiento será positiva si la superficie está a la izquierda. Esta orientación de ∂S se llama frecuentemente ***orientación inducida por una normal hacia arriba*** $\mathbf{n}$.

TEOREMA 5: Teorema de Stokes para gráficas Sea S una superficie orientada, definida por una función C^2, $z = f(x, y)$, donde $(x, y) \in D$, una región en la cual es válido el teorema de Green, y sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial C^1 sobre S. Entonces, si ∂S denota la frontera de S, orientada como acabamos de definir, se tiene

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

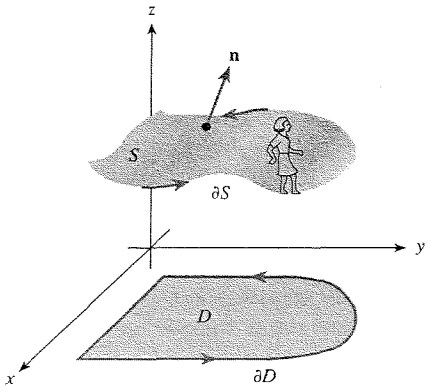


Figura 8.2.1. La orientación inducida en ∂S. Cuando se camina a lo largo de la frontera, la superficie debe estar a la izquierda.

Recuérdese que $\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ es la integral a lo largo de ∂S de la componente tangencial de $\mathbf{F}$, mientras $\iint_S \mathbf{G} \cdot d\mathbf{S}$ es la integral sobre S de $\mathbf{G} \cdot \mathbf{n}$, la componente normal de $\mathbf{G}$ (*véanse* las Secciones 7.2 y 7.6). Por tanto, el teorema de Stokes dice que *la integral de la componente normal del rotacional de un campo vectorial* $\mathbf{F}$ *sobre una superficie* S *es igual a la integral de la componente tangencial de* $\mathbf{F}$ *a lo largo de la frontera* ∂S.

DEMOSTRACIÓN Si $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$, entonces

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Por tanto, usamos la Fórmula (1) para escribir

$$\iint_S \operatorname{rot} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\right] dA. \tag{2}$$

Por otro lado,

$$\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{p}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{p}} F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz,$$

donde $\mathbf{p}$: $[a, b] \to \mathbb{R}^3$, y $\mathbf{p}(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$ es una parametrización que preserva la orientación de la curva simple orientada ∂S discutida antes. Por tanto,

$$\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \left(F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} + F_3 \frac{dz}{dt}\right) dt. \tag{3}$$

Por la regla de la cadena,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Sustituyendo esta expresión en la Ecuación (3), obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{\partial S} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} &= \int_a^b \left[\left(F_1 + F_3\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{dx}{dt} + \left(F_2 + F_3\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{dy}{dt}\right]dt \\ &= \int_c \left(F_1 + F_3\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \left(F_2 + F_3\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy \qquad (4)\\ &= \int_{\partial D} \left(F_1 + F_3\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx + \left(F_2 + F_3\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy.\end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Green a la Ecuación (4) resulta (estamos suponiendo que el teorema de Green es válido en la región D)

$$\iint_D \left[\frac{\partial(F_2 + F_3\partial z/\partial y)}{\partial x} - \frac{\partial(F_1 + F_3\partial z/\partial x)}{\partial y}\right]dA.$$

Ahora usamos la regla de la cadena, recordando que F_1, F_2 y F_3 son funciones de x, y, z, y que z es una función de x, y, de modo que

$$\begin{aligned}\iint_D \Bigg[&\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + F_3\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)\\ &- \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + F_3\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right)\Bigg]dA.\end{aligned}$$

Puesto que las derivadas cruzadas coinciden, los dos últimos términos de cada paréntesis se cancelan entre sí, y podemos reordenar los términos restantes para obtener la integral de la Ecuación (2), lo que concluye la prueba.

EJEMPLO 8.5 Sea $\mathbf{F} = ye^z\mathbf{i} + xe^z\mathbf{j} + xye^z\mathbf{k}$. Demostrar que la integral de $\mathbf{F}$ a lo largo de una curva cerrada orientada y simple C que es la frontera de una superficie S vale 0 (supóngase que S es el grafo de una función, como en el Teorema 5).

Solución

En efecto, $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}$, por el teorema de Stokes. Pero, calculando el rotacional,

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ ye^z & xe^z & xye^z \end{vmatrix} = \mathbf{0},$$

y por tanto $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = 0$. Alternativamente, también podemos observar que $\mathbf{F} = \nabla(xye^z)$, de manera que su integral a lo largo de una curva cerrada es cero.

EJEMPLO 8.6 Usar el teorema de Stokes para evaluar la integral de línea

$$\int_C -y^3\,dx + x^3\,dy - z^3\,dz,$$

donde C es la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 1$, y la orientación de C corresponde a un movimiento en sentido contrario al de las agujas del reloj en el plano xy.

Solución

La curva C limita la superficie S definida por la ecuación $z = 1 - x - y = f(x, y)$, para (x, y) en el conjunto $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ (Figura 8.2.2). Consideramos el campo $\mathbf{F} = -y^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} - z^3\mathbf{k}$, cuyo rotacional es $\nabla \times \mathbf{F} = (3x^2 + 3y^2)\mathbf{k}$. Entonces, por el teorema de Stokes, la integral de línea es igual a la integral de superficie

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}.$$

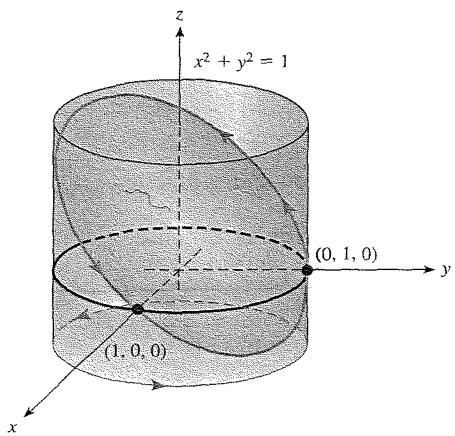


Figura 8.2.2. La curva C es la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y del plano $x + y + z = 1$.

Pero $\nabla \times \mathbf{F}$ sólo tiene componente $\mathbf{k}$. Por tanto, según la Fórmula (1), tenemos

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_D (3x^2 + 3y^2)\,dx\,dy.$$

Esta integral puede evaluarse cambiando a coordenadas polares. Haciendo esto, obtenemos:

$$3 \iint_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy = 3 \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \cdot r\,d\theta\,dr = 6\pi \int_0^1 r^3\,dr = \frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}.$$

Comprobemos *directamente* este resultado evaluando la integral de línea

$$\int_C -y^3\,dx + x^3\,dy - z^3\,dz.$$

Podemos parametrizar la curva ∂D mediante las ecuaciones

$$x = \cos t, \qquad y = \operatorname{sen} t, \qquad z = 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Por tanto, la curva C estará parametrizada por

$$x = \cos t, \qquad y = \operatorname{sen} t, \qquad z = 1 - \operatorname{sen} t - \cos t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\int_C & -y^3\,dx + x^3\,dy - z^3\,dz \\ &= \int_0^{2\pi} [(-\operatorname{sen}^3 t)(-\operatorname{sen} t) + (\cos^3 t)(\cos t) \\ &\qquad - (1 - \operatorname{sen} t - \cos t)^3(-\cos t + \operatorname{sen} t)]\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \operatorname{sen}^4 t)\,dt - \int_0^{2\pi} (1 - \operatorname{sen} t - \cos t)^3(-\cos t + \operatorname{sen} t)\,dt.\end{aligned}$$

El segundo integrando es de la forma $u^3\,du$, donde $u = 1 - \operatorname{sen} t - \cos t$, y por tanto la integral es igual a

$$\frac{1}{4}\,[(1 - \operatorname{sen} t - \cos t)^4]_0^{2\pi} = 0.$$

Por tanto, sólo queda calcular

$$\int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \operatorname{sen}^4 t)\,dt.$$

Esta integral puede evaluarse utilizando las Fórmulas (18) y (19) de la tabla de integrales. También podríamos usar el procedimiento siguiente: utilizar las identidades trigonométricas,

$$\operatorname{sen}^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}, \qquad \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2};$$

sustituyendo y elevando al cuadrado estas expresiones, la integral anterior se reduce a

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 2t)\,dt = \pi + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2 2t\,dt.$$

Usando nuevamente la identidad $\cos^2 2t = (1 + \cos 4t)/2$, resulta

$$\begin{aligned}\pi + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (1 + \cos 4t)\,dt &= \pi + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} dt + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \cos 4t\,dt \\ &= \pi + \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

El teorema de Stokes para superficies parametrizadas

Para simplificar la prueba del teorema de Stokes que dimos anteriormente, hicimos la hipótesis de suponer que S podía ser descrita como la gráfica de una función $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, donde D es una región en la cual es aplicable el teorema de Green. Sin embargo, sin mucho más esfuerzo podemos conseguir un *teorema más general* para superficies parametrizadas orientadas S. La complicación principal es la definición de la frontera de S.

Supongamos que $\mathbf{\Phi}$: $D \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización de una superficie S y $\mathbf{c}(t) = (u(t), v(t))$ es una parametrización de ∂D. Podríamos tener la tentación de definir ∂S como la curva parametrizada por $t \mapsto \mathbf{p}(t) = \mathbf{\Phi}(u(t), v(t))$. Sin embargo, con esta definición, ∂S podría no ser la frontera de S en ningún sentido geométrico razonable.

Por ejemplo, podríamos concluir que la frontera de la esfera unidad S parametrizada usando coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^3$ es la mitad del círculo máximo contenido en el plano xz, pero claramente, en un sentido geométrico, S es una superficie suave (sin picos o cúspides) que no tiene ni frontera ni borde en modo alguno (*véase* la Figura 8.2.3 y el Ejercicio 20 de esta sección). Por tanto, ese círculo máximo es en algún sentido la frontera «incorrecta» de S.

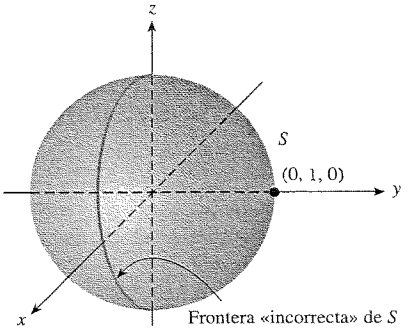


Figura 8.2.3. La superficie S es una esfera.

Podemos evitar esta dificultad suponiendo que $\mathbf{\Phi}$ es uno-uno sobre todo D. Entonces la imagen de ∂D bajo $\mathbf{\Phi}$, es decir, $\mathbf{\Phi}(\partial D)$, será la frontera geométrica de $S = \mathbf{\Phi}(D)$. Si $\mathbf{c}(t) = (u(t), v(t))$ es una parametrización de ∂D en la dirección positiva, definimos ∂S como la curva cerrada orientada y simple que es la imagen de la aplicación $\mathbf{p}$: $t \mapsto \mathbf{\Phi}(u(t), v(t))$, con la orientación de ∂S inducida por $\mathbf{p}$ (*véase* la Figura 8.2.1).

TEOREMA 6: Teorema de Stokes: superficies parametrizadas Sea S una superficie orientada definida mediante una parametrización uno-uno $\mathbf{\Phi}$: $D \subset \mathbb{R}^2 \to S$, donde D es una región en la cual el teorema de Green es aplicable. Sea ∂S la frontera orientada de S y sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial C^1 definido sobre S. Entonces

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

Si S no tiene frontera, y esto incluye superficies como la esfera, entonces la integral de la izquierda es cero (*véase* el Ejercicio 17 de esta sección).

Este teorema se prueba del mismo modo que el Teorema 5.

EJEMPLO 8.7 Sea S la superficie mostrada en la Figura 8.2.4, con la orientación indicada. Sea $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + e^{xz}\mathbf{k}$. Evaluar $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$.

Solución

Esta superficie se puede parametrizar utilizando coordenadas esféricas basadas en el centro de la esfera. Sin embargo, no necesitamos hallar Φ explícitamente para resolver este problema. Por el Teorema 6, $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, y, por tanto, si parametrizamos ∂S por $x(t) = \cos t$, $y(t) = \operatorname{sen} t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, obtenemos

$$\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} \left(y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} \right) dt = \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen}^2 t - \cos^2 t)\, dt = -\int_0^{2\pi} dt = -2\pi$$

y por tanto $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = -2\pi$.

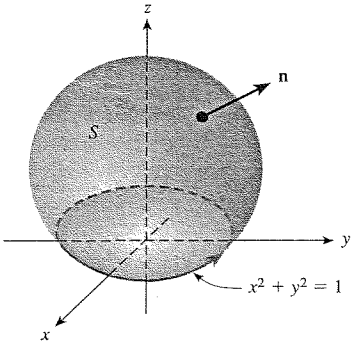


Figura 8.2.4. Esta superficie S es una porción de una esfera colocada sobre el círculo $x^2 + y^2 = 1$. No incluye el círculo $x^2 + y^2 < 1$ contenido en el plano xy.

El rotacional como circulación por unidad de área

A continuación vamos a usar el teorema de Stokes para justificar la interpretación física de $\nabla \times \mathbf{F}$ en términos de una rueda con palas que se propuso en el Capítulo 4. Parafraseando el Teorema 6, tenemos:

$$\iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_S (\operatorname{rot} \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\partial S} F_T\, ds,$$

donde F_T es la componente tangencial de $\mathbf{F}$. Esto dice que la integral de la componente normal del rotacional de un campo vectorial sobre una superficie orientada S es igual a la integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de ∂S, que a su vez es igual a la integral de trayectoria de la componente tangencial de $\mathbf{F}$ sobre ∂S.

Supongamos que $\mathbf{V}$ representa el campo de velocidades de un fluido. Consideremos un punto P y un vector unitario $\mathbf{n}$. Sea S_ρ el círculo de radio ρ y centro P que es perpendicular a $\mathbf{n}$. Por el teorema de Stokes,

$$\iint_{S_\rho} \operatorname{rot} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_\rho} \operatorname{rot} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_{\partial S_\rho} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s},$$

donde ∂S_ρ tiene la orientación inducida por $\mathbf{n}$ (*véase* la Figura 8.2.5).

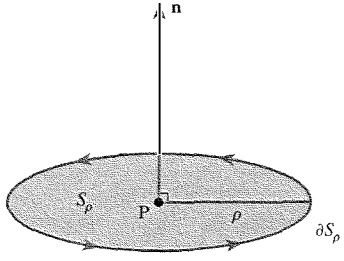


Figura 8.2.5. Un vector normal $\mathbf{n}$ induce una orientación en la frontera ∂S_ρ del círculo S_ρ.

Por el teorema del valor medio para integrales (Ejercicio 12, Sección 7.6), existe un punto Q en S_ρ tal que

$$\iint_{S_\rho} \operatorname{rot}\mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,dS = [\operatorname{rot}\mathbf{V}(\mathrm{Q})\cdot\mathbf{n}]\,A(S_\rho),$$

donde $A(S_\rho) = \pi\rho^2$ es el área de S_ρ y $\operatorname{rot}\mathbf{V}(\mathrm{Q})$ es el valor de $\operatorname{rot}\mathbf{V}$ en Q. Entonces,

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{A(S_\rho)}\int_{\partial S_\rho}\mathbf{V}\cdot d\mathbf{s} = \lim_{\rho\to 0}\frac{1}{A(S_\rho)}\iint_{S_\rho}(\operatorname{rot}\mathbf{V})\cdot d\mathbf{S}$$

$$= \lim_{\rho\to 0}\operatorname{rot}\mathbf{V}(\mathrm{Q})\cdot\mathbf{n} = \operatorname{rot}\mathbf{V}(\mathrm{P})\cdot\mathbf{n}.$$

Por tanto[1],

$$\operatorname{rot}\mathbf{V}(\mathrm{P})\cdot\mathbf{n} = \lim_{\rho\to 0}\frac{1}{A(S_\rho)}\int_{\partial S_\rho}\mathbf{V}\cdot d\mathbf{s}. \tag{5}$$

Detengámonos a considerar el significado físico de $\int_C \mathbf{V}\cdot d\mathbf{s}$ cuando $\mathbf{V}$ es el campo de velocidades de un fluido. Supongamos, por ejemplo, que $\mathbf{V}$ apunta en la dirección tangente a la curva orientada C (Figura 8.2.6). Entonces, claramente $\int_C \mathbf{V}\cdot d\mathbf{s} > 0$, y las partículas de C tienden a girar en sentido contrario al de las agujas del reloj. Si $\mathbf{V}$ apunta en la dirección opuesta, entonces $\int_C \mathbf{V}\cdot d\mathbf{s} < 0$, y las partículas tienden a girar en el sentido de las agujas del reloj. Si $\mathbf{V}$ es perpendicular a C, entonces las partículas no rotan sobre C en modo alguno, y $\int_C \mathbf{V}\cdot d\mathbf{s} = 0$. En general, $\int_C \mathbf{V}\cdot d\mathbf{s}$, que es la integral de la componente tangencial de $\mathbf{V}$, representa la cantidad neta de giro del fluido en sentido contrario al de las agujas del reloj a lo largo de C. Por esta razón, $\int_C \mathbf{V}\cdot d\mathbf{s}$ se denomina la ***circulación*** del campo $\mathbf{V}$ alrededor de C (*véase* la Figura 8.2.7).

Estos resultados nos conducen a ver el significado preciso de $\operatorname{rot}\mathbf{V}$ respecto del movimiento de un fluido. La circulación $\int_{\partial S_\rho}\mathbf{V}\cdot d\mathbf{s}$ es la velocidad neta del fluido alrededor de ∂S_ρ, de modo que $(\operatorname{rot}\mathbf{V})\cdot\mathbf{n}$ representa el efecto de giro o rotación del fluido alrededor del eje $\mathbf{n}$.

[1] Algunos textos informales adoptan la Ecuación (5) como *definición* del rotacional, y la usan para «demostrar» el teorema de Stokes; sin embargo, este método aumenta el riesgo de caer en un razonamiento circular, puesto que para demostrar que la Ecuación (5) realmente define un vector «$\operatorname{rot}\mathbf{V}(\mathrm{P})$» es necesario usar el teorema de Stokes, o algún argumento similar.

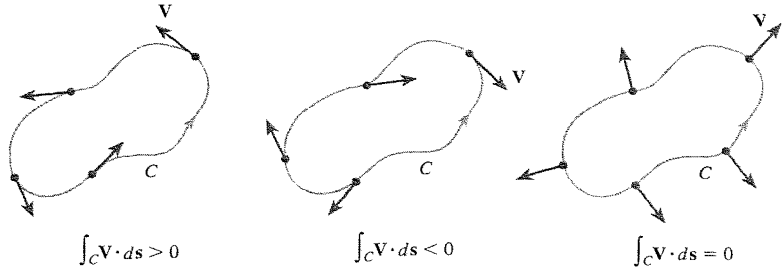


Figura 8.2.6. El significado intuitivo de los posibles signos de $\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$.

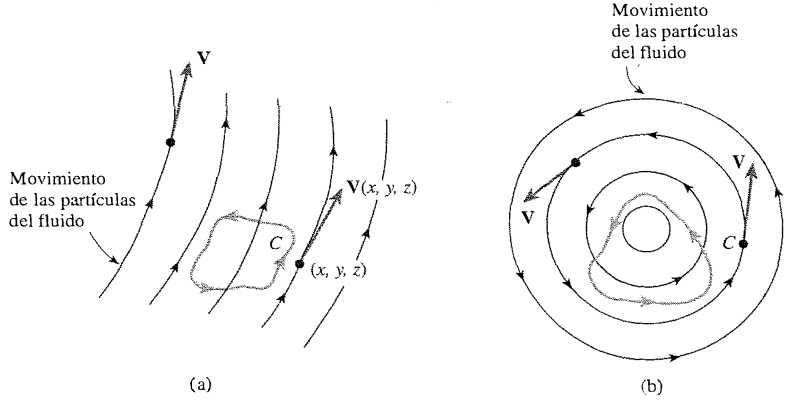


Figura 8.2.7. Circulación de un campo vectorial (campo de velocidades de un fluido): (a) la circulación alrededor de C es cero; (b) circulación no nula alrededor de C («remolino»).

La circulación y el rotacional El producto escalar de rot $\mathbf{V}(P)$ por un vector unitario $\mathbf{n}$, es decir, rot $\mathbf{V}(P) \cdot \mathbf{n}$, es igual a la circulación de $\mathbf{V}$ por unidad de área en P, sobre una superficie perpendicular a $\mathbf{n}$.

Obsérvese que la máxima magnitud de rot $\mathbf{V}(P) \cdot \mathbf{n}$ se alcanza cuando $\mathbf{n} = \text{rot}\,\mathbf{V} / \| \text{rot}\,\mathbf{V} \|$ (evaluado en P). Por tanto, el efecto de rotación en P es mayor con respecto al eje que es paralelo al vector rot $\mathbf{V} / \| \text{rot}\,\mathbf{V} \|$. Por tanto, rot $\mathbf{V}$ es adecuadamente llamado el ***vector vorticidad***.

Podemos utilizar estas ideas para calcular el rotacional en coordenadas cilíndricas.

EJEMPLO 8.8 Sean $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_z$ los vectores unitarios asociados a las coordenadas cilíndricas, como se muestra en la Figura 8.2.8. Sea $\mathbf{F} = F_r \mathbf{e}_r + F_\theta \mathbf{e}_\theta + F_z \mathbf{e}_z$ (los subíndices en este caso denotan componentes de $\mathbf{F}$, no derivadas parciales). Hallar una fórmula para la componente $\mathbf{e}_r$ de $\nabla \times \mathbf{F}$ en coordenadas cilíndricas.

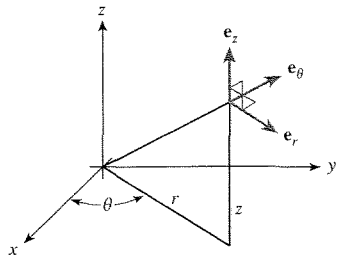


Figura 8.2.8. Vectores ortonormales $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ y $\mathbf{e}_z$ asociados a las coordenadas cilíndricas. El vector $\mathbf{e}_r$ es paralelo a la línea denotada por r.

Solución

Sea S la superficie representada en la Figura 8.2.9. El área de S es $r\,d\theta\,dz$, y el vector normal unitario es $\mathbf{e}_r$. La integral de $\mathbf{F}$ a lo largo de los bordes de S es aproximadamente

$$[F_\theta(r, \theta, z) - F_\theta(r, \theta, z + dz)]r\,d\theta + [F_z(r, \theta + d\theta, z) - F_z(r, \theta, z)]\,dz$$
$$\approx -\frac{\partial F_\theta}{\partial z}\,dz r\,d\theta + \frac{\partial F_z}{\partial \theta}\,d\theta\,dz.$$

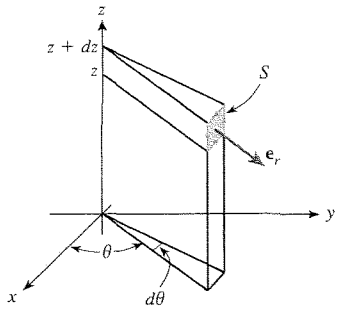


Figura 8.2.9. Un elemento de superficie en coordenadas cilíndricas.

Por tanto, la circulación por unidad de área es esta expresión dividida por $r\,d\theta\,dz$, es decir,

$$\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z}.$$

De acuerdo con el resultado que relaciona circulación y rotacional, esto debe ser la componente $\mathbf{e}_r$ del rotacional.

El gradiente, la divergencia y el rotacional en coordenadas cilíndricas y esféricas

Por argumentos semejantes a los del Ejemplo 8.8, encontramos que el rotacional en coordenadas cilíndricas viene dado por

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_r & rF_\theta & F_z \end{vmatrix}.$$

Podemos encontrar otras cantidades vectoriales importantes expresadas en diferentes sistemas de coordenadas. Por ejemplo, la regla de la cadena prueba que el gradiente en coordenadas cilíndricas es

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathbf{e}_z,$$

y en la Sección 8.4 desarrollaremos técnicas relacionadas, que dan la fórmula siguiente para la divergencia en coordenadas cilíndricas:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rF_r) + \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z}(rF_z)\right].$$

Las fórmulas correspondientes para gradiente, divergencia y rotacional en coordenadas esféricas son

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\,\mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\,\mathbf{e}_\phi + \frac{1}{\rho \operatorname{sen}\phi}\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\mathbf{e}_\theta$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 F_\rho) + \frac{1}{\rho \operatorname{sen}\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}(\operatorname{sen}\phi F_\phi) + \frac{1}{\rho \operatorname{sen}\phi}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}$$

y

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left[\frac{1}{\rho \operatorname{sen}\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}(\operatorname{sen}\phi F_\theta) - \frac{1}{\rho \operatorname{sen}\phi}\frac{\partial F_\phi}{\partial \theta}\right]\mathbf{e}_\rho + \left[\frac{1}{\rho \operatorname{sen}\phi}\frac{\partial F_\rho}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\theta)\right]\mathbf{e}_\phi + \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\phi) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\rho}{\partial \phi}\right]\mathbf{e}_\theta,$$

donde $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\phi$, $\mathbf{e}_\theta$ son vectores unitarios como se indica en la Figura 8.2.10 y

$$\mathbf{F} = F_\rho \mathbf{e}_\rho + F_\phi \mathbf{e}_\phi + F_\theta \mathbf{e}_\theta.$$

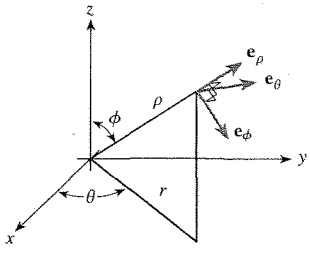


Figura 8.2.10. Vectores ortonormales $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\phi$ y $\mathbf{e}_\theta$ asociados con las coordenadas esféricas.

La ley de Faraday

El cálculo vectorial juega un papel central en la teoría del electromagnetismo. El siguiente ejemplo muestra cómo se aplica el teorema de Stokes.

EJEMPLO 8.9 Sean $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ campos eléctrico y magnético respectivamente, dependientes del tiempo, en el espacio tridimensional. Sea S una superficie con frontera C. Definimos:

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \text{circulación del campo eléctrico alrededor de } C,$$

$$\iint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \text{flujo del campo magnético a través de } S.$$

La ***ley de Faraday*** (*véase* la Figura 8.2.11) afirma que *la circulación del campo eléctrico alrededor de C es igual a la tasa de cambio de flujo del campo magnético a través de S, cambiada de signo.* Demostrar que la ley de Faraday se sigue de la siguiente ecuación diferencial (una de las ecuaciones de Maxwell):

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}.$$

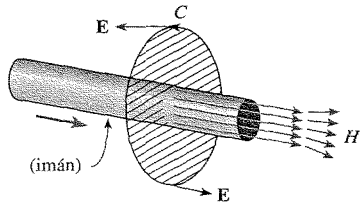


Figura 8.2.11. La Ley de Faraday.

Solución

Supongamos que $-\partial \mathbf{H}/\partial t = \nabla \times \mathbf{E}$. Por el teorema de Stokes,

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S}.$$

Suponiendo que podemos pasar la derivada $\partial/\partial t$ dentro de la integral, obtenemos

$$-\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

y por tanto

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S},$$

que es la ley de Faraday.

Suplemento a la Sección 8.2: Teorema de Stokes, astronautas y gatos que se caen

La caída de un gato

Todos nos hemos preguntado en alguna ocasión por qué los gatos caen siempre de pie. Si soltamos a un gato desde una posición de reposo en la que sus patas están por encima de su cabeza, el gato es capaz de retorcerse, cambiar su orientación 180° y caer sobre sus patas. Este fenómeno bien conocido ha fascinado a la gente por muchos años —¡especialmente en ciudades como Nueva York, donde se conocen gatos que han sobrevivido a caídas de 8 a 30 pisos!

Se han dado muchas explicaciones incorrectas a la habilidad de los gatos para enderezarse en el aire, incluyendo la idea de que eso tenía que ver con el modo en que el gato hace girar su cola. Esto no puede ser cierto, porque hay razas de gatos que no tienen cola (*Manx cats*) y, sin embargo, ¡pueden realizar esas hazañas!

Uno observa, como en la Figura 8.2.12, que el gato consigue cambiar claramente su orientación retorciendo su cuerpo, creando cambios en su configuración o forma interna. Visto superficialmente, esto produce una aparente contradicción; puesto que el gato parte de una posición de reposo, tiene momento angular cero al inicio de la caída y, por tanto, de acuerdo con una ley básica de la física llamada *conservación del momento angular*, el gato tiene momento angular cero durante toda su caída[2]. Sorprendentemente, el gato cambia efectivamente su posición angular, ¡mientras que mantiene el momento angular nulo!

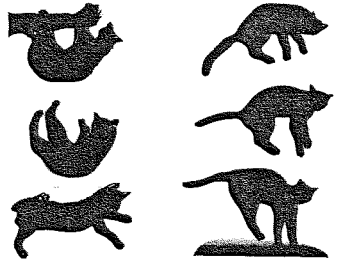


Figura 8.2.12. Un gato se endereza durante su caída retorciendo partes de su cuerpo.

El proceso exacto por el que esto ocurre es sutil; los razonamientos intuitivos pueden conducirnos por caminos erróneos y, como hemos indicado, se han ofrecido muchas explicaciones falsas a lo largo de la historia de los intentos de resolución de este misterio[3]. Recientemente, se han aportado nuevas e interesantes ideas usando métodos geométricos que, en efecto, están relacionados con la curvatura (*véase* la Sección 7.7)[4].

---

[2] Vimos un ejemplo de la ley de conservación del momento angular en la Sección 4.1, Ejercicio 20.

[3] Otro popular argumento falaz para demostrar que un gato *no puede* girar sobre sí mismo mientras cae (¡!) es el siguiente: «Aceptamos de la física que el momento angular es el momento de inercia por la velocidad angular (los momentos de inercia se discuten en la Sección 6.3). Pero el momento angular del gato es cero, de manera que la velocidad angular también debe ser cero. Como la velocidad angular es la razón del cambio de la posición angular, la posición angular es constante. Por tanto, el gato no puede girar.» ¿Dónde está el error? Este argumento ignora el hecho de que el gato cambia su *forma*, y por tanto su momento de inercia, durante la caída.

[4] *Véase* T. R. Kane y M. Scher, «A Dynamical Explanation of the Falling Cat Phenomenon», *Int. J. Solids Struct.*, 5 (1969): 663-670. *Véase* también R. Montgomery, «Isoholonomic Problems and Some Applications», *Commun. Math. Phys.*, 128 (1990): 565-592; R. Montgomery, «How Much Does a Rigid Body Rotate? A Berry's Phase from the 18th

El modo en que la curvatura y la geometría están relacionadas con el fenómeno de los gatos en caída libre no es fácil de explicar en todos sus detalles, pero podemos explicar un fenómeno semejante que es sencillo de entender. Uno de los puntos a destacar es que *el teorema de Stokes es la clave para probar todos los teoremas significativos.*

Cambios en la orientación de astronautas

Otro ejemplo para ayudar a visualizar este efecto es considerar astronautas que quieren cambiar de orientación por sí mismos, en el espacio libre. Como el gato en caída, de nuevo este movimiento puede conseguirse usando giros internos, o *cambios de forma*. Por ejemplo, consideremos un astronauta que mueve sus brazos como si estuviera removiendo con un palo un líquido en un gran caldero. Los brazos se dirigen hacia delante, en un plano horizontal paralelo al suelo, a la altura de los hombros; las manos se cierran juntas y permanecen en este plano horizontal durante el movimiento circular. En el punto de máxima extensión de los brazos, el momento de inercia del cuerpo con respecto a un eje vertical también alcanza su máximo. La conservación del momento angular requiere que el cuerpo gire en sentido opuesto, proporcionalmente al movimiento de los brazos. Cuando los brazos giran y se aproximan al tronco, en cambio, el momento de inercia del cuerpo se reduce. El movimiento de reacción del cuerpo por tanto también se reduce. Así, en un ciclo completo del movimiento de los brazos, el cuerpo sufre una rotación neta en la dirección opuesta al movimiento. Cuando se alcanza la orientación deseada, el astronauta tan sólo necesita detener el movimiento de sus brazos para permanecer en reposo. Frecuentemente, el movimiento adicional alcanzado de esta manera se denomina ***fase geométrica***.

Conexión con la geometría no euclídea

La teoría de fases geométricas también aparece de manera interesante en la geometría no euclídea como en la geometría de los triángulos dibujados sobre una esfera. Una manera sencilla de explicar esta conexión es la siguiente. Supongamos que mantenemos el brazo estirado, permitiendo el giro del hombro. Movemos la mano a lo largo de tres círculos máximos, formando un triángulo sobre una esfera imaginaria; durante el movimiento a lo largo de cada arco, mantenemos el pulgar paralelo; es decir, la mano se mueve de modo que el pulgar forma un ángulo fijo con respecto a la dirección del movimiento en cada arco, y no gira cuando pasamos de un arco a otro. Tras completar el circuito alrededor del triángulo, el pulgar habrá girado un cierto ángulo con respecto de su posición de partida (*véase* la Figura 8.2.13). ¿Puede ver el lector en la Figura 8.2.13 que el ángulo de rotación es de 90° (o $\pi/2$ radianes) y que esto es lo que ocurre cuando hace el experimento por sí mismo?

Para triángulos esféricos genéricos, este ángulo (en radianes) viene dado por $\Theta = \Delta - \pi$, donde Δ es la suma de los ángulos del triángulo. El hecho de que Θ es estrictamente positivo (¡!) es uno de los postulados básicos de la geometría no euclídea —¡la suma de los ángulos de un triángulo sobre la esfera es mayor que π! Este ángulo también está relacionado con el *área A* encerrada por el triángulo mediante la relación $\Theta = A/r^2$, donde r es el radio de la esfera. El

---

Century», *Am. J. Phys.*, 59 (1991b): 394-398. *Véase* también J. E. Marsden y J. Ostrowski, «Symmetries in Motion: Geometric Foundations of Motion Control», *Nonlinear Science Today* (1998), http://link-springer-ny.com; R. Batterman, «Falling Cats, Parallel Parking, and Polarized Light», *Philos. Soc. Arc.* (2002); http://philsci-archive.pitt.edu/documents/disk0/00/00/05/83, http://www.its.caltech.edu/~mleok/falling_cats.htm, y las referencias allí contenidas.

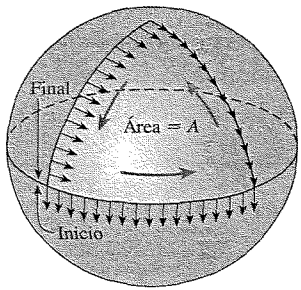


Figura 8.2.13. Un movimiento paralelo del pulgar alrededor de un triángulo esférico produce un desplazamiento de fase.

cambio en el ángulo del pulgar tras su recorrido alrededor del triángulo esférico está directamente relacionado con la curvatura de la esfera y con el área encerrada por el camino que se describe. Obsérvese primero que para un triángulo esférico que sea 1/8 de la esfera, $A = 4\pi r^2/8 = \pi r^2/2$. Por tanto, $A/r^2 = \pi/2$. Obsérvese también que cuando $r \to \infty$, la esfera se hace cada vez más plana y por tanto se aproxima a un plano euclídeo, en cuyo caso $\Theta = 0$.

El recorrido cíclico del pulgar a lo largo del camino cerrado es análogo al movimiento cíclico interno hecho por el gato durante su caída; el giro de 90° en la dirección del pulgar tras una vuelta es análogo a la reorientación de 180° del gato. Una mirada más profunda a las matemáticas subyacentes demuestra que, en efecto, son dos manifestaciones del mismo fenómeno (denominado *holonomía*) —y el teorema de Stokes es la clave para comprenderlo.

EJERCICIOS

1. Repetir el Ejercicio 5 de la Sección 7.6 usando el teorema de Stokes.

2. Repetir el Ejercicio 6 de la Sección 7.6 usando el teorema de Stokes.

3. Comprobar el teorema de Stokes para la semiesfera superior $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $z \geqslant 0$, y el campo vectorial radial $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

4. Sea S una superficie con frontera ∂S, y sea $\mathbf{E}$ un campo eléctrico perpendicular a ∂S. Demostrar que el flujo magnético inducido a través de S es constante en el tiempo. [INDICACIÓN: Usar la ley de Faraday.]

5. Sea S la superficie cilíndrica con tapa mostrada en la Figura 8.2.14. S es la unión de dos superficies, S_1 y S_2, donde S_1 es el conjunto de puntos (x, y, z) tales que $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, y S_2 es el conjunto de puntos (x, y, z) tales que $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$, $z \geqslant 1$. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (zx + z^2y + x)\mathbf{i} + (z^3yx + y)\mathbf{j} + z^4x^2\mathbf{k}$. Calcular $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$. [INDICACIÓN: El teorema de Stokes es válido para esta superficie.]

6. Sea $\mathbf{c}$ el camino formado por los segmentos rectilíneos que unen (1, 0, 0), (0, 1, 0) y (0, 0, 1), y sea S el triángulo con estos vértices. Comprobar el teorema de Stokes directamente para $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$.

7. Calcular la integral $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$, donde S es la porción de la superficie de una esfera definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x + y + z \geqslant 1$, y donde $\mathbf{F} = \mathbf{r} \times (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

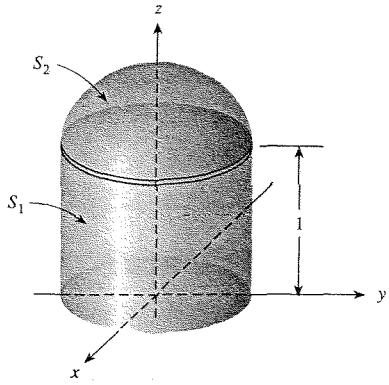


Figura 8.2.14. Este cilindro con tapa es la unión de S_1 y S_2.

8. Demostrar que los cálculos del Ejercicio 7 pueden simplificarse observando que $\int_{\partial S} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\partial \Sigma} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ para cualquier otra superficie Σ. Eligiendo Σ apropiadamente, $\iint_\Sigma (\nabla \times \mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}$ puede ser fácil de calcular. Demostrar que éste es el caso si tomamos como Σ el trozo del plano $x + y + z = 1$ acotado por el círculo ∂S.

9. Calcular la integral de superficie $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}$, donde S es la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geqslant 0$, y $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} - y^3\mathbf{j}$.

10. Hallar $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}$, donde S es el elipsoide $x^2 + y^2 + 2z^2 = 10$ y $\mathbf{F}$ es el campo vectorial $\mathbf{F} = (\operatorname{sen} xy)\mathbf{i} + e^x\mathbf{j} - yz\mathbf{k}$.

11. Sea $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + zx^3y^2\mathbf{k}$. Hallar $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F})\cdot \mathbf{n}\, dA$, donde S es la superficie definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \leqslant 0$.

12. Un globo de aire caliente tiene forma de esfera truncada, como se muestra en la Figura 8.2.15. Los gases calientes se escapan a través de la superficie porosa del globo según un campo de velocidades

$$\mathbf{V}(x, y, z) = \nabla \times \mathbf{\Phi}(x, y, z), \qquad \text{donde} \qquad \mathbf{\Phi}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}.$$

Si $R = 5$, calcular el flujo de los gases a través de la superficie del globo.

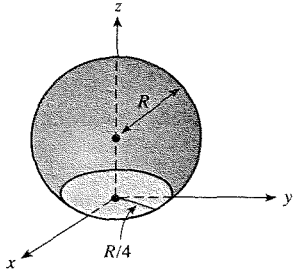


Figura 8.2.15. Un globo de aire caliente.

13. Demostrar que la ley de Faraday implica $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{H}/\partial t$.

14. Sea S una superficie, y sea $\mathbf{F}$ perpendicular a la tangente a la frontera de S. Demostrar que

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F})\cdot d\mathbf{S} = 0.$$

¿Cuál es el significado físico de este resultado si $\mathbf{F}$ es un campo eléctrico?

15. Considerar dos superficies, S_1 y S_2, con la misma frontera ∂S. Describir mediante un esquema cómo deben orientarse S_1 y S_2 para asegurar que

$$\iint_{S_1} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_2} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}.$$

16. Para una superficie S y un vector fijo $\mathbf{v}$, demostrar que

$$2 \iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_{\partial S} (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s},$$

donde $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$.

17. Razonar intuitivamente que si S es una superficie cerrada, entonces

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

(*véase* el Ejercicio 15). (Una superficie cerrada es aquella que forma la frontera de una región acotada en el espacio; por ejemplo, una esfera es una superficie cerrada.)

18. Si C es una curva cerrada que es la frontera de una superficie S, y f y g son funciones C^2, demostrar que

a) $\displaystyle\int_C f \nabla g \cdot d\mathbf{s} = \iint_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot d\mathbf{S}.$

b) $\displaystyle\int_C (f \nabla g + g \nabla f) \cdot d\mathbf{s} = 0.$

19. **a)** Si C es una curva cerrada que es la frontera de una superficie S, y $\mathbf{v}$ es un vector constante, demostrar que

$$\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

b) Demostrar que el resultado anterior es cierto aunque C no sea la frontera de ninguna superficie S.

20. Demostrar que la parametrización de la esfera unitaria dada por $\mathbf{\Phi}$: $D \to \mathbb{R}^3$, $D = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$, $\mathbf{\Phi}(\phi, \theta) = (\cos\theta \operatorname{sen}\phi, \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi, \cos\phi)$, manda la frontera de D en la mitad de un círculo máximo en S.

21. Verificar que se cumple el Teorema 6 para el helicoide $\mathbf{\Phi}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, \theta)$, $(r, \theta) \in [0, 1] \times [0, \pi/2]$, y el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$.

22. Demostrar el Teorema 6.

23. Sea $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + (2xy + x)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Sean C la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y S el círculo $x^2 + y^2 \leq 1$ contenidos en el plano $z = 0$.

a) Determinar el flujo de $\mathbf{F}$ hacia el exterior de S.

b) Determinar la circulación de $\mathbf{F}$ a lo largo de C.

c) Hallar el flujo de $\nabla \times \mathbf{F}$. Comprobar directamente en este caso el teorema de Stokes.

24. Sea S una superficie con frontera ∂S, y supongamos que $\mathbf{E}$ es un campo eléctrico perpendicular a ∂S. Usar la ley de Faraday para demostrar que el flujo magnético inducido a través de S es constante en tiempo.

25. Integrar $\nabla \times \mathbf{F}$, $\mathbf{F} = (3y, -xz, -yz^2)$ sobre el trozo de la superficie $2z = x^2 + y^2$ que está por debajo del plano $z = 2$ de dos formas: directamente y usando el teorema de Stokes.

26. La ***ley de Ampère*** afirma que si la densidad de corriente eléctrica se describe por un campo vectorial $\mathbf{J}$ y el campo magnético inducido es $\mathbf{H}$, entonces la circulación de $\mathbf{H}$ alrededor de la frontera C de una superficie S es igual a la integral de $\mathbf{J}$ sobre S (es decir, la corriente total que atraviesa S). *Véase* la Figura 8.2.16. Demostrar que esto es una consecuencia de la ecuación de Maxwell estacionaria $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$.

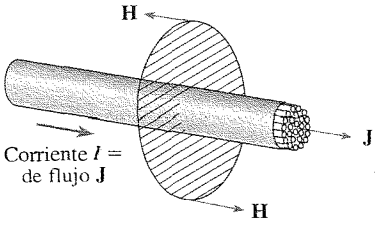


Figura 8.2.16. Ley de Ampère.

27. La ley de Faraday relaciona la integral de línea del campo eléctrico alrededor de una espira C con la integral de superficie de la tasa de cambio del campo magnético sobre una superficie S con frontera C. Tomando la identidad $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{H}/\partial t$ como ecuación básica, la ley de Faraday es una consecuencia del teorema de Stokes, como vimos en el Ejemplo 8.9.

Supongamos que tenemos dados un campo eléctrico y un campo magnético en el espacio, que satisfacen la relación $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{H}/\partial t$. Supongamos que C es la frontera de la banda de Möbius, mostrada en las Figuras 7.6.3 y 7.6.4. Puesto que la banda de Möbius no es una superficie orientable, el teorema de Stokes no se puede aplicar sobre ella. ¿En qué se transforma la ley de Faraday? ¿Cuánto debería valer $\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$?

28. **a)** Si escribimos en coordenadas esféricas

$$\mathbf{e}_r = \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}, \text{ hallar } \alpha, \beta \text{ y } \gamma.$$

b) Encontrar fórmulas semejantes para $\mathbf{e}_\phi$ y $\mathbf{e}_\theta$.

8.3. Campos conservativos

En la Sección 7.2 vimos que en el caso de un campo de fuerza S que proviene de un gradiente, $\mathbf{F} = \nabla f$, las integrales de línea de $\mathbf{F}$ se calculaban del modo siguiente.

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = f(\mathbf{c}(b)) - f(\mathbf{c}(a)).$$

El valor de la integral sólo depende de los puntos extremos de la trayectoria, $\mathbf{c}(b)$ y $\mathbf{c}(a)$. En otras palabras, si usásemos otra trayectoria con los mismos puntos inicial y final, seguiríamos obteniendo el mismo resultado. Esto nos lleva a decir que la integral es independiente de la trayectoria.

Los campos que provienen de un gradiente son importantes en muchos problemas físicos. Por ejemplo, si $V = -f$ representa una energía potencial (gravitatoria, eléctrica, etc.), entonces $\mathbf{F}$ representa una fuerza[5]. Considérese el ejemplo de una partícula de masa m en el campo gravitatorio terrestre; en este caso f viene dada por GmM/r o $V = -GmM/r$, donde G es la constante gravitatoria, M es la masa de la Tierra y r es la distancia desde el centro de la Tierra. La fuerza correspondiente es $\mathbf{F} = -(GmM/r^3)\mathbf{r} = -(GmM/r^2)\mathbf{n}$, donde $\mathbf{n}$ es el vector unitario en la dirección radial. Obsérvese que $\mathbf{F}$ no está definida en el punto $r = 0$.

¿Cuándo un campo vectorial es un gradiente?

Deseamos caracterizar los campos vectoriales que pueden escribirse como un gradiente. Nuestra tarea se simplifica considerablemente gracias al teorema de Stokes.

TEOREMA 7: Campos conservativos Sea $\mathbf{F}$ un campo C^1 definido en $\mathbb{R}^3$, excepto tal vez en un número finito de puntos. Las siguientes condiciones sobre $\mathbf{F}$ son equivalentes:

i) Para cualquier curva orientada cerrada y simple C, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$.

ii) Para dos curvas orientadas simples cualesquiera, C_1 y C_2 que tengan los mismos extremos,

$$\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}.$$

iii) $\mathbf{F}$ es el gradiente de alguna función f; es decir, $\mathbf{F} = \nabla f$ (y si $\mathbf{F}$ tiene uno o más puntos excepcionales donde no está definido, entonces f tampoco está definida allí).

iv) $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Un campo vectorial que satisface una (y, por lo tanto, todas) de las condiciones i)-iv) se denomina ***campo vectorial conservativo***[6].

DEMOSTRACIÓN Probaremos la siguiente cadena de implicaciones, con lo cual demostraremos el teorema:

$$\text{i)} \Rightarrow \text{ii)} \Rightarrow \text{iii)} \Rightarrow \text{iv)} \Rightarrow \text{i)}.$$

Primero demostramos que la condición i) implica la condición ii). Supongamos que $\mathbf{c}_1$ y $\mathbf{c}_2$ son parametrizaciones que representan a C_1 y C_2, con los mismos puntos extremos. Entonces, construimos la curva cerrada $\mathbf{c}$ obtenida recorriendo primero $\mathbf{c}_1$ y después $-\mathbf{c}_2$ (Figura 8.3.1) o, simbólicamente, la curva $\mathbf{c} = \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2$. Suponiendo que la curva resultante $\mathbf{c}$ es simple, la condición i) implica

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0,$$

[5] Si se utiliza el signo menos, entonces V es *decreciente* en la dirección de $\mathbf{F}$.

[6] En el plano $\mathbb{R}^2$ no se permiten puntos excepcionales (*véase* el Ejercicio 12 de esta sección). El Teorema 7 puede probarse del mismo modo si $\mathbf{F}$ está definido y es de clase C^1 sólo en un conjunto abierto y convexo de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. (Un conjunto D es convexo si P, Q $\in D$ implica que el segmento que une P y Q también está contenido en D.)

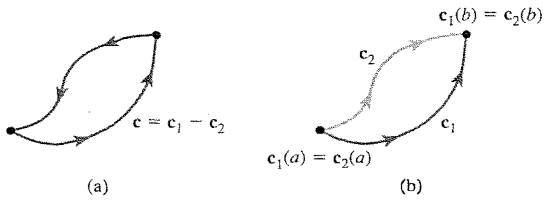


Figura 8.3.1. Construcción de una curva cerrada simple orientada $\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2$ (a) a partir de dos curvas simples orientadas (b).

y por tanto se satisface la condición ii). (Si $\mathbf{c}$ no es simple, se requiere un argumento adicional, que omitimos aquí.)

A continuación, demostramos que la condición ii) implica la condición iii). Sea C una curva simple orientada que une un punto cualquiera, que podemos suponer el origen (0, 0, 0), con (x, y, z), y supongamos que C está representada por la parametrización $\mathbf{c}$ (si (0, 0, 0) es un punto excepcional para $\mathbf{F}$, entonces podemos elegir un punto inicial para $\mathbf{c}$ distinto del origen, sin que el argumento se vea alterado). Definimos $f(x, y, z)$ como $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$. Por la hipótesis ii), $f(x, y, z)$ es independiente de C. Vamos a demostrar que $\mathbf{F} = \text{grad } f$. En efecto, elegimos como $\mathbf{c}$ la trayectoria mostrada en la Figura 8.3.2, de modo que

$$f(x, y, z) = \int_0^x F_1(t, 0, 0)\, dt + \int_0^y F_2(x, t, 0)\, dt + \int_0^z F_3(x, y, t)\, dt,$$

donde $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$.

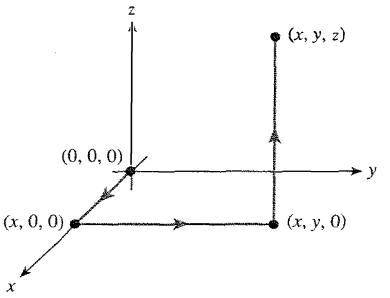


Figura 8.3.2. Una trayectoria que une (0, 0, 0) con (x, y, z).

Se sigue del teorema fundamental del cálculo que $\partial f/\partial z = F_3$. Podemos repetir este proceso usando otras trayectorias diferentes para ir de (0, 0, 0) a (x, y, z) (por ejemplo, trazando los segmentos que unen (0, 0, 0) con (0, y, 0), éste punto con $(x, y, 0)$, y finalmente este último con (x, y, z)), demostrando de manera análoga que $\partial f/\partial x = F_1$ y $\partial f/\partial y = F_2$ (*véase* el Ejercicio 22 de esta sección). Por tanto, $\nabla f = \mathbf{F}$.

En tercer lugar, la condición iii) implica la condición iv), puesto que, como se probó en la Sección 4.4,

$$\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}.$$

Finalmente, sea $\mathbf{c}$ una representación de una curva cerrada C y sea S cualquier superficie cuya frontera es $\mathbf{c}$ (si $\mathbf{F}$ tiene puntos singulares, elegimos S de forma que no contenga ninguno de ellos). La Figura 8.3.3 indica que probablemente siempre podremos encontrar tal

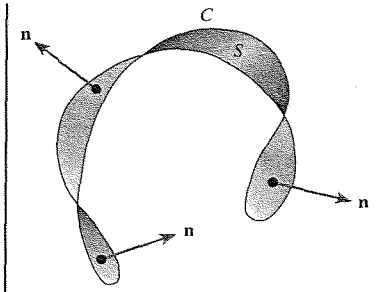


Figura 8.3.3. Una superficie S cuya frontera es la curva C.

superficie; sin embargo, una prueba formal de este hecho requiere el desarrollo de ideas matemáticas más sofisticadas que las que podemos presentar aquí.

Por el teorema de Stokes,

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_S (\text{rot}\, \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS.$$

Puesto que $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, esta integral es nula, de modo que la condición iv) $\Rightarrow$ condición i).

Interpretaciones físicas de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$

Ya hemos visto con anterioridad que una interpretación de la integral de línea dice que ésta es el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ al mover una partícula a lo largo de C. Una segunda interpretación es la noción de circulación, que vimos al final de la sección anterior. Recordemos que, en ese caso, interpretamos $\mathbf{F}$ como el campo de velocidades de un fluido; es decir, en cada punto P del espacio, $\mathbf{F}$ toma el valor del vector velocidad del fluido en ese punto P (en la sección anterior, denotamos $\mathbf{F}$ como $\mathbf{V}$). Sea C una curva cerrada, y sea $\Delta\mathbf{s}$ una pequeña cuerda dirigida de C. Entonces, $\mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{s}$ es aproximadamente la componente tangencial de $\mathbf{F}$ multiplicada por $\|\Delta\mathbf{s}\|$. La circulación $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ es la componente tangencial neta alrededor de C. Una pequeña rueda con paletas colocada en el fluido debería girar si está centrada en un punto en el cual $\mathbf{F}$ es cero y la circulación del fluido es no nula, o $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \neq 0$, para pequeñas curvas cerradas C alrededor de ese punto (*véase* la Figura 8.3.4).

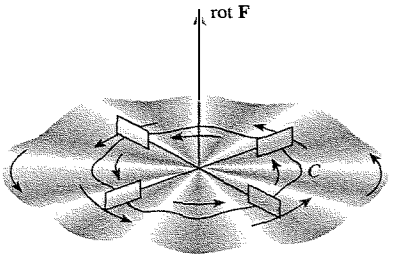


Figura 8.3.4. $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \neq 0$ implica que una rueda con paletas sumergida en un fluido con campo de velocidades $\mathbf{F}$ girará alrededor de su eje.

Existe una interpretación similar en la teoría electromagnética: si $\mathbf{F}$ representa un campo eléctrico, entonces la corriente fluirá alrededor de una espira C si $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \neq 0$.

Por el Teorema 7, un campo vectorial $\mathbf{F}$ tiene circulación cero si y sólo si $\text{rot}\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Por tanto, un campo vectorial $\mathbf{F}$ con $\text{rot}\,\mathbf{F} = \mathbf{0}$ se llama ***irrotacional.*** Por tanto, hemos demostrado que *un campo vectorial en* $\mathbb{R}^3$ *es irrotacional si y sólo si es un campo gradiente para alguna función, es decir, si y sólo si* $\mathbf{F} = \nabla f$. La función f se denomina ***función potencial*** del campo $\mathbf{F}$.

EJEMPLO 8.10 Considerar el campo vectorial $\mathbf{F}$ en $\mathbb{R}^3$ definido por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + (z\cos yz + x)\mathbf{j} + (y\cos yz)\mathbf{k}.$$

Demostrar que $\mathbf{F}$ es irrotacional y encontrar un potencial escalar para $\mathbf{F}$.

Solución

Calculamos $\nabla \times \mathbf{F}$:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & x + z\cos yz & y\cos yz \end{vmatrix}$$

$$= (\cos yz - yz\,\text{sen}\,yz - \cos yz + yz\,\text{sen}\,yz)\mathbf{i} + (0 - 0)\mathbf{j} + (1 - 1)\mathbf{k}$$

$$= 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0},$$

de modo que $\mathbf{F}$ es irrotacional. Por tanto, según el Teorema 7, existe un potencial. Podemos hallar este potencial por varios métodos.

Método 1. Siguiendo la técnica usada en la demostración del Teorema 7 para demostrar que la condición ii) implica la condición iii), podemos escribir

$$f(x, y, z) = \int_0^x F_1(t, 0, 0)\,dt + \int_0^y F_2(x, t, 0)\,dt + \int_0^z F_3(x, y, t)\,dt$$

$$= \int_0^x 0\,dt + \int_0^y x\,dt + \int_0^z y\cos yt\,dt$$

$$= 0 + xy + \text{sen}\,yz = xy + \text{sen}\,yz.$$

Es fácil comprobar que, como queríamos, $\nabla f = \mathbf{F}$:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} = y\mathbf{i} + (x + z\cos yz)\mathbf{j} + (y\cos yz)\mathbf{k}.$$

Método 2. Puesto que sabemos que el potencial f existe, será posible resolver el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x + z\cos yz, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = y\cos yz,$$

para $f(x, y, z)$. Este sistema es equivalente a decir que f satisface las ecuaciones

a) $f(x, y, z) = xy + h_1(y, z)$,

b) $f(x, y, z) = \operatorname{sen} yz + xy + h_2(x, z)$,

c) $f(x, y, z) = \operatorname{sen} yz + h_3(x, y)$,

para funciones h_1, h_2, y h_3 independientes de x, y, z (respectivamente). Tomando $h_1(y, z) = \operatorname{sen} yz$, $h_2(x, z) = 0$, y $h_3(x, y) = xy$, las tres ecuaciones coinciden, lo que nos da el potencial buscado para $\mathbf{F}$. Sin embargo, sólo hemos obtenido h_1, h_2 y h_3 de manera intuitiva. Para deducir la fórmula para f en un modo más sistemático, observemos que como $f(x, y, z) = xy + h_1(y, z)$ y $\partial f/\partial z = y \cos yz$, entonces

$$\frac{\partial h_1(y, z)}{\partial z} = y \cos yz$$

o bien

$$h_1(y, z) = \int y \cos yz \, dz + g(y) = \operatorname{sen} yz + g(y).$$

Por tanto, sustituyendo esta expresión en la Ecuación a) obtenemos

$$f(x, y, z) = xy + \operatorname{sen} yz + g(y);$$

pero, por la Ecuación b)

$$g(y) = h_2(x, z).$$

Puesto que el miembro de la derecha de esta ecuación es una función de x y de z, y el miembro de la izquierda es sólo función de la variable y, concluimos que ambos deben ser iguales a alguna constante C. Por tanto,

$$f(x, y, z) = xy + \operatorname{sen} yz + C$$

y hemos determinado f, salvo una constante.

EJEMPLO 8.11 Una masa M situada en el origen de $\mathbb{R}^3$ ejerce una fuerza de magnitud GmM/r^2 dirigida hacia el origen sobre una masa m colocada en el punto $r = (x, y, z)$. En la fórmula anterior G es la constante gravitatoria, cuyo valor depende de las unidades de medida, y $r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Si recordamos que $-\mathbf{r}/r$ es un vector unitario dirigido hacia el origen, podemos escribir el campo de fuerzas como

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{GmM\mathbf{r}}{r^3}.$$

Demostrar que $\mathbf{F}$ es irrotacional y hallar un potencial escalar para $\mathbf{F}$. (Obsérvese que $\mathbf{F}$ no está definido en el origen, pero el Teorema 7 sigue siendo aplicable, pues admite la presencia de un punto excepcional.)

Solución

Primero comprobemos que $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Usando la Fórmula 10 de la tabla de identidades vectoriales de la Sección 4.4, obtenemos:

$$\nabla \times \mathbf{F} = -GmM\left[\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) \times \mathbf{r} + \frac{1}{r^3}\nabla \times \mathbf{r}\right].$$

Pero $\nabla(1/r^3) = -3\mathbf{r}/r^5$ (*véase* el Ejercicio 30, Sección 4.4), y por tanto el primer término se anula, puesto que $\mathbf{r} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$. El segundo término también se anula, porque

$$\nabla \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & r \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Por tanto, $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ (para $r \neq 0$).

Si recordamos la fórmula $\nabla(r^n) = nr^{n-2}\mathbf{r}$ (*véase* nuevamente el Ejercicio 30 de la Sección 4.4), entonces podemos deducir por inspección un potencial escalar para $\mathbf{F}$. Tenemos $\mathbf{F} = -\nabla V$, donde $V(x, y, z) = -GmM/r$ se denomina la ***energía potencial gravitatoria***.

(Observemos de paso que según el Teorema 3 de la Sección 7.2, el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ para mover una partícula de masa m desde un punto P_1 hasta un punto P_2 viene dado por:

$$V(P_1) - V(P_2) = GmM\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right),$$

donde r_1 es la distancia radial de P_1 al origen, y r_2 se define de manera análoga.)

El caso plano

Con la misma demostración, el Teorema 7 es también válido para campos vectoriales $\mathbf{F}$ de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$. En este caso exigimos que $\mathbf{F}$ no tenga *ningún* punto excepcional; es decir, $\mathbf{F}$ sea suave en todos los puntos (*véase* el Ejercicio 12 de esta sección). Obsérvese, sin embargo, que la conclusión *puede ser válida* a pesar de que existan puntos excepcionales, como por ejemplo ocurre con el campo $(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})/(x^2 + y^2)^{3/2}$. Un ejemplo en el que la conclusión *no* se cumple es $(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$, como se prueba en el Ejercicio 12.

Si $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$, entonces

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

A veces, $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y$ recibe el nombre de ***rotacional escalar*** del campo $\mathbf{F}$. Por tanto, la condición $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ se reduce a

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Por tanto, tenemos:

COROLARIO 1 Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial C^1 en $\mathbb{R}^2$ de la forma $P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ que satisface $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$, entonces $\mathbf{F} = \nabla f$ para alguna función f definida en $\mathbb{R}^2$.

Insistimos una vez más en que este corolario puede ser falso si $\mathbf{F}$ no es de clase C^1 incluso en un único punto (se da un ejemplo en el Ejercicio 12). Sin embargo, como ya indicamos, en $\mathbb{R}^3$ se permiten excepciones en puntos aislados (*véase* el Teorema 7).

EJEMPLO 8.12

a) Determinar si el campo vectorial

$$\mathbf{F} = e^{xy}\mathbf{i} + e^{x+y}\mathbf{j}$$

es un campo gradiente.

b) Repetir a) para el campo vectorial

$$\mathbf{F} = (2x\cos y)\mathbf{i} - (x^2 \operatorname{sen} y)\mathbf{j}.$$

Solución

a) En este caso, $P(x, y) = e^{xy}$ y $Q(x, y) = e^{x+y}$, de modo que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = xe^{xy}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^{x+y}.$$

Estas dos cantidades no son iguales, y por lo tanto $\mathbf{F}$ no puede tener una función potencial.

b) En este caso resulta

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2x \operatorname{sen} y = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

de modo que $\mathbf{F}$ tiene una función potencial f. Para calcular esta función f resolvemos las ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\cos y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 \operatorname{sen} y.$$

Así, $f(x, y) = x^2\cos y + h_1(y)$ y $f(x, y) = x^2\cos y + h_2(x)$. Si h_1 y h_2 son la misma constante, entonces se satisfacen las dos ecuaciones, de manera que $f(x, y) = x^2\cos y$ es una función potencial para $\mathbf{F}$.

EJEMPLO 8.13 Sea $\mathbf{c}$: $[1, 2] \to \mathbb{R}^2$ dada por $x = e^{t-1}$, $y = \operatorname{sen}(\pi/t)$. Calcular la integral

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{c}} 2x\cos y\, dx - x^2 \operatorname{sen} y\, dy,$$

donde $\mathbf{F} = (2x\cos y)\mathbf{i} - (x^2 \operatorname{sen} y)\mathbf{j}$.

Solución

Los extremos son $\mathbf{c}(1) = (1, 0)$ y $\mathbf{c}(2) = (e, 1)$. Puesto que $\partial(2x\cos y)/\partial y = \partial(-x^2 \operatorname{sen} y)/\partial x$, $\mathbf{F}$ es irrotacional y por tanto un campo gradiente (como vimos en el Ejemplo 8.12). Por tanto, por el Teorema 7, podemos sustituir $\mathbf{c}$ por cualquier curva C^1 a trozos que tenga los mismos extremos, en particular, por la trayectoria poligonal que va de (1, 0) a $(e, 0)$ y a $(e, 1)$. Así, la integral de línea debe ser igual a

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \int_1^e 2t\cos 0\, dt + \int_0^1 -e^2 \operatorname{sen} t\, dt = (e^2 - 1) + e^2(\cos 1 - 1)$$
$$= e^2\cos 1 - 1.$$

Podemos dar una prueba alternativa usando el Teorema 3 de la Sección 7.2, ya que

$$\int_{\mathbf{c}} 2x\cos y\, dx - x^2 \operatorname{sen} y\, dy = \int_{\mathbf{c}} \nabla f \cdot d\mathbf{s} = f(\mathbf{c}(2)) - f(\mathbf{c}(1)) = e^2\cos 1 - 1,$$

porque $f(x, y) = x^2\cos y$ es una función potencial para $\mathbf{F}$. Evidentemente, esta técnica es más simple que calcular la integral directamente.

Concluimos esta sección con un teorema que, en esencia, es bastante similar al Teorema 7. El Teorema 7 estaba motivado en parte como un recíproco del resultado que dice que $\operatorname{rot}\nabla f = \mathbf{0}$ para cualquier función de clase C^1 $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ —o, si $\operatorname{rot}\mathbf{F} = 0$, entonces $\mathbf{F} = \nabla f$—. También sabemos (Fórmula (9) en la tabla de identidades vectoriales de la Sección 4.4) que $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{G}) = 0$ para cualquier campo vectorial $\mathbf{G}$ de clase C^2. Podríamos plantearnos el enunciado recíproco: si $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$, ¿entonces $\mathbf{F}$ es el rotacional de algún campo vectorial $\mathbf{G}$? El siguiente teorema responde afirmativamente a esta cuestión.

TEOREMA 8 Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial C^1 definido en $\mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$, entonces existe un campo vectorial $\mathbf{G}$ de clase C^1 de modo que $\mathbf{F} = \operatorname{rot}\mathbf{G}$.

La prueba se esboza en el Ejercicio 16 de esta sección. Debemos advertir al lector de que, al contrario que en el Teorema 7, el campo vectorial $\mathbf{F}$ del Teorema 8 no puede tener puntos excepcionales. Por ejemplo, el campo de fuerza gravitatoria $\mathbf{F} = -(GmM\mathbf{r}/r^3)$ tiene la propiedad de que $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$, y sin embargo no existe ningún campo $\mathbf{G}$ para el cual $\mathbf{F} = \operatorname{rot}\mathbf{G}$ (*véase* el Ejercicio 25 de esta sección). El Teorema 8 no es aplicable, porque el campo de fuerza gravitatoria $\mathbf{F}$ no está definido en $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$.

EJERCICIOS

1. Demostrar que dos funciones potenciales cualesquiera para un mismo campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ difieren como máximo en una constante.

2. a) Sea $\mathbf{F}(x, y) = (xy, y^2)$, y sea $\mathbf{c}$ la trayectoria $y = 2x^2$ uniendo los puntos (0, 0) y (1, 2) en $\mathbb{R}^2$. Evaluar $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$.

   b) ¿Depende la integral de a) depende de cuál sea la trayectoria que une los puntos (0, 0) y (1, 2)?

3. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xyz + \operatorname{sen} x)\mathbf{i} + x^2z\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}$. Hallar una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

4. Evaluar $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde $\mathbf{c}(t) = (\cos^5 t, \operatorname{sen}^3 t, t^4)$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$, y $\mathbf{F}$ es el campo del Ejercicio 3.

5. Si $f(x)$ es una función suave de una variable, ¿el campo $\mathbf{F}(x, y) = f(x)\mathbf{i} + f(y)\mathbf{j}$ debe ser un campo gradiente?

6. **a)** Demostrar que $\mathbf{F} = -\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3$ es el gradiente de $f(x, y, z) = 1/r$.

b) ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F} = -\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3$ al mover una partícula desde un punto $\mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}^3$ «hasta ∞», donde $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$?

7. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. ¿Puede existir una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$?

8. Sea $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$, y supongamos que cada componente F_k satisface la condición de homogeneidad

$$F_k(tx, ty, tz) = tF_k(x, y, z), \qquad k = 1, 2, 3.$$

Supongamos además que $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Demostrar que $\mathbf{F} = \nabla f$, donde

$$2f(x, y, z) = xF_1(x, y, z) + yF_2(x, y, z) + zF_3(x, y, z).$$

[INDICACIÓN: Usar el Ejercicio de repaso 23, Capítulo 2.]

9. Sea $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^x \operatorname{sen} y)\mathbf{i} + (e^x \cos y)\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$. Evaluar la integral $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$, donde $\mathbf{c}(t) = (\sqrt{t}, t^3, \exp\sqrt{t})$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

10. Sea un fluido con campo de velocidades $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$. ¿Cuál es la circulación alrededor de la circunferencia unidad en el plano xy? Interpretar la respuesta.

11. La masa de la Tierra es aproximadamente de 6×10^{27} g, y la masa del Sol es 330.000 veces mayor. La constante gravitatoria es de $6{,}7 \times 10^{-8}$ cm^3/s$^2 \cdot$ g. La distancia de la Tierra al Sol es aproximadamente de $1{,}5 \times 10^{12}$ cm. Calcular aproximadamente el trabajo necesario para aumentar la distancia de la Tierra al Sol en 1 cm.

12. **a)** Demostrar que $\int_C (x\,dy - y\,dx)/(x^2 + y^2) = 2\pi$, donde C es la circunferencia unidad.

b) Concluir que el campo vectorial asociado $[-y/(x^2 + y^2)]\mathbf{i} + [x/(x^2 + y^2)]\mathbf{j}$ no es un campo conservativo.

c) Demostrar que, sin embargo, $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$. ¿Contradice esto al corolario del Teorema 7? Si no es así, ¿por qué no?

13. Determinar cuál de los siguientes campos vectoriales en el plano $\mathbf{F}$ es el gradiente de una función escalar f. Si una tal f existe, calcularla.

a) $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$.

b) $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$.

c) $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$.

14. Repetir el Ejercicio 13 para los siguientes campos vectoriales:

a) $\mathbf{F}(x, y) = (\cos xy - xy \operatorname{sen} xy)\mathbf{i} - (x^2 \operatorname{sen} xy)\mathbf{j}$.

b) $\mathbf{F}(x, y) = (x\sqrt{x^2y^2 + 1})\mathbf{i} + (y\sqrt{x^2y^2 + 1})\mathbf{j}$.

c) $\mathbf{F}(x, y) = (2x \cos y + \cos y)\mathbf{i} - (x^2 \operatorname{sen} y + x \operatorname{sen} y)\mathbf{j}$.

15. Demostrar que los campos vectoriales siguientes son conservativos. Calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ para la curva dada.

a) $\mathbf{F} = (xy^2 + 3x^2y)\mathbf{i} + (x + y)x^2\mathbf{j}$; C es la curva formada por dos segmentos que unen $(1, 1)$ con $(0, 2)$ y $(3, 0)$.

b) $\mathbf{F} = \dfrac{2x}{y^2 + 1}\,\mathbf{i} - \dfrac{2y(x^2 + 1)}{(y^2 + 1)^2}\,\mathbf{j}$; C está parametrizada por $x = t^3 - 1$, $y = t^6 - t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

c) $\mathbf{F} = [\cos(xy^2) - xy^2 \operatorname{sen}(xy^2)]\mathbf{i} - 2x^2y \operatorname{sen}(xy^2)\mathbf{j}$; C es la curva (e^t, e^{t+1}), $-1 \leqslant t \leqslant 0$.

16. Demostrar el Teorema 8. [INDICACIÓN: Definir $\mathbf{G} = G_1\mathbf{i} + G_2\mathbf{j} + G_3\mathbf{k}$ mediante

$$G_1(x, y, z) = \int_0^z F_2(x, y, t)\,dt - \int_0^y F_3(x, t, 0)\,dt$$

$$G_2(x, y, z) = -\int_0^z F_1(x, y, t)\,dt$$

y $G_3(x, y, z) = 0$.]

17. ¿Es cada uno de los campos siguientes el rotacional de algún otro campo vectorial? En caso afirmativo, hallar de cuál.

a) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

b) $\mathbf{F} = (x^2 + 1)\mathbf{i} + (z - 2xy)\mathbf{j} + y\mathbf{k}$.

18. Sea $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + y\mathbf{k}$. Comprobar que $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. Hallar un campo $\mathbf{G}$ tal que $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$.

19. Repetir el Ejercicio 18 para $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$.

20. Sea $\mathbf{F} = xe^y\mathbf{i} - (x \cos z)\mathbf{j} - ze^y\mathbf{k}$. Hallar un campo $\mathbf{G}$ tal que $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$.

21. Sea $\mathbf{F} = (x \cos y)\mathbf{i} - (\operatorname{sen} y)\mathbf{j} + (\operatorname{sen} x)\mathbf{k}$. Hallar un campo $\mathbf{G}$ tal que $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$.

22. Usando diferentes trayectorias que unen $(0, 0, 0)$ con (x, y, z), demostrar que la función f definida en la prueba del Teorema 7 para demostrar «condición (ii) implica condición (iii)» satisface $\partial f/\partial x = F_1$ y $\partial f/\partial y = F_2$.

23. Sea $\mathbf{F}$ el campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ dado por $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$.

a) Demostrar que $\mathbf{F}$ es rotacional, es decir, que $\mathbf{F}$ no es irrotacional.

b) Supongamos que $\mathbf{F}$ representa el campo de velocidades de un fluido. Demostrar que si colocamos un corcho en este fluido, girará en un plano paralelo al plano xy, en una trayectoria circular alrededor del eje z.

c) ¿En qué sentido girará el corcho?

24. Sea $\mathbf{G}$ el campo vectorial en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } z\}$ definido por:

$$\mathbf{G} = \frac{-y}{x^2 + y^2}\,\mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\,\mathbf{j}.$$

a) Demostrar que $\mathbf{G}$ es irrotacional.

b) Demostrar que los resultados del Ejercicio 23 b) también son válidos para $\mathbf{G}$.

c) ¿Cómo podemos explicar el hecho de que las trayectorias de $\mathbf{F}$ y $\mathbf{G}$ sean iguales (circunferencias alrededor del eje z) aunque $\mathbf{F}$ sea rotacional y $\mathbf{G}$ no? [INDICACIÓN: La propiedad de tener rotacional no nulo es una condición local, es decir, una propiedad del fluido en un entorno del punto.]

25. Sea $\mathbf{F} = -(GmM\mathbf{r}/r^3)$ el campo de fuerza gravitatorio definido en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$.

a) Demostrar que $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$.

b) Demostrar que $\mathbf{F} \neq \operatorname{rot} \mathbf{G}$ para cualquier campo vectorial $\mathbf{G}$ de clase C^1 en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$.

8.4. El teorema de Gauss

El teorema de Gauss afirma que el flujo de un campo vectorial hacia el exterior de una superficie cerrada es igual a la integral de la divergencia de ese campo vectorial sobre el volumen encerrado por la superficie. Es un resultado paralelo a los teoremas de Stokes y Green, en el sentido de que relaciona una integral sobre un objeto geométrico cerrado (curva o superficie) con otra integral sobre la región contenida (superficie o volumen).

Regiones elementales y sus fronteras

Comenzaremos pidiendo al lector que repase las diferentes regiones elementales en el espacio que fueron presentadas cuando consideramos la integral de volumen; estas regiones están representadas en las Figuras 5.5.2 y 5.5.4. Como indican estas figuras, la frontera de una región elemental en $\mathbb{R}^3$ es una superficie construida con un número finito (como máximo seis, como mínimo dos) de superficies que pueden describirse como gráficas de funciones de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$. Este tipo de superficie se llama *superficie cerrada*. Las superficies S_1, S_2, ..., S_N que componen tal superficie cerrada se llaman sus *caras*.

EJEMPLO 8.14 El cubo de la Figura 8.4.1 (a) es una región elemental, y en efecto es una región elemental simétrica, cuya frontera está formada por seis rectángulos. La esfera de la Figura 8.4.1 (b) es la frontera de una bola maciza, que también es una región elemental simétrica.

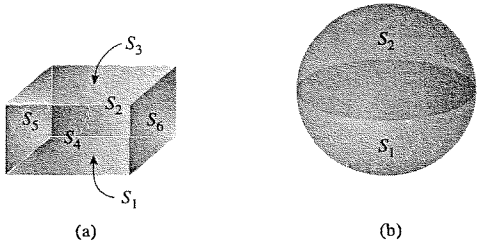


Figura 8.4.1. Regiones elementales simétricas y superficies S_i que componen sus fronteras.

Las superficies cerradas se pueden orientar de dos maneras: la orientación exterior consistente en tomar como vector normal el que apunta hacia el espacio exterior a la región encerrada por la superficie, y la orientación interior, consistente en tomar como vector normal el que apunta hacia el interior de la región encerrada (Figura 8.4.2).

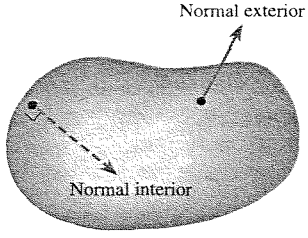


Figura 8.4.2. Dos posibles orientaciones para una superficie cerrada.

Supongamos que S es una superficie cerrada orientada en una de esas dos formas, y $\mathbf{F}$ es un campo vectorial sobre S. Entonces, como definimos en la Sección 7.6,

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \sum_i \iint_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Si damos a S la orientación exterior, $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ mide el flujo total de $\mathbf{F}$ que sale al exterior a través de S. Es decir, si pensamos en $\mathbf{F}$ como el campo de velocidades de un fluido, $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ indica la cantidad de fluido que sale de la región acotada por S por unidad de tiempo. Si damos a S la orientación interior, la integral $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ mide el flujo total de $\mathbf{F}$ que atraviesa S hacia el interior.

Recordemos otra manera habitual de escribir estas integrales de superficie, una manera que especifica explícitamente la orientación de S. Supongamos que la orientación de S viene dada por un vector normal unitario $\mathbf{n}(x, y, z)$ en cada punto de S. Entonces tenemos la integral orientada

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS,$$

es decir, la integral de la componente normal de $\mathbf{F}$ sobre S. En el resto de esta sección, si S es una superficie cerrada que rodea una región W, adoptaremos el convenio de que $S = \partial W$ tiene asignada la orientación exterior, con normal exterior unitaria $\mathbf{n}(x, y, z)$ en cada punto $(x, y, z) \in S$. Además, denotaremos la superficie con la orientación opuesta (interior) por ∂W_{op}. Entonces, la dirección normal unitaria asociada a esta orientación será $-\mathbf{n}$. Por tanto,

$$\iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = -\iint_S [\mathbf{F} \cdot (-\mathbf{n})]\, dS = -\iint_{\partial W_{\text{op}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

EJEMPLO 8.15 El cubo unitario W dado por:

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant z \leqslant 1$$

es una región elemental simétrica en el espacio (*véanse* las Figuras 8.4.3 y 5.5.5).

Escribimos sus caras como

$$S_1\colon z = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

$$S_2\colon z = 1, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

$$S_3\colon\ x = 0, \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant z \leqslant 1,$$
$$S_4\colon\ x = 1, \qquad 0 \leqslant y \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant z \leqslant 1,$$
$$S_5\colon\ y = 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant z \leqslant 1,$$
$$S_6\colon\ y = 1, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant z \leqslant 1.$$

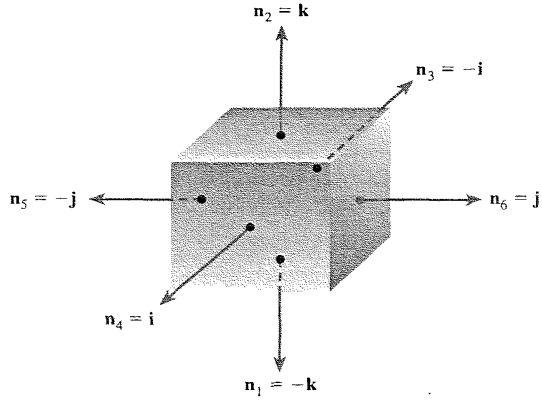


Figura 8.4.3. Orientación exterior en el cubo.

A partir de la Figura 8.4.3, vemos que

$$\mathbf{n}_2 = \mathbf{k} = -\mathbf{n}_1,$$
$$\mathbf{n}_4 = \mathbf{i} = -\mathbf{n}_3,$$
$$\mathbf{n}_6 = \mathbf{j} = -\mathbf{n}_5,$$

de modo que para un campo vectorial continuo $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$,

$$\iint_{\partial W} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = -\iint_{S_1} F_3\, dS + \iint_{S_2} F_3\, dS - \iint_{S_3} F_1\, dS$$
$$+ \iint_{S_4} F_1\, dS - \iint_{S_5} F_2\, dS + \iint_{S_6} F_2\, dS.$$

El teorema de Gauss

Hemos llegado al último de los tres teoremas centrales de este capítulo. Este teorema relaciona integrales de superficie con integrales de volumen; en otras palabras, el teorema afirma que si W es una región en $\mathbb{R}^3$, entonces el flujo de un campo vectorial $\mathbf{F}$ hacia el exterior, a través de la superficie cerrada ∂W, es igual a la integral de $\operatorname{div}\mathbf{F}$ sobre W. Empezaremos suponiendo que W es una región elemental simétrica (Figura 5.5.5).

TEOREMA 9: Teorema de la divergencia de Gauss Sea W una región elemental simétrica en el espacio. Denotemos por ∂W la superficie cerrada orientada que limita W. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial suave definido en W. Entonces

$$\iiint_W (\nabla \cdot \mathbf{F})\, dV = \iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

o, alternativamente,

$$\iiint_W (\operatorname{div} \mathbf{F})\, dV = \iint_{\partial W} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS.$$

DEMOSTRACIÓN Si $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ entonces, por definición, la divergencia de $\mathbf{F}$ viene dada por $\operatorname{div} \mathbf{F} = \partial P/\partial x + \partial Q/\partial y + \partial R/\partial z$, de manera que podemos escribir (usando la aditividad de la integral de volumen)

$$\iiint_W \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iiint_W \frac{\partial P}{\partial x}\, dV + \iiint_W \frac{\partial Q}{\partial y}\, dV + \iiint_W \frac{\partial R}{\partial z}\, dV.$$

Por otro lado, la integral de superficie en cuestión es

$$\begin{aligned}\iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS &= \iint_{\partial W} (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n}\, dS \\ &= \iint_{\partial W} P\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}\, dS + \iint_{\partial W} Q\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}\, dS + \iint_{\partial W} R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS.\end{aligned}$$

El teorema quedará demostrado si probamos las tres identidades

$$\iint_{\partial W} P\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_W \frac{\partial P}{\partial x}\, dV, \tag{1}$$

$$\iint_{\partial W} Q\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_W \frac{\partial Q}{\partial y}\, dV, \tag{2}$$

y

$$\iint_{\partial W} R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_W \frac{\partial R}{\partial z}\, dV. \tag{3}$$

Demostraremos la Ecuación (3); las otras dos identidades se pueden demostrar de manera análoga.

Puesto que W es una región elemental simétrica, existe un par de funciones

$$z = g_1(x, y), \qquad z = g_2(x, y),$$

cuyo dominio común es una región elemental D en el plano xy, de manera que W es el conjunto de puntos (x, y, z) que satisfacen

$$g_1(x, y) \leqslant z \leqslant g_2(x, y), \qquad (x, y) \in D.$$

Por reducción a integrales iteradas, tenemos

$$\iiint_W \frac{\partial R}{\partial z}\, dV = \iint_{\blacksquare} \left(\int_{z=g_1(x,y)}^{z=g_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz \right) dx\, dy,$$

y por tanto, por el teorema fundamental del cálculo,

$$\iiint_W \frac{\partial R}{\partial z}\, dV = \iint_D [R(x, y, g_2(x, y)) - R(x, y, g_1(x, y))]\, dx\, dy. \tag{4}$$

La frontera de W es una superficie cerrada cuya parte superior S_2 es la gráfica de $z = g_2(x, y)$, donde $(x, y) \in D$, y cuya parte inferior S_1 es la gráfica de $z = g_1(x, y)$, $(x, y) \in D$. Las otras cuatro caras de ∂W son superficies S_3, S_4, S_5 y S_6, cuyas normales son siempre perpendiculares al eje z. (*Véase* la Figura 8.4.4. Obsérvese que alguna de las otras cuatro caras puede faltar; por ejemplo, si W es una bola y ∂W es una esfera.) Por definición,

$$\iint_{\partial W} R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_{S_1} R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_1\, dS + \iint_{S_2} R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_2\, dS + \sum_{i=3}^{6} \iint_{S_i} R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_i\, dS.$$

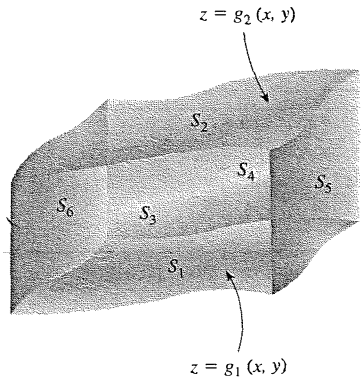


Figura 8.4.4. Una región elemental simétrica W para la cual $\iint_{\partial W} R\mathbf{k} \cdot dS = \iiint_W (\partial R/\partial z)\, dV$. Las cuatro caras de ∂W denotadas por S_3, S_4, S_5 y S_6 tienen normales perpendiculares al eje z.

Puesto que la normal $\mathbf{n}_i$ es perpendicular a $\mathbf{k}$ en cada S_3, S_4, S_5, S_6, sobre esas caras tenemos $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} = 0$, y por tanto la integral se reduce a:

$$\iint_{\partial W} R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_{S_1} R\mathbf{k} \cdot d\mathbf{S}_1 + \iint_{S_2} R\mathbf{k} \cdot d\mathbf{S}_2. \tag{5}$$

La superficie S_1 está definida por $z = g_1(x, y)$ y,

$$d\mathbf{S}_1 = \left(\frac{\partial g_1}{\partial x}\, \mathbf{i} + \frac{\partial g_1}{\partial y}\, \mathbf{j} - \mathbf{k} \right) dx\, dy$$

(la fórmula general para $d\mathbf{S}$ para gráficas de la Sección 7.6 cambiada de signo, porque la normal apunta hacia abajo). Por tanto,

$$\iint_{S_1} R\mathbf{k}\cdot d\mathbf{S}_1 = -\iint_D R(x, y, g_1(x, y))\,dx\,dy. \tag{6}$$

Análogamente, para la cara superior S_2,

$$d\mathbf{S}_2 = \left(-\frac{\partial g_2}{\partial x}\,\mathbf{i} - \frac{\partial g_2}{\partial y}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)dx\,dy.$$

Por tanto,

$$\iint_{S_2} R\mathbf{k}\cdot d\mathbf{S}_2 = \iint_D R(x, y, g_2(x, y))\,dx\,dy. \tag{7}$$

Sustituyendo las Ecuaciones (6) y (7) en la Ecuación (5) y comparando el resultado con la Ecuación (4), obtenemos

$$\iiint_W \frac{\partial R}{\partial z}\,dV = \iint_{\partial W} R(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n})\,dS.$$

Las igualdades restantes, (1) y (2), pueden probarse de manera semejante para completar la demostración.

Generalizaciones del teorema de Gauss

El lector debe notar que la prueba del teorema de Gauss es similar a la del teorema de Green. Por el procedimiento utilizado en el Ejercicio 8 de la Sección 8.1, podemos extender el teorema de Gauss a cualquier región que admita una descomposición en regiones elementales simétricas. Esto incluye todas las regiones de interés para nosotros. Un ejemplo de región en la que el teorema de Gauss es válido es la región comprendida entre dos superficies cerradas, una dentro de la otra. La frontera de esta región consiste en dos trozos orientados como muestra la Figura 8.4.5. Aplicaremos el teorema de la divergencia a una región así cuando demostremos la ley de Gauss en el Teorema 10.

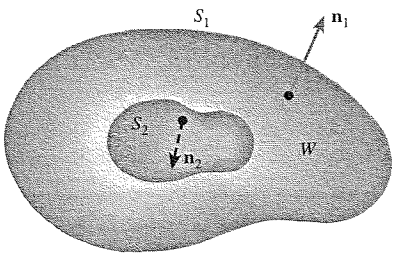


Figura 8.4.5. Una región más general en la cual se puede aplicar el teorema de Gauss.

EJEMPLO 8.16 Considérese $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$, y sea S la esfera unitaria definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Evaluar $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$.

Solución

Por el teorema de Gauss,

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iiint_W (\operatorname{div}\mathbf{F})\,dV,$$

donde W es la bola acotada por la esfera. La integral de la derecha es

$$2\iiint_W (1 + y + z)\,dV = 2\iiint_W dV + 2\iiint_W y\,dV + 2\iiint_W z\,dV.$$

Por simetría, podemos razonar que $\iiint_W y\,dV = \iiint_W z\,dV = 0$ (*véase* el Ejercicio 17, Sección 6.3). Por tanto, puesto que una esfera de radio R tiene volumen $4\pi R^3/3$,

$$2\iiint_W (1 + y + z)\,dV = 2\iiint_W dV = \frac{8\pi}{3}.$$

El lector puede convencerse de que el cálculo directo de $\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$ resulta inmanejable.

EJEMPLO 8.17 Utilizar el teorema de la divergencia para evaluar

$$\iint_{\partial W} (x^2 + y + z)\,dS,$$

donde W es la bola maciza $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Solución

Para aplicar el teorema de la divergencia de Gauss, hallamos un campo vectorial $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ sobre W tal que $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = x^2 + y + z$. En cualquier punto $(x, y, z) \in \partial W$, la normal unitaria exterior $\mathbf{n}$ a ∂W es

$$\mathbf{n} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

porque sobre ∂W, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el radio vector $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ es normal a la esfera ∂W (Figura 8.4.6).

Por tanto, si $\mathbf{F}$ es el campo vectorial deseado, entonces

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = F_1x + F_2y + F_2z.$$

Tomamos

$$F_1x = x^2, \qquad F_2y = y, \qquad F_3z = z$$

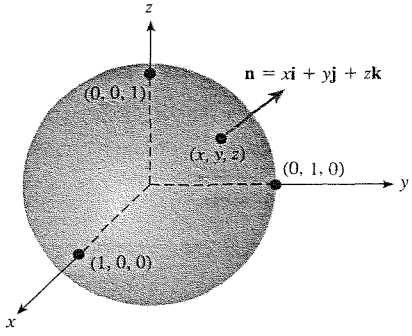


Figura 8.4.6. **n** es la normal unitaria a ∂W, la frontera de la bola W.

y despejamos F_1, F_2 y F_3, hallando que $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Calculando $\operatorname{div}\mathbf{F}$, obtenemos

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = 1 + 0 + 0 = 1.$$

Por tanto, por el teorema de la divergencia de Gauss,

$$\iint_{\partial W} (x^2 + y + z)\, dS = \iiint_W dV = \text{volumen}\,(W) = \frac{4}{3}\pi.$$

La divergencia como flujo por unidad de volumen

El significado físico de la divergencia es que, dado un punto P, $\operatorname{div}\mathbf{F}(\mathrm{P})$ es la tasa de flujo neto hacia el exterior, por unidad de volumen, en el punto P. Esto se sigue del teorema de Gauss y del teorema del valor medio para integrales: si W_ρ es una bola en $\mathbb{R}^3$ de radio ρ centrada en P, entonces existe un punto $\mathrm{Q} \in W_\rho$ tal que

$$\iint_{\partial W_\rho} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = \iiint_{W_\rho} \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV = \operatorname{div}\mathbf{F}(\mathrm{Q}) \cdot \text{volumen}\,(W_\rho)$$

y por tanto

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(\mathrm{P}) = \lim_{\rho\to 0} \operatorname{div}\mathbf{F}(\mathrm{Q}) = \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{V(W_\rho)} \iint_{\partial W_\rho} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS.$$

Esto es análogo a la formulación del rotacional en términos de un límite, que se presenta al final de la Sección 8.2. Así, si $\operatorname{div}\mathbf{F}(\mathrm{P}) > 0$, consideramos P como una ***fuente***, porque hay un flujo neto hacia el exterior en un entorno de P; si $\operatorname{div}\mathbf{F}(\mathrm{P}) < 0$, P se denomina un ***sumidero*** para $\mathbf{F}$.

Un campo vectorial $\mathbf{F}$ de clase C^1 definido en $\mathbb{R}^3$ se dice libre de divergencia si $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$. Si $\mathbf{F}$ es libre de divergencia, entonces tenemos $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = 0$ para todas las superficies cerradas S. El recíproco también puede ser demostrado fácilmente usando el teorema de Gauss: si $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = 0$ para todas las superficies cerradas S, entonces $\mathbf{F}$ es libre de divergencia. Si $\mathbf{F}$ es libre de divergencia, vemos que el flujo de $\mathbf{F}$ a través de cualquier superficie cerrada es 0, de modo que si $\mathbf{F}$ es el campo de velocidades de un fluido, la cantidad neta de fluido que fluye

hacia fuera de cualquier región debe ser 0. Así, debe entrar en la región exactamente la misma cantidad de fluido que sale de ella (por unidad de tiempo). Un fluido con esta propiedad se denomina ***incompresible***.

EJEMPLO 8.18 Evaluar $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + y\mathbf{k}$, y S es la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, acotada por los planos $z = 1$ y $z = -1$, e incluyendo los trozos $x^2 + y^2 \leqslant 1$ cuando $z = \pm 1$.

Solución

Se puede calcular esta integral directamente, pero es más sencillo utilizar el teorema de la divergencia.

Ahora, S es la frontera de la región W dada por $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $-1 \leqslant z \leqslant 1$. Por tanto, $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_W (\operatorname{div}\mathbf{F})\, dV$. Además,

$$\iiint_W (\operatorname{div}\mathbf{F})\, dV = \iiint_W (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz = \int_{-1}^{1} \left(\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} (x^2 + y^2)\, dx\, dy \right) dz$$

$$= 2 \iint_{x^2+y^2\leqslant 1} (x^2 + y^2)\, dx\, dy.$$

Antes de evaluar la integral doble, observamos que la integral de superficie satisface

$$\iint_{\partial W} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS = 2 \iint_{x^2+y^2\leqslant 1} (x^2 + y^2)\, dx\, dy > 0.$$

Esto significa que $\iint_{\partial W} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$, el flujo neto de $\mathbf{F}$ hacia el exterior del cilindro, es positivo.

Pasamos a coordenadas polares para evaluar la integral doble:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\operatorname{sen}\theta, \qquad 0 \leqslant r \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

Entonces, tenemos $\partial(x, y)/\partial(r, \theta) = r$, y $x^2 + y^2 = r^2$. Así,

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant 1} (x^2 + y^2)\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r^3\, dr \right) d\theta = \frac{1}{2}\,\pi.$$

Por lo tanto, $\iiint_W \operatorname{div}\mathbf{F}\, dV = \pi$.

La ley de Gauss

Como destacamos anteriormente, el teorema de la divergencia de Gauss se puede aplicar a regiones en el espacio más generales que las regiones simétricas elementales. Para concluir esta sección, utilizaremos esta observación *en la demostración* de los siguientes resultados importantes.

TEOREMA 10: Ley de Gauss Sea M una región simétrica elemental en $\mathbb{R}^3$. Entonces, si $(0, 0, 0) \notin \partial M$, tenemos

$$\iint_{\partial M} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3}\, dS = \begin{cases} 4\pi & \text{si } (0, 0, 0) \in M \\ 0 & \text{si } (0, 0, 0) \notin M, \end{cases}$$

donde

$$\mathbf{r}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

y

$$r(x, y, z) = \|\mathbf{r}(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

DEMOSTRACIÓN DE LA LEY DE GAUSS Primero, supongamos $(0, 0, 0) \notin M$. Entonces $\mathbf{r}/r^3$ es un campo vectorial de clase C^1 sobre M y ∂M y, por tanto, por el teorema de la divergencia,

$$\iint_{\partial M} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3}\, dS = \iiint_M \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right) dV.$$

Pero $\nabla \cdot (\mathbf{r}/r^3) = 0$ para $r \neq 0$, como el lector puede comprobar fácilmente (*véase* el Ejercicio 30, de la Sección 4.4). Así,

$$\iint_{\partial M} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3}\, dS = 0.$$

A continuación, supongamos que $(0, 0, 0) \in M$. Ya no podemos usar el método anterior, porque $\mathbf{r}/r^3$ no es suave sobre M, ya que el denominador se anula en $\mathbf{r} = (0, 0, 0)$. Puesto que $(0, 0, 0) \in M$ y $(0, 0, 0) \notin \partial M$, existe un $\varepsilon > 0$ tal que la bola N de radio ε centrada en $(0, 0, 0)$ está completamente contenida dentro de M. Sea W la región entre M y N. Entonces W tiene como frontera $\partial N \cup \partial M = S$. Pero la orientación sobre ∂N inducida por la normal *exterior* a W es la opuesta a la obtenida a partir de N (*véase* la Figura 8.4.7).

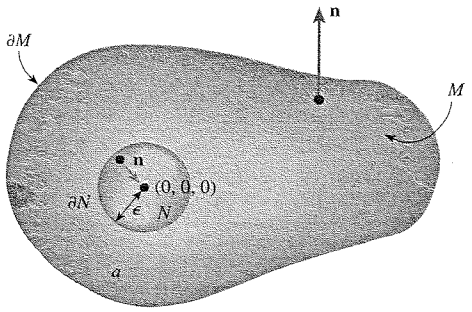


Figura 8.4.7. Orientación exterior inducida sobre S; W es M menos la bola N.

Ahora, $\nabla \cdot (\mathbf{r}/r^3) = 0$ sobre W y, por tanto, por el teorema de la divergencia aplicado a la región (no elemental) W,

$$\iint_S \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^3}\,dS = \iiint_W \nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right)dV = 0.$$

Puesto que

$$\iint_S \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^3}\,dS = \iint_{\partial M} \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^3}\,dS + \iint_{\partial N} \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^3}\,dS,$$

donde $\mathbf{n}$ es la normal exterior sobre S, tenemos

$$\iint_{\partial M} \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^3}\,dS = -\iint_{\partial N} \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^3}\,dS.$$

Sin embargo, sobre ∂N, $\mathbf{n} = -\mathbf{r}/r$ y $r = \varepsilon$, puesto que ∂N es una esfera de radio ε, de modo que

$$-\iint_{\partial N} \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^3}\,dS = \iint_{\partial N} \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^4}\,dS = \frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{\partial N} dS.$$

Pero $\iint_{\partial N} dS = 4\pi\varepsilon^2$, el área de una esfera de radio ε. Esto demuestra el resultado.

EJEMPLO 8.19 La ley de Gauss tiene la siguiente interpretación física. El potencial debido a una carga Q en el punto (0, 0, 0) viene dado por

$$\phi(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi r} = \frac{Q}{4\pi\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

y el campo eléctrico correspondiente es

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3}\right).$$

Así, el Teorema 10 dice que el flujo eléctrico total $\iint_{\partial M} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}$ (es decir, el flujo de $\mathbf{E}$ hacia el exterior de una superficie cerrada ∂M) es igual a Q si la carga está dentro de M, y cero en otro caso. Obsérvese que incluso si $(0, 0, 0) \notin M$, $\mathbf{E}$ es *distinto de cero* sobre M.

Para una distribución continua de cargas descrita por una densidad de carga ρ en una región W, el campo $\mathbf{E}$ está relacionado con la densidad ρ por

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \nabla\cdot\mathbf{E} = \rho.$$

Por tanto, por el teorema de Gauss,

$$\iint_{\partial W} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \iiint_W \rho\,dV = Q;$$

es decir, el flujo hacia el exterior de la superficie es igual a la carga total en el interior.

La divergencia en coordenadas esféricas

A continuación, usamos el teorema de Gauss para deducir la fórmula

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2 F_\rho) + \frac{1}{\rho \operatorname{sen}\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}(\operatorname{sen}\phi F_\phi) + \frac{1}{\rho \operatorname{sen}\phi}\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta} \tag{8}$$

para la divergencia de un campo vectorial $\mathbf{F}$ en coordenadas esféricas, fórmula que fue enunciada en la Sección 8.2 (de nuevo, en este caso los subíndices representan *componentes, no derivadas parciales*). El método es usar la fórmula

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(\mathrm{P}) = \lim_{W\to P}\frac{1}{V(W)}\iint_{\partial W}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS, \tag{9}$$

donde W es una región con volumen $V(W)$, que se contrae a un punto $\mathbf{P}$ (en la prueba del Teorema 10 tomamos una bola, pero pueden usarse regiones de cualquier forma). Sea W la región sombreada en la Figura 8.4.8.

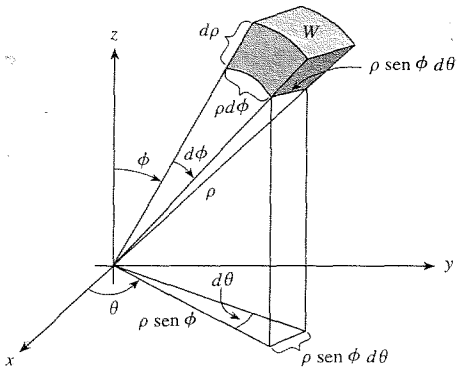


Figura 8.4.8. Volumen infinitesimal determinado por $d\rho$, $d\theta$, $d\phi$ en (ρ, θ, ϕ).

Para las dos caras ortogonales a la dirección radial, la integral de superficie en la Ecuación (9) es aproximadamente

$$\begin{aligned} &F_\rho(\rho + d\rho, \phi, \theta) \times (\text{área de la cara externa}) - F_\rho(\rho, \phi, \theta) \times (\text{área de la cara interna}) \\ &\quad \approx F_\rho(\rho + d\rho, \phi, \theta)(\rho + d\rho)^2 \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta - F_\rho(\rho, \phi, \theta)\rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta \\ &\quad \approx \frac{\partial}{\partial\rho}(F_\rho\rho^2 \operatorname{sen}\phi)\, d\rho\, d\phi\, d\theta, \end{aligned} \tag{10}$$

por el teorema del valor medio para funciones de una variable. Dividiendo por el volumen de la región W, es decir, $\rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$, vemos que la contribución al miembro de la derecha de la Ecuación (9) es

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2 F_\rho) \tag{11}$$

para estas caras. Del mismo modo, la contribución de las caras ortogonales a la dirección ϕ es

$$\frac{1}{\rho \operatorname{sen} \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\operatorname{sen} \phi F_\phi), \qquad \text{y para la dirección,} \qquad \frac{1}{\rho \operatorname{sen} \phi} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}.$$

Sustituyendo (11) y estas expresiones en la Ecuación (9) y pasando al límite, se obtiene la Ecuación (8).

EJERCICIOS

1. Utilizar el teorema de la divergencia para calcular el flujo del campo $\mathbf{F} = (x-y)\mathbf{i} + (y-z)\mathbf{j} + (z-x)\mathbf{k}$ hacia el exterior de la esfera unidad.

2. Sea $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$. Evaluar la integral de superficie de $\mathbf{F}$ sobre la esfera unidad.

3. Evaluar $\iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y W es el cubo unitario (en el primer octante). Realizar el cálculo directamente y comprobarlo usando el teorema de la divergencia.

4. Repetir el Ejercicio 3 para:

   a) $\mathbf{F} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

   b) $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$.

5. Sea $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$. Evaluar $\iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ para cada una de las siguientes regiones W:

   a) $x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1$.

   b) $x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1$ y $x \geqslant 0$.

   c) $x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1$ y $x \leqslant 0$.

6. Repetir el Ejercicio 5 para $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + (y - z)\mathbf{j} + (z - x)\mathbf{k}$.

7. Hallar el flujo del campo vectorial $\mathbf{F} = (x - y^2)\mathbf{i} + y\mathbf{j} + x^3\mathbf{k}$ hacia el exterior del paralelepípedo $[0, 1] \times [1, 2] \times [1, 4]$.

8. Evaluar $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F} = 3xy^2\mathbf{i} + 3x^2y\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ y S es la superficie de la esfera unitaria.

9. Evaluar $\iint_{\partial W} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dA$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ y W es el cubo unitario en el primer octante. Realizar el cálculo directamente y comprobarlo usando el teorema de la divergencia.

10. Evaluar la integral de superficie $\iint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dA$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + z(x^2 + y^2)^2\mathbf{k}$ y ∂S es la superficie del cilindro $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

11 Demostrar que

$$\iiint_W (\nabla f) \cdot \mathbf{F}\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial W} f\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS - \iiint_W f \nabla \cdot \mathbf{F}\, dx\, dy\, dz.$$

12. Demostrar la identidad

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G}).$$

13. Demostrar que $\iiint_W (1/r^2)\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial W} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}/r^2)\, dS$, donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

14. Dados vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^3$ y números («cargas») $q_1, \ldots, q_k$, definimos la función ϕ como $\phi(x, y, z) = \sum_{i=1}^{k} q_i/(4\pi\|\mathbf{r} - \mathbf{v}_i\|)$, donde $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Demostrar que para una superficie cerrada S y $\mathbf{E} = -\nabla\phi$,

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q,$$

donde Q es la carga total en el interior de S. (Supóngase que la ley de Gauss del Teorema 10 es aplicable y que ninguna de las cargas está situada en S.)

15. Demostrar las ***identidades de Green***

$$\iint_{\partial W} f \nabla g \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_W (f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g)\, dV$$

y

$$\iint_{\partial W} (f\nabla g - g\nabla f) \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_W (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\, dV.$$

16. Supongamos que $\mathbf{F}$ satisface $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$ y $\operatorname{rot}\mathbf{F} = 0$ en todo $\mathbb{R}^3$. Demostrar que podemos escribir $\mathbf{F} = \nabla f$, donde $\nabla^2 f = 0$.

17. Sea ρ una función continua en $\mathbb{R}^3$ tal que $\rho(\mathbf{q}) = 0$ excepto para $\mathbf{q}$ en alguna región W. Sea $\mathbf{q} \in W$ denotada por $\mathbf{q} = (x, y, z)$. El ***potencial*** de ρ se define como la función

$$\phi(\mathbf{p}) = \iiint_W \frac{\rho(\mathbf{q})}{4\pi\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|}\, dV(\mathbf{q}),$$

donde $\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|$ es la distancia entre $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$.

a) Usando el método del Teorema 10, demostrar que

$$\iint_{\partial W} \nabla\phi \cdot \mathbf{n}\, dS = -\iiint_W \rho\, dV$$

para aquellas regiones W que se pueden descomponer como una unión finita de regiones simétricas elementales.

b) Demostrar que ϕ satisface la ***ecuación de Poisson***

$$\nabla^2\phi = -\rho.$$

[INDICACIÓN: Utilizar el apartado (a).] (Obsérvese que si ρ es una densidad de carga, entonces la integral que define ϕ puede interpretarse como la suma de los potenciales sobre $\mathbf{p}$ debidos a cargas puntuales distribuidas sobre W, de acuerdo con la densidad ρ.)

18. Supongamos que $\mathbf{F}$ es tangente a la superficie cerrada $S = \partial W$ de una región W. Demostrar que

$$\iiint_W (\operatorname{div}\mathbf{F})\, dV = 0.$$

19. Usar la ley de Gauss y la simetría para demostrar que el campo eléctrico debido a una carga Q repartida uniformemente sobre la superficie de una esfera es el mismo en el exterior de esta superficie que el campo producido por una carga puntual Q colocada en el centro de la esfera. ¿Cuál es el campo en el interior de la esfera?

20. Reformular el Ejercicio 19 en términos de campos gravitatorios.

21. Mostrar cómo puede usarse la ley de Gauss para resolver el apartado b) del Ejercicio 25 de la Sección 8.3.

22. Sea S una superficie cerrada. Usar el teorema de Gauss para demostrar que si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial de clase C^2, entonces se tiene $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0$.

23. Sea S la superficie frontera de una región W. Demostrar que

$$\iint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, dS = 3 \text{ volumen } (W).$$

Explicar esto geométricamente.

8.5. Algunas ecuaciones diferenciales de la mecánica y la tecnología

Según se cuenta, Isaac Newton dijo: «Todo en la Naturaleza se reduce a ecuaciones diferenciales». Este punto de vista fue parafraseado por Max Planck (*véase* la *Nota Histórica* de la Sección 3.3): «[...] la Física actual, en tanto que organizada teóricamente, está completamente gobernada por un sistema de ecuaciones diferenciales espacio temporales».

En esta sección aplicamos los teoremas centrales del análisis vectorial en la deducción de las ecuaciones diferenciales que gobiernan la transmisión de calor, el electromagnetismo y el movimiento de algunos fluidos.

Tengamos en mente la importancia de estos problemas en la tecnología moderna. Por ejemplo, una buena comprensión de los fluidos y la capacidad de realizar cálculos para resolver las ecuaciones que los gobiernan está en el corazón de cómo se construye un moderno aeroplano o se diseña un submarino. Por ejemplo, el flujo del aire (el fluido en este caso) sobre las alas de un avión es muy sutil, incluso aunque las ecuaciones que lo rigen sean relativamente simples. En esta sección describiremos una forma ligeramente idealizada de esas ecuaciones. Del mismo modo, las ecuaciones del electromagnetismo, que serán discutidas en los párrafos siguientes, son un tema central en la industria de las comunicaciones; radio, televisión y el funcionamiento de los modernos aparatos electrónicos, incluyendo los computadores, depende de estas ecuaciones fundamentales y otras relacionadas.

Leyes de conservación

Como preparación para la deducción de las ecuaciones de un fluido, primero vamos a tratar una importante ecuación que se conoce como ecuación de ***conservación***. Aplicaremos estas ideas a la ecuación de la conducción del calor y al electromagnetismo.

Sea $\mathbf{V}(t, x, y, z)$ un campo vectorial de clase C^1 en $\mathbb{R}^3$ para cada t, y sea $\rho(t, x, y, z)$ una función real de clase C^1. Por la ***ley de conservación de masa*** para $\mathbf{V}$ y ρ, queremos decir que la condición

$$\frac{d}{dt}\iiint_W \rho\, dV = -\iint_{\partial W} \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\, dS$$

se satisface para todas las regiones W en $\mathbb{R}^3$, donde $\mathbf{J} = \rho\mathbf{V}$ (*véase* la Figura 8.5.1).

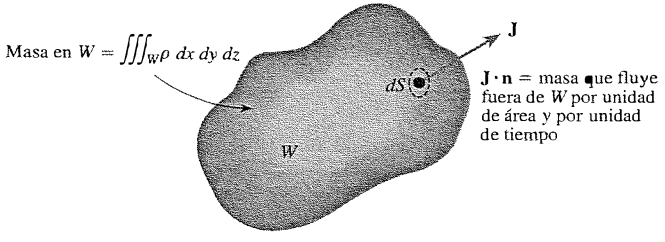


Figura 8.5.1. La tasa de cambio de masa en W es igual a la tasa con que la masa cruza ∂W.

Si pensamos en ρ como en una densidad de masa (ρ también puede ser una densidad de carga) —es decir, la masa por unidad de volumen— y en $\mathbf{V}$ como el campo de velocidades de un fluido, la condición dice simplemente que la tasa de cambio de la masa total en W es igual a la tasa con la que la masa fluye hacia dentro de W. Recordemos que $\iint_{\partial W} \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\, dS$ se denomina el *flujo* de $\mathbf{J}$. Necesitamos el resultado siguiente:

TEOREMA 11 Para $\mathbf{V}$ y ρ (un campo vectorial suave y un campo escalar sobre $\mathbb{R}^3$), la ley de conservación de masa es equivalente a la condición

$$\operatorname{div}\mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0, \tag{1}$$

es decir,

$$\rho \operatorname{div}\mathbf{V} + \mathbf{V}\cdot\nabla\rho + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0. \tag{1'}$$

Aquí, $\operatorname{div}\mathbf{J}$ significa que calculamos $\operatorname{div}\mathbf{J}$ suponiendo t fijo, y $\partial\rho/\partial t$ significa que derivamos ρ respecto de t para x, y, z fijos.

DEMOSTRACIÓN Primero observemos que derivando bajo el signo integral se obtiene

$$\frac{d}{dt}\iiint_W \rho\, dx\, dy\, dz = \iiint_W \frac{\partial\rho}{\partial t}\, dx\, dy\, dz$$

y también

$$\iint_{\partial W} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_W \operatorname{div} \mathbf{J}\, d\mathbf{V},$$

por el teorema de la divergencia. Así, la conservación de la masa es equivalente a la condición

$$\iiint_W \left(\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dx\, dy\, dz = 0.$$

Puesto que esto sucede para cualquier región W, es equivalente a $\operatorname{div} \mathbf{J} + \partial \rho / \partial t = 0$.

La ecuación $\operatorname{div} \mathbf{J} + \partial \rho / \partial t = 0$ se llama ***ecuación de continuidad***. Una observación interesante es que, usando la fórmula del cambio de variables, puede demostrarse que la ley de conservación de masas es equivalente a la condición

$$\frac{d}{dt} \iiint_{W_t} \rho\, dV = 0,$$

donde W_t es la imagen de W obtenida moviendo cada punto de W a lo largo de líneas de flujo de $\mathbf{V}$ durante un intervalo de tiempo t. Este resultado es un caso particular del teorema de transporte que discutimos a continuación.

El teorema de transporte

El teorema de transporte es una interesante aplicación del teorema de la divergencia que será necesaria en nuestra deducción de las ecuaciones de un fluido.

TEOREMA 12 Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^3$ y denotemos por $\phi(\mathbf{x}, t)$ la línea de flujo de $\mathbf{F}$ que parte de $\mathbf{x}$ transcurrido un tiempo t. (*Véase* el suplemento de Internet a la Sección 4.4 para más información.) Sea $J(\mathbf{x}, t)$ el jacobiano de la aplicación $\phi_t\colon \mathbf{x} \mapsto \phi(\mathbf{x}, t)$ para t fijo. Entonces

$$\frac{\partial}{\partial t} J(\mathbf{x}, t) = [(\operatorname{div} \mathbf{F})(\phi(\mathbf{x}, t))]\, J(\mathbf{x}, t).$$

Para una función dada $f(x, y, z, t)$ y una región $W \subset \mathbb{R}^3$, se cumple la ***ecuación de transporte***:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{W_t} f(x, y, z, t)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{W_t} \left(\frac{Df}{Dt} + f \operatorname{div} \mathbf{F} \right) dx\, dy\, dz,$$

donde $W_t = \phi_t(W)$, que es la región moviéndose con el flujo, y donde

$$\frac{Df}{Dt} = \partial f / \partial t + \nabla f \cdot \mathbf{F}$$

es la ***derivada material***.

Tomando $f = 1$, el Teorema 12 implica que las siguientes afirmaciones son equivalentes (lo que justifica el uso del término *incompresible*):

1. $\operatorname{div}\mathbf{F} = 0$.
2. volumen (W_t) = volumen (W).
3. $J(\mathbf{x}, t) = 1$.

Sean ϕ, J, $\mathbf{F}$, f, definidos anteriormente. También hay una forma vectorial del teorema de transporte, concretamente

$$\frac{d}{dt}\iiint_{W_t} (f\mathbf{F})\,dx\,dy\,dz = \iiint_{W_t}\left[\frac{\partial}{\partial t}(f\mathbf{F}) + \mathbf{F}\cdot\nabla(f\mathbf{F}) + (f\mathbf{F})\operatorname{div}\mathbf{F}\right]dx\,dy\,dz,$$

donde $\mathbf{F}\cdot\nabla(f\mathbf{F})$ denota la matriz derivada $\mathbf{D}(f\mathbf{F})$, de dimensión 3×3, actuando sobre el vector columna $\mathbf{F}$; en coordenadas cartesianas, $\mathbf{F}\cdot\nabla\mathbf{G}$ es el vector cuya i-ésima componente es:

$$\sum_{j=1}^{3} F_j \frac{\partial G^i}{\partial x_j} = F_1\frac{\partial G^i}{\partial x} + F_2\frac{\partial G^i}{\partial y} + F_3\frac{\partial G^i}{\partial z}.$$

Dejaremos al lector las pruebas de estos resultados, que son extensiones de los argumentos usados en la demostración del Teorema 11 (*véanse* los ejercicios).

Deducción de las ecuaciones de Euler para un fluido perfecto

La ecuación de continuidad es insuficiente para determinar completamente el movimiento de un fluido —necesitamos otras condiciones.

Los fluidos gobernados por la ecuación de continuidad pueden ser compresibles. Si $\operatorname{div}\mathbf{V} = 0$ (el caso incompresible) y ρ es constante, la Ecuación (1′) se cumple automáticamente. Pero en general, incluso para fluidos incompresibles, la ecuación no es automática porque ρ puede depender de (x, y, z) y t. Así, incluso si se satisface la ecuación $\operatorname{div}\mathbf{V} = 0$, puede suceder que $\operatorname{div}(\rho\mathbf{V}) \neq 0$.

Aquí analizamos la ecuación de Euler para un fluido perfecto. Consideramos un fluido no viscoso que se mueve en el espacio según un campo de velocidades $\mathbf{V}$. Cuando afirmamos que el fluido es perfecto, queremos decir que si W es cualquier porción del fluido, la presión actúa sobre la frontera de W a lo largo de la dirección normal. Suponemos que la fuerza por unidad de área actuando sobre ∂W es $-p\mathbf{n}$, donde $p(x, y, z, t)$ es una función llamada la *presión* (*véase* la Figura 8.5.2). Así, la presión total actuando sobre W es:

$$\mathbf{F}_{\partial W} = \text{fuerza} = -\iint_{\partial W} p\mathbf{n}\,dS.$$

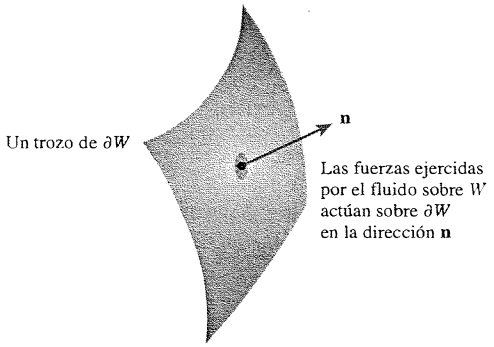


Figura 8.5.2. La fuerza que actúa sobre ∂W por unidad de área es $-p\mathbf{n}$.

Esta cantidad es *vectorial*; la i-ésima componente de $\mathbf{F}_{\partial W}$ es la integral de la i-ésima componente de $p\mathbf{n}$ sobre la superficie ∂W (que es, por tanto, la integral de superficie de una función real). Si $\mathbf{e}$ es un vector fijo cualquiera en el espacio, tenemos

$$\mathbf{F}_{\partial W} \cdot \mathbf{e} = -\iint_{\partial W} p\mathbf{e} \cdot \mathbf{n}\, dS,$$

que es la integral de una función escalar sobre ∂W. Por el teorema de la divergencia y la identidad (7) de la tabla de identidades vectoriales (Sección 4.4), obtenemos

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{F}_{\partial W} = -\iiint_W \operatorname{div}(p\mathbf{E})\, dx\, dy\, dz = -\iiint_W (\operatorname{grad} p) \cdot \mathbf{E}\, dx\, dy\, dz,$$

de modo que

$$\mathbf{F}_{\partial W} = -\iiint_W \nabla p\, dx\, dy\, dz.$$

Ahora aplicamos la *segunda ley de Newton* a una región móvil W_t. Como en el teorema de transporte $W_t = \phi_t(W)$, donde $\phi_t(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}, t)$ denota el flujo de $\mathbf{V}$. La tasa de cambio del momento del fluido en W_t es igual a la fuerza actuando sobre él:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{W_t} p\mathbf{V}\, dx\, dy\, dz = \mathbf{F}_{\partial W_t} = \iiint_{W_t} \nabla p\, dx\, dy\, dz.$$

Aplicamos la forma vectorial del teorema de transporte al miembro de la izquierda, para obtener

$$\iiint_{W_t} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{V}) + \mathbf{V} \cdot \nabla(\rho\mathbf{V}) + p\mathbf{V} \operatorname{div} \mathbf{V} \right] dx\, dy\, dz = -\iiint_{W_t} \nabla p\, dx\, dy\, dz.$$

Puesto que la región W_t es arbitraria, esto es equivalente a

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mathbf{V}) + \mathbf{V} \cdot \nabla(\rho\mathbf{V}) + \rho\mathbf{V} \operatorname{div} \mathbf{V} = -\nabla p.$$

Simplificando mediante la ecuación de continuidad, es decir, la Fórmula (1'), resulta

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V}\cdot\nabla\mathbf{V}\right) = -\nabla p. \tag{2}$$

Ésta es la ***ecuación de Euler para un fluido perfecto***. Para los fluidos compresibles, p es una función dada dependiente de ρ (por ejemplo, para muchos gases $p = A\rho^{\gamma}$, con A y γ constantes). Por otro lado, si el fluido es incompresible, ρ se determina a partir de la condición $\operatorname{div}\mathbf{V} = 0$. Entonces, las Ecuaciones (1) y (2) gobiernan el movimiento del fluido.

Nota Histórica

Las ecuaciones que describen el movimiento de un fluido fueron deducidas originalmente por Leonhard Euler en 1755, en un trabajo titulado «Principios generales del movimiento de los fluidos». Euler realizó contribuciones fundamentales en mecánica, así como un voluminoso trabajo en matemáticas puras, una pequeña parte del cual ya ha sido analizado en este libro; inició esencialmente el área de la mecánica analítica (en contraposición a los métodos de geometría euclídea usados por Newton). Es el responsable de las ecuaciones del sólido rígido (ecuaciones que se aplican, por ejemplo, al estudio del movimiento de los satélites) y de la formulación de muchas de las ecuaciones básicas de la mecánica en términos de principios variacionales, es decir, según los métodos de máximos y mínimos de funciones con valores reales. Euler escribió el primer texto exhaustivo sobre el cálculo diferencial y contribuyó prácticamente a todas las ramas de las matemáticas. Escribió varios libros y cientos de artículos de investigación incluso después de perder completamente la vista, y se hallaba trabajando en un nuevo tratado sobre mecánica de fluidos en el momento de su muerte en 1783. Las ecuaciones de Euler para un fluido fueron finalmente modificadas por Navier y Stokes para incluir los efectos de la viscosidad; las ecuaciones de Navier-Stokes resultantes están descritas en cualquier texto de mecánica de fluidos[7]. Por supuesto, Stokes también es responsable del desarrollo del teorema de Stokes, ¡uno de los principales resultados analizados en este texto!

La conservación de la energía y la deducción de la ecuación del calor

Si $T(t, x, y, z)$ (una función de clase C^2) denota la temperatura de un cuerpo en el instante t, entonces ∇T representa el gradiente de temperaturas: el calor «fluye» según el campo vectorial $-\nabla T = \mathbf{F}$. Obsérvese que ∇T apunta en la dirección en la que T *crece*. Puesto que el calor fluye desde las zonas calientes a las frías, hemos incorporado un signo menos, para reflejar este hecho observable físicamente. La densidad de energía, es decir, la energía por unidad de volumen, es $c\rho_0 T$, donde c es una constante (denominada el calor específico) y ρ_0 es la densidad de masa,

[7] La Fundación Clay ha ofrecido un premio de un millón de dólares para cualquiera que demuestre que para las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles, datos regulares en el instante $t = 0$ producen soluciones regulares para todo $t > 0$.

que suponemos constante. (Aceptamos estas afirmaciones de la física elemental.) El ***vector flujo de energía*** se define como $\mathbf{J} = k\mathbf{F}$, donde k es una constante llamada la ***conductividad***.

A continuación, se añade la hipótesis de que la energía se conserva. Esto significa que $\mathbf{J}$ y $\rho = c\rho_0 T$ deben obedecer la ley de conservación de masas, con ρ jugando el papel de «masa» (obsérvese que es *densidad de energía*, no masa); es decir,

$$\frac{d}{dt}\iiint_W \rho\, dV = -\iint_{\partial W} \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\, dS.$$

Por el Teorema 11, esta identidad es equivalente a

$$\operatorname{div}\mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Pero

$$\operatorname{div}\mathbf{J} = \operatorname{div}(-k\nabla T) = -k\nabla^2 T.$$

(Recuérdese que $\nabla^2 T = \partial^2 T/\partial x^2 + \partial^2 T/\partial y^2 + \partial^2 T/\partial z^2$ y ∇^2 es el operador de Laplace.) Continuando, tenemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial (c\rho_0 T)}{\partial t} = c\rho_0 \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Así, la ecuación $\operatorname{div}\mathbf{J} + \partial\rho/\partial t = 0$ se convierte en:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{c\rho_0}\nabla^2 T = \kappa\nabla^2 T, \tag{3}$$

donde $\kappa = k/c\rho_0$ se denomina la ***difusividad***. La Ecuación (3) es la importante ***ecuación del calor***.

Así como las Ecuaciones (1) y (2) rigen el flujo de un fluido ideal, la Ecuación (3) gobierna la conducción del calor, en el sentido siguiente: dada una distribución inicial de temperaturas $T(0, x, y, z)$, hay una única $T(t, x, y, z)$ que satisface la Ecuación (3). En otras palabras, la condición inicial en $t = 0$ da el resultado para $t > 0$. Obsérvese que si T no cambia con el tiempo (el caso estacionario), entonces debemos tener $\nabla^2 T = 0$ (ecuación de Laplace).

Las ecuaciones de Maxwell y la predicción de ondas de radio: comienza la revolución de las comunicaciones

A continuación volvemos a las *ecuaciones de Maxwell*, que rigen la propagación de campos electromagnéticos. La forma de estas ecuaciones depende de las unidades físicas que estemos usando, y los cambios de unidades hacen aparecer factores como 4π y la velocidad de la luz. Nosotros elegiremos el sistema en el cual las ecuaciones de Maxwell sean lo más simples posible.

Sean $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ funciones de clase C^1 de (t, x, y, z), que son campos vectoriales para cada t. Diremos (por definición) que satisfacen las ecuaciones de ***Maxwell con densidad de carga*** $\rho(t, x, y, z)$ y ***densidad de corriente*** $\mathbf{J}(t, x, y, z)$ cuando se cumplan las siguientes condiciones:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \text{ (ley de Gauss)}, \tag{4}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \text{ (no hay fuentes del campo magnético)}, \tag{5}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{0} \text{ (ley de Faraday)} \tag{6}$$

y

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J} \text{ (ley de Ampère)}. \tag{7}$$

De estas leyes, las Ecuaciones (4) y (6) fueron descritas en forma integral en las Secciones 8.2 y 8.4; históricamente, aparecieron en esta forma como leyes empíricas. La ley de Ampère fue mencionada en un caso particular en el Ejemplo 7.14 de la Sección 7.2.

Físicamente, se interpreta $\mathbf{E}$ como el ***campo eléctrico*** y $\mathbf{H}$ como el ***campo magnético***. Según las ecuaciones anteriores, conforme avanza el tiempo t, estos campos interactúan entre sí, y con las cargas y corrientes que estén presentes. Por ejemplo, la propagación de ondas electromagnéticas (señales de televisión, ondas de radio, la luz solar, etc.) en el vacío está gobernada por esas ecuaciones, con $\mathbf{J} = 0$ y $\rho = 0$.

Puesto que $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$, podemos aplicar el Teorema 8 (de la Sección 8.3) para concluir que $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$ para algún campo vectorial $\mathbf{A}$ (estamos suponiendo que $\mathbf{H}$ está definido en todo $\mathbb{R}^3$ para cada instante t). El campo vectorial $\mathbf{A}$ no es único, y podemos elegir indistintamente $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f$ para cualquier función $f(t, x, y, z)$, porque $\nabla \times \nabla f = 0$. (Esta libertad en la elección de $\mathbf{A}$ se denomina libertad en la elección de la *función gauge*.) Para una elección cualquiera de $\mathbf{A}$, según la Ecuación (6) tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} \\ &= \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ &= \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Aplicando el Teorema 7 (de la Sección 8.3), existe una función con valores reales ϕ definida en $\mathbb{R}^3$ tal que

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi.$$

Sustituyendo esta ecuación y $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$ en la Ecuación (7), y usando la identidad vectorial (cuya prueba se deja como ejercicio)

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A},$$

obtenemos

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi\right)$$

$$= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\phi).$$

Así,

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mathbf{J} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\phi).$$

Esto es,

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mathbf{J} + \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\partial \phi}{\partial t}\right). \tag{8}$$

Usando de nuevo la ecuación $\mathbf{E} + \partial\mathbf{A}/\partial t = -\nabla\phi$ y la ecuación $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$, obtenemos

$$\rho = \nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left(-\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = -\nabla^2\phi - \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{A})}{\partial t}.$$

Es decir,

$$\nabla^2\phi = -\rho - \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{A})}{\partial t}. \tag{9}$$

A continuación, utilizaremos la libertad en nuestra elección de $\mathbf{A}$. Imponemos la «condición»

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0. \tag{10}$$

Debemos estar seguros de que podemos hacer esto. Suponiendo que hemos tomado $\mathbf{A}_0$ y la correspondiente ϕ_0, ¿podemos elegir una nueva $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \nabla f$ y por tanto una nueva ϕ tales que $\nabla \cdot \mathbf{A} + \partial\phi/\partial t = 0$? Con esta nueva $\mathbf{A}$, la nueva ϕ es $\phi_0 - \partial f/\partial t$; dejamos la comprobación como ejercicio para el lector. Entonces, la Ecuación (10) se transforma en

$$0 = \nabla \cdot (\mathbf{A}_0 + \nabla f) + \frac{\partial(\phi_0 - \partial f/\partial t)}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{A}_0 + \nabla^2 f + \frac{\partial \phi_0}{\partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

o

$$\nabla^2 f - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\left(\nabla \cdot \mathbf{A}_0 + \frac{\partial \phi_0}{\partial t}\right). \tag{11}$$

Así, para ser capaces de elegir $\mathbf{A}$ y ϕ de modo que se satisfaga $\nabla \cdot \mathbf{A} + \partial\phi/\partial t = 0$, debemos ser capaces de resolver la Ecuación (11) para f. En efecto, esto se puede hacer bajo condiciones generales, aunque no lo demostraremos aquí. La Ecuación (11) se llama ***ecuación de ondas no homogénea.***

Si aceptamos que $\mathbf{A}$ y ϕ pueden elegirse de modo que se cumpla $\nabla \cdot \mathbf{A} + \partial\phi/\partial t = 0$, entonces las Ecuaciones (8) y (9) para $\mathbf{A}$ y ϕ se convierten en

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mathbf{J}; \tag{8'}$$

$$\nabla^2\phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\rho. \tag{9'}$$

Recíprocamente, si $\mathbf{A}$ y ϕ satisfacen las ecuaciones $\nabla \cdot \mathbf{A} + \partial\phi/\partial t = 0$, $\nabla^2\phi - \partial^2\phi/\partial t^2 = -\rho$ y $\nabla^2\mathbf{A} - \partial^2\mathbf{A}/\partial t^2 = -\mathbf{J}$, entonces $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$ y $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$ satisfacen las ecuaciones de Maxwell. *Por tanto, este procedimiento «reduce» las ecuaciones de Maxwell al estudio de la ecuación de ondas*[8].

Desde el siglo XVIII, las soluciones de la ecuación de ondas se han estudiado ampliamente (se aprenden en la mayoría de los cursos de ecuaciones diferenciales). Para indicar la naturaleza ondulatoria de las soluciones, por ejemplo, obsérvese que para cualquier función f,

$$\phi(t, x, y, z) = f(x - t)$$

es solución de la ecuación de ondas $\nabla^2\phi - (\partial^2\phi/\partial t^2) = 0$. Esta solución simplemente propaga la gráfica de f como una onda; por tanto, podemos conjeturar que las soluciones de las ecuaciones de Maxwell tienen una naturaleza ondulatoria. Históricamente, todo esto fue la gran aportación de Maxwell y condujo rápidamente a Hertz al descubrimiento de las ondas de radio. Citando las *Lecciones de Física* de Feynman (vol. II):

> Cuando la historia de la humanidad pueda verse con la suficiente perspectiva —digamos, por ejemplo, dentro de diez mil años a partir de ahora— seguramente habrá muy pocas dudas de que el descubrimiento por parte de Maxwell de las leyes de la electrodinámica será juzgado como el acontecimiento más importante del siglo diecinueve. La guerra civil norteamericana parecerá una insignificancia provinciana en comparación con este importante acontecimiento científico de la misma década.

Las matemáticas muestran de nuevo su extraña capacidad no sólo para *describir*, sino también para *predecir* los fenómenos naturales.

Hay otras técnicas (llamadas «métodos de la función de Green») para tratar las ecuaciones básicas de la mecánica y la física matemática que también se basan en el cálculo vectorial. Algunos de estos métodos se presentan en el suplemento de Internet de este libro.

EJERCICIOS

1. Usar un argumento directo (o bien la prueba del Teorema 1 en el suplemento de Internet a la Sección 4.4) para demostrar que

$$\frac{\partial}{\partial t} J(\mathbf{x}, t) = [(\operatorname{div}\mathbf{F})(\phi(\mathbf{x}, t))]\, J(\mathbf{x}, t).$$

2. Usando el teorema del cambio de variables y el Ejercicio 1, demostrar que dada una función $f(x, y, z, t)$ y una región arbitraria $W \subset \mathbb{R}^3$, se satisface la ***ecuación de transporte***

$$\frac{d}{dt}\iiint_{W_t} f(x, y, z, t)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{W_t} \left(\frac{Df}{Dt} + f \operatorname{div}\mathbf{F}\right) dx\, dy\, dz,$$

[8] Hay variantes de este procedimiento. Para mayores detalles, *véase* por ejemplo G. F. D. Duff y D. Naylor, *Differential Equations of Applied Mathematics*, Wiley, New York, 1966, o bien libros sobre teoría electromagnética, tales como J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Wiley, New York, 1962.

donde $W_t = \phi_t(W)$ es la región que se mueve con el flujo, y donde $Df/Dt = \partial f/\partial t + \nabla f \cdot \mathbf{F}$ es la derivada material.

3. Utilizar la ecuación de transporte para demostrar que

$$\frac{d}{dt}\iiint_{W_t} \rho\, dx\, dy\, dz = 0$$

es equivalente a la ley de conservación de masa.

4. Usando el Ejercicio 3 y el teorema del cambio de variables, demostrar que $\rho(\mathbf{x}, t)$ puede expresarse en términos del Jacobiano $J(\mathbf{x}, t)$ del flujo $\phi(\mathbf{x}, t)$ y de $\rho(\mathbf{x}, 0)$ mediante la ecuación

$$\rho(\mathbf{x}, t)\, J(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, 0).$$

¿Qué puede deducirse a partir de esto para los flujos incompresibles?

5. Demostrar la forma vectorial del teorema de transporte, es decir

$$\frac{d}{dt}\iiint_{W_t} (f\mathbf{F})\, dx\, dy\, dz = \iiint_{W_t} \left[\frac{\partial}{\partial t}(f\mathbf{F}) + \mathbf{F}\cdot\nabla(f\mathbf{F}) + (f\mathbf{F})\operatorname{div}\mathbf{F}\right] dx\, dy\, dz,$$

donde $\mathbf{F}\cdot\nabla(f\mathbf{F})$ denota la matriz 3×3 de derivadas $\mathbf{D}(f\mathbf{F})$ actuando sobre el vector columna $\mathbf{F}$; en coordenadas cartesianas, $\mathbf{F}\cdot\nabla\mathbf{G}$ es el vector cuya i-ésima componente es

$$\sum_{j=1}^{3} F_j \frac{\partial G^i}{\partial x_j} = F_1 \frac{\partial G^i}{\partial x} + F_2 \frac{\partial G^i}{\partial y} + F_3 \frac{\partial G^i}{\partial z}.$$

6. Sea $\mathbf{V}$ un campo vectorial que genera un flujo $\phi(\mathbf{x}, t)$, y supongamos que $\mathbf{V}$ y ρ cumplen la ley de conservación de masa. Sea W_t la región transportada por el flujo. Demostrar la siguiente versión del teorema de transporte:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{W_t} \rho f\, dx\, dy\, dz = \iiint_{W_t} \rho \frac{Df}{Dt}\, dx\, dy\, dz.$$

7. (*Ley de Bernoulli*) **a)** Supongamos que $\mathbf{V}$ y ρ satisfacen la ley de conservación de masa y la Ecuación (2) (ecuación de Euler para un fluido perfecto). Supongamos que $\mathbf{V}$ es irrotacional y por tanto tenemos $\mathbf{V} = \nabla\phi$ para alguna función ϕ. Demostrar que si C es una trayectoria que conecta dos puntos P_1 y P_2 entonces

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\|\mathbf{V}\|^2\right)\Bigg|_{P_1}^{P_2} + \int_C \frac{dp}{\rho} = 0.$$

[INDICACIÓN: Puede ser necesaria la identidad vectorial $(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} = \frac{1}{2}\nabla(\|\mathbf{V}\|^2) + (\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V}$.]

b) Si en a) $\mathbf{V}$ es estacionario —es decir, $\partial\mathbf{V}/\partial t = 0$— y ρ es constante, demostrar que

$$\frac{1}{2}\|\mathbf{V}\|^2 + \frac{p}{\rho}$$

es constante en el espacio. Deducir que, en esta situación, las *presiones altas* están asociadas con *velocidades del fluido bajas*.

8. Utilizando el Ejercicio 7, demostrar que si ϕ satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2\phi = 0$, entonces $\mathbf{V} = \nabla\phi$ es una solución estacionaria de la ecuación de Euler para un fluido perfecto e incompresible con densidad constante.

9. Comprobar que las ecuaciones de Maxwell implican la ecuación de continuidad para $\mathbf{J}$ y ρ.

10. Para una distribución de cargas estacionaria y una distribución de corriente de divergencia cero, los campos eléctrico y magnético $\mathbf{E}(x, y, z)$ y $\mathbf{H}(x, y, z)$ satisfacen

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \qquad \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \qquad \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \qquad \text{y} \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}.$$

Aquí, suponemos que $\rho = \rho(x, y, z)$ y $\mathbf{J}(x, y, z)$ son conocidos. La radiación que los campos producen a través de una superficie S está determinada por un campo vectorial de densidad del flujo de radiación, llamado el campo vectorial de ***Poynting***,

$$\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}.$$

a) Si S es una superficie cerrada, demostrar que el flujo de radiación —es decir, el flujo de $\mathbf{P}$ a través de S— viene dado por

$$\iint_S \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = -\iiint_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}\, dV,$$

donde V es la región encerrada por S.

b) Ejemplos de tales campos son

$$\mathbf{E}(x, y, z) = z\mathbf{j} + y\mathbf{k} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{H}(x, y, z) = -xy\mathbf{i} + x\mathbf{j} + yz\mathbf{k}.$$

En este caso, hallar el flujo del vector de Poynting a través de la superficie hemisférica mostrada en la Figura 8.5.3 (obsérvese que se trata de una superficie *abierta*).

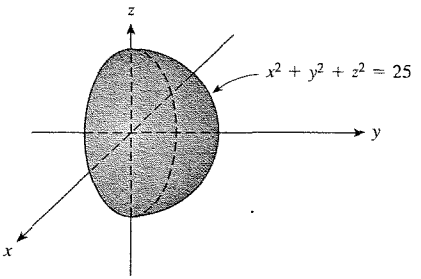


Figura 8.5.3. La superficie del Ejercicio 10.

c) Los campos vectoriales de b) producen un campo vectorial de Poynting que pasa a través de la superficie toroidal mostrada en la Figura 8.5.4. ¿Cuál es el flujo a través de ese toro?

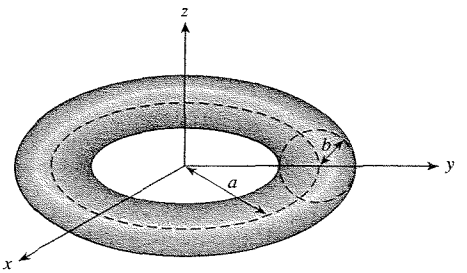


Figura 8.5.4. La superficie del Ejercicio 10 c).

8.6. Formas diferenciales

La teoría de formas diferenciales proporciona una elegante manera de unificar los teoremas de Green, Stokes y Gauss como un único resultado, ***el teorema fundamental del cálculo***. El nacimiento del concepto de forma diferencial es otro claro ejemplo de cómo las matemáticas hablan a los matemáticos y dirigen su propio desarrollo. Estos tres teoremas son, en realidad, generalizaciones del teorema fundamental del cálculo de Newton y Leibniz para funciones de una variable,

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a),$$

a dos y tres dimensiones.

Recordemos que Bernhard Riemann creó el concepto de espacio n-dimensional. Si el teorema fundamental del cálculo fuera realmente *fundamental*, entonces debería ser generalizable a dimensiones arbitrarias. Pero, ¡un momento! El producto vectorial, y por tanto el rotacional, no se extienden a dimensiones superiores, como señalamos en la nota a pie de página 3, en la Sección 1.3; por tanto, se necesita alguna idea nueva.

Recordemos que Hamilton estuvo buscando durante casi quince años sus cuaterniones, que finalmente le condujeron al descubrimiento del producto vectorial. ¿Qué es lo que nos está diciendo la no existencia de un producto vectorial en dimensiones superiores? Si el teorema fundamental del cálculo es el concepto clave, esto sugiere la existencia de un lenguaje matemático en el cual pudiera ser formulado en un contexto n-dimensional. Para conseguir esto, los matemáticos se dieron cuenta de que estaban obligados a abandonar los vectores, y avanzar hacia el descubrimiento del espacio dual y un objeto matemático completamente nuevo, las *formas diferenciales*. En este nuevo lenguaje, los teoremas de Green, Stokes y Gauss tienen la misma elegante y extraordinariamente simple forma.

Enunciado de manera sencilla y muy breve, una expresión del tipo $P\,dx + Q\,dy$ es una 1-forma, o una 1-*forma diferencial* en una región en el plano xy, y $F\,dx\,dy$ es una 2-forma. Análogamente, podemos definir la noción de n-forma. Existe una operación d, que lleva n-formas en $n + 1$-formas. Es una especie de rotacional generalizado y tiene la propiedad de que para $\omega = P\,dx + Q\,dy$, tenemos

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

y así, con esta notación, el teorema de Green se transforma en

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega,$$

que, curiosamente, simplemente cambia el operador de frontera ∂ por el operador d. Sin embargo, las formas diferenciales son algo más que simple notación. Crean una bella teoría que puede generalizarse al caso n-dimensional.

En general, si M es una superficie orientada de dimensión n con una frontera $(n-1)$-dimensional ∂M y si ω es una $(n-1)$-forma sobre M, entonces el teorema fundamental del cálculo (también llamado *teorema de Stokes generalizado*) dice que

$$\boxed{\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.}$$

Una cosa útil para el lector es considerar en este punto en qué sentido el teorema fundamental del cálculo es un caso particular de este resultado.

En esta sección, haremos una exposición muy elemental de la teoría de las formas diferenciales. Puesto que nuestro objetivo principal es demostrar que los teoremas de Green, Gauss y Stokes se pueden unificar en un mismo enunciado, nos daremos por satisfechos con una versión de estos teoremas que no es la más general posible. Además, presentaremos las formas diferenciales de una manera puramente axiomática y no constructiva, evitando así el tremendo número de preliminares algebraicos que habitualmente se requieren para su construcción. Para el purista, nuestro enfoque estará lejos de ser completo, pero para el estudiante será comprensible. Esperamos que motive a algunos estudiantes para profundizar más allá en la teoría de las formas diferenciales.

Empezaremos presentando el concepto de 0-forma.

0-formas

Sea K un conjunto abierto en $\mathbb{R}^3$. Una 0-***forma*** sobre K es una función con valores reales $f: K \to \mathbb{R}$. Cuando derivemos f una vez, supondremos que es de clase C^1, y si la derivamos dos veces, supondremos que es de clase C^2.

Dadas dos 0-formas f_1 y f_2 definidas sobre K, podemos sumarlas de la manera usual, obteniendo una nueva 0-forma $f_1 + f_2$, o multiplicarlas entre sí para obtener una 0-forma $f_1 f_2$.

EJEMPLO 8.20 $f_1(x, y, z) = xy + yz$, y $f_2(x, y, z) = y \operatorname{sen} xz$ son 0-formas sobre $\mathbb{R}^3$:

$$(f_1 + f_2)(x, y, z) = xy + yz + y \operatorname{sen} xz$$

y,

$$(f_1 f_2)(x, y, z) = y^2 x \operatorname{sen} xz + y^2 z \operatorname{sen} xz.$$

1-formas

Las **1-*formas básicas*** son las expresiones dx, dy y dz. Por el momento, las consideraremos sólo como símbolos formales. Una **1-*forma*** ω sobre un conjunto abierto K es una combinación lineal formal

$$\omega = P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz,$$

o simplemente

$$\omega = P\, dx + Q\, dy + R\, dz,$$

donde P, Q y R son funciones con valores reales definidas sobre K. Por la expresión $P\, dx$ denotaremos la 1-forma $P\, dx + 0 \cdot dy + 0 \cdot dz$, y análogamente para $Q\, dy$, y $R\, dz$. Además, el orden de $P\, dx$, $Q\, dy$ y $R\, dz$ es indiferente, de manera que

$$P\, dx + Q\, dy + R\, dz = R\, dz + P\, dx + Q\, dy, \text{ etc.}$$

Dadas dos 1-formas $\omega_1 = P_1\,dx + Q_1\,dy + R_1\,dz$ y $\omega_2 = P_2\,dx + Q_2\,dy + R_2\,dz$, podemos sumarlas para obtener una nueva 1-forma $\omega_1 + \omega_2$ definida por

$$\omega_1 + \omega_2 = (P_1 + P_2)\,dx + (Q_1 + Q_2)\,dy + (R_1 + R_2)\,dz,$$

y dada una 0-forma f, podemos construir la 1-forma $f\omega_1$ definida por

$$f\omega_1 = (fP_1)\,dx + (fQ_1)\,dy + (fR_1)\,dz.$$

EJEMPLO 8.21 Sean $\omega_1 = (x + y^2)\,dx + (zy)\,dy + (e^{xyz})\,dz$ y $\omega_2 = \operatorname{sen} y\,dx + \operatorname{sen} x\,dy$ dos 1-formas. Entonces

$$\omega_1 + \omega_2 = (x + y^2 + \operatorname{sen} y)\,dx + (zy + \operatorname{sen} x)\,dy + (e^{xyz})\,dz.$$

Si $f(x, y, z) = x$, entonces

$$f\omega_2 = x \operatorname{sen} y\,dx + x \operatorname{sen} x\,dy.$$

2-formas

Las ***2-formas básicas*** son las expresiones formales $dx\,dy$, $dy\,dz$ y $dz\,dx$. Estas expresiones deben ser interpretadas como productos de dx con dy, dy con dz y dz con dx.

Una ***2-forma*** η sobre K es una expresión formal

$$\eta = F\,dx\,dy + G\,dy\,dz + H\,dz\,dx,$$

donde F, G y H son funciones con valores reales sobre K. El orden de $F\,dx\,dy$, $G\,dy\,dz$ y $H\,dz\,dx$ es indiferente; por ejemplo,

$$F\,dx\,dy + G\,dy\,dz + H\,dz\,dx = H\,dz\,dx + F\,dx\,dy + G\,dy\,dz, \text{ etc.}$$

En este punto, es útil observar que en una 2-forma las 1-formas básicas dx, dy, dz aparecen siempre en pares cíclicos (*véase* la Figura 8.6.1), es decir, $dx\,dy$, $dy\,dz$, y $dz\,dx$.

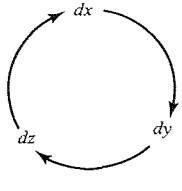


Figura 8.6.1. El orden cíclico de dx, dy, y dz.

Por analogía con las 0-formas y las 1-formas, podemos sumar dos 2-formas

$$\eta_i = F_i\,dx\,dy + G_i\,dy\,dz + H_i\,dz\,dx,$$

$i = 1$ y 2, para obtener una nueva 2-forma

$$\eta_1 + \eta_2 = (F_1 + F_2)\,dx\,dy + (G_1 + G_2)\,dy\,dz + (H_1 + H_2)\,dz\,dx.$$

Asimismo, si f es una 0-forma y η es una 2-forma, podemos tomar el producto

$$f\eta = (fF)\,dx\,dy + (fG)\,dy\,dz + (fH)\,dz\,dx.$$

Finalmente, con la expresión $F\,dx\,dy$ denotaremos la 2-forma $F\,dx\,dy + 0 \cdot dy\,dz + 0 \cdot dz\,dx$.

EJEMPLO 8.22 Las expresiones:

$$\eta_1 = x^2\,dx\,dy + y^3x\,dy\,dz + \operatorname{sen} zy\,dz\,dx$$

y,

$$\eta_2 = y\,dy\,dz$$

son 2-formas. Su suma es

$$\eta_1 + \eta_2 = x^2\,dx\,dy + (y^3x + y)\,dy\,dz + \operatorname{sen} zy\,dz\,dx.$$

Si $f(x, y, z) = xy$, entonces

$$f\eta_2 = xy^2\,dy\,dz.$$

3-formas

Una ***3-forma básica*** es una expresión formal $dx\,dy\,dz$ (en este específico orden cíclico, como en la Figura 8.6.1). Una ***3-forma*** v sobre un conjunto abierto $K \subset \mathbb{R}^3$ es una expresión de la forma $v = f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$, donde f es una función con valores reales sobre K.

Podemos sumar dos 3-formas y podemos multiplicarlas por 0-formas de la manera obvia. Aparentemente, hay poca diferencia entre una 0-forma y una 3-forma, puesto que ambas involucran una única función con valores reales; pero las distinguiremos con un propósito que se verá claramente cuando multipliquemos y derivemos formas diferenciales.

EJEMPLO 8.23 Sean $v_1 = y\,dx\,dy\,dz$, $v_2 = e^{x^2}\,dx\,dy\,dz$ y $f(x, y, z) = xyz$. Entonces $v_1 + v_2 = (y + e^{x^2})\,dx\,dy\,dz$ y $fv_1 = y^2xz\,dx\,dy\,dz$.

Aunque podemos sumar dos 0-formas, dos 1-formas, dos 2-formas o dos 3-formas, no necesitaremos sumar una k-forma y una j-forma si $k \neq j$. Por ejemplo, no necesitaremos escribir

$$f(x, y, z)\,dx\,dy + g(x, y, z)\,dz.$$

Ahora que hemos definido estos objetos formales (formas), podemos preguntarnos legítimamente para qué valen, cómo se usan y, quizás lo más importante, qué significan. La respuesta a la primera pregunta aparecerá claramente según avancemos en el estudio, pero podemos describir inmediatamente cómo se usan y cómo se interpretan.

Una función con valores reales sobre un dominio K en $\mathbb{R}^3$ es una regla que asigna un número real a cada punto de K. Las formas diferenciales son, en cierto sentido, generalizaciones de las funciones con valores reales que hemos estudiado en el cálculo diferencial. En efecto, las 0-formas sobre un conjunto abierto K son simplemente funciones sobre K. Así, una 0-forma f lleva puntos de K en números reales.

Nos gustaría interpretar las k-formas diferenciales (para $k \geq 1$) no como funciones sobre puntos en K, sino como funciones sobre objetos geométricos tales como curvas y superficies. Muchos de los antiguos geómetras griegos interpretaban las rectas y curvas como si estuvieran compuestas por infinitos puntos, y los planos y superficies como si estuvieran compuestos por infinitas curvas. En consecuencia, hay al menos una justificación histórica para aplicar esta jerarquía geométrica a la interpretación de las formas diferenciales.

Dado un subconjunto abierto $K \subset \mathbb{R}^3$, distinguiremos cuatro tipos de subconjuntos de K (*véase* la Figura 8.6.2):

i) puntos en K,

ii) curvas orientadas simples y curvas orientadas cerradas simples, C, en K,

iii) superficies orientadas $S \subset K$,

iv) subregiones elementales, $R \subset K$.

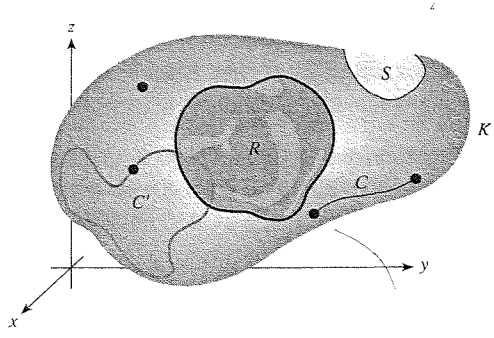


Figura 8.6.2. Los cuatro tipos geométricos de subconjuntos de un conjunto abierto $K \subset \mathbb{R}^3$ a los cuales se aplica la teoría de las formas diferenciales.

Integrales de 1-formas sobre curvas

Comenzaremos con las 1-formas. Sea

$$\omega = P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$$

una 1-forma sobre K, y sea C una curva orientada simple como en la Figura 8.6.2. El número real que ω asigna a C está dado por la fórmula

$$\int_C \omega = \int_C P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz. \tag{1}$$

Recordemos (*véase* la Sección 7.2) que esta integral se evalúa de la forma siguiente. Supongamos que $\mathbf{c}$: $[a, b] \to K$, $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ es una parametrización de C que preserva la orientación. Entonces

$$\int_C \omega = \int_{\mathbf{c}} \omega = \int_a^b \left[P(x(t), y(t), z(t)) \frac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t), z(t)) \frac{dy}{dt} + R(x(t), y(t), z(t)) \frac{dz}{dt} \right] dt.$$

El Teorema 1 de la Sección 7.2 garantiza que $\int_C \omega$ no depende de la elección de la parametrización $\mathbf{c}$.

Así, podemos interpretar una 1-forma ω sobre K como una regla que asigna un número real a cada curva orientada $C \subset K$; una 2-forma η se interpretará análogamente como una regla que asigna un número real a cada superficie orientada $S \subset K$; y una 3-forma ν será una regla que asigna un número real a cada subregión elemental de K. Las reglas para asociar números reales con curvas, superficies y regiones están completamente contenidas en las expresiones formales que hemos definido.

EJEMPLO 8.24 Sea $\omega = xy\,dx + y^2\,dy + dz$ una 1-forma sobre $\mathbb{R}^3$, y sea C la curva simple orientada en $\mathbb{R}^3$ descrita mediante la parametrización $\mathbf{c}(t) = (t^2, t^3, 1)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. C está orientada eligiendo como dirección positiva aquella en la que $\mathbf{c}(t)$ recorre la curva cuando t va desde 0 hasta 1. Entonces, según la Fórmula (1),

$$\int_C \omega = \int_0^1 [t^5(2t) + t^6(3t^2) + 0]\,dt = \int_0^1 (2t^6 + 3t^8)\,dt = \frac{13}{21}.$$

Así, esta 1-forma ω asigna a cada curva orientada simple y a cada curva cerrada orientada simple C en $\mathbb{R}^3$ el número $\int_C \omega$.

Integrales de 2-formas sobre superficies

Una 2-forma η sobre un conjunto abierto $K \subset \mathbb{R}^3$ puede interpretarse análogamente como una función que asocia cada superficie orientada $S \subset K$ con un número real. Esto se consigue mediante la noción de integración de 2-formas sobre superficies. Sea

$$\eta = F(x, y, z)\,dx\,dy + G(x, y, z)\,dy\,dz + H(x, y, z)\,dz\,dx$$

una 2-forma sobre K, y sea $S \subset K$ una superficie orientada parametrizada mediante una función $\mathbf{\Phi}$: $D \to \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbf{\Phi}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ (*véase* la Sección 7.3).

DEFINICIÓN Si S es una tal superficie y η es una 2-forma sobre K, definimos $\iint_S \eta$ mediante la fórmula

$$\begin{aligned}\iint_S \eta &= \iint_S F\,dx\,dy + G\,dy\,dz + H\,dz\,dx \\ &= \iint_D \left[F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right. \\ &\quad + G(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \\ &\quad \left. + H(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right] du\,dv,\end{aligned} \tag{2}$$

donde

$$\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \qquad \frac{\partial(y,\ z)}{\partial(u,\ v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \qquad \frac{\partial(z,\ x)}{\partial(u,\ v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Si S está compuesta por varios trozos S_i, $i = 1, \ldots, k$, como en la Figura 8.4.4, cada uno con su propia parametrización $\mathbf{\Phi}_i$, definimos

$$\iint_S \eta = \sum_{i=1}^{k} \iint_{S_i} \eta.$$

Se debería verificar que $\iint_S \eta$ no depende de la elección de la parametrización $\mathbf{\Phi}$. Este resultado está contenido esencialmente (pero no de manera obvia) em el Teorema 4 de la Sección 7.6.

EJEMPLO 8.25 Sea $\eta = z^2\, dx\, dy$ una 2-forma sobre $\mathbb{R}^3$, y sea S la semiesfera superior de radio 1 en $\mathbb{R}^3$. Hallar $\iint_S \eta$.

Solución

Parametricemos S mediante

$$\mathbf{\Phi}(u,\ v) = (\operatorname{sen} u \cos v,\ \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v,\ \cos u),$$

donde $(u,\ v) \in D = [0,\ \pi/2] \times [0,\ 2\pi]$. Por la Fórmula (2),

$$\iint_S \eta = \iint_D \cos^2 u \left[\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}\right] du\, dv,$$

donde

$$\frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)} = \begin{vmatrix} \cos u \cos v & -\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ \cos u \operatorname{sen} v & \operatorname{sen} u \cos v \end{vmatrix}$$

$$= \operatorname{sen} u \cos u \cos^2 v + \cos u \operatorname{sen} u \operatorname{sen}^2 v = \operatorname{sen} u \cos u.$$

Por tanto,

$$\iint_S \eta = \iint_D \cos^2 u \cos u \operatorname{sen} u\, du\, dv$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^3 u \operatorname{sen} u\, du\, dv = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{\cos^4 u}{4}\right]_0^{\pi/2} dv = \frac{\pi}{2}.$$

EJEMPLO 8.26 Evaluar $\iint_S x\,dy\,dz + y\,dx\,dy$, donde S es la superficie orientada descrita por la parametrización $x = u + v$, $y = u^2 - v^2$, $z = uv$, donde $(u, v) \in D = [0, 1] \times [0, 1]$.

Solución

Por definición, tenemos

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ v & u \end{vmatrix} = 2(u^2 + v^2);$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2u & -2v \end{vmatrix} = -2(u + v).$$

En consecuencia,

$$\iint_S x\,dy\,dz + y\,dx\,dy = \iint_D [(u + v)(2)(u^2 + v^2) + (u^2 - v^2)(-2)(u + v)]\,du\,dv$$

$$= 4\iint_D (v^3 + uv^2)\,du\,dv = 4\int_0^1 \int_0^1 (v^3 + uv^2)\,du\,dv$$

$$= 4\int_0^1 \left[uv^3 + \frac{u^2v^2}{2}\right]_0^1 dv = 4\int_0^1 \left(v^3 + \frac{v^2}{2}\right) dv$$

$$= \left[v^4 + \frac{2v^3}{3}\right]_0^1 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}.$$

Integrales de 3-formas sobre regiones

Finalmente, debemos interpretar las 3-formas como funciones sobre las subregiones elementales de K. Sea $v = f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ una 3-forma y sea $R \subset K$ una subregión elemental de K. Entonces, para cada $R \subset K$ asignamos el número

$$\iiint_R v = \iiint_R f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz, \tag{3}$$

que es simplemente la integral triple ordinaria de f sobre R, tal como fue descrita en la Sección 5.5.

EJEMPLO 8.27 Supongamos $v = (x + z)\,dx\,dy\,dz$ y $R = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. Evaluar $\iiint_R v$.

Solución

Calculamos:

$$\iiint_R v = \iiint_R (x + z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x + z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + zx\right]_0^1 dy\,dz = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + z\right) dy\,dz = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + z\right) dz$$

$$= \left[\frac{z}{2} + \frac{z^2}{2}\right]_0^1 = 1.$$

El álgebra de las formas diferenciales

Estudiaremos ahora el álgebra (o reglas de multiplicación) de formas diferenciales lo que, juntamente con las reglas de derivación de formas, nos permitirá enunciar los teoremas de Green, Stokes y Gauss en términos de formas diferenciales.

Si ω es una k-forma y η es una l-forma sobre K, con $0 \leqslant k + l \leqslant 3$, existe un producto denominado ***producto exterior*** $\omega \wedge \eta$ de ω y η que es una $k + l$ forma sobre K. El producto exterior satisface las siguientes leyes:

i) Para cada k, existe una k-forma nula, denotada por 0, con la propiedad de que $0 + \omega = \omega$ para toda k-forma ω, y $0 \wedge \eta = 0$ para toda l-forma η, si $0 \leqslant k + l \leqslant 3$.

ii) (*Distributiva*) Si f es una 0-forma, entonces

$$(f\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = f(\omega_1 \wedge \eta) + (\omega_2 \wedge \eta).$$

iii) (*Anticonmutativa*) $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl}(\eta \wedge \omega)$.

iv) (*Asociativa*) Si $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ son k_1, k_2, k_3 formas, respectivamente, con $k_1 + k_2 + k_3 \leqslant 3$, entonces

$$\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) = (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3.$$

v) (*Homogeneidad con respecto a las funciones*) Si f es una 0-forma, entonces

$$\omega \wedge (f\eta) = (f\omega) \wedge \eta = f(\omega \wedge \eta).$$

Obsérvese que en realidad la regla v) se deduce de las reglas (ii) y (iii).

vi) Se cumplen las siguientes reglas para la multiplicación de 1-formas:

$$dx \wedge dy = dx\,dy,$$

$$dy \wedge dx = -dx\,dy = (-1)(dx \wedge dy),$$

$$dy \wedge dz = dy\,dz = (-1)(dz \wedge dy),$$

$$dz \wedge dx = dz\,dx = (-1)(dx \wedge dz),$$

$$dx \wedge dx = 0,\ dy \wedge dy = 0,\ dz \wedge dz = 0,$$

$$dx \wedge (dy \wedge dz) = (dx \wedge dy) \wedge dz = dx\,dy\,dz.$$

vii) Si f es una 0-forma y ω es una k-forma cualquiera, entonces $f \wedge \omega = f\omega$.

Usando las leyes de la i) a la vii), podemos hallar ahora un único producto de cualquier l-forma η con cualquier k-forma ω, si $0 \leqslant k + l \leqslant 3$.

EJEMPLO 8.28 Demostrar que $dx \wedge dy\,dz = dx\,dy\,dz$.

Solución

Por la regla vi), $dy\,dz = dy \wedge dz$. Por tanto,

$$dx \wedge dy\,dz = dx \wedge (dy \wedge dz) = dx\,dy\,dz.$$

EJEMPLO 8.29 Si $\omega = x\,dx + y\,dy$, y $\eta = zy\,dx + xz\,dy + xy\,dz$, calcular $\omega \wedge \eta$.

Solución

Calculando $\omega \wedge \eta$, resulta

$$\begin{aligned}
\omega \wedge \eta &= (x\,dx + y\,dy) \wedge (zy\,dx + xz\,dy + xy\,dz) \\
&= [(x\,dx + y\,dy) \wedge (zy\,dx)] + [(x\,dx + y\,dy) \wedge (xz\,dy)] \\
&\quad + [(x\,dx + y\,dy) \wedge (xy\,dz)] \\
&= xyz(dx \wedge dx) + zy^2(dy \wedge dx) + x^2z(dx \wedge dy) + xyz(dy \wedge dy) \\
&\quad + x^2y(dx \wedge dz) + xy^2(dy \wedge dz) \\
&= -zy^2\,dx\,dy + x^2z\,dx\,dy - x^2y\,dz\,dx + xy^2\,dy\,dz \\
&= (x^2z - y^2z)\,dx\,dy - x^2y\,dz\,dx + xy^2\,dy\,dz.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 8.30 Si $\omega = x\,dx - y\,dy$, y $\eta = x\,dy\,dz + z\,dx\,dy$, calcular $\omega \wedge \eta$.

Solución

$$\begin{aligned}
\omega \wedge \eta &= (x\,dx - y\,dy) \wedge (x\,dy\,dz + z\,dx\,dy) \\
&= [(x\,dx - y\,dy) \wedge (x\,dy\,dz)] + [(x\,dx - y\,dy) \wedge (z\,dx\,dy)] \\
&= (x^2\,dx \wedge dy\,dz) - (xy\,dy \wedge dy\,dz) + (xz\,dx \wedge dx\,dy) \\
&\quad - (yz\,dy \wedge dx\,dy) \\
&= [x^2\,dx \wedge (dy \wedge dz)] - [xy\,dy \wedge (dy \wedge dz)] + [xz\,dx \wedge (dx \wedge dy)] \\
&\quad - [yz\,dy \wedge (dx \wedge dy)] \\
&= x^2\,dx\,dy\,dz - [xy(dy \wedge dy) \wedge dz] + [xz(dx \wedge dx) \wedge dy] \\
&\quad - [yz(dy \wedge dx) \wedge dy] \\
&= x^2\,dx\,dy\,dz - xy(0 \wedge dz) + xz(0 \wedge dy) + [yz(dy \wedge dy) \wedge dx] \\
&= x^2\,dx\,dy\,dz.
\end{aligned}$$

El último paso importante en el desarrollo de esta teoría es definir cómo derivar formas. La derivada de una k-forma es una $(k+1)$-forma si $k < 3$, y la derivada de una 3-forma es siempre cero. Si ω es una k-forma, denotaremos la derivada de ω por $d\omega$. La operación d tiene las propiedades siguientes:

1. Si $f\colon K \to \mathbb{R}$ es una 0-forma, entonces
$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz.$$
2. (*Linealidad*) Si ω_1 y ω_2 son k-formas, entonces
$$d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2.$$
3. Si ω es una k-forma y η es una l-forma,
$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega \wedge \eta) + (-1)^k(\omega \wedge d\eta).$$
4. $d(d\omega) = 0$ y $d(dx) = d(dy) = d(dz) = 0$ o, simplemente, $d^2 = 0$.

Las propiedades (1) a (4) proporcionan información suficiente como para definir de manera única la derivada de cualquier forma.

EJEMPLO 8.31 Sea $\omega = P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy$ una 1-forma sobre algún conjunto abierto $K \subset \mathbb{R}^3$. Calcular $d\omega$.

Solución

$$\begin{aligned}
&d[P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy] \\
&= d[P(x, y, z) \wedge dx] + d[Q(x, y, z) \wedge dy] && \text{(usando 2)} \\
&= (dP \wedge dx) + [P \wedge d(dx)] + (dQ \wedge dy) + [Q \wedge d(dy)] && \text{(usando 3)}
\end{aligned}$$

$$= (dP \wedge dx) + (dQ \wedge dy) \qquad \text{(usando 4)}$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\,dx + \frac{\partial P}{\partial y}\,dy + \frac{\partial P}{\partial z}\,dz\right) \wedge dx$$

$$+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx + \frac{\partial Q}{\partial y}\,dy + \frac{\partial Q}{\partial z}\,dz\right) \wedge dy \qquad \text{(usando 1)}$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\,dx \wedge dx\right) + \left(\frac{\partial P}{\partial y}\,dy \wedge dx\right) + \left(\frac{\partial P}{\partial z}\,dz \wedge dx\right)$$

$$+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\,dx \wedge dy\right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\,dy \wedge dy\right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial z}\,dz \wedge dy\right)$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial P}{\partial z}\,dz\,dx + \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy - \frac{\partial Q}{\partial z}\,dy\,dz$$

$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy + \frac{\partial P}{\partial z}\,dz\,dx - \frac{\partial Q}{\partial z}\,dy\,dz.$$

EJEMPLO 8.32 Sea f una 0-forma. Usando únicamente las reglas de derivación (1) a (3), y el hecho de que $d(dx) = d(dy) = d(dz) = 0$, demostrar que $d(df) = 0$.

Solución

Por la regla (1),

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz,$$

y por tanto

$$d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\,dx\right) + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\,dy\right) + d\left(\frac{\partial f}{\partial z}\,dz\right).$$

Trabajando sólo con el primer sumando y usando la regla (3), obtenemos

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\,dx\right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x} \wedge dx\right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial x} \wedge d(dx)$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\,dz\right) \wedge dx + 0$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\,dy \wedge dx + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\,dz \wedge dx$$

$$= -\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\,dz\,dx.$$

Análogamente, se puede demostrar que

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\,dy\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,dx\,dy - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\,dy\,dz$$

y

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial z}\,dz\right) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\,dz\,dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\,dy\,dz.$$

Sumando estos tres términos, obtenemos $d(df) = 0$, por la igualdad de las derivadas parciales cruzadas.

EJEMPLO 8.33 Demostrar que $d(dx\,dy)$, $d(dy\,dz)$ y $d(dz\,dx)$ son cero.

Solución

Para demostrar el primer caso, usamos la Propiedad (3):

$$d(dx\,dy) = d(dx \wedge dy) = [d(dx) \wedge dy - dx \wedge d(dy)] = 0.$$

Los otros casos son similares.

EJEMPLO 8.34 Si $\eta = F(x, y, z)\,dx\,dy + G(x, y, z)\,dy\,dz + H(x, y, z)\,dz\,dx$, hallar $d\eta$.

Solución

Por la Propiedad (2),

$$d\eta = d(F\,dx\,dy) + d(G\,dy\,dz) + d(H\,dz\,dx).$$

Calcularemos $d(F\,dx\,dy)$. Utilizando nuevamente la Propiedad (3), obtenemos

$$d(F\,dx\,dy) = d(F \wedge dx\,dy) = dF \wedge (dx\,dy) + F \wedge d(dx\,dy).$$

Según el Ejemplo 8.33, $d(dx\,dy) = 0$, de modo que nos queda calcular

$$\begin{aligned} dF \wedge (dx\,dy) &= \left(\frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy + \frac{\partial F}{\partial z}\,dz\right) \wedge (dx \wedge dy) \\ &= \left[\frac{\partial F}{\partial x}\,dx \wedge (dx \wedge dy)\right] + \left[\frac{\partial F}{\partial y}\,dy \wedge (dx \wedge dy)\right] \\ &\quad + \left[\frac{\partial F}{\partial z}\,dz \wedge (dx \wedge dy)\right]. \end{aligned}$$

Ahora

$$dx \wedge (dx \wedge dy) = (dx \wedge dx) \wedge dy = 0 \wedge dy = 0,$$

$$dy \wedge (dx \wedge dy) = -dy \wedge (dy \wedge dx) = -(dy \wedge dy) \wedge dx = 0 \wedge dx = 0,$$

y

$$dz \wedge (dx \wedge dy) = (-1)^2 (dx \wedge dy) \wedge dz = dx\,dy\,dz.$$

En consecuencia

$$d(F\,dx\,dy) = \frac{\partial F}{\partial z}\,dx\,dy\,dz.$$

Análogamente, resulta

$$d(G\,dy\,dz) = \frac{\partial G}{\partial x}\,dx\,dy\,dz \qquad \text{y} \qquad d(H\,dz\,dx) = \frac{\partial H}{\partial y}\,dx\,dy\,dz.$$

Por tanto,

$$d\eta = \left(\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y}\right) dx\,dy\,dz.$$

Ya hemos desarrollado todos los conceptos necesarios para reformular los teoremas de Green, Stokes y Gauss en el lenguaje de las formas diferenciales.

TEOREMA 13: Teorema de Green Sea D una región elemental en el plano xy, con ∂D orientada en el sentido contrario al de las agujas del reloj. Supongamos que $\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)\,dy$ es una 1-forma sobre algún conjunto abierto K en $\mathbb{R}^3$ que contiene a D. Entonces

$$\int_{\partial D} \omega = \iint_D d\omega.$$

Aquí, $d\omega$ es una 2-forma sobre K, y D es en efecto una superficie en $\mathbb{R}^3$ parametrizada por $\mathbf{\Phi}$: $D \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{\Phi}(x, y) = (x, y, 0)$. Puesto que P y Q son funciones que no dependen de la variable z, entonces $\partial P/\partial z$ y $\partial Q/\partial z = 0$, y según el Ejemplo 8.31, $d\omega = (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)\,dx\,dy$. En consecuencia, el Teorema 13 no quiere decir más que

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

que es precisamente el teorema de Green. Por tanto, el Teorema 13 está demostrado. Análogamente, tenemos los teoremas siguientes.

TEOREMA 14: Teorema de Stokes Sea S una superficie orientada en $\mathbb{R}^3$, cuya frontera consiste en una curva simple cerrada ∂S (Figura 8.6.3) orientada como la frontera de S (*véase* la Figura 8.2.1). Supongamos que ω es una 1-forma sobre algún conjunto abierto K que contiene a S. Entonces

$$\int_{\partial S} \omega = \iint_S d\omega.$$

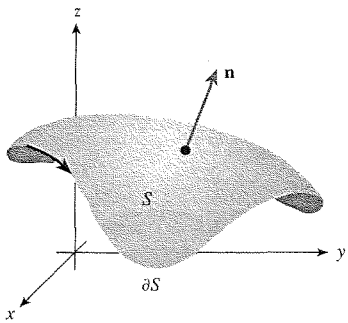


Figura 8.6.3. Una superficie orientada sobre la que el teorema de Stokes es aplicable.

TEOREMA 15: Teorema de Gauss Sea $W \subset \mathbb{R}^3$ una región elemental con ∂W orientada según la orientación exterior (*véase* la Sección 8.4). Si η es una 2-forma sobre alguna región K que contiene a W, entonces

$$\iint_{\partial W} \eta = \iiint_W d\eta.$$

Probablemente, el lector habrá observado la fuerte semejanza en los enunciados de estos teoremas. En las formulaciones basadas en los campos vectoriales, utilizamos la divergencia para las regiones en $\mathbb{R}^3$ (teorema de Gauss), y el rotacional para superficies en $\mathbb{R}^3$ (teorema de Stokes) y regiones en $\mathbb{R}^2$ (teorema de Green). Aquí, simplemente usamos la notación unificada de derivada de una forma diferencial para los tres teoremas; y, en efecto, podemos enunciar todos los teoremas como uno solo introduciendo un poco más de terminología.

Por una 2-variedad orientada con frontera en $\mathbb{R}^3$ entenderemos una superficie en $\mathbb{R}^3$ cuya frontera es una curva cerrada simple con una orientación como la descrita en la Sección 8.2. Por una 3-variedad orientada en $\mathbb{R}^3$ entenderemos una región elemental en $\mathbb{R}^3$ (y suponemos que su frontera, que es una superficie, está orientada según la orientación exterior estudiada en la Sección 8.4). Llamaremos al siguiente teorema unificado «teorema de Stokes», como se hace habitualmente.

TEOREMA 16: Teorema general de Stokes Sea M una k-variedad orientada en $\mathbb{R}^3$ ($k = 2$ o 3) contenida en algún conjunto abierto K. Supongamos que ω es una $(k-1)$-forma sobre K. Entonces

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega.$$

Aquí, la integral se interpretará como simple, doble o triple, según corresponda. En efecto, ésta es la forma del teorema de Stokes que se generaliza a espacios de dimensión arbitraria.

EJERCICIOS

1. Evaluar $\omega \wedge \eta$ si:

a) $\omega = 2x\,dx + y\,dy$, $\eta = x^3\,dx + y^2\,dy$.

b) $\omega = x\,dx - y\,dy$, $\eta = y\,dx + x\,dy$.

c) $\omega = x\,dx + y\,dy + z\,dz$, $\eta = z\,dx\,dy + x\,dy\,dz + y\,dz\,dx$.

d) $\omega = xy\,dy\,dz + x^2\,dx\,dy$, $\eta = dx + dz$.

e) $\omega = e^{xyz}\,dx\,dy$, $\eta = e^{-xyz}\,dz$.

2. Demostrar que

$$(a_1\,dx + a_2\,dy + a_3\,dz) \wedge (b_1\,dy\,dz + b_2\,dz\,dx + b_3\,dx\,dy) = \left(\sum_{i=1}^{3} a_i b_i\right) dx\,dy\,dz.$$

3. Hallar $d\omega$ en los ejemplos siguientes:

a) $\omega = x^2y + y^3$.

b) $\omega = y^2 \cos x\,dy + xy\,dx + dz$.

c) $\omega = xy\,dy + (x + y)^2\,dx$.

d) $\omega = x\,dx\,dy + z\,dy\,dz + y\,dz\,dx$.

e) $\omega = (x^2 + y^2)\,dy\,dz$.

f) $\omega = (x^2 + y^2 + z^2)\,dz$.

g) $\omega = \dfrac{-x}{x^2 + y^2}\,dx + \dfrac{y}{x^2 + y^2}\,dy$.

h) $\omega = x^2y\,dy\,dz$.

4. Sea $\mathbf{V}$: $K \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial definido por $\mathbf{V}(x, y, z) = G(x, y, z)\mathbf{i} + H(x, y, z)\mathbf{j} + F(x, y, z)\mathbf{k}$, y sea η una 2-forma sobre K dada por

$$\eta = F\,dx\,dy + G\,dy\,dz + H\,dz\,dx.$$

Demostrar que $d\eta = (\operatorname{div} \mathbf{V})\,dx\,dy\,dz$.

5. Si $\mathbf{V} = A(x, y, z)\mathbf{i} + B(x, y, z)\mathbf{j} + C(x, y, z)\mathbf{k}$ es un campo vectorial sobre $K \subset \mathbb{R}^3$, definimos la operación Form_2: campos vectoriales $\to$ 2-formas mediante

$$\text{Form}_2(\mathbf{V}) = A\,dy\,dz + B\,dz\,dx + C\,dx\,dy.$$

a) Demostrar que $\text{Form}_2(\alpha\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) = \alpha\,\text{Form}_2(\mathbf{V}_1) + \text{Form}_2(\mathbf{V}_2)$, donde α es un número real.

b) Demostrar que $\text{Form}_2(\operatorname{rot} \mathbf{V}) = d\omega$, donde $\omega = A\,dx + B\,dy + C\,dz$.

6. Utilizando la versión para formas diferenciales del teorema de Stokes, demostrar la versión para campos vectoriales de la Sección 8.2. Hacer lo mismo con el teorema de Gauss.

7. Interpretar el Teorema 16 en el caso $k = 1$.

8. Sea $\omega = (x + y)\,dz + (y + z)\,dx + (x + z)\,dy$ y sea S la parte superior de la esfera unidad; es decir, S es el conjunto de puntos (x, y, z) con $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $z \geqslant 0$. ∂S es la circunferencia unidad en el plano xy. Calcular $\int_{\partial S} \omega$ directamente, y mediante el teorema de Stokes.

9. Sea T el tetraedro limitado por el plano xy, el plano xz, el plano yz, y el plano $2x + 3y + 6z = 12$. Calcular

$$\iint_{\partial T} F_1\,dx\,dy + F_2\,dy\,dz + F_3\,dz\,dx$$

directamente, y mediante el teorema de Gauss, si

a) $F_1 = 3y$, $F_2 = 18z$, $F_3 = -12$; y

b) $F_1 = z$, $F_2 = x^2$, $F_3 = y$.

10. Evaluar $\iint_S \omega$, donde $\omega = z\,dx\,dy + x\,dy\,dz + y\,dz\,dx$ y S es la esfera unidad, directamente y mediante el teorema de Gauss.

11. Sea R una región elemental en $\mathbb{R}^3$. Demostrar que el volumen de R viene dado por la fórmula

$$v(R) = \frac{1}{3}\iint_{\partial R} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy.$$

12. En la Sección 4.2 vimos que la longitud $l(\mathbf{c})$ de una curva $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$, venía dada por la fórmula

$$l(\mathbf{c}) = \int d\mathbf{s} = \int_a^b \left(\frac{ds}{dt}\right) dt$$

donde, de manera informal, $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$, es decir

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

A continuación, supongamos que una superficie S viene dada en forma parametrizada por $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, donde $(u, v) \in D$. Demostrar que el área de S puede expresarse como

$$A(S) = \iint_D dS,$$

donde formalmente $(dS)^2 = (dx \wedge dy)^2 + (dy \wedge dz)^2 + (dz \wedge dx)^2$, una fórmula que requiere una explicación. [INDICACIÓN:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv,$$

y análogamente para dy y para dz. Utilizar las leyes de las formas diferenciales para las 1-formas básicas du y dv. Entonces, dS resulta ser una función multiplicada por la 2-forma básica $du\,dv$, que podemos integrar sobre D.]

EJERCICIOS DE REPASO DEL CAPÍTULO 8

1. Sea $\mathbf{F} = 2yz\mathbf{i} + (-x + 3y + 2)\mathbf{j} + (x^2 + z)\mathbf{k}$. Evaluar $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$, donde S es el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leq z \leq 1$, sin las tapas superior e inferior. ¿En qué cambiaría el resultado si se incluyeran estas dos tapas?

2. Sea W una región en $\mathbb{R}^3$ con frontera ∂W. Demostrar la identidad:

$$\iint_{\partial W} [\mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G})] \cdot dS = \iiint_W (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot (\nabla \times \mathbf{G})\, dV - \iiint_W \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{G})\, dV.$$

3. Sea $\mathbf{F} = x^2y\mathbf{i} + z^8\mathbf{j} - 2xyz\mathbf{k}$. Evaluar la integral de $\mathbf{F}$ sobre la superficie del cubo unidad.

4. Comprobar el teorema de Green para la integral de línea

$$\int_C x^2 y\, dx + y\, dy,$$

donde C es la frontera de la región limitada por las curvas $y = x$ e $y = x^3$, $0 \leq x \leq 1$.

5. **a)** Demostrar que $\mathbf{F} = (x^3 - 2xy^3)\mathbf{i} - 3x^2y^2\mathbf{j}$ es un campo vectorial gradiente.

b) Evaluar la integral de $\mathbf{F}$ a lo largo de la trayectoria $x = \cos^3\theta$, $y = \operatorname{sen}^3\theta$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

6. ¿Es posible deducir el teorema de Green en el plano a partir del teorema de Gauss?

7. **a)** Demostrar que $\mathbf{F} = 6xy(\cos z)\mathbf{i} + 3x^2(\cos z)\mathbf{j} - 3x^2y(\operatorname{sen} z)\mathbf{k}$ es conservativo (*véase* la Sección 8.3).

b) Hallar f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

c) Evaluar la integral de $\mathbf{F}$ a lo largo de la curva $x = \cos^3\theta$, $y = \operatorname{sen}^3\theta$, $z = 0$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

8. Sea $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$, $r = \|\mathbf{r}\|$. Demostrar que $\nabla^2(\log r) = 1/r^2$ y $\nabla^2(r^n) = n(n + 1)r^{n-2}$.

9. Supongamos que la velocidad de un fluido está descrita por $\mathbf{F} = 6xz\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$. Calcular la tasa con que el fluido está saliendo del cubo unidad.

10. Sea $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + (x^2y - 2xy)\mathbf{j} - x^2z\mathbf{k}$. ¿Existe un campo $\mathbf{G}$ tal que $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$?

11. Sea $\mathbf{a}$ un vector constante y $\mathbf{F} = \mathbf{a} \times \mathbf{r}$ [como es habitual, $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$]. ¿$\mathbf{F}$ es conservativo? En caso afirmativo, hallar un potencial.

12. (Para aquellos estudiantes que hayan estudiado la Sección 8.5.) Considerar el caso de un fluido incompresible con campo de velocidades $\mathbf{F}$ y densidad ρ.

a) Si ρ es constante para cada t fijo, demostrar que entonces ρ también es constante respecto de t.

b) Si ρ es constante respecto de t, demostrar que $\mathbf{F} \cdot \nabla\rho = 0$.

ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA

13. **a)** Sea $f(x, y, z) = 3xye^{z^2}$. Calcular ∇f.

b) Sea $\mathbf{c}(t) = (3\cos^3 t, \operatorname{sen}^2 t, e^t)$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$. Evaluar

$$\int_{\mathbf{c}} \nabla f \cdot d\mathbf{s}.$$

c) Comprobar directamente el teorema de Stokes para campos vectoriales gradiente $\mathbf{F} = \nabla f$.

14. Usando el teorema de Green, o de alguna manera alternativa, evaluar $\int_C x^3\,dy - y^3\,dx$, donde C es la circunferencia unidad $(x^2 + y^2 = 1)$.

15. Evaluar la integral $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, siendo S la superficie de la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

16. **a)** Enunciar el teorema de Stokes para superficies en $\mathbb{R}^3$.

b) Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$ que satisface $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Utilizar el teorema de Stokes para demostrar que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$, donde C es una curva cerrada.

17. Utilizar el teorema de Green para hallar el área de un lazo de la curva $x = a \operatorname{sen}\theta \cos\theta$, $y = a \operatorname{sen}^2\theta$, para $a > 0$ y $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

18. Evaluar $\int_C yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$, donde C es la curva intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y la superficie $z = y^2$.

19. Evaluar $\int_C (x + y)\,dx + (2x - z)\,dy + (y + z)\,dz$, donde C es el perímetro del triángulo que conecta $(2, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$ y $(0, 0, 6)$, en ese orden.

20. ¿Cuáles de los siguientes campos en $\mathbb{R}^3$ son conservativos? Para los que lo sean, hallar una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$.

a) $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x^2y\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$.

b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + z)\mathbf{i} - (y + z)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$.

c) $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy^3\mathbf{i} + x^2z^3\mathbf{j} + 3x^2yz^2\mathbf{k}$.

21. Considerar los dos campos vectoriales en $\mathbb{R}^3$ siguientes:

i) $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2\mathbf{i} - z^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$.

ii) $\mathbf{G}(x, y, z) = (x^3 - 3xy^2)\mathbf{i} + (y^3 - 3x^2y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

a) ¿Cuál de ellos es conservativo en $\mathbb{R}^3$ (en caso de que alguno lo sea)? (Es decir, ¿cuál es un campo gradiente?) Razonar la respuesta.

b) Hallar un potencial para los campos que sean conservativos.

c) Sea α la trayectoria que va desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 1, 1)$ siguiendo las aristas del cubo $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, yendo desde $(0, 0, 0)$ hasta $(0, 0, 1)$, luego a $(0, 1, 1)$ y finalmente a $(1, 1, 1)$. Sea β la trayectoria que va desde $(0, 0, 0)$ hasta $(1, 1, 1)$ directamente a lo largo de la diagonal del cubo. Hallar los valores de las integrales de línea

$$\int_\alpha \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \qquad \int_\alpha \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s}, \qquad \int_\beta \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}, \qquad \int_\beta \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s}.$$

22. Considerar el campo vectorial *constante* $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ en $\mathbb{R}^3$.

a) Hallar un campo escalar $\phi(x, y, z)$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $\nabla\phi = \mathbf{F}$ en $\mathbb{R}^3$ y $\phi(0, 0, 0) = 0$.

b) Encontrar todos los puntos de la esfera Σ de radio 2 y centrada en el origen tales que:

i) ϕ es máximo, y

ii) ϕ es mínimo.

c) Calcular los valores máximo y mínimo de ϕ sobre Σ.

23. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial de clase C^1, y supongamos que $\nabla \cdot \mathbf{F}(x_0, y_0, z_0) > 0$. Demostrar que para una esfera S suficientemente pequeña, centrada en (x_0, y_0, z_0), el flujo de $\mathbf{F}$ hacia el exterior de S es positivo.

24. Sea $B \subset \mathbb{R}^3$ una región plana y sea $O \in \mathbb{R}^3$ un punto. Si conectamos todos los puntos de B con el punto O obtenemos un cono, que llamamos C, con vértice en O y base B (*véase* la Figura 8.R.1). Demostrar que

$$\text{volumen}\,(C) = \frac{1}{3}\,\text{área}\,(B)\,h,$$

donde h es la distancia de O al plano que contiene a la región B, usando los siguientes pasos:

1. Supongamos que O es el origen de coordenadas. Definimos $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$. Evaluar el flujo de $\mathbf{r}$ a través de la frontera de C, es decir, $\iint_{\partial C} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, dA$, donde $\mathbf{n}$ es la normal unitaria exterior a ∂C.
2. Evaluar la divergencia de $\mathbf{r}$ en C, es decir, $\iiint_C \nabla \cdot \mathbf{r} dV$.
3. Usar el teorema de Gauss, que dice que la divergencia total de un campo vectorial en una región encerrada por una superficie es igual al flujo de ese campo vectorial a través de la frontera:

$$\iiint_C \nabla \cdot \mathbf{r}\, dV = \iint_{\partial C} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, dA.$$

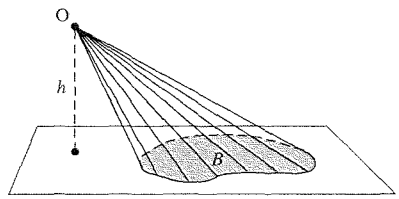


Figura 8.R.1

Respuestas a los ejercicios impares

Las soluciones que requieren demostración pueden estar incompletas o haber sido omitidas.

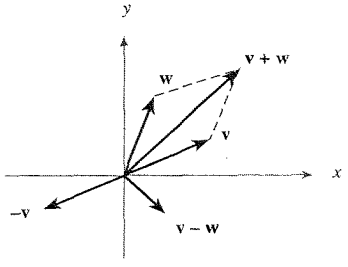
Capítulo 1

Sección 1.1

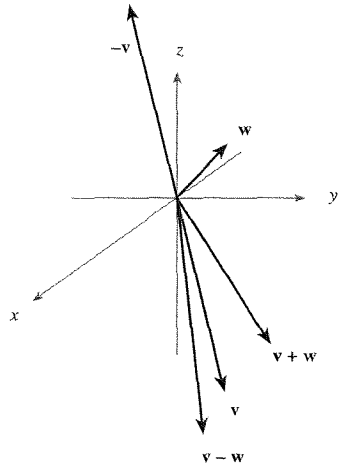
1. 4; 17

3. $(-104 + 16a, -24 - 4b, -22 + 26c)$

5.



7.



9. $x = 0, z = 0, y \in \mathbb{R}$; $x = 0, y = 0, z \in \mathbb{R}$; $y = 0, x, z \in \mathbb{R}$; $x = 0, y, z \in \mathbb{R}$

11. $\{(2s, 7s + 2t, 7t) \mid s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}\}$

13. $\mathbf{l}(t) = -\mathbf{i} + (t - 1)\mathbf{j} - \mathbf{k}$

15. $\mathbf{l}(t) = (2t - 1)\mathbf{i} - \mathbf{j} + (3t - 1)\mathbf{k}$

17. $\{s\mathbf{i} + 3s\mathbf{k} - 2t\mathbf{j} \mid 0 \leqslant s \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant 1\}$

19. Si (x, y, z) está en la recta, se tiene $x = 2 + t$, $y = -2 + t$ y $z = -1 + t$. Entonces, $2x - 3y + z - 2 = 4 + 2t + 6 - 3t - 1 + t - 2 = 7$, que no es cero. Por lo tanto, ningún (x, y, z) satisface ambas condiciones.

21. Sí.

23. El conjunto de vectores de la forma

$$\mathbf{v} = p\mathbf{a} + q\mathbf{b} + r\mathbf{c}$$

donde $0 \leqslant p \leqslant 1$, $0 \leqslant q \leqslant 1$, y $0 \leqslant r \leqslant 1$.

25. Todos los puntos de la forma

$$(x_0 + t(x_1 - x_0) + s(x_2 - x_0),\ y_0 + t(y_1 - y_0) + s(y_2 - y_0),\ z_0 + t(z_1 - z_0) + s(z_2 - z_0)).$$

donde t y s son números reales.

27. Si un vértice se coloca en el origen y los dos lados adyacentes son $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, el nuevo triángulo tiene lados $b\mathbf{u}$, $b\mathbf{v}$ y $b(\mathbf{u} - \mathbf{v})$.

29. $(1, 0, 1) + (0, 2, 1) = (0, 2, 0) + (1, 0, 2)$.

31. Dos de estas rectas (hay otras muchas) son $x = 1$, $y = t$, $z = t$ y $x = 1$, $y = t$, $z = -t$.

Sección 1.2

1. 6

3. 99°

5. No, es 75,7; sería cero sólo cuando los vectores fueran paralelos.

7. $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{5}$, $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -3$

9. $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{11}$, $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{62}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -14$

11. $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{14}$, $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{26}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -17$

13. En el Ejercicio 9, $\arccos(-14/\sqrt{11}\sqrt{62})$; en el Ejercicio 10, $\pi/2$; y en el 11, $\arccos(-17/\sqrt{14}\sqrt{26})$.

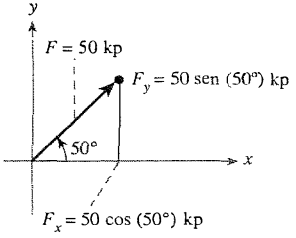
15. $-4(-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})/3$

17. Cualquier (x, y, z) con $x + y + z = 0$; por ejemplo, $(1, -1, 0)$ y $(0, 1, -1)$.

19. $\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\theta \approx 0{,}24$ radianes hacia el este a partir del norte.

21. **a)** 12:03 h de la mañana **b)** 4,95 km

23.



25. (4,9, 4,9, 4,9) y (−4,9, −4,9, 4,9) N

27. **a)** $\mathbf{F} = (3\sqrt{2}\mathbf{i} + 3\sqrt{2}\mathbf{j})$ **b)** $\approx 0{,}322$ radianes o $18{,}4°$ **c)** $18\sqrt{2}$

Sección 1.3

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -8, \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8$

3. $-3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

5. $\sqrt{35}$

7. 10

9. $\pm\mathbf{k}$

11. $\pm(113\mathbf{i} + 17\mathbf{j} - 103\mathbf{k})/\sqrt{23.667}$

13. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 6$; $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{6}$; $\|\mathbf{v}\| = 3$; $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$

15. **a)** $x + y + z - 1 = 0$ **c)** $5x + 2z = 25$

b) $x + 2y + 3z - 6 = 0$ **d)** $x + 2y - 3z = 13$

17. **a)** Los planos paralelos $Ax + By + Cz + D = 0$ y $\sigma Ax + \sigma By + \sigma Cz + D' = 0$ son idénticos cuando $D' = \sigma D$, y si esto no sucede nunca se cortan.

b) En una recta.

19. La recta $x = t$, $y = 2t$, $z = -5t$.

21. **a)** Hacer el primero manipulando cada lado en coordenadas, y después utilizar que

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = -(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a}$$

para obtener el segundo.

b) Utilizar las identidades de a) para escribir las cantidades en términos de productos escalares.

c) Utilizar las identidades de a) y simplificar.

23. Calcular los resultados con la regla de Cramer y comprobar que satisfacen la ecuación.

25. $x - 2y + 3z + 12 = 0$

27. $4x - 6y - 10z = 14$

29. $10x - 17y + z + 25 = 0$

31. Por el Ejercicio 19 de la Sección 1.1 observar que $(2, -3, 1) \cdot (1, 1, 1) = 0$; por tanto la recta y el plano son paralelos, y $(2, -2, -1)$ no está en el plano. Por el Ejercicio 20 de la Sección 1.1, la recta y el plano son paralelos y $(1, -1, 2)$ *pertenece* al plano.

33. $\sqrt{2}/13$

35. **a)** Demostrar que $\mathbf{M}$ satisface las propiedades geométricas de $\mathbf{R} \times \mathbf{F}$. **b)** $2\sqrt{3}$

37. Demostrar que $n_1(\mathbf{N} \times \mathbf{a})$ y $n_2(\mathbf{N} \times \mathbf{b})$ tienen la misma longitud y sentido.

39. Un método consiste en escribir todos los términos en la parte izquierda y observar que todos los términos que contienen λ se cancelan. Otro método es observar primero que el determinante es lineal por filas y por columnas, y *si* una fila o columna se repite, la respuesta es cero. Entonces,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + \lambda a_1 & b_2 + \lambda b_1 & c_2 + \lambda c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Sección 1.4

1. **a)**

Cilíndricas

r	θ	z
1	45°	1
2	$\pi/2$	-4
0	45°	10
3	$\pi/6$	4
1	$\pi/6$	0
2	$3\pi/4$	-2

Rectangulares

x	y	z
$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
0	2	-4
0	0	10
$3\sqrt{3}/2$	$3/2$	4
$\sqrt{3}/2$	$\frac{1}{2}$	0
$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	-2

Esféricas

ρ	θ	ϕ
$\sqrt{2}$	45°	45°
$2\sqrt{5}$	$\pi/2$	$\pi - \arccos(2\sqrt{5}/5)$
10	45°	0
5	$\pi/6$	$\arccos\frac{4}{5}$
1	$\pi/6$	$\pi/2$
$2\sqrt{2}$	$3\pi/4$	$3\pi/4$

b)

Rectangulares

x	y	z
2	1	-2
0	3	4
$\sqrt{2}$	1	1
$-2\sqrt{3}$	-2	3

Esféricas

ρ	θ	ϕ
3	$\arctan\frac{1}{2}$	$\pi - \arccos(2/3)$
5	$\pi/2$	$\arccos(4/5)$
2	$\arctan(\sqrt{2}/2)$	$\pi/3$
5	$7\pi/6$	$\arccos\frac{3}{5}$

Cilíndricas

r	θ	z
$\sqrt{5}$	$\text{arctang}\frac{1}{2}$	-2
3	$\pi/2$	4
$\sqrt{3}$	$\text{arctang}(\sqrt{2}/2)$	1
4	$7\pi/6$	3

3. **a)** Rotación por π alrededor del eje z.
b) Simetría con respecto al plano xy.
c) Rotación de $\pi/2$ alrededor del eje z con una expansión radial con factor 2.

5. No; (ρ, θ, ϕ) y $(-\rho, \theta + \pi, \pi + \phi)$ representan el mismo punto.

7. **a)** $\mathbf{e}_\rho = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})/\rho$

$\mathbf{e}_\theta = (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})/\sqrt{x^2 + y^2} = (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})/r$

$\mathbf{e}_\phi = (xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} - (x^2 + y^2)\mathbf{k})/r\rho$

b) $\mathbf{e}_\theta \times \mathbf{j} = -y\mathbf{k}/\sqrt{x^2 + y^2}$, $\mathbf{e}_\phi \times \mathbf{j} = (xz/r\rho)\mathbf{k} + (r/\rho)\mathbf{i}$

9. **a)** La longitud de $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + k\mathbf{z}$ es $(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = \rho$

b) $\cos\phi = z/(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ **c)** $\cos\theta = x/(x^2 + y^2)^{1/2}$

11. $0 \leqslant r \leqslant a$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ significa que (r, θ, z) está dentro del cilindro con radio a con eje en z, y $|z| \leqslant b$ significa que la distancia al plano xy es como máximo b.

13. $-d/(6\cos\phi) \leqslant \rho \leqslant d/2$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, y $\pi - \arccos(\frac{1}{3}) \leqslant \phi \leqslant \pi$

15. Ésta es una superficie cuya sección transversal con cada esfera $z = c$ es una rosa de cuatro pétalos. Los pétalos disminuyen hacia cero cuando $|c|$ varía desde 0 hasta 1.

Sección 1.5

1. 7

3. $|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| = 10 = \sqrt{5}\sqrt{20} = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$, por tanto $|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \leqslant \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ es cierto.

$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = 3\sqrt{5} = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$, por tanto $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ es cierto.

5. $|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| = 5 < \sqrt{65} = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$, por tanto $|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \leqslant \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ es cierto.

$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \sqrt{28} < \sqrt{5} + \sqrt{13} = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$, por tanto $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ es cierto.

7. $AB = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 11 & 3 \\ -6 & 5 & 8 \end{bmatrix}$, $\det A = -5$, $\det B = -24$,

$\det AB = 120 (= \det A \det B)$, $\det(A + B) = -61 (\neq \det A + \det B)$

9. INDICACIÓN: Para $k = 2$ utilizar la desigualdad triangular para demostrar que $\|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2\| \leqslant \|\mathbf{x}_1\| + \|\mathbf{x}_2\|$; entonces, para $k = i + 1$ observar que $\|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_{i+1}\| \leqslant \|\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_i\| + \|\mathbf{x}_{i+1}\|$.

11. **a)** Comprobar $n = 1$ y $n = 2$ directamente. A continuación, reducir un determinante $n \times n$ a una suma de determinantes $(n - 1) \times (n - 1)$ y usar inducción.

b) El argumento es similar al de a). Supongamos que la primera fila está multiplicada por λ. El primer término de la suma será λa_{11} veces un determinante $(n - 1) \times (n - 1)$ sin factores de λ. Los otros términos obtenidos (al desarrollar por la primera fila) son similares.

13. No necesariamente. Intentar $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

15. **a)** Las sumas de dos funciones continuas y un múltiplo escalar de una función continua son continuas.

b) **i)** $$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g)\cdot h &= \int_0^1 (\alpha f + \beta g)(x)h(x)\,dx \\ &= \int_0^1 f(x)h(x)\,dx + \beta\int_0^1 g(x)h(x)\,dx \\ &= \alpha f\cdot h + \beta g\cdot h\end{aligned}$$

ii) $f\cdot g = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx = \int_0^1 g(x)f(x)\,dx = g\cdot f$

Para las condiciones (iii) y (iv) el integrando es un cuadrado perfecto. Por tanto, la integral es no negativa y puede ser 0 sólo si el integrando es cero en casi todo punto. Si $f(x) \neq 0$ para algún x, entonces sería positiva en un entorno de x por la continuidad, y la integral sería positiva.

17. Calcular los productos de matrices de las dos maneras y comprobar que se obtiene la identidad.

19. $(\det A)(\det A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I) = 1$

Ejercicios de repaso del Capítulo 1

1. $\mathbf{v} + \mathbf{w} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$; $3\mathbf{v} = 9\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 15\mathbf{k}$; $6\mathbf{v} + 8\mathbf{w} = 26\mathbf{i} + 16\mathbf{j} + 38\mathbf{k}$; $-2\mathbf{v} = -6\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 10\mathbf{k}$; $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = 4$; $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = 9\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$. Su esbozo debe mostrar $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $3\mathbf{v}$, $6\mathbf{v}$, $8\mathbf{w}$, $6\mathbf{v} + 8\mathbf{w}$, $\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}$ como la proyección de $\mathbf{v}$ en la dirección de $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ como un vector perpendicular a ambos $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

3. **a)** $\mathbf{l}(t) = -\mathbf{i} + (2 + t)\mathbf{j} - \mathbf{k}$ **c)** $-2x + y + 2z = 9$

b) $\mathbf{l}(t) = (3t - 3)\mathbf{i} + (t + 1)\mathbf{j} - t\mathbf{k}$

5. **a)** 0 **b)** 5 **c)** -10

7. **a)** $\pi/2$ **b)** $5/(2\sqrt{15})$ **c)** $-10/(\sqrt{6}\sqrt{17})$

9. $\{s[t\mathbf{a} + (1 - t)\mathbf{b}] \mid 0 \leq t \leq 1 \text{ y } 0 \leq s \leq 1\}$

11. Sea $\mathbf{v} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{w} = (b_1, b_2, b_3)$, y aplicar la desigualdad CBS.

13. El área es el valor absoluto de

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 + \lambda a_1 & b_2 + \lambda a_2 \end{vmatrix}.$$

(Un múltiplo de una fila de un determinante puede añadirse a otra fila sin que cambie el valor del determinante.) Su dibujo debe mostrar dos paralelogramos con las mismas base y altura.

15. Los cosenos de las dos partes del ángulo son iguales, porque

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}/\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{v}\| = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|)/\|\mathbf{v}\| = \mathbf{b}\cdot\mathbf{v}/\|\mathbf{b}\|\|\mathbf{v}\|.$$

17. $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k}$; etc.

19. **a)** INDICACIÓN: El ángulo de la proyección del vector que une cualquier par de puntos, uno de cada recta, sobre $(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)/\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2\|$ es d.

b) $\sqrt{2}$

21. **a)** Observar que

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

b) 1/2

23.

Rectangular	Esférica	(Se omite el dibujo)
a) $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 1)$	**a)** $(\sqrt{2}, \pi/4, \pi/4)$	
b) $(3\sqrt{3}/2, 3/2, -4)$	**b)** $(5, \pi/6, \arccos(-4/5))$	
c) $(0, 0, 1)$	**c)** $(1, \pi/4, 0)$	
d) $(0, -2, 1)$	**d)** $(\sqrt{5}, 3\pi/2, \arccos(\sqrt{5}/5))$	
e) $(0, 2, 1)$	**e)** $(\sqrt{5}, \pi/2, \arccos(\sqrt{5}/5))$	

25. $z = r^2 \cos 2\theta$; $\cos\phi = \rho \operatorname{sen}^2 \phi \cos 2\theta$

27. $|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| = 6 < \sqrt{98} = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$; $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| = \sqrt{33} < \sqrt{14} + \sqrt{7} = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

29. **a)** La propiedad asociativa para la multiplicación de matrices se puede comprobar como sigue:

$$[(AB)C]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (AB)_{ik}C_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} A_{il}B_{lk}C_{kj}$$
$$= \sum_{l=1}^{n} A_i(BC)_{lj} = [A(BC)]_{ij}.$$

Use este resultado con C siendo un vector columna.

b) La matriz para la composición es la multiplicación de matrices.

31. $\mathbb{R}^n$ está generado por los vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Si $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ se tiene

$$T\mathbf{v} = T\left[\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i\right] = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_i)T\mathbf{e}_i.$$

Sea $a_{ij} = (T\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_j)$, de manera que

$$T\mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_i.$$

Entonces

$$T\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_i)a_{ki}.$$

Esto es, si

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \qquad \text{entonces} \quad T\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix},$$

como se quería.

33. **a)** $70\cos\theta + 20\operatorname{sen}\theta$ **b)** $(21\sqrt{3} + 6)\,\text{kg}\cdot\text{m}$

35. Cada lado coincide con $2xy - 7yz + 5z^2 - 48x + 54y - 5z - 96$ (o cambiar las dos primeras columnas y a continuación la primera fila de la segunda).

37. Sumar la última fila de la primera y restar el resultado de la segunda.

39. **a)** $\frac{1}{6}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ **b)** $1/3$

41. Utilizar que $\|\mathbf{a}\|^2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$; desarrollar ambos lados y usar la definición de $\mathbf{c}$.

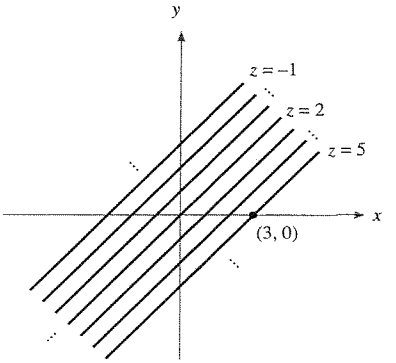
43. $(1/\sqrt{38})\mathbf{i} - (6/\sqrt{38})\mathbf{j} + (1/\sqrt{38})\mathbf{k}$ **45.** $(2/\sqrt{5})\mathbf{i} - (1/\sqrt{5})\mathbf{j}$

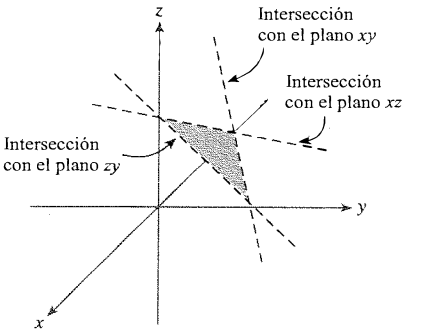
47. $(\sqrt{3}/2)\mathbf{i} + (1/2\sqrt{2})\mathbf{j} + (1/2\sqrt{2})\mathbf{k}$

Capítulo 2

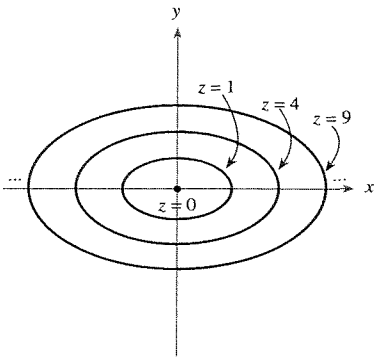
Sección 2.1

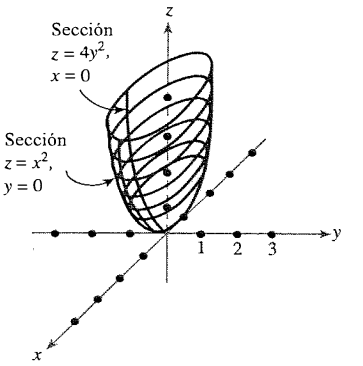
1. Las curvas de nivel y las gráficas se dibujan a continuación. La gráfica en la parte c) es un paraboloide hiperbólico como el del Ejemplo 2.4, pero girado 45° y comprimido verticalmente por un factor de 1/4. Para ver esto use las variables $u = x + y$, y $v = x - y$. Entonces $z = (v^2 - u^2)/4$.



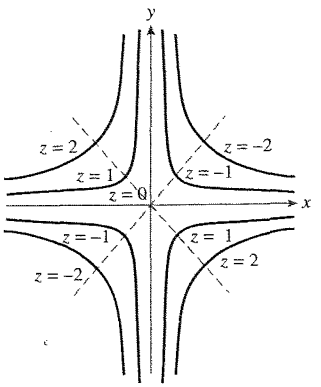


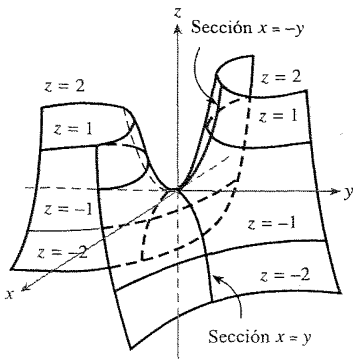
a)





b)

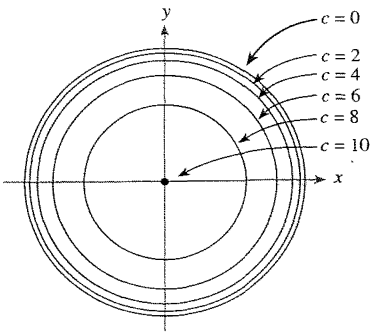


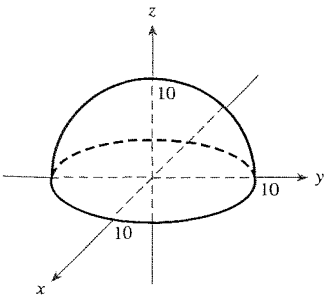


c) $z = -xy$

3. Para el Ejemplo 2.2, $z = r(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta) + 2$, la forma depende de θ; para el Ejemplo 2.3, $z = r^2$, la forma es independiente de θ; para el Ejemplo 2.4, $z = r^2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$, la forma depende de θ.

5. Las curvas de nivel son circunferencias $x^2 + y^2 = 100 - c^2$ cuando $c \leq 10$. La gráfica es el hemisferio superior de $x^2 + y^2 + z^2 = 100$.

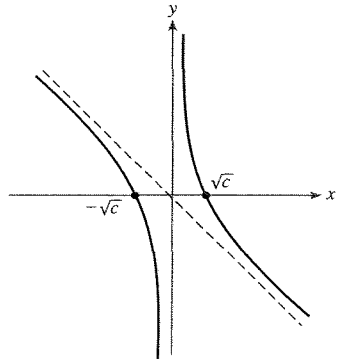


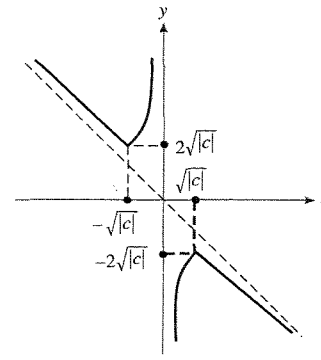


7. Las curvas de nivel son circunferencias y la gráfica es un paraboloide de revolución. *Véase* el Ejemplo 2.3 de esta sección.

9. Si $c = 0$, la curva de nivel es la recta $y = -x$ junto con la recta $x = 0$. Si $c \neq 0$, entonces $y = -x + (c/x)$. La curva de nivel es una hipérbola con el eje y, y la recta $y = -x$ como asíntotas. La gráfica es un paraboloide hiperbólico. Las secciones a lo largo de la recta $y = ax$ son las parábolas $z = (1 + a)x^2$.

11. Si $c > 0$, la superficie de nivel $f(x, y, c) = c$ es vacía. Si $c = 0$, la superficie de nivel es el punto $(0, 0, 0)$. Si $c < 0$, la superficie de nivel es la esfera de radio $\sqrt{-c}$ con centro en $(0, 0, 0)$. Una sección de la gráfica determinada por $z = a$ está dada por $t = -x^2 - y^2 - a^2$, que es un paraboloide de revolución abierto hacia abajo en el espacio xyt.

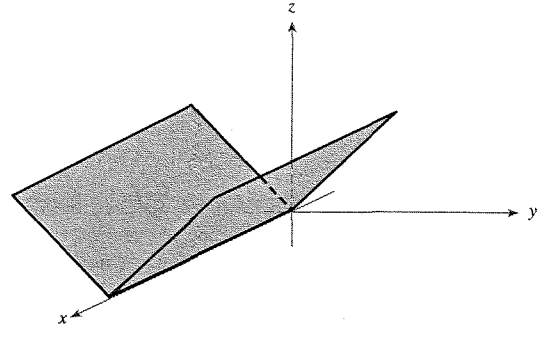




13. Si $c < 0$, la superficie de nivel es vacía. Si $c = 0$, la superficie de nivel es el eje z. Si $c > 0$, es el cilindro circular recto $x^2 + y^2 = c$ de radio $\sqrt{c}$ cuyo eje es z. Una sección de la gráfica determinada por $z = a$ es el paraboloide de revolución $t = x^2 + y^2$. Una sección determinada por $x = b$ es una «depresión» con sección transversal parabólica $t(y, z) = y^2 + b^2$.

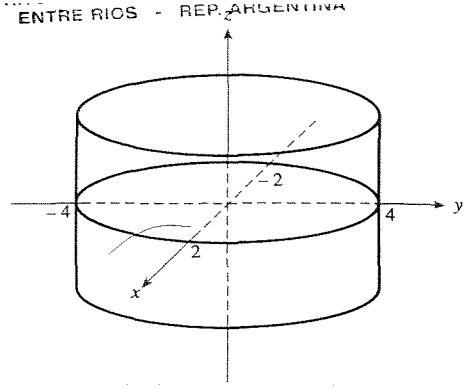
15. Poniendo $u = (x - z)/\sqrt{2}$ y $v = (x + z)/\sqrt{2}$ nos dan los ejes u y v rotando los ejes x y z 45° alrededor del eje y. Puesto que $f = vy\sqrt{2}$, las superficies de nivel $f = c$ son «cilindros» perpendiculares al plano vy ($z = -x$) cuyas secciones transversales son las hipérbolas $vy = c/\sqrt{2}$, de manera que $S_{x=a} \cap$ gráfica de f es el paraboloide hiperbólico $t = (z + a)y$ en el espacio yzt [*véase* el Ejercicio 1 c)]. La sección $S_{y=b} \cap$ gráfica de f es el plano $t = bx + bz$ en el espacio xzt. La sección $S_{z=b} \cap$ gráfica de f es el paraboloide hiperbólica $t = y(x + b)$ en el espacio xyt.

17. Si $c < 0$, la curva de nivel es vacía. Si $c = 0$, la curva de nivel es el eje x. Si $c > 0$, es el par de rectas paralelas $|y| = c$. Las secciones de la gráfica con x constante son las curvas, en forma de V, $z = |y|$ en el espacio yz. La gráfica se muestra en la figura siguiente.



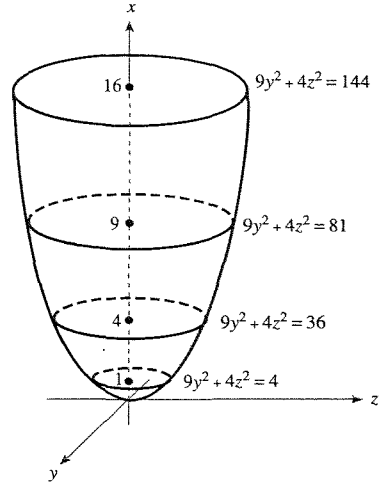
19. El valor de z no importa, de manera que obtenemos un «cilindro» con sección transversal paralela al eje z que es una elipse y que corta al plano xy en $4x^2 + y^2 = 16$.

ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA

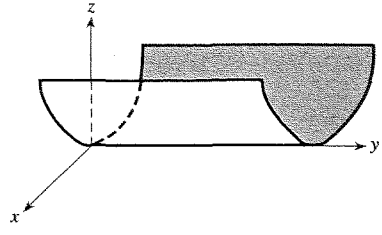


21. El valor de x no importa, de manera que obtenemos un «cilindro» paralelo al eje x con sección transversal hiperbólica que corta al plano yz en la hipérbola $z^2 - y^2 = 4$.

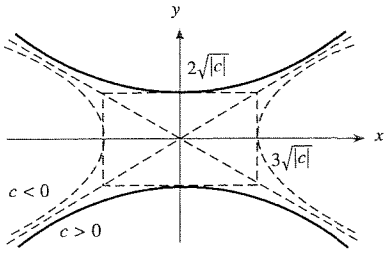
23. Un paraboloide elíptico con eje a lo largo del eje x.

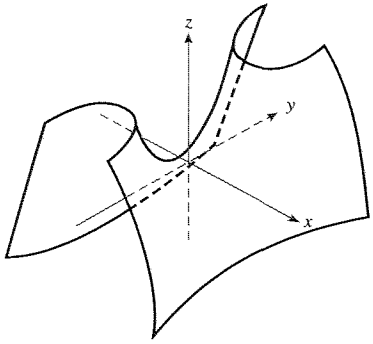


25. El valor de y no importa, de manera que obtenemos un «cilindro» de sección transversal parabólica.



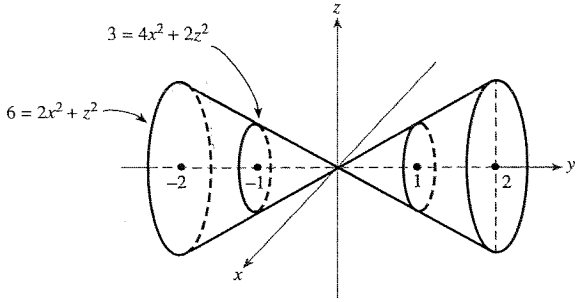
27. Ésta es una superficie en forma de silla de montar similar al la del Ejemplo 2.4, pero las hipérbolas, que son curvas de nivel, no tienen asíntotas perpendiculares.





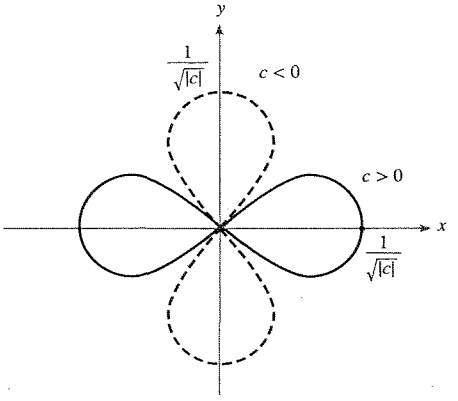
Curvas de nivel

29. Un doble cono con eje a lo largo del eje y, y secciones transversales elípticas.



31. Completar el cuadrado para obtener $(x + 2)^2 + (y - b/2)^2 + (z + \frac{9}{2})^2 = (b^2 + 4b + 97)/4$. Esto es un elipsoide con centro $(-2, b/2, -\frac{9}{2})$ y eje paralelo a los ejes coordenados.

33. Las curvas de nivel quedan descritas por $\cos 2\theta = cr^2$. Si $c > 0$, entonces $-\pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/4$ o $3\pi/4 \leqslant \theta \leqslant 5\pi/4$. Si $c < 0$, entonces $\pi/4 \leqslant \theta \leqslant 3\pi/4$ o $5\pi/4 \leqslant \theta \leqslant 7\pi/4$. En cualquiera de los casos se obtiene una figura en forma de ocho, llamada *lemniscata*, a través del origen (tales curvas fueron estudiadas por primera vez por Jacques Bernoulli y algunas veces se les llama «lemniscatas de Bernoulli»).



ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA

Seccion 2.2

1. Si $(x_0, y_0) \in A$, entonces $|x_0| < 1$ e $|y_0| < 1$. Sea $r = \min(1 - |x_0|, 1 - |y_0|)$. Demostrar que $D_r(x_0, y_0) \subset A$ o bien analíticamente o bien dibujando una figura.

3. Poner $r = \min(2 - \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \sqrt{x_0^2 + y_0^2} - \sqrt{2})$.

5. **a)** 0 **b)** $-1/2$ **c)** 1

7. **a)** 5 **b)** 0 **c)** $2x$

9. **a)** 0 **b)** $-1/2$ **c)** 0

11. **a)** Componer $f(x, y) = xy$ con $g(t) = (\operatorname{sen} t)/t$ para $t \neq 0$ y $g(0) = 1$.

b) 0 **c)** 0

13. **a)** 1 **b)** $\|x_0\|$ **c)** $(1, e)$

d) El límite no existe (estudie separadamente los límites para $x = 0$ e $y = 0$).

15. Utilice las partes ii) e iii) del Teorema 4.

17. **a)** Poner el valor de la función igual a 1 en el punto $(0, 0)$. **b)** No.

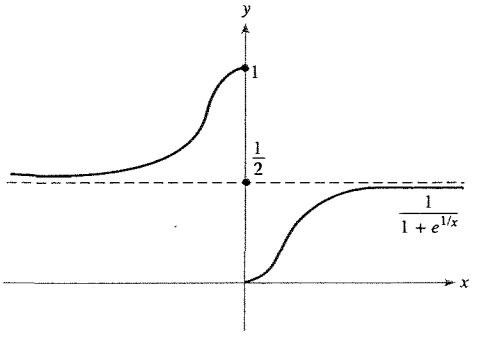
19. Para $|x - 2| < \delta = \sqrt{\varepsilon + 4} - 2$ tenemos $|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2| < \delta(\delta + 4) = \varepsilon$. Por el Teorema 3 iii), $\lim_{x \to 2} x^2 = (\lim_{x \to 2} x)^2 = 2^2 = 4$.

21. Sea $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|/2$. Si $\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| \leq r$, sea $f(\mathbf{z}) = \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|/r$. Si $\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| > r$, sea $f(\mathbf{z}) = 1$.

23. **a)** $\lim_{x \to b^+} f(x) = L$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x > b$ y $0 < x - b < \delta$ implica $|f(x) - L| < \varepsilon$.

b) $\lim_{x \to 0^-} (1/x) = -\infty$, $\lim_{t \to -\infty} e^t = 0$ y por tanto $\lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = 0$. Entonces $\lim_{x \to 0^-} 1/(1 + e^{1/x}) = 1$. El otro límite es 0.

c)



25. Para $\varepsilon > 0$ y x_0 sea $\delta = (\varepsilon/K)^{1/\alpha}$. Entonces $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| < K\delta^\alpha = \varepsilon$ cuando $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$. Observe que la elección de δ no depende de $\mathbf{x}_0$. Esto significa que f es *uniformemente continua*.

27. **a)** Elejir $\delta < 1/500$. **b)** Elejir $\delta < 0{,}002$.

Sección 2.3

1. **a)** $\partial f/\partial x = y$; $\partial f/\partial y = x$

b) $\partial f/\partial x = ye^{xy}$; $\partial f/\partial y = xe^{xy}$

c) $\partial f/\partial x = \cos x \cos y - x \operatorname{sen} x \cos y$; $\partial f/\partial y = -x \cos x \operatorname{sen} y$

d) $\partial f/\partial x = 2x[1 + \log(x^2 + y^2)]$; $\partial f/\partial y = 2y[1 + \log(x^2 + y^2)]$; $(x, y) \neq (0, 0)$

3. **a)** $\partial w/\partial x = (1 + 2x^2)\exp(x^2 + y^2)$; $\partial w/\partial y = 2xy \exp(x^2 + y^2)$

b) $\partial w/\partial x = -4xy^2/(x^2 - y^2)^2$; $\partial w/\partial y = 4yx^2/(x^2 - y^2)^2$

c) $\partial w/\partial x = ye^{xy}\log(x^2 + y^2) + 2xe^{xy}/(x^2 + y^2)$;
$\partial w/\partial y = xe^{xy}\log(x^2 + y^2) + 2ye^{xy}/(x^2 + y^2)$

d) $\partial w/\partial x = 1/y$; $\partial w/\partial y = -x/y^2$

e) $\partial w/\partial x = -y^2 e^{xy} \operatorname{sen} ye^{xy} \operatorname{sen} x + \cos ye^{xy} \cos x$;
$\partial w/\partial y = (xye^{xy} + e^{xy})(-\operatorname{sen} ye^{xy} \operatorname{sen} x)$

5. $z = 6x + 3y - 11$

7. **a)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & e^z \\ 2xy & x^2 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} e^y & xe^y - \operatorname{sen} y \\ 1 & 0 \\ 1 & e^y \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} (y + xy^2)e^{xy} & (x + x^2y)e^{xy} \\ \operatorname{sen} y & x \cos y \\ 5y^2 & 10xy \end{bmatrix}$

9. En $z = 1$.

11. Ambos son xye^{xy}.

13. **a)** $\nabla f = (e^{-x^2-y^2-z^2}(-2x^2 + 1), -2xye^{-x^2-y^2-z^2}, -2xze^{-x^2-y^2-z^2})$

b) $\nabla f = (x^2 + y^2 + z^2)^{-2}(yz(y^2 + z^2 - x^2), xz(x^2 + z^2 - y^2), xy(x^2 + y^2 - z^2))$

c) $\nabla f = (z^2e^x \cos y, -z^2e^x \operatorname{sen} y, 2ze^x \cos y)$

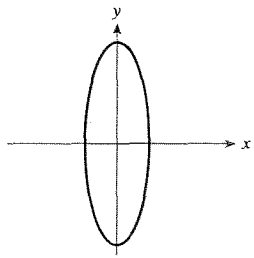
15. $2x + 6y - z = 5$

17. $-2\mathbf{k}$

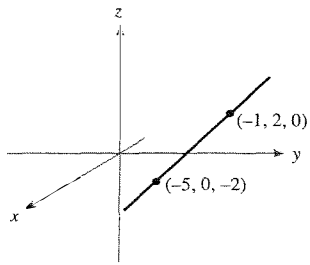
19. Son constantes. Demostrar que la derivada es la matriz cero.

Sección 2.4

1. Esta curva es la elipse $(y^2/16) + x^2 = 1$



3. Esta curva es la recta que pasa por el punto $(-1, 2, 0)$ en la dirección de $(2, 1, 1)$



5. $6\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{y}$

7. $(-2\cos t \operatorname{sen} t,\ 3 - 3t^2,\ 1)$

9. $\mathbf{c}'(t) = (e^t,\ -\operatorname{sen} t)$

11. $\mathbf{c}'(t) = (t\cos t + \operatorname{sen} t,\ 4)$

13. Horizontal cuando $t = (R/v)n\pi$, n entero; la rapidez es cero si n es par; la rapidez es $2v$ si n es impar.

15. $(\operatorname{sen} 3,\ \cos 3,\ 2) + (3\cos 3,\ -3\operatorname{sen} 3,\ 5)(t - 1)$

17. $(8, 8, 0)$

19. $(8, 0, 1)$

Sección 2.5

1. Utilizar las partes (i), (ii) y (iii) del Teorema 10. La derivada en $\mathbf{x}$ es $2(f(\mathbf{x}) + 1)\mathbf{D}f(\mathbf{x})$.

3. **a)** $h(x, y) = f(x, u(x, y)) = f(p(x), u(x, y))$. Se utiliza p sólo como notación: $p(x) = x$.

$$\text{Desarrollando: } \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \text{puesto que } \frac{dp}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$$

JUSTIFICACIÓN: Sean (p, u) las variables de f. Para usar la regla de la cadena debemos expresar h como una composición de funciones; esto es, primero encontrar g tal que $h(x, y) = f(g(x, y))$. Sea $g(x, y) = (p(x), u(x, y))$. Se tiene $\mathbf{D}h = (\mathbf{D}f)(\mathbf{D}g)$. Por lo tanto

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial p} & \frac{\partial f}{\partial u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial p} & \frac{\partial f}{\partial u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix},$$

y entonces $\dfrac{\partial h}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial p} + \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}$. Puede que también aparezca como solución $\dfrac{\partial h}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}$. Esta fórmula requiere una interpretación cuidadosa debido a la posible ambigüedad acerca del significado de $\partial f/\partial x$, razón por la cual nosotros usamos el nombre p.

b) $\dfrac{\partial h}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{du}{dx} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{dv}{dx}$ **c)** $\dfrac{\partial h}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial w}\dfrac{dw}{dx}$

5. Calcular cada una de ellas de dos maneras diferentes; las respuestas son:

a) $(f \circ \mathbf{c})'(t) = e^t(\cos t - \operatorname{sen} t)$

b) $(f \circ \mathbf{c})'(t) = 15t^4 \exp(3t^5)$

c) $(f \circ \mathbf{c})'(t) = (e^{2t} - e^{-2t})[1 + \log(e^{2t} + e^{-2t})]$

d) $(f \circ \mathbf{c})'(t) = (1 + 4t^2)\exp(2t^2)$

7. Utilizar el Teorema 10 iii) y reemplazar las matrices por vectores.

9. $(f \circ g)(x, y) = (\tan(e^{x-y} - 1) - e^{x-y}, e^{2(x-y)} - (x - y)^2)$, y
$\mathbf{D}(f \circ g)(1, 1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.

11. $\frac{1}{2}\cos(1)\cos(\log\sqrt{2})$

13. $-2\cos t \operatorname{sen} t e^{\operatorname{sen} t} + \operatorname{sen}^4 t + \cos^3 t e^{\operatorname{sen} t} - 3\cos^2 t \operatorname{sen}^2 t$ tanto para a) como para b).

15. $(2, 0)$

17. **a)** $G(x, y(x)) = 0$, y por tanto $\dfrac{\partial G}{\partial x} + \dfrac{\partial G}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} = 0$.

b) $\begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dx} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial y_1} & \frac{\partial G_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial G_2}{\partial y_1} & \frac{\partial G_2}{\partial y_2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} \end{bmatrix}$ donde $^{-1}$ significa la matriz inversa.

La primera componente de esta ecuación es

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{-\dfrac{\partial G_1}{\partial x}\dfrac{\partial G_2}{\partial y_2} + \dfrac{\partial G_2}{\partial x}\dfrac{\partial G_1}{\partial y_2}}{\dfrac{\partial G_1}{\partial y_1}\dfrac{\partial G_2}{\partial y_2} - \dfrac{\partial G_2}{\partial y_1}\dfrac{\partial G_1}{\partial y_2}}$$

c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2x}{3y^2 + e^y}$

19. Aplique la regla de la cadena a $\partial G/\partial T$ donde $G(t(T, P), p(T, P), V(T, P)) = P(V - b)e^{a/RVT} - RT$ es idénticamente 0; $t(T, P) = T$, y $p(T, P) = P$.

21. Definir $R_1(\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - [\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)]\mathbf{h}$.

23. Sean g_1 y g_2 funciones C^1 de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}$ tal que $g_1(\mathbf{x}) = 1$ para $\|\mathbf{x}\| < \sqrt{2}/3$; $g_1(\mathbf{x}) = 0$ para $\|\mathbf{x}\| > 2\sqrt{2}/3$; $g_2(\mathbf{x}) = 1$ para $\|\mathbf{x} - (1, 1, 0)\| < \sqrt{2}/3$; $g_2(\mathbf{x}) = 0$ para $\|\mathbf{x} - (1, 1, 0)\| > 2\sqrt{2}/3$ (*véase* el Ejercicio 22). Sea

$$h_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad h_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

y escribir $f(\mathbf{x}) = g_1(\mathbf{x})h_1(\mathbf{x}) + g_2(\mathbf{x})h_2(\mathbf{x})$.

25. La demostración de iii) es la siguiente:

$$\frac{|h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}_0) - [f(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0) + g(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)](\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}$$

$$\leqslant |f(\mathbf{x}_0)| \frac{|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}$$

$$+ |g(\mathbf{x}_0)| \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|}$$

$$+ \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \frac{|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \|(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|.$$

Cuando $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$, los dos primeros términos tienden a cero debido a la diferenciabilidad de f y de g. El tercero también tiende a cero porque $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)|/\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ y $|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)/\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ están acotados por una constante, digamos M, en alguna bola $D_r(\mathbf{x}_0)$. Para ver esto elegir r suficientemente pequeño de manera que $[f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)]/\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ esté a distancia inferior a 1 de $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)/\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ si $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r$. Entonces tenemos

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)|/\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leqslant 1 + |\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|/\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| =$$
$$= 1 + |\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|/\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leqslant 1 + \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

La demostración de la regla iv) se deduce de la regla iii) y el caso especial de la regla del cociente con f idénticamente 1; esto es, $\mathbf{D}(1/g)(\mathbf{x}_0) = [-1/g(\mathbf{x}_0)^2]\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)$. Para obtener esta respuesta,

observar que en alguna bola pequeña $D_r(\mathbf{x}_0)$, $g(\mathbf{x}) > m > 0$. Utilizar la desigualdad triangular y la desigualdad de Schwarz par demostrar que

$$\frac{\left|\dfrac{1}{g(\mathbf{x})} - \dfrac{1}{g(\mathbf{x})} + \dfrac{1}{g(\mathbf{x}_0)^2}\,\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\right|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}$$

$$\leqslant \frac{1}{|g(\mathbf{x})|}\frac{1}{|g(\mathbf{x}_0)|}\frac{|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}$$

$$+ \frac{|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)|}{|g(\mathbf{x})|g(\mathbf{x}_0)^2}\frac{|\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}$$

$$\leqslant \frac{1}{m^2}\frac{|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} + \frac{\|\nabla g(\mathbf{x}_0)\|}{m^3}|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)|.$$

Los dos últimos términos tienden a cero, puesto que g es diferenciable y continua.

27. Primero encontrar la fórmula para $(\partial/\partial x)(F(x, x))$ utilizando la regla de la cadena. Poner $F(x, z) = \int_0^x f(z, y)\,dy$ y usar el teorema fundamental del cálculo.

29. Por el Ejercicio 26 y el Teorema 10 iii) (Ejercicio 25) cada componente de k es diferenciable y $\mathbf{D}k_i(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}g_i(\mathbf{x}_0) + g_i(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$. Puesto que $[\mathbf{D}g_i(\mathbf{x}_0)]\mathbf{y}$ es la componente i-ésima de $[\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)]\mathbf{y}$, y $[\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)]\mathbf{y}$ es el número $\nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{y}$ obtenemos $[\mathbf{D}k(\mathbf{x}_0)]\mathbf{y} = f(\mathbf{x}_0)[\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)]\mathbf{y} + [\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)]\mathbf{y}[g(\mathbf{x}_0)] = f(x_0)[\mathbf{D}g(x_0)]\mathbf{y} + [\nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{y}]g(\mathbf{x}_0)$.

Sección 2.6

1. $\nabla f(1, 1, 2)\cdot\mathbf{v} = (4, 3, 4)\cdot(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 0) = 2\sqrt{5}$

3. **a)** $17e^e/13$ **b)** $e/\sqrt{3}$ **c)** 0

5. **a)** $z + 9x = 6y - 6$ **b)** $z + y = \pi/2$ **c)** $z = 1$

7. **a)** $-\dfrac{1}{3\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$ **b)** $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ **c)** $-\frac{2}{9}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$

9. **k**

11. La gráfica de f es la superficie de nivel $0 = F(x, y, z) = f(x, y) - z$. Por tanto, el plano tangente está dado por

$$0 = \nabla F(x_0, y_0, z_0)\cdot(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)\cdot(x - x_0, y - y_0, z - z_0).$$

Puesto que $z_0 = f(x_0, y_0)$, esto es, $z = f(x_0, y_0) + (\partial f/\partial x)(x_0, y_0)(x - x_0) + (\partial f/\partial y)(x_0, y_0)(y - y_0)$.

13. **a)** $\nabla f = (z + y, z + x, x + y)$, $\mathbf{g}'(t) = (e^t, -\operatorname{sen} t, \cos t)$, $(f\circ\mathbf{g})'(1) = 2e\cos 1 + \cos^2 1 - \operatorname{sen}^2 1$

b) $\nabla f = (yze^{xyz}, xze^{xyz}, xye^{xyz})$, $\mathbf{g}'(t) = (6, 6t, 3t^2)$, $(f\circ\mathbf{g})'(1) = 108e^{18}$

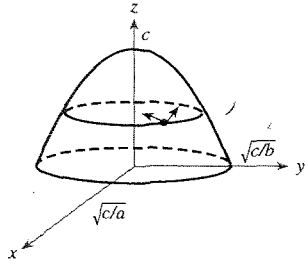
c) $\nabla f = [1 + \log(x^2 + y^2 + z^2)](x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$, $\mathbf{g}' = (e^t, -e^{-t}, 1)$,
$(f \circ \mathbf{g})'(1) = [1 + \log(e^2 + e^{-2} + 1)](e^2 - e^{-2} + 1)$

15. Sea $f(x, y, z) = 1/r = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$; $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Entonces obtenemos
$\nabla f = -(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}(x, y, z) = -(1/r^3)\mathbf{r}$.

17. $\nabla f = (g'(x), 0)$

19. $\mathbf{D}f(0, 0, \ldots, 0) = [0, \ldots, 0]$

21. $\mathbf{d}_1 = [-(0{,}03 + 2by_1)/2a]\mathbf{i} + y_1\mathbf{j}$, $\mathbf{d}_2 = [-(0{,}03 + 2by_2)/2a]\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}$, donde y_1 e y_2 son las soluciones de $(a^2 + b^2)y^2 + 0{,}03by + \left(\dfrac{0{,}03^2}{4} - a^2\right) = 0$.



23. $\nabla V = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\left(\dfrac{x + x_0}{r_2^2} - \dfrac{x - x_0}{r_1^2}\right)\mathbf{i} + 2y\left(\dfrac{1}{r_2^2} - \dfrac{1}{r_1^2}\right)\mathbf{j}\right]$

25. Se cruza en el punto (2, 2, 0), $\sqrt{5}/10$ segundos depués.

Ejercicios de repaso del Capítulo 2

1. **a)** Paraboloide elíptico.

b) Sea $y' = y + 3$ y escribir $z = xy'$. Éste es un paraboloide hiperbólico (desplazado).

3. **a)** $\mathbf{D}f(x, y) = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 \\ -ye^{-xy} & -xe^{-xy} \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{D}f(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{D}f(x, y, z) = [e^x \quad e^y \quad e^z]$

d) $\mathbf{D}f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. El plano tangente a una esfera en el punto x_0, y_0, z_0 es normal a la recta que pasa por el centro y por el punto x_0, y_0, z_0.

7. **a)** $z = x - y + 2$

b) $z = 4x - 8y - 8$

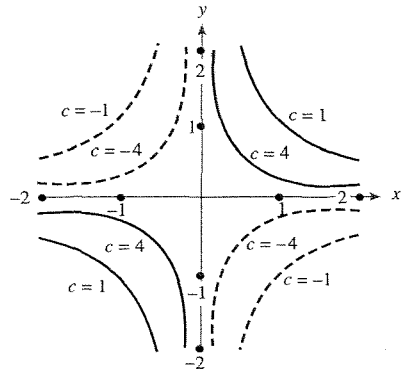
c) $x + y + z = -1$

d) $10x + 6y - 4z = 6 - \pi$

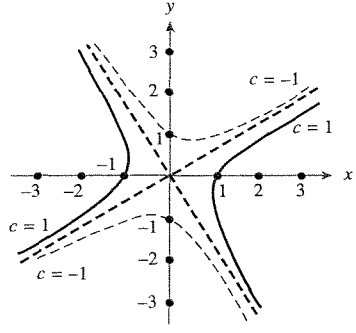
e) $2z = \sqrt{2}x + \sqrt{2}y$

f) $x + 2y - z = 2$

9. **a)** Las curvas de nivel son hipérbolas $xy = 1/c$:



b) $c = x^2 - xy - y^2 = \left(x - \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}y\right)\left(x - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}y\right)$



11. **a)** 0 **b)** El límite no existe.

13. $(1 + 2x^2)\exp(1 + x^2 + y^2)$

15. **a)** La recta $\mathbf{L}(t) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + t(a, b, c)$ está contenida en el plano $z = f(x_0, y_0)$ si $c = 0$ y es perpendicular a $\nabla f(x_0, y_0)$ si $a(\partial f/\partial x)(x_0, y_0) + b(\partial b/\partial y)(x_0, y_0) = 0$. En $\mathbf{L}$ tenemos

$$f(x_0, y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right](y - y_0)$$

$$= f(x_0, y_0) + at\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right] + bt\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right]$$

$$= f(x_0, y_0) = z$$

Por tanto, **L** está contenida en el plano tangente. Un vector unitario normal al plano tangente es $\mathbf{p} = (1 + \|\nabla f\|^{-1/2}(-(\partial f/\partial x)(x_0, y_0), -(\partial f/\partial y)(x_0, y_0)), 1$. Por consiguiente,

$$\cos\theta = \mathbf{p}\cdot\mathbf{k} = (1 + \|\nabla f\|^2)^{-1/2}$$

y

$$\tan\theta = \operatorname{sen}\theta/\cos\theta = \{\|\nabla f\|^2/(1 + \|\nabla f\|^2)\}^{1/2}/(1 + \|\nabla f\|^2)^{-1/2} = \|\nabla f\|,$$

que era lo que queríamos probar.

b) El plano tangente contiene a la recta horizontal que pasa por el punto (1, 0, 2) y es perpendicular a $\nabla f(1, 0) = (5, 0)$, esto es, paralela al eje y. Forma un ángulo de $\arctan(\|\nabla f(1, 0)\|) = \arctan 5 \approx 78{,}7^\bullet$ con respecto al plano xy.

17. $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ o $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$

19. Un vector unitario normal es $(\sqrt{2}/10)(3, 5, 4)$. El plano tangente es $3x + 5y + 4z = 18$.

21. $4\mathbf{i} + 16\mathbf{j}$

23. **a)** Puesto que g es la composición de $\lambda \mapsto \lambda x \mapsto f(\lambda x)$, la regla de la cadena produce

$$g'(\lambda) = \mathbf{D}f(\lambda\mathbf{x})\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Entonces,

$$g'(1) = \mathbf{D}f(\mathbf{x})\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \nabla f(\mathbf{x})\cdot\mathbf{x}$$

Pero también $g(\lambda) = \lambda^p f(\mathbf{x})$, de manera que $g'(\lambda) = p\lambda^{p-1}f(\mathbf{x})$ y $g'(1) = pf(\mathbf{x})$.

b) $p = 1$.

25. Diferenciar directamente usando la regla de la cadena, o utilizar el Ejercicio 23 a) con $p = 0$.

27. **a)** Si $(x, y) \neq (0, 0)$, se puede calcular que para i) se tiene $\partial f/\partial x = (y^3 - yx^2)/(x^2 + y^2)^2$ y $\partial f/\partial y = (x^3 - xy^2)/(x^2 + y^2)^2$. Si $x = y = 0$, utilizar la definición para mostrar que ambas derivadas parciales son 0. Para ii), si $(x, y) \neq (0, 0)$, se tiene $\partial f/\partial x = 2xy^6/(x^2 + y^4)^2$ y $\partial f/\partial y = (2x^4y - 2x^2y^5)/(x^2 + y^4)^2$. Las parciales en el origen son cero.

b) La función i) no es continua en (0, 0); la función ii) es diferenciable, pero su derivada no es continua.

29. **a)** $\sqrt{2}\pi/8$ **b)** $-\operatorname{sen}\sqrt{2}$ **c)** $-2\sqrt{2}e^{-2}$

31. $(-4e^{-1}, 0)$

33. **a)** *Véase* el Teorema 11.

b)

$g(u) = (\operatorname{sen} 3u)^2 + \cos 8u$	$\nabla f = (2x, 1)$
$g'(u) = 6\operatorname{sen} 3u\cos 3u - 8\operatorname{sen} 8u$	$\nabla f(\mathbf{h}(0)) = \nabla f(0, 1) = (0, 1)$
$g'(0) = 0$	$\mathbf{h}'(u) = (3\cos 3u, -8\operatorname{sen} 8u)$
	$g'(0) = \nabla f(\mathbf{h}(0))\cdot\mathbf{h}'(0) = (0, 1)\cdot(3, 0) = 0$

35. $t = \sqrt{14}(-3 + \sqrt{359})/70 = (-3 + \sqrt{359})/5\sqrt{14}$

37. $\partial z/\partial x = 4(e^{-2x-2y+2xy})(1+y)/(e^{-2x-2y}-e^{2xy})^2$
$\partial z/\partial y = 4(e^{-2y-2x+2xy})(1+x)/(e^{-2x-2y}-e^{2xy})^2$

39. Observar que $y = x^2$, de manera que si y es constante, x no puede ser una variable.

41. $[f'(t)g(t) + f(t)g'(t)]\exp[f(t)g(t)]$

43. $d[f(\mathbf{c}(t))]/dt = 2t/[(1+t^2+2\cos^2 t)(2-2t^2+t^4)]$
$-4t(t^2-1)\ln(1+t^2+2\cos^2 t)/(2-2t^2+t^4)^2$
$-4\cos t \operatorname{sen} t/[(1+t^2+2\cos^2 t)(2-2t^2+t^4)]$

45. Sea $x = f(t)$, $y = t$, y usar la regla de la cadena para diferenciar $u(x, y)$ con respeto a t.

47. **a)** $n = PV/RT$; $P = nRT/V$; $T = PV/nR$; $V = nRT/P$.

b) $\partial V/\partial T = nR/P$; $\partial T/\partial P = V/nR$; $\partial P/\partial V = -nRT/V^2$. Multiplicar, recordando que $PV = nRT$.

49. **a)** Se puede resolver para cualquiera de las variables en función de la otras dos.

b) $\partial T/\partial P = (V-\beta)/R$;
$\partial P/\partial V = -RT/(V-\beta)^2 + 2\alpha/V^3$;
$\partial V/\partial T = R/[(V-\beta)(RT/(V-\beta)^2 - 2\alpha/V^3)]$

c) Multiplicar y cancelar factores.

51. **a)** $(1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2})$

b) La derivada direccional es cero en la dirección

$$(x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j})/\sqrt{x_0^2 + y_0^2}.$$

c) La curva de nivel por el punto (x_0, y_0) debe ser tangente a la recta que pasa por $(0, 0)$ y (x_0, y_0). Las curvas de nivel son rectas o semirrectas que parten del origen.

53. $G(x, y) = x - y$

Capítulo 3

Sección 3.1

1. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 24\,\dfrac{x^3y - xy^3}{(x^2+y^2)^4}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 24\,\dfrac{-x^3y + xy^3}{(x^2+y^2)^4}$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-6x^4 + 36x^2y^2 - 6y^4}{(x^2+y^2)^4}$$

3. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -y^4\cos(xy^2)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x\operatorname{sen}(xy^2) - 4x^2y^2\cos(xy^2)$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2y\operatorname{sen}(xy^2) - 2xy^3\cos(xy^2)$$

5. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{2(\cos^2 x + e^{-y})\cos 2x + 2\,\mathrm{sen}^2\, 2x}{(\cos^2 x + e^{-y})^3}$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{e^{-y} - \cos x}{e^{y}(\cos^2 x + e^{-y})^3}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{2\,\mathrm{sen}\, 2x}{e^{y}(\cos^2 x + e^{-y})^3}$

7. **a)** $\partial^2 z/\partial x^2 = 6$, $\partial^2 z/\partial y^2 = 4$, $\partial^2 z/\partial x \partial y = \partial^2 z/\partial y \partial x = 0$ **b)** $\partial^2 z/\partial x^2 = 0$, $\partial^2 z/\partial y^2 = 4x/3y^3$, $\partial^2 z/\partial x \partial y = \partial^2 z/\partial y \partial x = -2/3y^2$

9. $f_{xy} = 2x + 2y$, $f_{yz} = 2z$, $f_{zx} = 0$, $f_{xyz} = 0$

11. Puesto que f y $\partial f/\partial z$ son ambas de clase C^2, se tiene

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x}.$$

13. $f_{xzw} = f_{zwx} = e^{xyz}[2xy\cos(xw) + x^2y^2z\cos(xw) - x^2yw\,\mathrm{sen}\,(xw)]$

15. **a)** $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \arctan\dfrac{x}{y} + \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-x^2}{x^2 + y^2}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{2y^3}{(x^2 + y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{-2xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{-x\,\mathrm{sen}\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{-y\,\mathrm{sen}\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{x^2\,\mathrm{sen}\sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \dfrac{x^2\cos\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} - \dfrac{\mathrm{sen}\sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{y^2\,\mathrm{sen}\sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \dfrac{y^2\cos\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} - \dfrac{\mathrm{sen}\sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = xy\left[\dfrac{\mathrm{sen}\sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \dfrac{\cos\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2}\right]$

c) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -2x\exp(-x^2 - y^2)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y\exp(-x^2 - y^2)$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (4x^2 - 2)\exp(-x^2 - y^2)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (4y^2 - 2)\exp(-x^2 - y^2)$,

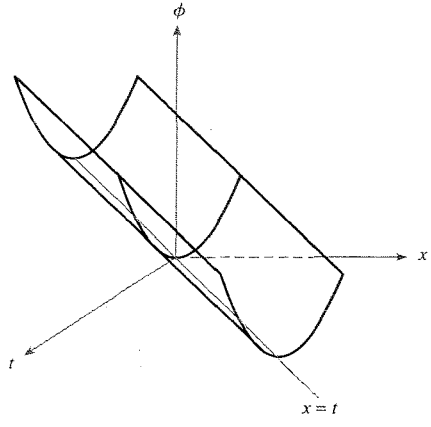
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4xy\exp(-x^2 - y^2)$

17. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\dfrac{dx}{dt}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 + \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{d^2y}{dt^2}$, donde $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$.

19. Evaluar las derivadas $\partial^2 u/\partial x^2$ y $\partial^2 u/\partial y^2$, y sumar.

21. **a)** Evaluar la derivadas y comparar.

b)



23. $V = -GmM/r = -GmM(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$. Comprobar que

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = GmM(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}[3 - 3(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^{-1}] = 0$$

Sección 3.2

1. $f(h_1, h_2) = h_1^2 + 2h_1h_2 + h_2^2$ $\quad [R_2(\mathbf{0}, \mathbf{h}) = 0$ en este caso]

3. $f(h_1, h_2) = 1 + h_1 + h_2 + \dfrac{h_1^2}{2} + h_1h_2 + \dfrac{h_2^2}{2} + R_2(\mathbf{0}, \mathbf{h})$

5. $f(h_1, h_2) = 1 + h_1h_2 + R_2(\mathbf{0}, \mathbf{h})$

7. **a)** Demostrar que $|R_k(x, a)| \leq AB^{k+1}/(k+1)!$ para dos constantes A y B, y x en un intervalo fijado $[a, b]$. Demostrar que $R_k \to 0$ cuando $k \to \infty$. (Utilizar la convergencia de la serie $\Sigma\, c^k/k! = e^c$ y el teorema de Taylor.)

b) El único problema posible es en $x = 0$. Usar la regla de L'Hôpital para probar que

$$\lim_{t \to \infty} p(t)e^t = \infty$$

para cualquier polinomio $p(t)$. Utilizando este resultado, establecer que $\lim_{x \to 0^+} p(x)e^{-1/x} = 0$ para toda función racional $p(x)$, y concluir que $f^{(k)}(0) = 0$ para todo k.

c) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es analítica en $\mathbf{x}_0$ si la serie

$$f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{k!}\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(\mathbf{x}_0) + \cdots$$

converge a $f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h})$ para todo $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)$ en una bola suficientemente pequeña $\|\mathbf{h}\| < \varepsilon$. La función f es analítica si para todo $R > 0$ existe una constante M tal que $|(\partial^k f/\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k})(\mathbf{x})| < M^k$ para todas las derivadas de orden k en todo punto $\mathbf{x}$ que satisface $\|\mathbf{x}\| \leqslant R$.

d) $f(x, y) = 1 + x + y + \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2) + \cdots + \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^j y^{k-j} + \cdots$

Sección 3.3

1. (0, 0); punto de ensilladura.

3. Los puntos críticos están en la recta $y = -x$; son mínimos locales, puesto que $f(x, y) = (x + y)^2 \geqslant 0$ y es igual a cero cuando $x = -y$.

5. (0, 0); punto de ensilladura.

7. $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$; mínimo local.

9. (0, 0); máximo local (el criterio falla, pero se puede usar el hecho de que $\cos z \leqslant 1$).
$(\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$, mínimo local.
$(0, \sqrt{\pi})$, mínimo local.

11. No tiene puntos críticos.

13. (1, 1) es un punto de mínimo local.

15. $(0, n\pi)$; puntos críticos; no tiene ni mínimos ni máximos locales.

17. Mínimo en (0, 0) y máximo en $(0, \pm 1)$ [y puntos de ensilladura en $(\pm 1, 0)$].

19. **a)** $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ se anulan en (0, 0).

b) Demostrar que $f(g(t)) = 0$ en $t = 0$ y que $f(g(t)) \geqslant 0$ si $|t| < |b|/3a^2$.

c) f es negativa en la parábola $y = 2x^2$.

21. Los puntos críticos están en la recta $y = x$ y son mínimos locales (*véase* el Ejercicio 3).

23. Minimizar $S = 2xy + 2yz + 2xz$ con $z = V/xy$, donde V es el volumen constante.

25. 40, 40, 40.

27. El único punto crítico es el (0, 0, 0). Es un mínimo, porque

$$f(x, y, z) \geqslant \frac{x^2 + y^2}{2} + z^2 + xy = \frac{1}{2}(x + y)^2 + z^2 \geqslant 0.$$

29. En $(1, \frac{3}{2})$ hay un punto de ensilladura; en $(5, \frac{27}{2})$ hay un mínimo local.

31. $\frac{3}{2}$ es el máximo absoluto y 0 es el mínimo absoluto.

33. -2 es el mínimo absoluto; 2 es el máximo absoluto.

35. $(\frac{1}{2}, 4)$ es un punto de mínimo local.

37. Si $u_n(x, y) = u(x, y) + (1/n)e^x$, entonces $\nabla^2 u_n = (1/n)e^x > 0$. Por lo tanto, u_n es estrictamente subarmónica y puede tener su máximo absoluto solamente en ∂D, digamos, en $\mathbf{p}_n = (x_n, y_n)$. Si $(x_0, y_0) \in D$, comprobar que esto implica $u(x_n, y_n) > u(x_0, y_0) - e/n$. Por consiguiente, deberá existir un punto $\mathbf{q} = (x_\infty, y_\infty)$ en ∂D de manera que tan cerca como queramos de $\mathbf{q}$ podamos encontrar un punto (x_n, y_n) para n grande. Deducir de la continuidad de u que $u(x_\infty, y_\infty) \geqslant u(x_0, y_0)$.

39. Utilice los mismos métodos que en el Ejercicio 37.

41. **a)** Si existiera un punto x_1 con $f(x_1) < f(x_0)$, el máximo de f en el intervalo entre x_0 y x debería ser un punto crítico.

b) Verificar i) con el criterio de la segunda derivada; para ii), f tiende a $-\infty$ cuando $y \to \infty$ y $x = -y$.

Sección 3.4

1. Punto de máximo en $\sqrt{\frac{2}{3}}\,(1, -1, 1)$; punto de mínimo en $\sqrt{\frac{2}{3}}\,(-1, 1, -1)$.

3. Punto de máximo en $(\sqrt{3}, 0)$; punto de mínimo en $(-\sqrt{3}, 0)$.

5. Punto de máximo en $(\frac{9}{\sqrt{70}}, \frac{4}{\sqrt{70}})$; punto de mínimo en $(-\frac{9}{\sqrt{70}}, -\frac{4}{\sqrt{70}})$.

7. El valor mínimo 4 se alcanza en (0, 2). Usar un dibujo en lugar de los multiplicadores de Lagrange.

9. (0, 0, 2) es un punto de mínimo de f.

11. $\frac{3}{2}$ es el máximo absoluto y 0 el mínimo absoluto.

13. El diámetro debe ser igual a la altura, $20/\sqrt[3]{2\pi}$ cm.

15. El valor máximo en $\sqrt{3}$ en $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ y el valor mínimo $-\sqrt{3}$ en $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

17. La longitud horizontal es $\sqrt{qA/p}$ y la vertical es $\sqrt{pA/q}$.

19. Para el Ejercicio 1, el hessiano orlado que se necesita es

$$|\bar{H}_2| = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & -2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & -2\lambda \end{vmatrix} = 8\lambda(x^2 + y^2),$$

$$|\bar{H}_3| = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y & 2z \\ 2x & -2\lambda & 0 & 0 \\ 2y & 0 & -2\lambda & 0 \\ 2z & 0 & 0 & -2\lambda \end{vmatrix} = -16\lambda(x^2 + y^2 + z^2).$$

En $\sqrt{\frac{2}{3}}(1, -1, 1)$ el multiplicador de Lagrange es $\lambda = \sqrt{6}/4 > 0$, lo que indica un máximo en $\sqrt{\frac{2}{3}}$ $(1, -1, 1)$, y $\lambda = -\sqrt{6}/4 < 0$ indica un mínimo en $\sqrt{\frac{2}{3}}(-1, 1, -1)$. Para el Ejercicio 5, $|H| = 24\lambda(4x^2 + 6y^2)$ y por tanto $\lambda = \sqrt{70}/12 > 0$ indica un máximo en $(9/\sqrt{70}, 4/\sqrt{70})$ y $\lambda = -\sqrt{70}/12 < 0$ indica un mínimo en $(-9/\sqrt{70}, -4/\sqrt{70})$.

21. 11.664 cm^3.

23. **a)** $\nabla f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

b) S está definida por la restricción $g(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$. Puesto que $\nabla g(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}$ no es $\mathbf{0}$, se puede aplicar el Teorema 9. En un punto $\mathbf{x}$ en el que f tiene un extremo existe $\lambda/2$ tal que $\nabla f(\mathbf{x}) = (\lambda/2)/\nabla g(\mathbf{x})$. Esto es, $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

25. Mínimo en $(-1/\sqrt{2}, 0)$, máximo en $(\frac{1}{4}, \pm\sqrt{7/8})$, mínimo local en $(1/\sqrt{2}, 0)$

27. No hay puntos críticos: ni máximos, ni mínimos.

29. $(-1, 0, 1)$

31. El punto $(K, L) = (\alpha B/q, (1 - \alpha)B/p)$ optimiza el beneficio.

Sección 3.5

1. Usar el caso particular del teorema de la función implícita para $n = 1$ (*véase* el Ejemplo 3.33). La recta i) está dada por $0 = (x - x_0, y - y_0) \cdot \nabla F(x_0, y_0) = (x - x_0)(\partial F/\partial x)(x_0, y_0) + (y - y_0)(\partial F/\partial y)(x_0, y_0)$. Para la recta (ii) el Teorema 11 produce $dy/dx = -(\partial F/\partial x)(\partial F/\partial y)$ y por lo tanto las rectas coinciden y tienen por ecuación

$$y = y_0 = -\frac{(\partial F/\partial x)(x_0, y_0)}{(\partial F/\partial y)(x_0, y_0)}(x - x_0).$$

3. **a)** Si $x < -\frac{1}{4}$, podemos despejar y en función de x usando la fórmula cudrática.

b) $\partial F/\partial y = 2y + 1$ no es cero cuando $\{y \mid y < -\frac{1}{2}\}$ e $\{y \mid > -\frac{1}{2}\}$. Estas regiones corresponden a las mitades superior e inferior de una parábola horizontal con vértice en $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$, y con la elección de signo en la fórmula cuadrática. La derivada $dy/dx = -3(2y + 1)$ es negativa en la mitad superior de la parábola y positiva en la mitad inferior.

5. Sea $F(x, y, z) = x^3z^2 - z^3yx$; $\partial F/\partial z = 2x^3z - 3z^2yx \neq 0$ en $(1, 1, 1)$. Cerca del origen, con $x = y \neq 0$ obtenemos soluciones $z = 0$ y $z = x$, por lo que existe solución única. En $(1, 1)$ $\partial z/\partial x = 2$ y $\partial z/\partial y = -1$.

7. Con $F_1 = y + x + uv$ y $F_2 = uxy + v$, el determinante en el teorema general de la función implícita es

$$\begin{vmatrix} \partial F_1/\partial u & \partial F_1/\partial v \\ \partial F_2/\partial u & \partial F_2/\partial v \end{vmatrix} = v - uxy,$$

que es 0 en $(0, 0, 0, 0)$. Por lo tanto, el teorema de la función implícita no se puede utilizar. Si se intenta directamente, encontramos que $v = -uxy$, de manera que $x + y = u^2xy$. Para un elección particular de (x, y) cerca de $(0, 0)$, o bien no hay solución para (u, v) o hay dos.

9. No. $f(x, y) = (-1, 0)$ tiene infinitas soluciones, a saber, $(x, y) = (0, y)$ para todo y.

11. **a)** $x_0^2 + y_0^2 \neq 0$.

b) $f'(z) = -z(x + 2y)/(x^2 + y^2)$; $g'(z) = z(y - 2x)/(x^2 + y^2)$.

13. Multiplicar e igualar coeficientes par obtener a_0, a_1 y a_2 como funciones de r_1, r_2 y r_3. A continuación calcular el determinante jacobiano $\partial(a_0, a_1, a_2)/\partial(r_1, r_2, r_3) = (r_3 - r_2)(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)$. Esta expresión no es nula si las raíces son distintas. Por lo tanto, el teorema de la función inversa muestra que las raíces pueden hallarse como funciones de los coeficientes en un entorno de cualquier punto en el que las raíces sean distintas. Esto es, si las raícaes r_1, r_2 y r_3 de $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ son todas diferentes, existen entornos V de (r_1, r_2, r_3) y W de (a_0, a_1, a_2) tal que las raíces en V son funciones suaves de los coeficientes en W.

Ejercicios de repaso del Capítulo 3

1. **a)** Punto de ensilladura.

b) Punto de ensilladura para cualquier C.

3. **a)** 1 **b)** $\sqrt{83}/6$

5. Usar el criterio de la segunda derivada; (0, 0) es un punto de máximo local; $(-1, 0)$ es un punto de ensilladura; (2, 0) es un punto de mínimo local.

7. Punto de ensilladura en $(n, 0)$, n entero.

9. Máximo $\approx 2{,}618$, mínimo $\approx 0{,}382$.

11. Máximo 1, mínimo $\cos 1$.

13. $z = 1/4$

15. $(0, 0, \pm 1)$

17. Si $b \geq 2$, la distancia mínima es $2\sqrt{b - 1}$; si $b \leq 2$, la distancia mínima es $|b|$.

19. No estable.

21. $f(-\frac{3}{2}, -\sqrt{3}/2) = 3\sqrt{3}/4$

23. $x = (20/3)\sqrt[3]{3}$; $y = 10\sqrt[3]{3}$; $z = 5\sqrt[3]{3}$

25. El determinante del teorema general de la función implícita no es cero, y por lo tanto podemos resolver para u y v, $(\partial u/\partial x)(2, -1) = 13/32$.

27. Se puede encontrar una nueva base ortonormal con respecto a la cual la forma cuadrática dada por la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

tiene forma diagonal. Este cambio de base define nuevas variables ξ y η, que son funciones lineales de x e y. Manipulaciones algebraicas y la regla de la cadena producen $Lv = \lambda(\partial^2 v/\partial\xi^2) + \mu(\partial^2 v/\partial\eta^2)$. Los números λ y μ son los autovalores de A y son positivos, puesto que la forma cuadrática es definida positiva. En un punto de máximo $\partial v/\partial\xi = \partial v/\partial n = 0$. Además $\partial^2 v/\partial\xi^2 \leq 0$ y $\partial^2 v/\partial\eta^2 \leq 0$, puesto

que si uno de ellos fuera mayor que 0, la sección transversal del gráfico en esta dirección tendría un mínimo. Entonces $Lv \leqslant 0$, y se tiene una contradicción con la subarmonicidad estricta.

29. Dar la vuelta a las desigualdades de los Ejercicios 27 y 28.

31. Las ecuaciones para un punto crítico, $\partial x/\partial m = \partial s/\partial b = 0$, cuando se resuelven para m y b producen $m = (y_1 - y_2)/(x_1 - x_2)$ y $b = (y_2x_1 - y_1x_2)/(x_1 - x_2)$. La recta $y = mx + b$ pasa por (x_1, y_1) e (x_2, y_2).

33. En un punto de mínimo de s tenemos $0 = \partial s/\partial b = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - mx_i - b)$.

35. $y = \frac{9}{10}x + \frac{6}{5}$

Capítulo 4

Sección 4.1

1. $\mathbf{r}'(t) = -(\operatorname{sen} t)i + 2(\cos 2t)\mathbf{j}$, $r'(0) = 2\mathbf{j}$, $\mathbf{a}(t) = -(\cos t)\mathbf{i} - 4(\operatorname{sen} 2t)\mathbf{j}$, $\mathbf{a}(0) = -\mathbf{i}$, $\mathbf{l}(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$

3. $\mathbf{r}'(t) = \sqrt{2}\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} - e^{-t}\mathbf{k}$, $\mathbf{r}'(0) = \sqrt{2}\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{a}(t) = e^t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$, $\mathbf{a}(0) = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{l}(t) = \sqrt{2}\mathbf{i} + (1 + t)\mathbf{j} + (1 - t)\mathbf{k}$

5. $(e^t - e^{-t}, \cos t - \operatorname{sen} t, -3t^2)$

7. $[-3t^2(2\operatorname{sen} t + \cos t) - t^3(2\cos t - \operatorname{sen} t)]\mathbf{i} + [3t^2(2e^t + e^{-t}) + t^3(2e^t - e^{-t})]\mathbf{j} + [e^t(\cos t - \operatorname{sen} t) - e^{-t}(-\operatorname{sen} t + \cos t)]\mathbf{k}$

9. $m(0, 6, 0)$

11. $-24\pi^2(\cos(2\pi t/5), \operatorname{sen}(2\pi t/5))/25$

13. $\dfrac{d}{dt}(\|\mathbf{v}\|)^2 = \dfrac{d}{dt}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) = 2\mathbf{v}\cdot\dfrac{d\mathbf{v}}{dt} = 2\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = 0$

15. 6.129 segundos

17. $\mathbf{c}(t) = \left(\dfrac{t^2}{2}, e^t - 6, \dfrac{t^3}{3} + 1\right)$

19. **a)** $\mathbf{c}(t) = (t, e^t)$, $-\infty < t < \infty$. La imagen de esta trayectoria es la gráfica de $y = e^x$.

b) $\mathbf{c}(t) = (\frac{1}{2}\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, una elipse.

c) $\mathbf{c}(t) = (at, bt, ct)$.

d) $\mathbf{c}(t) = (\frac{2}{3}\cos t, \frac{1}{2}\operatorname{sen} t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, una elipse.

21. $\mathbf{c}(t) \times \mathbf{c}'(t)$ es normal al plano de la órbita en el instante t. Como en el Ejercicio 20, su derivada es cero y por lo tanto la órbita está en un plano.

Sección 4.2

1. $2\sqrt{5}\pi$

3. $2(2\sqrt{2}-1)$

5. $\dfrac{6-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2}\log\left[\dfrac{2\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\right]$

7. $2\pi(\sqrt{5}+\sqrt{2})$

9. $3+\log 2$

11. **a)** Puesto que α es estrictamente creciente, es biyectiva de $[a, b]$ en $[\alpha(a), \alpha(b)]$. Por definición, $\mathbf{v}$ es la imagen de $\mathbf{c}$ si y sólo si existe t en $[a, b]$ con $\mathbf{c}(t) = \mathbf{v}$. Hay un punto s en $[\alpha(a), \alpha(b)]$ con $s = \alpha(t)$, de manera que $\mathbf{d}(s) = \mathbf{c}(t) = \mathbf{v}$. Por lo tanto, la imagen de $\mathbf{c}$ está contenida en la imagen de $\mathbf{d}$. Utilizar α^{-1} de manera similar para probar la inclusión contraria.

(b)

$$l_{\mathbf{d}} = \int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} \|\mathbf{d}'(s)\|\,ds = \int_{s=\alpha(a)}^{s=\alpha(b)} \|\mathbf{d}'(\alpha(t))\|\alpha'(t)\,dt$$

$$= \int_{t=a}^{t=b} \|\mathbf{d}'(\alpha(t))\alpha'(t)\|\,dt = \int_a^b \|\mathbf{c}'(t)\|\,dt = l_{\mathbf{c}}.$$

d) Diferenciar $\mathbf{d}$ usando la regla de la cadena.

13. **a)** $l_{\mathbf{c}} = \int_a^b \|\mathbf{c}'(s)\|\,ds = \int_a^b ds = b - a$

b) $\mathbf{T}(s) = \mathbf{c}'(s)/\|\mathbf{c}'(s)\| = \mathbf{c}'(s)$, de manera que $\mathbf{T}'(s) = \mathbf{c}''(s)$. Entonces $k = \|\mathbf{T}'\| = \|\mathbf{c}''(s)\|$.

c) Demostrar que si $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ están en $\mathbb{R}^3$, $\|\mathbf{v}\times\mathbf{w}\| = \|\mathbf{w} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}/\|\mathbf{v}\|^2)\mathbf{v}\|\cdot\|\mathbf{v}\|$. Usar esto para demostrar que si $\boldsymbol{\rho}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ nunca es $(0, 0, 0)$ y $\mathbf{f}(t) = \boldsymbol{\rho}(t)/\|\boldsymbol{\rho}(t)\|$, entonces

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \frac{1}{\|\boldsymbol{\rho}(t)\|}\left[\boldsymbol{\rho}'(t) - \frac{\boldsymbol{\rho}(t)\cdot\boldsymbol{\rho}'(t)}{\|\boldsymbol{\rho}(t)\|^2}\boldsymbol{\rho}(t)\right] \quad \text{y} \quad \frac{d\mathbf{f}}{dt} = \frac{\|\boldsymbol{\rho}(t)\times\boldsymbol{\rho}'(t)\|}{\|\boldsymbol{\rho}(t)\|^2}.$$

Con $\boldsymbol{\rho}(t) = \mathbf{c}'(t)$ esto produce

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{\mathbf{c}''(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|} - \frac{\mathbf{c}'(t)\cdot\mathbf{c}''(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|^3}\mathbf{c}'(t) \quad \text{y} \quad \|\mathbf{T}'(t)\| = \frac{\|\mathbf{c}'(t)\times\mathbf{c}''(t)\|}{\|\mathbf{c}'(t)\|^2}.$$

Si s es la longitud de arco de $\mathbf{c}$, $ds/dt = \|\mathbf{c}'(t)\|$, y por tanto

$$\left\|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right\| = \left\|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt}\right\| = k\|\mathbf{c}'(t)\|.$$

Entonces,

$$k = \frac{1}{\|\mathbf{c}'(t)\|}\left\|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right\| = \frac{\|\mathbf{c}'(t)\times\mathbf{c}''(t)\|}{\|\mathbf{c}'(t)\|^3}.$$

(Este resultado es útil para el Ejercicio 15.)

d) $1/\sqrt{2}$

15. **a)** Puesto que $\mathbf{c}$ está parametrizada por la longitud de arco, $\mathbf{T}(s) = \mathbf{c}'(s)$ y $\mathbf{N}(s) = \mathbf{c}''(s)/\|\mathbf{c}''(s)\|$. Usar el Ejercicio 13 para mostrar que

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \left(\mathbf{c}'' \times \frac{\mathbf{c}''}{\|\mathbf{c}''\|}\right) + \mathbf{c}' \times \left(\frac{\mathbf{c}'''}{\|\mathbf{c}''\|} - \frac{\mathbf{c}'' \cdot \mathbf{c}'''}{\|\mathbf{c}''\|^3}\,\mathbf{c}''\right)$$

y

$$\tau = -\frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{N} = -\frac{(\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''') \cdot \mathbf{c}''}{\|\mathbf{c}''\|^2} = \frac{(\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'') \cdot \mathbf{c}'''}{\|\mathbf{c}''\|^2}.$$

b) Obtener $\mathbf{T}'(t)$ y $\|\mathbf{T}'(t)\|$ como en el Ejercicio 13. $\mathbf{B}$ es un vector unitario en la dirección de $\mathbf{c}' \times \mathbf{T}' = (\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'')/\|\mathbf{c}'\|$, de manera que $\mathbf{B} = (\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'')/\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|$. Utilizar la solución del Ejercicio 13 con $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{c}' \times \mathbf{c}''$ para escribir

$$d\mathbf{B}/dt = (\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''')/\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\| - \{[(\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'') \cdot (\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''')]/\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|^3\}(\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''),$$

y los valores de $\mathbf{T}'$ y $\|\mathbf{T}'\|$ para obtener

$$\mathbf{N} = (\|\mathbf{c}'\|/\|\mathbf{c}', \times \mathbf{c}''\|)(\mathbf{c}'' - (\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'')/\|\mathbf{c}'\|^2).$$

Finalmente, usar la regla de la cadena y el producto escalar de estos dos vectores para tener

$$\tau = -\left[\frac{d\mathbf{B}}{ds}(s(t))\right] \cdot \mathbf{N}(s(t)) = -\frac{1}{|ds/dt|}\frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot \mathbf{N} = \frac{(\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'') \cdot \mathbf{c}'''}{\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|^2}.$$

c) $\sqrt{2}/2$

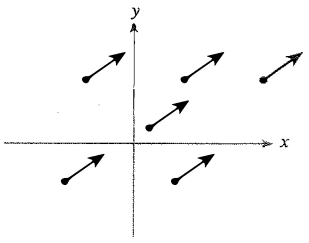
17. **a)** $\mathbf{N}$ está definido como $\mathbf{T}'/\|\mathbf{T}'\|$, de manera que $\mathbf{T}' = \|\mathbf{T}'\|\mathbf{N} = k\mathbf{N}$. Puesto que $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}' = 0$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ y $\mathbf{B}$ forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Diferenciar $\mathbf{B}(s) \cdot \mathbf{B}(s) = 1$ y $\mathbf{B}(s) \cdot \mathbf{T}(s) = 0$ para obtener $\mathbf{B}' \cdot \mathbf{B} = 0$ y $\mathbf{B}' \cdot \mathbf{T} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{T}' = 0$. Pero $\mathbf{T}' \cdot \mathbf{B} = \|\mathbf{T}'\|\mathbf{N} \cdot \mathbf{B} = 0$, de manera que también $\mathbf{B}' \cdot \mathbf{T} = 0$. Entonces $\mathbf{B}' = (\mathbf{B}' \cdot \mathbf{T})\mathbf{T} + (\mathbf{B}' \cdot \mathbf{N})\mathbf{N} + (\mathbf{B}' \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} = (\mathbf{B}' \cdot \mathbf{N})\mathbf{N} = -\tau\mathbf{N}$. Tambien $\mathbf{N}' \cdot \mathbf{N} = 0$, puesto que $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1$. Entonces, $\mathbf{N}' = (\mathbf{N}' \cdot \mathbf{T})\mathbf{T} + (\mathbf{N}' \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}$. Al diferenciar $\mathbf{N} \cdot \mathbf{T} = 0$ y $\mathbf{N} \cdot \mathbf{B} = 0$ se obtiene $\mathbf{N}' \cdot \mathbf{T} = -\mathbf{N} \cdot \mathbf{T}' = -k$ y $\mathbf{N}' \cdot \mathbf{B} = -\mathbf{N} \cdot \mathbf{B}' = \tau$, de donde se deduce la ecuación central.

b) $\omega = \tau\mathbf{T} + k\mathbf{B}$

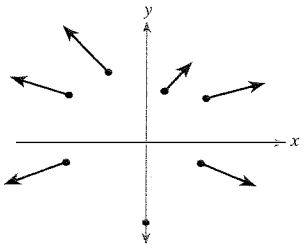
19. Seguir la indicación del texto.

Sección 4.3

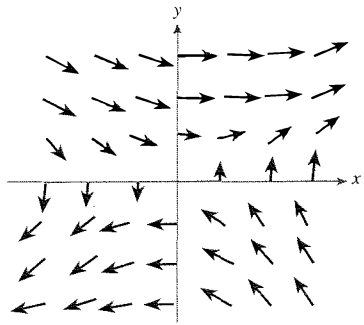
1.



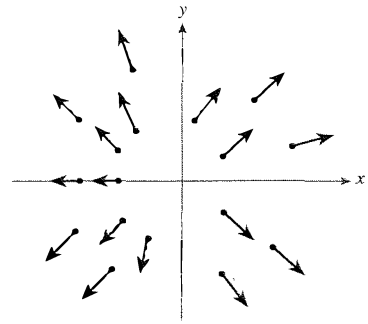
3.



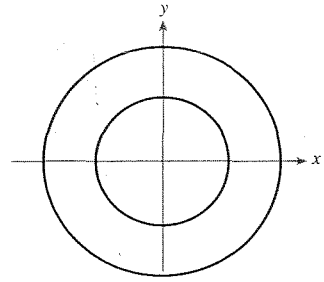
5. $\mathbf{F} = (2y, x)$:



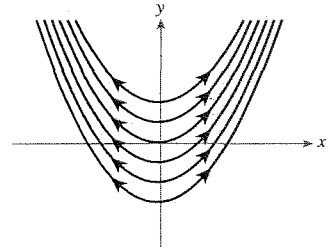
7.



9. Las líneas de flujo son circunferencias concéntricas:



11. Las líneas de flujo para $t > 0$:



13. $\mathbf{c}'(t) = (2e^{2t}, 1/t, -1/t^2) = \mathbf{F}(\mathbf{c}(t))$

15. $\mathbf{c}'(t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t, e^t) = \mathbf{F}(\mathbf{c}(t))$

17. Comparar $\frac{1}{2}mv^2$ para la velocidad de escape $v_e = \sqrt{2gR_0}$ y para la velocidad en una órbita de radio R_0 dada en la Sección 4.1 (ignorar la rotación de la tierra).

19. Usar que $-\nabla T$ es perpendicular a la superficie $T =$ constante.

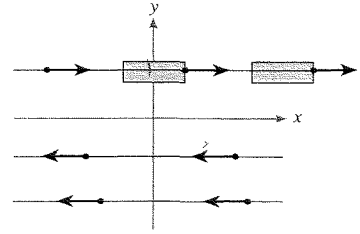
Sección 4.4

1. $ye^{xy} - xe^{xy} + ye^{yz}$

3. 3

5. div $\mathbf{V} > 0$ en el primer y tercer cuadrantes.
div $\mathbf{V} < 0$ en el segundo y cuarto cuadrantes.

7. $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$; si $\mathbf{F}$ representa un fluido no hay ni expansión ni compresión; el área de un pequeño rectángulo no cambia.



9. $3x^2 - x^2 \cos(xy)$

11. $y \cos(xy) + x^2 \operatorname{sen}(x^2 y)$

13. $\mathbf{0}$

15. $(10y - 8z)\mathbf{i} + (6z - 10x)\mathbf{j} + (8x - 6y)\mathbf{k}$

17. $-\operatorname{sen} x$

19. x

21. $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$

23. $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$

25. $\nabla \times \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$

27. Sea $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ y calcular ambos lados de la identidad.

29. **a)** $2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$

b) $(3y^2xz, 4xz - y^3z, 0)$

c) $(-y^3zx^3, 2x^2y^4z, 2x^3z^2 - 2xy)$

d) $4x^2yz^2 + x^2$

31. No.

33. Separar cada una de las expresiones en sus partes real e imaginaria y tratar el resultado como un campo de vectores en $\mathbb{R}^2$. Calcular directamente el rotacional y la divergencia.
En a), $\mathbf{F} = (x^2 - y^2)\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j}$.
En b), $\mathbf{F} = (x^3 - 3xy^2)\mathbf{i} + (y^3 - 3x^2y)\mathbf{j}$.
En c), $\mathbf{F} = (e^x \cos y)\mathbf{i} - (e^x \operatorname{sen} y)\mathbf{j}$. Demostrar que $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ y $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ en cada caso.

Ejercicios de repaso del Capítulo 4

1. $\mathbf{v}(1) = (3, -e^{-1}, -\pi/2)$; $\mathbf{a}(1) = (6, e^{-1}, 0)$;
$s(1) = \sqrt{9 + e^{-2} + \frac{\pi^2}{4}}$; $\mathbf{l}(t) = (2, e^{-1}, 0) + (t - 1)(3, -e^{-1}, -\pi/2)$

3. $\mathbf{v}(0) = (1, 1, 0)$; $\mathbf{a}(0) = (1, 0, -1)$; $s = \sqrt{2}$; $l(t) = (1, 0, 1) + t(1, 1, 0)$

5. Vector tangente: $\mathbf{v} = -(1/\sqrt{2})\mathbf{i} + (1/\sqrt{2})\mathbf{j} + \mathbf{k}$
Vector aceleración: $\mathbf{a} = -(1/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j})$

7. $m(2, 0, -1)$

9. $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{1 + \tfrac{4}{9}t^{-2/3} + \tfrac{4}{25}t^{-6/5}}\,dt$

11. **a)** $\mathbf{v} = (-2t \operatorname{sen}(t^2), 2t\cos(t^2), 0)$; $s = 2t$

b) $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$

c) $\sqrt{5\pi/3}$

d) $\mathbf{v} = 2\sqrt{5\pi/3}(\sqrt{3}/2, 1/2, 0)$; $s = 2\sqrt{5\pi/3}$

e) $\left(\dfrac{3}{2} + \dfrac{5\pi}{\sqrt{3}}\right)\Big/\sqrt{5\pi}$

13. $x = 1 + t$, $y = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{t}{2}$, $z = -\dfrac{2}{3} + \dfrac{t}{3}$

15. Calcular $\mathbf{c}'(t)$ y comprobar que coincide con $\mathbf{F}(\mathbf{c}(t))$.

17. 9; $\mathbf{0}$

19. 3; $-\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$

21. 0; $-\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$

23. $\nabla f = (ye^{xy} - y\operatorname{sen} xy,\ xe^{xy} - x\operatorname{sen} xy,\ 0)$; comprobar que $\nabla \times \nabla f = 0$ en este caso.

25. $\nabla f = (2xe^{x^2} + y^2 \operatorname{sen} xy^2,\ 2xy \operatorname{sen} xy^2,\ 0)$; comprobar que $\nabla \times \nabla f = 0$ a partir de esta fórmula.

27. **a)** $(yz^2, xz^2, 2xyz)$; **b)** $(z - y, 0, -x)$

c) $(2xyz^3 - 3xy^2z^2,\ 2x^2y^2z - y^2z^3,\ y^2z^3 - 2x^2yz^2)$

29. div $\mathbf{F} = 0$; rot $\mathbf{F} = (0, 0, 2(x^2 + y^2)f'(x^2 + y^2) + 2f(x^2 + y^2))$

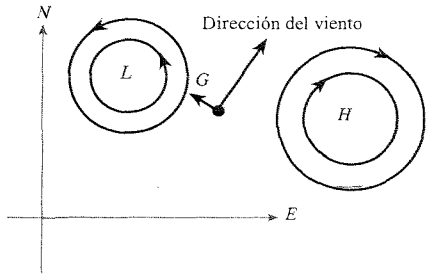
31. **a)** Un cono alrededor de $\mathbf{i}$ formando un ángulo de $\pi/3$ con $\mathbf{i}$.

b) $\nabla g = (3x^2, 5z, 5y + 2z)$

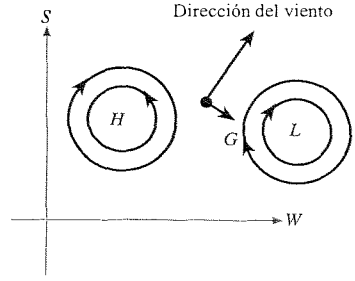
33. **a)** $[(\partial P/\partial x)^2 + (\partial P/\partial y)^2]^{1/2}$

b) Un pequeño paquete de aire obedecerá la ley $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

c)



d)



35. a) $\dfrac{\sqrt{R^2+\rho^2}}{\rho}(z_0 - z_1)$ b) $\sqrt{\dfrac{2(R^2+\rho^2)z_0}{g\rho^2}}$

37. 1.095,5 km/h.

Capítulo 5

Sección 5.1

1. a) $\frac{13}{15}$ b) $\pi + \frac{1}{2}$ c) 1 d) $\log 2 - \frac{1}{2}$

3. Para demostrar que los volúmenes de los dos cilindros son iguales, hay que demostrar que sus funciones área son la misma.

5. $2r^3(\tan\theta)/3$

7. $\frac{26}{9}$

9. $(2/\pi)(e^2 + 1)$

11. $\frac{196}{15}$

Sección 5.2

1. a) $\frac{7}{12}$ b) $e - 2$ c) $\frac{1}{9}\operatorname{sen} 1$ d) $2\ln 4 - 2$

3. 1/4

5. Utilizar el teorema de Fubini para escribir

$$\iint_R [f(x)g(y)]\,dx\,dy = \int_c^d g(y)\left[\int_a^b f(x)\,dx\right]dy,$$

y observar que $\int_a^b f(x)\,dx$ es constante, por lo que puede sacarse fuera de la integral.

7. 11/6

9. Puesto que $\int_0^1 dy = \int_0^1 2y\,dy = 1$, tenemos $\int_0^1 [\int_0^1 f(x, y)\,dy]\,dx = 1$. En cualquier partición de $R = [0, 1] \times [0, 1]$, cada rectángulo R_{jk} contiene puntos $\mathbf{c}_{jk}^{(1)}$ con x racional y $\mathbf{c}_{jk}^{(2)}$ con x irracional. Si en

una partición regular de orden n elegimos $\mathbf{c}_{jk} = \mathbf{c}_{jk}^{(1)}$ en los rectángulos para los que $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$, y $\mathbf{c}_{jk} = \mathbf{c}_{jk}^{(2)}$ cuando $y > \frac{1}{2}$, las sumas de aproximación son las mismas que las de la función

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \\ 2y & \frac{1}{2} < y < 1. \end{cases}$$

Puesto que g es integrable, las sumas de aproximación deben converger hacia $\int_R g\,dA = 7/8$. Sin embargo, si hemos elegido $\mathbf{c}_{ij} = \mathbf{c}_{jk}^{(1)}$ todas las sumas de aproximación valdrán 1.

11. No se puede aplicar el teorema de Fubini puesto que el integrando no es continuo ni está acotado en (0, 0).

Sección 5.3

1. **a)** 1/3, ambos **b)** 5/2, ambos **c)** $(e^2 - 1)/4$, ambos **d)** 1/35, ambos

3. $A = \displaystyle\int_{-r}^{r} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy\,dx = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = r^2[\operatorname{arcsen} 1 - \operatorname{arcsen}(-1)] = \pi r^2.$

5. 1.620 m^3.

7. 0

9. y-simple; $\pi/2$

11. 50π

13. $\pi/24$

15. Calcular primero la integral con respecto a y. Dividir esta integral en dos integrales entre $[-\phi(x), 0]$ y $[0, \phi(x)]$, y cambiar de variables en la primera integral o usar simetría.

17. Sea $\{R_{ij}\}$ una partición de un rectángulo R que contiene a D y sea f igual a 1 en D. Entonces, f es 1 en D y 0 en $R \backslash D$. Sea $\mathbf{c}_{jk} \in R \backslash D$ si R_{ij} no está contenido en D. La suma de aproximación de Riemann es la suma de las áreas de los rectángulos de la partición contenidos en D.

Sección 5.4

1. **a)** 1/8 **b)** $\pi/4$ **c)** 17/12

d) $G(b) - G(a)$, donde $dG/dy = F(y, y) - F(a, y)$ y $\partial F/\partial x = f(x, y)$.

3. Observar que el valor máximo de f en D es e y que el valor mínimo de f en D es $1/e$. Usar las ideas de la demostración del Teorema 4 para mostrar que

$$\frac{1}{e} \leq \frac{1}{4\pi^2} \iint f(x, y)\,dA \leq e.$$

5. El menor valor de $f(x, y) = 1/(x^2 + y^2 + 1)$ en D es $\frac{1}{6}$, en (1, 2), y por lo tanto

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \geq \frac{1}{6} \cdot \text{área } D = 1.$$

El mayor valor es 1, en (0, 0), y por lo tanto

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy \leq 1 \cdot \text{área } D = 6.$$

7. $\frac{4}{3}\pi abc$

9. $\pi(20\sqrt{10} - 52)/3$

11. $\sqrt{3}/4$

13. D se parece a una cuña de tarta.

$$\int_0^1 \left[\int_0^x f(x, y)\, dy\right] dx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y)\, dy \Big] dx.$$

15. Usar la regla de la cadena y el teorema fundamental del cálculo.

Sección 5.5

1. 1/3

3. 1

5. $x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, \quad -\sqrt{1 - y^2} \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}, \quad -1 \leq y \leq 1$

7. $0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad -\sqrt{1 - y^2} \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}, \quad -1 \leq y \leq 1$

9. $50\pi/\sqrt{6}$

11. 1/2

13. 0

15. $a^5/20$

17. 0

19. 3/10

21. 1/6

23. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$

25. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} \int_{0}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$

27. $\displaystyle\iint_D \int_0^{f(x,y)} dz\, dx\, dy = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy$

29. Sean M_ε y m_ε el máximo y el mínimo de f en B_ε. Se tiene la desigualdad $m_\varepsilon \operatorname{vol}(B_\varepsilon) \leq \iiint_{B_\varepsilon} f dV \leq M_\varepsilon \operatorname{vol}(B_\varepsilon)$. Dividir por $\operatorname{vol}(B_\varepsilon)$, hacer $\varepsilon \to 0$ y usar la continuidad de f.

Ejercicios de repaso del Capítulo 5

1. 81/2

3. $\frac{1}{4}e^2 - e + \frac{9}{4}$

5. 81/2

7. $\frac{1}{4}e^2 - e + \frac{9}{4}$

9. 7/60

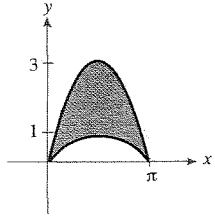
11. 1/2

13. Con la notación de la Figura 5.3.1,

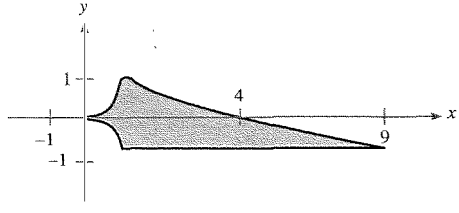
$$\iint_{\mathcal{D}} dx\,dy = \int_a^b [\phi_2(x) - \phi_1(x)]\,dx.$$

15. **a)** 0 **b)** $\pi/24$ **c)** 0

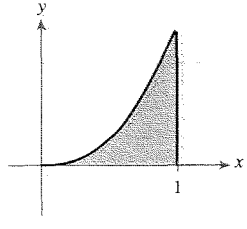
17. y-simple; $2\pi + \pi^2$



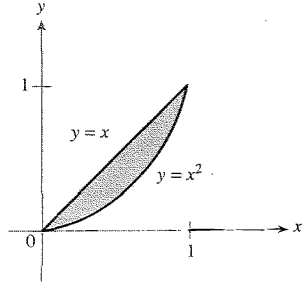
19. x-simple; 73/3



21. y-simple; 33/140

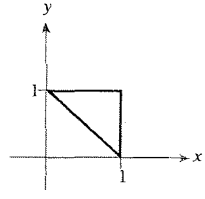


23. y-simple; 71/420



25. 1/3

29. 7/12



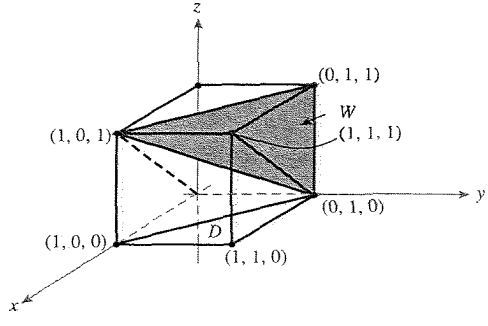
31. La función $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ está entre 1 y $2^2 + 1 = 5$ en D, y por lo tanto la integral está entre estos valores multiplicados por el área de D, que es 4π.

33. Intercambiando el orden de integración (el lector deberá hacer un dibujo en el plano (u, t)):

$$\int_0^x \int_0^t F(u)\, du\, dt = \int_0^x \int_u^x F(u)\, dt\, du = \int_0^x (x - u)F(u)\, du.$$

35. $\pi/12$

37. La región es la región sombreada W de la figura.



La integral en el orden $dy\, dx\, dz$, por ejemplo, es

$$\int_0^1 \int_z^1 \int_{1-x}^1 f(x, y, z)\, dy\, dx\, dz.$$

Capítulo 6

Sección 6.1

1. S = el círculo de radio 1 menos el centro.

3. $D = [0, 3] \times [0, 1]$.

5. La imagen es el triángulo con vértices (0, 0), (0, 1) y (1, 1). T no es inyectiva, pero sí lo es si eliminamos la porción $x^* = 0$.

7. D es el conjunto de todos los (x, y, z) que satisfacen $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ (la bola unidad). T no es inyectiva, pero sí lo es en $(0, 1] \times (0, \pi) \times (0, 2\pi]$.

9. Demostrar que T es suprayectiva es equivalente en el caso 2×2 a demostrar que el sistema $ax + by = e$, $cx + dy = f$ siempre se puede resolver para x e y, donde

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Cuando se calculan las soluciones, o bien por eliminación o bien por la regla de Cramer, la cantidad por la que se debe dividir es $\det(A)$. Por lo tanto, si $\det(A) \neq 0$, el sistema se puede resolver siempre.

11. Puesto que $\det(A) \neq 0$, T es biyectiva de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$. Sea T^{-1} la transformación inversa. Demostrar que T^{-1} tiene como matriz A^{-1} y $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$, con $\det(A) \neq 0$. Por el Ejercicio 10, $P^* = T^{-1}(P)$ es un paralelogramo.

Sección 6.2

1. $\pi(e - 1)$

3. D es la región $0 \leq x \leq 4$, $\frac{1}{2}x + 3 \leq y \leq \frac{1}{2}x + 6$. **a)** 140 **b)** -42

5. D^* es la región $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 2$; $\frac{2}{3}(9 - 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3})$.

7. π

9. $\dfrac{64\pi}{5}$

11. $3\pi/2$

13. $\dfrac{5\pi}{2}(e^4 - 1)$

15. $2a^2$

17. $\dfrac{21}{2}\left(e - \dfrac{1}{e}\right)$

19. $100\pi/3$

21. $4\pi[\sqrt{3}/2 - \log(1 + \sqrt{3}) + \log\sqrt{2}]$

23. $4\pi \log(a/b)$

25. $2\pi[(b^2 + 1)e^{-b^2} - (a^2 + 1)e^{-a^2}]$

27. 24 (usar el cambio de variables $x = 3u - v + 1$, $y = 3u + v$).

29. **a)** $\dfrac{4}{3}\pi abc$ **b)** $\dfrac{4}{5}\pi abc$

31. **a)** Comprobar que si $T(u_1, v_1) = T(u_2, v_2)$, entonces $u_1 = u_2$ y $v_1 = v_2$.

b) 160/3

33. $\dfrac{4}{9}a^{2/3}\displaystyle\iint_{D^*} [f((au^2)^{1/3}, (av^2)^{1/3})u^{-1/3}v^{-1/3}]\,du\,dv$

Sección 6.3

1. $[\pi^2 - \operatorname{sen}(\pi^2)]/\pi^3$

3. $\left(\frac{11}{18}, \frac{65}{126}\right)$

5. 503,64 euros

7. **a)** δ, donde δ es la densidad de masa (constante). **b)** 37/12

9. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

11. 1/4

13. Siendo δ la densidad, el momento de inercia es $\delta \int_0^k \int_0^{2\pi} \int_0^{a \sec \phi} (\rho^4 \operatorname{sen}^3 \phi)\, d\rho\, d\theta\, d\phi$.

15. $(1{,}00 \times 10^8)m$

17. **a)** El único plano de simetría para el automóvil es el que divide el coche en sus lados derecho e izquierdo.

b) $\bar{z} \cdot \iiint_W \delta(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ es la coordenada z del dentro de masa multiplicada por la masa de W. Una reordenación de la fórmula para $\bar{z}$ da la primera línea de la ecuación. El paso siguiente se justifica por la propiedad aditiva de las integrales. Por simetría, podemos sustituir z por $-z$ e integrar en la región por encima del plano xy. Finalmente, podemos sacar el signo negativo fuera de la segunda integral, y puesto que $\delta(x, y, z) = \delta(u, v, -w)$ estamos restando la segunda integral de ella misma. Por consiguiente, la respuesta es 0.

c) En la parte (b) se muestra que $\bar{z}$ veces la masa de W es 0. Puesto que la masa es positiva, tenemos $\bar{z} = 0$.

d) Por c), el centro de masas debe estar en ambos planos.

19. $V = -(4{,}71 \times 10^{19})Gm/R \approx -(3{,}04 \times 10^9)m/R$, donde m es la masa de una partícula a distancia R del centro del planeta.

Sección 6.4

1. 4

3. 3/16

5. **a)** 3π **b)** $\lambda < 1$

7. La integración de $\iint e^{-xy}\, dx\, dy$ primero con respecto a x y después con respecto a y produce $\log 2$. Cambiando el orden de integración se obtiene la integral enunciada en el ejercicio.

9. Integrar sobre $[\varepsilon, 1] \times [\varepsilon, 1]$ y hacer $\varepsilon \to 0$ para mostrar que la integral impropia existe y vale $2 \log 2$.

11. $\frac{2\pi}{9}[(1 + a^3)^{3/2} - a^{9/2} - 1]$

13. Utilizar

$$\frac{\operatorname{sen}^2(x-y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

15. Utilizar $e^{x^2+y^2}/(x-y) \geqslant 1/(x-y)$ en la región dada.

17. Cada una de las integrales vale 1/4 y se puede aplicar el Teorema 3 (teorema de Fubini).

Ejercicios de repaso del Capítulo 6

1. **a)** $T\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u+v \\ 2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

b) $\iint_P f(x, y)\,dx\,dy = 4\iint_S f(2u+v, 2v)\,du\,dv$

3. 3 (hacer el cambio de variables $u = x^2 - y^2$, $v = xy$)

5. $\frac{1}{3}\pi(4\sqrt{2} - \frac{7}{2})$ **7.** $(5\pi/2)\sqrt{15}$

9. $abc/6$

11. Cortar con los planos $x + y + z = \sqrt[3]{k/n}$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, k entero.

13. $(25 + 10\sqrt{5})\pi/3$

15. $(e - e^{-1})/4$ (usar el cambio de variables $u = y - x$, $v = y + x$)

17. $(9{,}92 \times 10^6)\pi$ gr

19. **a)** 32

b) Esto ocurre en los puntos de la esfera unidad $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ inscrita en el cubo.

21. $(0, 0, 3a^{4/8})$

23. $4\pi \ln(a/b)$

25. $\pi/2$

27. **a)** 9/2 **b)** 64π

29. Trabajar primero la integral con respecto a y en la región $D_{\varepsilon,L} = \{(x, y) | \varepsilon \leqslant x \leqslant L,\ 0 \leqslant y \leqslant x$ para obtener $I_{\varepsilon,L} = \iint_{D_{\varepsilon,L}} f\,dx\,dy = \int_\varepsilon^L x^{-3/2}(1 - e^{-x})\,dx$. El integrando es positivo, y por lo tanto $I_{\varepsilon,L}$ crece cuando $\varepsilon \to 0$ y $L \to \infty$. Acotar $1 - e^{-x}$ por arriba por x cuando $0 < x < 1$ y por 1 cuando $1 < x < \infty$, para ver que $I_{\varepsilon,L}$ permanece acotada y por tanto debe converger.

31. **a)** 1/6 **b)** $16\pi/3$

33. 2π

Capítulo 7

Sección 7.1

1. $\displaystyle\int_{\mathbf{c}} f(x, y, z)\,ds = \int_I f(x(t), y(t), z(t))\|\mathbf{c}'(t)\|\,dt = \int_0^1 0 \cdot 1\,dt = 0.$

3. **a)** 2 **b)** $52\sqrt{14}$

5. $-\dfrac{1}{3}(1 + 1/e^2)^{3/2} + \dfrac{1}{3}(2^{3/2})$

7. **a)** La trayectoria sigue la línea recta en el plano xy desde (0, 0) hasta (1, 1) y regresa a (0, 0). Sobre la curva, la gráfica de f es una recta desde (0, 0, 0) hasta (1, 1, 1). La integral es dos veces el área del triángulo resultante y es igual a $\sqrt{2}$.

   b)
   $$s(t) = \begin{cases} \sqrt{2}(1 - t^4) & \text{cuando} \quad -1 \leqslant t \leqslant 0 \\ \sqrt{2}(1 + t^4) & \text{cuando} \quad 0 < t \leqslant 1. \end{cases}$$

   La trayectoria es

   $$\mathbf{c}(s) = \begin{cases} (1 - s/\sqrt{2})(1, 1) & \text{cuando} \quad 0 \leqslant s \leqslant \sqrt{2} \\ (s/(\sqrt{2} - 1))(1, 1) & \text{cuando} \quad \sqrt{2} \leqslant s \leqslant 2\sqrt{2} \end{cases}$$

   y $\int_{\mathbf{c}} f\,ds = \sqrt{2}$.

9. $2a/\pi$

11. **a)** $[2\sqrt{5} + \log(2 + \sqrt{5})]/4$ **b)** $(5\sqrt{5} - 1)/[6\sqrt{5} + 3\log(2 + \sqrt{5})]$

13. La curva es la circunferencia unidad centrada en (0, 0, 0) en el plano $x + y + z = 0$ y por tanto puede ser parametrizada por $\mathbf{c}(\theta) = (\cos\theta)\mathbf{v} + (\operatorname{sen}\theta)\mathbf{w}$, donde $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores ortogonales unitarios contenidos en el plano. Por ejemplo, se puede tomar $\mathbf{v} = (1/\sqrt{2})(-1, 0, -1)$ y $\mathbf{w} = (1/\sqrt{6})(1, -2, 1)$. La masa total es $2\pi/3$ gr.

15. Se puede elegir $\mathbf{c}(t) = (t^2, 1, 0)$ o $\mathbf{c}(t) = (1, t^2, 0)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Sección 7.2

1. **a)** 3/2 **b)** 0 **c)** 0 **d)** 147

3. 9

5. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, $|\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)| \leqslant \|\mathbf{F}(\mathbf{c}(t))\|\,\|\mathbf{c}'(t)\|$ para cada t. Entonces

   $$\left|\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{ds}\right| = \left|\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |\mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)|\,dt$$

   $$\leqslant \int_a^b \|\mathbf{F}(\mathbf{c}(t))\|\,\|\mathbf{c}'(t)\|\,dt \leqslant M\int_a^b \|\mathbf{c}'(t)\|\,dt = Ml.$$

7. $\frac{3}{4} - (n-1)/(n+1)$

9. 0

11. La longitud de $\mathbf{c}$.

13. Si $\mathbf{c}'(t)$ nunca es cero 0, el vector unidad $\mathbf{T}(t) = \mathbf{c}'(t)/\|\mathbf{c}'(t)\|$ es una función continua de t y por lo tanto es una tangente que se mueve suavemente por la curva. La respuesta es no.

15. 7

17. Usar que $\mathbf{F}$ es un gradiente para demostrar que el trabajo realizado es $\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}$, independientemente de la trayectoria.

19. **a)** $\|\mathbf{c}'(x)\|$

b) f tiene derivada positiva; es biyectiva sobre $[0, L]$ por los teoremas del valor medio y de los valores intermedios. Tiene una inversa diferenciable debido al teorema de la función inversa.

c) $g'(s) = 1/\|\mathbf{c}'(x)\|$, donde $s = f(x)$.

d) Por la regla de la cadena, $\mathbf{b}'(s) = \mathbf{c}'(s) \cdot g'(s)$, que tiene longitud 1 por el apartado c).

Sección 7.3

1. $z = 2(y-1) + 1$

3. $18(z-1) - 4(y+2) - (x-13) = 0$, o $18z - 4y - x - 13 = 0$.

5. El vector $\mathbf{n} = (\cos v \operatorname{sen} u, \operatorname{sen} v \operatorname{sen} u, \cos u) = (x, y, z)$. La superficie es la esfera unidad centrada en el origen.

7. $\mathbf{n} = -(\operatorname{sen} v)\mathbf{i} - (\cos v)\mathbf{k}$; la superficie es un cilindro.

9. **a)** $x = x_0 + (y - y_0)(\partial h/\partial y)(y_0, z_0) + (z - z_0)(\partial h/\partial z)(y_0, z_0)$ describe el plano tangente a $x = h(y, z)$ en (x_0, y_0, z_0), $x_0 = h(y_0, z_0)$.

b) $y = y_0 + (x - x_0)(\partial k/\partial x)(x_0, z_0) + (z - z_0)(\partial k/\partial z)(x_0, z_0)$.

11. $z - 6x - 8y + 3 = 0$

13. **a)** La superficie es un helicoide. Parece una rampa espiral rodeando el eje z (*véase* la Figura 7.4.2). Da dos vueltas, puesto que θ va desde 0 hasta 4π.

b) $\mathbf{n} = \pm(1/\sqrt{1+r^2})(\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta, r)$.

c) $y_0 x - x_0 y + (x_0^2 + y_0^2)z = (x_0^2 + y_0^2)z_0$.

d) Sí $(x_0, y_0, z_0) = (r_0 \cos\theta_0, r_0 \operatorname{sen}\theta_0, \theta_0)$, representando el segmento en la forma $\{(r\cos\theta_0, r\operatorname{sen}\theta_0, \theta_0) \mid 0 \leq r \leq 1\}$ se demuestra que la recta está en la superficie. Representando la recta como $\{(x_0, ty_0, z_0) \mid 0 \leq t \leq 1/(x_0^2 + y_0^2)\}$ y sustituyendo en los resultados del apartado c) se demuestra que está en el plano tangente a (x_0, y_0, z_0).

15. **a)** Usar coordenadas cilíndricas para obtener la parametrización

$$\mathbf{\Phi}(z, \theta) = (\sqrt{25 + z^2}\cos\theta, \sqrt{25 + z^2}\,\mathrm{sen}\,\theta, z), \qquad -\infty < z < \infty,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

como una posible solución.

b) $\mathbf{n} = (\sqrt{25 + z^2}\cos\theta, \sqrt{25 + z^2}\,\mathrm{sen}\,\theta, -z)/\sqrt{25 + 2z^2}$.

c) $x_0x + y_0y = 25$.

d) Sustituir las coordenadas de las rectas en la ecuación que define la superficie y en el resultado del apartado c).

17. **a)** $u \mapsto u$, $v \mapsto v$, $u \mapsto u^3$ y $v \mapsto v^3$ llevan $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ de manera sobreyectiva.

b) $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = (0, 0, 1)$ para $\mathbf{\Phi}_1$, que nunca es $\mathbf{0}$. Para la superficie $\mathbf{\Phi}_2$, $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = 9u^2v^2(0, 0, 1)$, y esto es cero a lo largo de los ejes u y v.

c) Queremos probar que cualesquiera dos parametrizaciones suaves de una superficie cerca de un punto darán el mismo plano tangente. Por lo tanto, supongamos que $\mathbf{\Phi}$: $D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $\mathbf{\Psi}$: $B \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ son superficies parametrizadas tal que

$$\mathbf{\Phi}(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0) = \mathbf{\Psi}(s_0, t_0) \tag{i}$$

y

$$(\mathbf{T}_u^{\Phi} \times \mathbf{T}_v^{\Phi})|_{(u_0, v_0)} \neq \mathbf{0} \quad \text{y} \quad (\mathbf{T}_s^{\Psi} \times \mathbf{T}_t^{\Psi})|_{(s_0, t_0)} \neq \mathbf{0}, \tag{ii}$$

de manera que $\mathbf{\Phi}$ y $\mathbf{\Psi}$ son suaves e inyectivas en entornos de (u_0, v_0) y (s_0, t_0), que podemos suponer que están contenidos en D y B. Supongamos, además, que «describen la misma superficie», esto es, $\mathbf{\Phi}(D) = \mathbf{\Psi}(B)$. Para comprobar que dan el mismo plano tangente en (x_0, y_0, z_0), demostrar que tienen vectores normales paralelos. Para hacer esto, demostrar que existe un conjunto abierto C con $(u_0, v_0) \in C \subset D$ y una función diferenciable f: $C \to B$ tal que $\mathbf{\Phi}(u, v) = \mathbf{\Psi}(f(u, v))$ para $(u, v) \in C$. Una vez hecho esto, un cálculo muestra que los vectores normales están relacionados por $\mathbf{T}_u^{\Phi} \times \mathbf{T}_v^{\Phi} = [\partial(s, t)/\partial(u, v)]\mathbf{T}_s^{\Psi} \times \mathbf{T}_t^{\Psi}$.

Para demostrar que existe f, observar que puesto que $\mathbf{T}_s^{\Psi} \times \mathbf{T}_t^{\Psi} \neq \mathbf{0}$ al menos uno de los determinantes 2×2 del producto vectorial no es nulo. Supongamos, por ejemplo, que

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial s} \\ \dfrac{\partial x}{\partial t} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Usar ahora el teorema de la función inversa para escribir (s, t) como una función diferenciable de (x, y) en algún entorno de (x_0, y_0).

d) No.

Sección 7.4

1. 4π

3. $\dfrac{3}{2}\pi[\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2})]$

5. $\dfrac{1}{3}\pi(6\sqrt{6} - 8)$

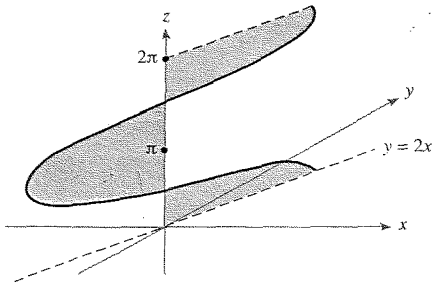
7. La integral para el volumen converge, mientras que la integral par el área diverge.

9. $A(E) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{a^2b^2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \phi + b^2c^2 \operatorname{sen}^4 \phi \cos^2 \theta + a^2c^2 \operatorname{sen}^4 \phi \operatorname{sen}^2 \theta}\, d\phi d\theta$

11. $(\pi/6)(5\sqrt{5} - 1)$

13. $(\pi/2)\sqrt{6}$

15. $4\sqrt{5}$; para θ fijo, (x, y, z) se mueve a lo largo del segmento horizontal $y = 2x$, $z = \theta$ desde el eje z hasta un radio de $\sqrt{5}|\cos\theta|$, pasando por el primer cuadrante cuando $\cos\theta > 0$ y por el tercer cuadrante si $\cos\theta < 0$.



17. $(\pi + 2)/(\pi - 2)$

19. $\pi(a + b)\sqrt{1 + m^2}(b - a)$

21. $\frac{4}{15}(9\sqrt{3} - 8\sqrt{2} + 1)$

23. Con $f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, (4) se transforma en

$$A(S') = \iint_D \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{R^2 - x^2 - y^2} + 1}\, dx\, dy$$

$$= \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy$$

donde D es el disco de radio R. Usar coordenadas polares, observando que la integral es impropia en la frontera, para obtener $2\pi R^2$.

Sección 7.5

1. $\frac{3\sqrt{2} + 5}{24}$

3. πa^3

5. **a)** $\sqrt{2}\pi R^2$ **b)** $2\pi R^2$

7. $\frac{\pi}{4}\left(\frac{5\sqrt{5}}{3} + \frac{1}{15}\right)$

9. $16\pi R^3/3$

11. **a)** La esfera tiene la misma forma mirándola desde cualquiera de los tres ejes, de manera que las tres integrales deben ser iguales, con etiquetas diferentes en los ejes.

b) $4\pi R^4/3$

c) $4\pi R^4/3$

13. $(R/2, R/2, R/2)$

15. **a)** Calcular directamente el producto vectorial $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$, calcular su longitud y comparar la respuesta con el lado izquierdo.

b) En este caso, $F = 0$, de manera que $A(s) = \iint_D \sqrt{EG}\, du\, dv$.

c) $4\pi a^2$.

17. Sea $a = \partial x/\partial u$, $b = \partial y/\partial u$, $c = \partial x/\partial v$ y $d = \partial y/\partial v$. Las coordenadas a) y b) en el Ejercicio 16 son $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ y $ac + bd = 0$. Demostrar que $a \neq 0$; se puede suponer que $a = 1$ por un argumento de normalización. Continuar calculando.

19. $2a^2$

Sección 7.6

1. $\pm 48\pi$ (el signo depende de la orientación)

3. 4π

5. 2π (o -2π, si se elige una orientación diferente)

7. 2π

9. $12\pi/5$

11. Con la parametrización en coordenadas esféricas $\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_\phi = -\operatorname{sen}\phi\,\mathbf{r}$ (*véase* el Ejemplo 7.27). Entonces

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint \mathbf{F}\cdot(\mathbf{T}_\phi \times \mathbf{T}_\theta)\, d\phi\, d\theta = \iint (\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}) \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} F_r \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta$$

y

$$\iint_S f\, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta.$$

13. Para un cilindro de radio $R = 1$ y componente normal F_r,

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_a^b \int_0^{2\pi} F_r\, d\theta\, dz.$$

15. $2\pi/3$

17. $\frac{2}{5}\, a^3 bc\pi$

Sección 7.7

1. Aplicar la Fórmula (3) de esta sección y simplificar; $H = 0$ y $K = -b^2/(u^2 + b^2)^2$.

3. Aplicar la Fórmula (3) de esta sección y simplificar.

5. $K = \dfrac{-4a^6b^6}{(a^4b^4 + 4b^4u^2 + 4a^4v^2)^2}$

7. Aplicar la Fórmula (3) de esta sección y simplificar.

9. Aplicar la Fórmula (2) de esta sección y simplificar: $K = -h''/[(1 + (h')^2)^2 h]$.

Ejercicios de repaso del Capítulo 7

1. **a)** $3\sqrt{2}(1 - e^{6\pi})/13$ **c)** $(236, 158\sqrt{26} - 8)/35 \cdot (25)^3$
   b) $-\pi\sqrt{2}/2$ **d)** $8\sqrt{2}/189$

3. **a)** $2/\pi + 1$ **b)** $-1/2$

5. $2a^3$

7. **a)** Una esfera de radio 5 centrada en el punto $(2, 3, 0)$; $\Phi(\theta, \phi) = (2 + 5\cos\theta \operatorname{sen}\phi, 3 + 5\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, 5\cos\phi)$; $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$; $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$.

   b) Un elipsoide con centro en el punto $(2, 0, 0)$; $\Phi(\theta, \phi) = (2 + (1/\sqrt{2})3\cos\theta \operatorname{sen}\phi, 3\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi, 3\cos\phi)$; $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$.

   c) Un hiperboloide elíptico de una hoja; $\Phi(\theta, z) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{8 + 2z^2}\cos\theta, \frac{1}{3}\sqrt{8 + 2z^2}\operatorname{sen}\theta, z\right)$; $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $-\infty < z < \infty$.

9. $A(\Phi) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{3\cos^2\theta + 5}\, d\theta$; Φ describe un cono con secciones transversales horizontales elípticas.

11. $11\sqrt{3}/6$

13. $\sqrt{2}/3$

15. $5\sqrt{5}/6$

17. **a)** $(e^y\cos\pi z, xe^y\cos\pi z, -\pi xe^y\operatorname{sen}\pi z)$ **b)** 0

19. $\dfrac{1}{2}(e^2 + 1)$

21. $\mathbf{n} = (1/\sqrt{5})(-1, 0, 2)$, $2z - x = 1$

23. 0

25. Si $\mathbf{F} = \nabla\phi$, entonces $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ (al menos cuando ϕ es de clase C^2; *véase* el Teorema 1 de la Sección 3.4). El Teorema 3 de la Sección 7.2 demuestra que $\int_c \nabla\phi \cdot d\mathbf{s} = 0$ puesto que $\mathbf{c}$ es una curva cerrada.

27. **a)** 24π **b)** 24π **c)** 60π

29. **a)** $[\sqrt{R^2 + p^2}(z_0 - z_1)]/p$ **b)** $\sqrt{2z_0(R^2 + p^2)/p^2 g}$

Capítulo 8

Sección 8.1

1. -8

3. **a)** 0 **b)** $-\pi R^2$ **c)** 0 **d)** $-\pi R^2$

5. $3\pi a^2$ **7.** $3\pi/2$

9. $3\pi(b^2 - a^2)/2$ **11.** **a)** Ambos lados son 2π. **b)** 0

13. 0 **15.** πab

17. Un segmento horizontal divide la región en tres partes a cada una de las cuales se le puede aplicar el teorema de Green; utilizar el Ejercicio 8 o la técnica de la Figura 8.1.5.

19. $9\pi/8$

21. Si $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|u(\mathbf{q}) - u(\mathbf{p})| < \varepsilon$ cuando $\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\| = \rho < \delta$. Parametrizar $\partial B_\rho(\mathbf{p})$ por $\boldsymbol{\gamma}(\theta) = \mathbf{p} + \rho(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Entonces

$$|I(\rho) - 2\pi u(\mathbf{p})| \leqslant \int_0^{2\pi} |u(\boldsymbol{\gamma}(\theta)) - u(\mathbf{p})|\, d\theta \leqslant 2\pi\varepsilon.$$

23. Parametrizar $\partial B_\rho(\mathbf{p})$ como en el Ejercicio 21. Si $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$, entonces

$$I(\rho) = \textstyle\int_0^{2\pi} u(p_1 + \rho\cos\theta,\, p_2 + \rho\operatorname{sen}\theta)\, d\theta.$$

Diferenciando bajo el signo integral se obtiene

$$\frac{dI}{d\rho} = \int_0^{2\pi} \nabla u \cdot (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} \nabla u \cdot \mathbf{n}\, d\theta = \frac{1}{\rho}\int_{\partial B_\rho} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, ds = \frac{1}{\rho}\iint_{B_\rho} \nabla^2 u\, dA$$

(la última igualdad utiliza el Ejercicio 22).

25. Usar el Ejercicio 24 para obtener

$$\iint_{B_R} u\, dA = \int_0^R \int_0^{2\pi} u[\mathbf{p} + \rho(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)]\rho\, d\theta\, d\rho$$

$$= \int_0^R \left(\int_{\partial B_\rho} u\, ds\right) dp = \int_0^R 2\pi\rho u(\mathbf{p})\, d\rho = \pi R^2 u(\mathbf{p}).$$

27. Supongamos que u es subarmónica. Estableceremos las afirmaciones correspondientes al Ejercicio 26 a) y b). El argumento para funciones superarmónicas es similar, con las desigualdades cambiadas.

Supongamos $\nabla^2 u \geqslant 0$ y $u(\mathbf{p}) \geqslant u(\mathbf{q})$ para todo $\mathbf{q}$ en $B_R(\mathbf{p})$. Por el Ejercicio 23, $I'(\rho) \geqslant 0$ si $0 < \rho \leqslant R$, y el Ejercicio 24 demuestra que $2\pi u(\mathbf{p}) \leqslant I(\rho) \leqslant I(R)$ para $0 < \rho \leqslant R$. Si $u(\mathbf{q}) < u(\mathbf{p})$ para algún $\mathbf{q} = \mathbf{p} + \rho(\cos\theta_0, \operatorname{sen}\theta_0) \in B_R(\mathbf{p})$, entonces, por continuidad, existe un arco $[\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta]$ en $\partial B_\rho(\mathbf{p})$ donde $u < u(\mathbf{p}) - d$ para algún $d > 0$. Esto implicaría

$$2\pi u(\mathbf{p}) \leqslant I(\rho) = \int_0^{2\pi} u[\mathbf{p} + \rho(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)]\rho\, d\theta$$

$$\leqslant (2\pi - 2\delta)u(\mathbf{p}) + 2\delta[u(\mathbf{p}) - d] \leqslant 2\pi u(\mathbf{p}) - 2\delta d.$$

Esta contradicción demuestra que debemos tener $u(\mathbf{p}) = u(\mathbf{q})$ para algún $\mathbf{q}$ en $B_R(\mathbf{p})$.

Si el máximo en $\mathbf{p}$ es un máximo absoluto en D, el último párrafo demuestra que $u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{p})$ para todo $\mathbf{x}$ en algún disco alrededor de $\mathbf{p}$. Si $\mathbf{c}$: $[0,1] \to D$ es una trayectoria de $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$, se tiene $u(\mathbf{c}(t)) = u(\mathbf{p})$ para todo t en algún intervalo $[0, b)$. Sea b_0 el mayor $b \in [0, 1]$ tal que $u(\mathbf{c}(t)) = u(\mathbf{p})$ para todo $t \in [0, b)$. (Hablando propiamente esto requiere la noción supremo que puede encontrarse en libros de cálculo.) Puesto que u es continua, $u(\mathbf{c}(b_0)) = u(\mathbf{p})$. Si $b_0 \neq 1$, el último párrafo podría aplicarse par $\mathbf{c}(b_0)$ y u sería constante e igual a $u(\mathbf{p})$ en un disco alrededor de $\mathbf{c}(b_0)$. En particular, existe $\delta > 0$ tal que $u(\mathbf{c}(t)) = u(\mathbf{c}(b_0)) = u(\mathbf{p})$ en $[0, b_0 + \delta)$. Esto contradice el que b_0 sea el máximo, de manera que debemos tener $b_0 = 1$. Esto es, $\mathbf{c}(\mathbf{q}) = \mathbf{c}(\mathbf{p})$. Puesto que $\mathbf{q}$ era un punto arbitrario de D, u es constante en D.

29. Supongamos que $\nabla^2 u_1 = 0$ y $\nabla^2 u_2 = 0$ son dos soluciones. Sea $\phi = u_1 - u_2$. Entonces $\nabla^2 \phi = 0$ y $\phi(x) = 0$ para todo $x \in \partial D$. Considerar la integral $\iint_D \phi \nabla^2 \phi\, dA = -\iint_D \nabla\phi \cdot \nabla\phi\, dA$. Entonces, $\iint_D \nabla\phi \cdot \nabla\phi\, dA = 0$, lo que implica $\nabla\phi = \mathbf{0}$; por lo tanto ϕ es una función constante y debe ser idénticamente cero.

Sección 8.2

1. -2π

3. Cada una de las integrales en el teorema de Stokes es cero.

5. 0

7. $-4\pi/\sqrt{3}$

9. 0

11. $\pm 2\pi$

13. Por la ley de Faraday, $\iint_S [\nabla \times \mathbf{E} + \partial\mathbf{H}/\partial t] \cdot d\mathbf{S} = 0$ para cualquier superficie S. Si el integrando fuera un vector no nulo en algún punto, por continuidad de la integral sobre un disco pequeño centrado en el punto y perpendicular al vector tendríamos un resultado no nulo.

15. La orientación de $\partial S_1 = \partial S_2$ debe coincidir.

17. Supongamos que C es una curva cerrada en la superficie trazada de tal manera que divide a la superficie en dos piezas S_1 y S_2. Para la superficie de un donuts (toro) se deberán usar dos curvas cerradas cruzadas; ¿puede averiguar por qué? Entonces, C acota S_1 y S_2, pero con orientación positiva con respecto a una y negativa con respecto a la otra. Por consiguiente,

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA

19. **a)** Si $C = \partial S$, $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{0} \cdot d\mathbf{s} = 0$.

b) $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{v} \cdot \mathbf{c}'(t)\, dt = \mathbf{v} \cdot \int_a^b \mathbf{c}'(t)\, dt = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{c}(b) - \mathbf{c}(a))$, donde $\mathbf{c}$: $[a, b] \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización de C. (El vector integral es el vector cuyas componentes son las integrales de cada función componente.) Si C es cerrada, la última expresión es 0.

21. Ambas integrales dan $\pi/4$. **23.** **a)** 0 **b)** π **c)** π

25. -20π (o 20π si se utiliza la orientación contraria).

27. Una respuesta posible: la curva de Möbius C es también la frontera de una superficie *orientada* $\tilde{S}$; la ecuación de la ley de Faraday también es válida para esta nueva superficie.

Sección 8.3

1. Si $\mathbf{F} = \nabla f = \nabla g$ y C es una curva desde $\mathbf{v}$ hasta $\mathbf{w}$, entonces $(f - g)(\mathbf{w}) - (f - g)(\mathbf{v}) = \int_C \nabla(f - g) \cdot d\mathbf{s} = 0$ y por tanto $f - g$ es constante.

3. $x^2yz - \cos x + C$

5. Sí, es el gradiente de $g(x, y) = F(x) + F(y)$, donde $F'(x) = f(x)$.

7. No; $\nabla \times \mathbf{F} = (0, 0, -x) \neq \mathbf{0}$

9. $e \operatorname{sen} 1 + \frac{1}{3} e^3 - \frac{1}{3}$

11. $3{,}5 \times 10^{29}$ ergios

13. **a)** $f = x^2/2 + y^2/2 + C$ **c)** $f = \frac{1}{3} x^3 + xy^2 + C$

b) $\mathbf{F}$ no es un campo gradiente.

15. Usar el Teorema 7 en cada caso.

a) $-3/2$ **b)** -1 **c)** $\cos(e^2) - \cos(1/e)/e$

17. **a)** No **b)** $\left(\frac{1}{2} z^2, xy - z, x^2y\right)$ o $\left(\frac{1}{2} z^2 - 2xyz - \frac{1}{2} y^2, -x^2z - z, 0\right)$

19. $\frac{1}{3} (z^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + y^3\mathbf{k})$

21. $(-z \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x, xz \cos y, 0)$ (también son posibles otras respuestas).

23. **a)** $\nabla \times \mathbf{F} = (0, 0, 2) \neq \mathbf{0}$

b) Sea $\mathbf{c}(t)$ la trayectoria de un objeto en el fluido. Entonces $\mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) = \mathbf{c}'(t)$. Sea $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Entonces $x' = -y$, $y' = x$ y $z' = 0$, por lo que z es constante y el movimiento es paralelo al plano xy. También , $x'' + x = 0$, $y'' + y = 0$. Entonces $x = A \cos t + B \operatorname{sen} t$ e $y = C \cos t + D \operatorname{sen} t$. Sustituyendo estos valores en $x' = -y$, $y' = x$, obtenemos $C = -B$, $D = A$, de manera que $x^2 + y^2 = A^2 + B^2$ y tenemos una circunferencia.

c) En el sentido contrario al de las agujas del reloj.

25. **a)** $\mathbf{F} = -\dfrac{GmM}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x, y, z)$;

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = -GmM\left[\frac{x^2+y^2+z^2-3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{x^2+y^2+z^2-3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{x^2+y^2+z^2-3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}\right]$$
$$= 0$$

b) Sea S la esfera unidad, S_1 el hemisferio norte, S_2 el hemisferio sur y C la circunferencia unidad. Si $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$, entonces,

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{G}\cdot d\mathbf{s} - \int_C \mathbf{G}\cdot d\mathbf{s} = 0.$$

Pero $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = -GmM \iint_S (\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3)\cdot\mathbf{n}\, dS = -4\pi GmM$, puesto que $\|\mathbf{r}\| = 1$ y $\mathbf{r} = \mathbf{n}$ en S. Entonces, $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$ es imposible. Esto no contradice el Teorema 8 porque $\mathbf{F}$ no es suave en el origen.

Sección 8.4

1. 4π

3. 3

5. **a)** 0 **b)** 4/15 **c)** $-4/15$

7. 6

9. 1

11. Aplicar el teorema de la divergencia a $f\mathbf{F}$ utilizando $\nabla\cdot(f\mathbf{F}) = \nabla f\cdot\mathbf{F} + f\nabla\cdot\mathbf{F}$.

13. Si $\mathbf{F} = \mathbf{r}/r^2$ entonces $\nabla\cdot\mathbf{F} = 1/r^2$. Si $(0, 0, 0) \notin \Omega$, el resultado se deduce del teorema de Gauss. Si $(0, 0, 0) \in \Omega$ se calcula la integral eliminando una pequeña bola $B_\varepsilon = \{(x, y, z) \mid (x^2+y^2+z^2)^{1/2} < \varepsilon\}$ alrededor del origen y haciendo $\varepsilon \to 0$:

$$\iiint_\Omega \frac{1}{r^2}\, dV = \lim_{\varepsilon\to 0} \iiint_{\Omega\setminus B_\varepsilon} \frac{1}{r^2}\, dV = \lim_{\varepsilon\to 0} \iint_{\partial(\Omega\setminus B_\varepsilon)} \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^2}\, dS$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\iint_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^2}\, dS - \iint_{\partial B_\varepsilon} \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^2}\, dS\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\iint_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^2}\, dS - 4\pi\varepsilon\right)$$
$$= \iint_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{r^2}\, dS.$$

La integral sobre ∂B_ε se obtiene del Teorema 10 (ley de Gauss), puesto que $r = \varepsilon$ en B_ε.

15. Utilizar la identidad vectorial para div $(f\mathbf{F})$ y el teorema de la divergencia para la parte (a). Usar la identidad vectorial $\nabla\cdot(f\nabla g - g\nabla f) = f\nabla^2 g - g\nabla^2 f$ para la parte (b).

17. **a)** Si $\phi(\mathbf{p}) = \iiint_W \rho(\mathbf{q})/(4\pi\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|)\,dV(\mathbf{q})$, entonces

$$\nabla\phi(\mathbf{p}) = \iiint_W [\rho(\mathbf{q})/4\pi]\nabla_{\mathbf{p}}(1/\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|)\,dV(\mathbf{q})$$

$$= -\iiint_W [\rho(\mathbf{q})/4\pi][(\mathbf{p}-\mathbf{q})/\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|^3]\,dV(\mathbf{q}),$$

donde $\nabla_{\mathbf{p}}$ significa el gradiente con respecto a las coordenadas de $\mathbf{p}$ y la integral es el vector cuyas componentes son cada una de las integrales. Si $\mathbf{p}$ varía en $V \cup \partial V$ y $\mathbf{n}$, es el vector unitario normal exterior a ∂V, podemos hacer el producto escalar usando estas componentes y uniendo los trozos para obtener

$$\nabla\phi(\mathbf{p})\cdot\mathbf{n} = -\iiint_W \frac{\rho(\mathbf{q})}{4\pi}\frac{1}{\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|^3}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{n}\,dV(\mathbf{q}).$$

Entonces,

$$\iint_{\partial V}\nabla\phi(\mathbf{p})\cdot\mathbf{n}\,dV(\mathbf{p}) = -\iint_{\partial V}\left(\iiint_W \frac{\rho(\mathbf{q})}{4\pi}\frac{1}{\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|^3}(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{n}\,d\mathbf{q}\right)dV(\mathbf{p}).$$

Hay esencialmente cinco variables de integración en esta fórmula, tres porque $\mathbf{q}$ está en W y dos porque $\mathbf{p}$ está en ∂V. Utilizar el teorema de Fubini para obtener

$$\iint_{\partial V}\nabla\phi\cdot\mathbf{n}\cdot d\mathbf{S} = -\iiint_W \frac{\rho(\mathbf{q})}{4\pi}\left[\iint_{\partial V}\frac{(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{n}}{\|\mathbf{p}-\mathbf{q}\|^3}\,dS(\mathbf{p})\right]dV(\mathbf{q}).$$

Si V es una región elemental simétrica, el Teorema 10 dice que la integral del interior es 4π si $\mathbf{q} \in V$ y 0 si $\mathbf{q} \notin V$. Entonces

$$\iint_{\partial V}\nabla\phi\cdot\mathbf{n}\,dS = -\iiint_{W\cap V}\rho(\mathbf{q})\,dV(\mathbf{q}).$$

Puesto que $\rho = 0$ fuera de W,

$$\iint_{\partial V}\nabla\phi\cdot\mathbf{n}\,dS = -\iiint_V \rho(\mathbf{q})\,dV(\mathbf{q}).$$

Si V no es una región elemental simétrica, se divide en una unión de tales regiones. La ecuación se satisface en cada uno de los trozos y, sumándolos todos, las integrales sobre los bordes internos convenientemente orientados se cancelan, produciendo el resultado deseado.

b) Por el Teoremaa 9, $\iint_{\partial V}\nabla\phi\cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \nabla^2\phi\,dV$ y entonces $\iiint_V \nabla^2\phi\,dV = -\iiint_V \rho\,dV$. Puesto que ρ y $\nabla^2\phi$ son continuos y esto se satisface para regiones arbitrariamente pequeñas, debemos tener $\nabla^2\phi = -\rho$.

19. Si la carga Q se distribuye uniformemente sobre la esfera S de radio R centrada en el origen, la densidad de carga por unidad de área debe ser $Q/4\pi R^2$. Si $\mathbf{p}$ es un punto que no está en S y $\mathbf{q} \in S$, la contribución del campo eléctrico en $\mathbf{p}$ debido a una carga cerca de $\mathbf{q}$ se dirige a lo largo del vector $\mathbf{p}-\mathbf{q}$. Puesto que la carga se distribuye uniformemente, la componente tangencial de esta contribución se cancelará con la contribución de un punto simétrico al otro lado de la esfera a la misma distancia de $\mathbf{p}$ (hacer un dibujo). El campo total resultante debe ser radial. Puesto que S parece lo

mismo desde cualquier punto a una distancia $\|\mathbf{p}\|$ del origen, el campo debe depender sólo del radio y ser de la forma $\mathbf{E} = f(r)\mathbf{r}$.

Si miramos a la esfera Σ de radio $\|\mathbf{p}\|$, tenemos

$$(\text{carga dentro de } \Sigma) = \iint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma} f(\|\mathbf{p}\|)\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

Si $\|\mathbf{p}\| < R$, no hay carga dentro de Σ; si $\|\mathbf{p}\| > R$, la carga dentro de Σ es Q, y por lo tanto

$$\mathbf{E}(\mathbf{p}) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi} \dfrac{Q}{\|\mathbf{p}\|^3} \mathbf{p} & \text{si} \quad \|\mathbf{p}\| > R \\ 0 & \text{si} \quad \|\mathbf{p}\| < R. \end{cases}$$

21. Por el Teorema 10, $\iint_{\partial M} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi$ para cualquier superficie que tiene en su interior al origen. Pero si $\mathbf{F}$ fuera el rotacional de algún campo, la integral sobre una tal superficie cerrada debería ser 0.

23. Si $S = \partial W$, entonces $\iint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}\, dS = \iiint_W \nabla \cdot \mathbf{r}\, dV = \iiint_W 3\, dV =$ volumen 3 (W). Para explicarlo geométricamente, supongamos que $(0, 0, 0) \in W$ y consideremos el cono inclinado con vértice en $(0, 0, 0)$ con base ΔS y altura $\|\mathbf{r}\|$. Su volumen es $\frac{1}{3}(\Delta S)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})$.

Sección 8.5

1. Escribir las componentes de ϕ como $\xi(\mathbf{x}, t)$, $\eta(\mathbf{x}, t)$ y $\zeta(\mathbf{x}, t)$. Primero, observar que por la definición de ϕ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\phi(\mathbf{x}, t), t).$$

El determinante J puede diferenciarse recordando que el determinante de una matriz es multilineal en las columnas (o filas). Por lo tanto, manteniendo $\mathbf{x}$ fijo,

$$\frac{\partial}{\partial t} J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial \xi}{\partial y} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial \xi}{\partial z} & \dfrac{\partial \eta}{\partial z} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial \eta}{\partial y} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial \eta}{\partial z} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial z} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial y} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial z} & \dfrac{\partial \eta}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial \zeta}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

Escribir ahora

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} F_1(\varphi(\mathbf{x}, t), t),$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} F_2(\varphi(\mathbf{x}, t), t),$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} F_3(\varphi(\mathbf{x}, t), t).$$

$$\vdots$$

ENTRE RIOS - REP. ARGENTINA

Las componentes F_1, F_2 y F_3 de $\mathbf{F}$ en esta expresión son funciones de x, y y z por medio de $\varphi(\mathbf{x}, t)$; por consiguiente,

$$\frac{\partial}{\partial x} F_1(\varphi(\mathbf{x}, t), t) = \frac{\partial F_1}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x},$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial}{\partial z} F_3(\varphi(\mathbf{x}, t), t) = \frac{\partial F_3}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial F_3}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial F_3}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z}.$$

Cuando esto se sustituye en la expresión anterior para $\partial J/\partial t$, se obtiene

$$\frac{\partial F_1}{\partial \xi} J + \frac{\partial F_2}{\partial \eta} J + \frac{\partial F_3}{\partial \xi} J = (\operatorname{div} \mathbf{F}) J.$$

3. INDICACIONES: Por la ecuación de transporte del Teorema 12, con $\mathbf{V}$ en lugar de $\mathbf{F}$,

$$\frac{d}{dt}\iiint_{W_t} \rho \, dx\, dy\, dz = \iiint_{W_t} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{V}\right) dx\, dy\, dz.$$

Usar ahora que

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} = \operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t},$$

donde $\mathbf{J} = \rho\mathbf{V}$, como en el texto.

5. Si v_i es la componente i-ésima de un vector $\mathbf{v}$, por la ecuación de transporte (Ejercicio 2),

$$\begin{aligned}
\left[\frac{d}{dt}\iiint_{W_t} f\mathbf{F}\, dx\, dy\, dz\right]_i &= \frac{d}{dt}\iiint_{W_t} (f\mathbf{F})_i \, dx\, dy\, dz = \frac{d}{dt}\iiint_{W_t} fF_i \, dx\, dy\, dz \\
&= \iiint_{W_t} \left[\frac{D(fF_i)}{Dt} + (fF_i) \operatorname{div} \mathbf{F}\right] dx\, dy\, dz \\
&= \iiint_{W_t} \left[\frac{\partial}{\partial t}(fF_i) + \mathbf{D}_x(fF_i)\cdot\mathbf{F} + (f\mathbf{F}_i) \operatorname{div} \mathbf{F}\right] dx\, dy\, dz \\
&= \iiint_{W_t} \left[\frac{\partial}{\partial t}(f\mathbf{F}_i) + \nabla(fF_i)\cdot\mathbf{F} + (fF_i) \operatorname{div} \mathbf{F}\right] dx\, dy\, dz \\
&= \iiint_{W_t} \left\{\frac{\partial}{\partial t}(f\mathbf{F}_i) + [\mathbf{D}(f\mathbf{F})\mathbf{F}]_i + [(f\mathbf{F}) \operatorname{div} \mathbf{F}]_i\right\} dx\, dy\, dz \\
&= \iiint_{W_t} \left[\frac{\partial}{\partial t}(f\mathbf{F}) + \mathbf{D}(f\mathbf{F})\mathbf{F} + (f\mathbf{F}) \operatorname{div} \mathbf{F}\right]_i dx\, dy\, dz \\
&= \left[\iiint_{W_t} \frac{\partial}{\partial t}(f\mathbf{F}) + \mathbf{D}(f\mathbf{F})\mathbf{F} + (f\mathbf{F}) \operatorname{div} \mathbf{F}\, dx\, dy\, dz\right]_i \\
&= \left[\iiint_{W_t} \left(\frac{\partial}{\partial t}(f\mathbf{F}) + (\mathbf{F}\cdot\nabla)(f\mathbf{F}) + (f\mathbf{F}) \operatorname{div} \mathbf{F}\right) dx\, dy\, dz\right]_i.
\end{aligned}$$

7. a) Puesto que $\mathbf{V} = \nabla\phi$, $\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{0}$ y se tiene $(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} = \frac{1}{2}\nabla(\|\mathbf{V}\|^2)$. La ecuación de Euler se escribe de la forma

$$-\frac{\nabla\rho}{\rho} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \frac{1}{2}\nabla(\|\mathbf{V}\|^2) = \nabla\left(\frac{d\phi}{dt} + \frac{1}{2}\|\mathbf{V}\|^2\right).$$

Si $\mathbf{c}$ es una trayectoria desde P_1 hasta P_2, se tiene

$$-\int_{\mathbf{c}} \frac{1}{\rho}\,dp = -\int \frac{1}{\rho}\,\nabla p\cdot\mathbf{c}'(t)\,dt = \int_{\mathbf{c}} \nabla\left(\frac{d\phi}{dt} + \frac{1}{2}\|\mathbf{V}\|^2\right)\cdot\mathbf{c}'(t)\,dt$$

$$= \left(\frac{d\phi}{dt} + \frac{1}{2}\|\mathbf{V}\|^2\right)\Bigg|_{P_1}^{P_2}.$$

b) Si $d\mathbf{V}/dt = \mathbf{0}$ y ρ es constante, se tiene $\frac{1}{2}\nabla(\|\mathbf{V}\|^2) = -(\nabla p)/\rho = -\nabla(p/\rho)$, y por tanto $\nabla\left(\frac{1}{2}\|\mathbf{V}\|^2 + p/\rho\right) = \mathbf{0}$.

9. Por la ley de Ampère, $\nabla\cdot\mathbf{J} = \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{H}) - \nabla\cdot(\partial\mathbf{E}/\partial t) = -\nabla\cdot(\partial\mathbf{E}/\partial t) = -(\partial/\partial t)(\nabla\cdot\mathbf{E})$. Por la ley de Gauss esto es $-\partial\rho/\partial t$. Por lo tanto, $\nabla\cdot\mathbf{J} + \partial\rho/\partial t = 0$.

Sección 8.6

1. a) $(2xy^2 - yx^3)\,dx\,dy$

b) $(x^2 + y^2)\,dx\,dy$

c) $(x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz$

d) $(xy + x^2)\,dx\,dy\,dz$

e) $dx\,dy\,dz$

3. a) $2xy\,dx + (x^2 + 3y^2)\,dy$

b) $-(x + y^2\operatorname{sen} x)\,dx\,dy$

c) $-(2x + y)\,dx\,dy$

d) $dx\,dy\,dz$

e) $2x\,dx\,dy\,dz$

f) $2y\,dy\,dz - 2x\,dz\,dx$

g) $-\dfrac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}\,dx\,dy$

h) $2xy\,dx\,dy\,dz$

5. a)
$$\begin{aligned}\text{Forma}_2(\alpha\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) &= \text{Forma}_2(\alpha A_1 + A_2,\ \alpha B_1 + B_2,\ \alpha C_1 + C_2)\\ &= (\alpha A_1 + A_2)\,dy\,dz + (\alpha B_1 + B_2)\,dz\,dx\\ &\quad + (\alpha C_1 + C_2)\,dx\,dy\\ &= \alpha(A_1\,dy\,dz + B_1\,dz\,dx + C_1\,dx\,dy)\\ &\quad + (A_2\,dy\,dz + B_2\,dz\,dx + C_2\,dx\,dy)\\ &= \alpha\,\text{Forma}_2(\mathbf{V}_1) + \text{Forma}_2(\mathbf{V}_2)\end{aligned}$$

b) $d\omega = \left(\frac{\partial A}{\partial x}\,dx + \frac{\partial A}{\partial y}\,dy + \frac{\partial A}{\partial z}\,dz\right) \wedge dx + A(dx)^2$

$$+ \left(\frac{\partial B}{\partial x}\,dx + \frac{\partial B}{\partial y}\,dy + \frac{\partial B}{\partial z}\,dz\right) \wedge dy + B(dy)^2$$

$$+ \left(\frac{\partial C}{\partial x}\,dx + \frac{\partial C}{\partial y}\,dy + \frac{\partial C}{\partial z}\,dz\right) \wedge dz + C(dz)^2.$$

Pero, $(dx)^2 = (dy)^2 = (dz)^2 = dx \wedge dx = dy \wedge dy = dz \wedge dz = 0$, $dy \wedge dx = -dx \wedge dy$, $dz \wedge dy = -dy \wedge dz$, y $dx \wedge dz = -dz \wedge dx$. Por tanto

$$d\omega = \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right)dy\,dz + \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial y}\right)dz\,dx + \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right)dx\,dy$$

$$= \text{Forma}_2(\text{rot}\,\mathbf{V}).$$

7. Una variedad de dimensión 1 orientada es una curva. Su frontera es un par de puntos que puede considerarse como una variedad de dimensión 0. Por lo tanto, ω es una 0-forma o función, y $\int_{\partial M} d\omega = \omega(b) - \omega(a)$ si la curva M va desde a hasta b. Además, $d\omega$ es una 1-forma $(\partial\omega/\partial x)\,dx + (\partial\omega/\partial y)\,dy$. Por lo tanto $\int_M d\omega$ es la integral de línea $\int_M (\partial\omega/\partial x)\,d\omega + (\partial\omega/dy)\,dy = \int_M \nabla\omega \cdot d\mathbf{s}$. Por consiguiente, obtenemos el Teorema 3 de la Sección 7.2, $\int_M \nabla\omega \cdot d\mathbf{s} = \omega(b) - \omega(a)$.

9. Poner $\omega = F_1\,dx\,dy + F_2\,dy\,dz + F_3\,dz\,dx$. La integral se transforma en

$$\iint_{\partial T} \omega = \iiint_T d\omega = \iiint_T \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} + \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial y}\right)dx\,dy\,dz.$$

a) 0 **b)** 40

11. Considerar $\omega = x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$. Calcular $d\omega = 3\,dx\,dy\,dz$, de manera que $\frac{1}{3}\iint_{\partial R} \omega = \frac{1}{3}\iiint_R d\omega = \iiint_R dx\,dy\,dz = v(R)$.

Ejercicios de repaso del Capítulo 8

1. **a)** $2\pi a^2$ **b)** 0

3. 0

5. **a)** $f = x^4/4 - x^2y^3$ **b)** $-1/4$

7. **a)** Comprobar que $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ **b)** $f = 3x^2y\cos z + C$ **c)** 0

9. 23/6

11. No: $\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{a}$

13. **a)** $\nabla f = 3ye^{z^2}\mathbf{i} + 3xe^{z^2}\mathbf{j} + 6xyze^{z^2}\mathbf{k}$ **b)** 0 **c)** Ambos lados son cero.

15. $8\pi/3$

17. $\pi a^2/4$

19. 21

21. **a)** **G** es conservativo; **F** no lo es.

b) $\mathbf{G} = \nabla\phi$ si $\phi = (x^4/4) + (y^4/4) - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{1}{2}z^2 + C$, donde C es cualquier constante.

c) $\int_\alpha \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = 0$; $\int_\alpha \mathbf{G}\cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{2}$; $\int_\beta \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{3}$; $\int_\beta \mathbf{G}\cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{2}$

23. Usar la fórmula $(\nabla\cdot\mathbf{F})(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\rho\to 0} \frac{1}{V(\Omega_\rho)} \iint_{\partial\Omega_\rho} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS$ que aparece en la Sección 8.4.

ÍNDICE ALFABÉTICO

0-forma, 568, 569
1-forma, 568
1-formas básicas, 568
2-forma, 569-570
2-formas básicas, 569
3-forma, 570
3-formas básicas, 570

A

acción a distancia, 490
aceleración, 253, 255-258
agujero cilíndrico, 459
Alexandrov, 487
álgebra de las formas, 575-580
al-Khuwarizmi, xv
ángulo entre dos vectores, 25-27
anticonmutativa, 575
aplicaciones, viii
  de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, 360-362
  determinantes jacobianos, 368-371
  físicas de los vectores, 32-34
  imágenes de, 362
  inyectivas, 362, 363, 365
  sobreyectivas, 364, 365
  superficies parametrizadas de, 441
Apolonio, xii
aproximación
  de orden superior, 187
  lineal, 125, 126, 128, 187, 194, 195
aproximaciones cuadráticas, 187, 194, 195
área
  de la sección transversal, 312, 313
  rotacional como circulación por unidad de área, 519-522
  superficies, 448-454
  teorema de Green, 505
área de una superficie
  definición, 448-452
  expresada como una gráfica, 452
  superficies de revolución, 453, 454
Arquímedes, xiv, 389, 454, 455
asociativa, 4, 56, 79, 575
autovalor, 236
autovector, 236

B

banda de Möbius, 470-472
base canónica, 10, 11, 71
Bernoulli, Jacob, 62
Bernoulli, Johan II, 183, 197
bola
  abierta, 101
  unidad, 348, 382
  volumen de, 380
Bolyai, 80
braquistocrona, 419

C

cálculo de variaciones, 419
cambio del orden de integración, 339-341
campo
  eléctrico, 562
  escalar, 277
  gravitatorio, 279, 284, 538
  magnético, 562
  vectorial constante, 586
  vectorial de energía,
  vectorial flujo de calor, 279
  vectorial general, 276, 277
  vectorial gradiente, 278-281, 162-164
    conservativos, 530-538
    integrales de línea sobre un, 428-430
  vectorial irrotacional, 293, 534-536
  vectorial rotatorio, 278
campos
  conservativos
    caso plano, 536-538
    definición, 531

identificación del gradiente, 531-533
interpretación física, 533-536
de fuerza
campo de fuerza gravitacional, 279, 284, 538
trabajo ejercido por, 419, 420
de vectores
campo vectorial general, 276, 277
campo vectorial gradiente, 162-164, 278-281
campo vectorial rotatorio, 278
campos conservativos, 530-538
divergencia, 286-290
identidades básicas del análisis vectorial, 298, 299
integración sobre trayectorias, 431-435
integrales sobre superficies, 468-470
líneas de flujo, 282-284
operador de Laplace, 297
rotacional, 290-295
rotacional escalar, 295-296
escalares componentes, 277
canal de riego, 235
canicas, 87
Cardano, Girolamo, 51-53
Cauchy, Augusten-Louis, 40, 53, 455
Cavalieri, Bonaventura, 313
Cayley, Arthur, 81
centro de gravedad, 466
centro de masa, 88, 386-388
cicloide, 138
cilíndrico, 317
con tapa, 528
circulación, 435, 519-522
circulación y rotacional, 132
circunferencia unidad, 510
composición, 114
conductividad, 279, 561
conjunto
abierto, 101-104
acotado, 212
cerrado, 212
de nivel, 92, 97
conmutativa, 77
cono, 444, 459
troncado, 459
conservación de la energía, 281, 282, 560
constante gravitacional, 531
continuidad
de la composición, 114
de Lipschitz, 121
definición, 111, 112
Hölder, 121
teoremas, 131
contornos de nivel, 92-96
coordenada x, 2
coordenada y, 2
coordenada z, 2
coordenadas, 1-3
cartesianas, 1, 2
cilíndricas, 62-64
cambio de variables, 378
esféricas, 64-68
cambio de variables, 379, 380
divergencia, 552
teorema de Stokes, 522, 523
polares, 61, 62
cambio de variables, 374, 375
Copernico, Nicolás, xviii
criterio del determinante
para formas definidas positivas, 207-211
cuaterniones, 54-57, 300
cubo unidad, 542
curva
cerrada, 430
simple, 431, 432
frontera, 513
simple dirigida, 430
simple orientada, 430, 431
curvas, 134-138, 268
a trozos, 268
anudadas, 416
componentes, 432
con nudos, 416
curvatura total, 415
de nivel, 92-96
integral de 1-formas sobre, 571, 572
integrales de línea sobre, 429-433
curvatura, 415, 416, 484
de Gauss, 80, 484, 487, 489, 492
media, 80, 485, 487
planos, 485
semiesfera, 485-487
superficies de curvatura constante, 487
total, 415, 416, 484

D

d'Alembert, LeRond, 183
Da Vinci, Leonardo, xvii, 389
Dalauney, 487
Darboux, 457
del Ferro, Scipione, 51
densidad
carga, 556
energía, 560, 561
masa, 556

derivada
de una 3-forma, 577
de una función, xxv
de una k-forma, 577
material, 557
derivadas
de orden superior, 175
direccionales, 158-160
parciales 122-125, 129
cruzadas, 176-179
iteradas, 176, 177, 179
igualdad de las derivadas parciales cruzadas, 177, 178
gradientes, 130
propiedades, 144-146
Descartes, René, 79, 80
desigualdad
Cauchy-Schwarz, 27-31, 72
triangular, 30, 31, 72, 145, 276
valor medio, 342, 343
determinante
hessiano orlado, 231, 232
jacobiano, 244, 368-371, 377
determinantes
geometría de, 45-48
matriz, 36, 37
propiedades, 48-41, 78
diferenciabilidad, 124-126
caso general, 128-129
funciones de dos variables, 126
plano tangente, 127
teoremas, 131
diferenciable dos veces con continuidad, 176
diferenciación, 121, 122
difusividad, 561
Dirac, Paul, xvi
disco
abierto, 101-105
unidad, 216
discriminante del hessiano, 208
distancia, xix
de un punto a un plano, 50, 51
entre los extremos de un vector, 25
distributiva, 4
divergencia
coordenadas cilíndricas, 522, 523
coordenadas esféricas, 522, 523, 552
definición, 286
dominio, xxiv
interpretación física, 287
operador de Laplace, 297
rotacionales, 296
teorema de Gauss, 544-548, 552
teorema de Green, 508, 509
dominio y-simple, 397
Douglas, Jesse, 457

E

economía, 229, 230
ecuación
de continuidad, 557
de Dieterici, 155
de Korteweg-de Vries, 183
de Laplace, 182
de ondas, 182
de ondas no homogénea, 563
de Poisson, 182, 554
del calor, 181, 561
del campo de Maxwell, 284, 530, 561-564
del transporte, 557, 558
hidrodinámica, 302
potencial, 182
química, 4
ecuaciones, 17, 18
cuadráticas, 51
cúbicas, 51
de Cauchy-Riemann, 468
de Euler, 178
para un fluido perfecto, 558-560
de Navier-Stokes, 560
del campo de Einstein, 492
descripción de un segmento, 18
diferenciales, 181
ordinarias, 181
en derivadas parciales, 181
Einstein, Albert, 81, 284, 285, 489-491
eje x, 1
eje y, 1
eje z, 1
elasticidad, 409
elemento cero, 3
elipsoide, 458, 483
sólido, 407
energía potencial gravitacional, 536
entorno, 104
epiciclo, xiii, 138
epicicloide, 138
Escher, M. C., 471
esfera, 518, 519
integrales de superficie, 481
unidad, 457, 472

espacio
de llegada, xxiv
euclídeo n-dimensional, 70
matrices, 73-79
vectores en el, 70-73
estrictamente subarmónica, 250
Euclides, xiv
Eudoxo, xii
Euler, Leonhard, 52, 175, 178, 182, 219, 260, 455, 560
extremo
local, 200
relativo, 200, 220, 235
extremos, 200
condicionados, 217-224
criterio de la derivada segunda, 230-234
teorema de los multiplicadores de Lagrange para varias variables, 224, 227

F

Faraday, Michael, 456
Feynman, Richard, 260-263, 564
Fior, Antonio, 51
fluidos incompresibles, 549
flujo, 476, 477, 548
flujo estacionario, 277
Fontana, Nicolo, 51
forma cuadrática, 204
definida negativa, 205-207
definida positiva, 205-211
formas diferenciales, 421, 567, 577
0-formas, 568
1-formas, 568
2-formas, 569, 570
3-formas, 570, 571
álgebra de las formas, 575
integral de 1-formas sobre curvas, 571
integral de 3-formas sobre regiones, 574
teorema de Gauss, 581
teorema de Green, 580
teorema de Stokes, 581
fórmula
de Tartaglia y Cardano, 52
de Taylor de primer orden, 189, 191, 193, 194
de Taylor de segundo orden, 188-191, 193
de Taylor de tercer orden, 192
del cambio de variables, 359, 372
aplicaciones, 384-394
coordenadas cilíndricas, 378
coordenadas esféricas, 379, 380
coordenadas polares, 374, 375
integral gaussiana, 375, 376
integrales dobles, 372, 373
integrales triples, 377-380
fórmulas de Frenet, 275
Fourier, Joseph, 181
frecuencia, órbita, 258
Fubini, Guido, 329
fuerza centrípeta, 258
función
acotada, 319
integrabilidad, 321-323
analítica, 195
armónica, 185
con valores escalares, 90
con valores vectoriales, 90, 253
cuadrática, 204-207
de producción de Cobb-Douglas, 237
gauge, 562
potencial, 534, 537, 554
subarmónica, 250, 512
superarmónica, 512
funcional de Dirichlet, 467
funciones, vii
analítica, 195
armónicas, 185
C^1, 132
C^2, 176
continuas, 110-114
propiedades, 113, 114
cuadráticas, 204-207
de clase C^1, 176
de clase C^2, 411, 490
de Green, 564
de variable real
extremos, 196-214
geometría, 90-99
de varias variables, 90
diferenciabilidad, 126
discontinuas, 111
gráficas, 91-100
inyectivas, 362, 363, 364
longitud de arco, 270
no acotadas en puntos aislados, 403, 404
potenciales, 534, 537, 554
sobreyectivas, 364, 365
valor medio, 384, 385

G

galaxia Andrómeda, 490
Galileo, 180

gas de van der Waals, 438
Gauss, Karl Friedrich, 52, 80, 483, 484, 489
geometría
  determinantes, 46-48
  funciones con valores reales, 90-99
  multiplicación por un escalar, 4, 7
  resta de vectores, 8
  suma de vectores, 5-7
  teoremas por métodos vectoriales, 13
Gibbs, Josiah Willard, 56, 57, 300, 302
globo de aire caliente, 528
gradiente de presiones negativo, 307
gradientes, 130, 131, 156, 157, 160
  normal a las superficies de nivel, 160
gráfica no suave, 122
gráficas, xxiv, xxv
  área de una superficie, 452
  coordenadas cilíndricas, 522, 523
  coordenadas esféricas, 522-523
  funciones con valores reales, 90-99
  integrales de superficie sobre, 462-465, 479-481
  orientación, 473
  suave, no suave, 122
  teorema de Stokes, 513-518
gráfico suave, 122

H

Hamilton, Sir William Rowan, 53-56, 80, 260, 299, 300
Heaviside, 57
hélice, 140, 412
helicoide, 451, 452, 462, 465, 488
hemisferio
  curvatura, 485-487
hessiano, 204-206, 209
Hilbert, David, 494
Hiparco, xii
hiperboloide, 446
  de revolución de una hoja, 98
hipocicloide, 138, 437, 506
  de cuatro cúspides, 256
holonomía, 527
homogénea de grado, 169
Huygens, Christian, 52, 80, 138, 455

I

identidad de polarización, 82
identidades de Green, 554
igualdad de las derivadas parciales cruzadas, 177-178
I_n, 77
integrabilidad, 321-323
integración
  por partes, 187, 188
  reducción de integrales iteradas, 314-316, 333-337
  reducción de integrales triples, 346-348
integral
  de línea, 516
    de campos gradiente, 428-429
    definición, 420, 421
    formas diferenciales, 421
    notación $d\mathbf{r}$, 433
    reparametrización, 424-428
    sobre curvas, 429-433
    teorema de Stokes, 516, 517
    trabajo hecho por un campo de fuerzas, 419, 420, 423
  de trayectoria, 411-415
  definida, xxv
  doble, 320-328
  Feynman, 260
  función escalar sobre superficies, 460
  gaussiana, 375, 376
  impropia, 399, 400
  independiente de la trayectoria, 530
  invariante topológico, 493
  iterada, 314-316, 333-337, 399-401
  orientada, 427
  Riemann, 329
  superficie, 462-465, 468-470, 474-481
  trayectoria, 411-416
  triple, 345-348, 378-380
    definición, 345
    propiedades, 346-348
    reducción a integrales iteradas, 346-348
    sobre regiones elementales, 349
integrales de superficie
  de campos vectoriales, 468-470
  independencia de la parametrización, 474
  interpretación física, 475-478
  relación con las integrales escalares, 474
  resumen de fórmulas, 480-481
  sobre gráficas, 462-465, 479, 480
integrales dobles
  cambio de orden de integración, 339-343
  como volúmenes, 309-312
  desigualdad del valor medio, 341
  fórmula del cambio de variables, 372, 373
  funciones acotadas, 321-323
  igualdad del valor medio, 342
  principio de Cavalieri, 312, 313
  reducción a integrales iteradas, 314-316, 333-337
  sobre regiones elementales, 332, 333

sobre un rectángulo, 319-329
teorema de Fubini, 324-328
integrales impropias
como límites, 398
como límites de integrales, 399, 400
integrales impropias de una variable, 396
iteradas en el plano, 396
regiones exhaustivas, 397
integrales iteradas
integrales impropias como límite de integrales iteradas, 399-400
propiedades, 320-323
reducción de integrales dobles, 314-316, 333-336
teorema de Fubini, 400
intersección, xxiv
intervalo
abierto, xxiii
cerrado, xxiii
isobara, 307
isocuanta, 229, 230
isoterma, 279

J

Jacobi, 41

K

Kepler, 259, 260, xviii

L

Lagrange, Joseph Louis, 65
Laplace, Pierre-Simon de, 41, 182
Lebesgue, Henri, 329, 456, 457
Leibniz, Gottfried Wilhelm, 40, 52, 80, 81
lemniscata, 382
ley de Ampère, 435, 477, 530, 562
ley de Bernoulli, 565
ley de Buys-Ballot, 307
ley de Coulomb, 280, 284, 478
ley de Faraday, 476, 562
teorema de Stokes, 523, 524
ley de Gauss, 477, 549-551, 562
ley de gravitación de Newton, 163, 180, 198, 257, 279, 280, 489, 490
ley de la conservación de la masa, 556
ley de los gases perfectos, 171
ley de Snell, 60
ley del coseno, 26
ley del paralelogramo, 82
leyes de conservación, 555, 561
leyes de Kepler del movimiento celestial, xix, 180, 259
límite
por la derecha, 121
por la izquierda, 121
límites
con ε y δ, 115-118
definición, 105, 106, 115
en términos de ε y δ, 115-118
entornos, 107
función, 107-109
propiedades, 109, 110
unicidad, 109
líneas
de corriente, 282
de flujo, 282-284
Listing, J. B., 471
localización de objetos, 32
longitud de arco
definición, 266, 267, 270
diferencial, 269, 270
función, 271
justificación de la fórmula, 271, 272
reparametrización, 274
longitudes, vectores, 23-25, 71, 139
Lovachevsky, 80

M

Maclaurin, 40
Marcelo, 454
masa
centro de, 386-389
densidad de, 395, 556
ley de conservación de la, 556
matemáticas
árabes, xv
babilónicas, xi
egipcias, xi
europeas, xv
griegas, xi
indias, xv
matrices
2×2, 36, 37
3×3, 37
derivadas parciales, 129, 151
determinantes, 36-40, 45-47, 78
generales, 73-77
invertibles, 77

producto mixto, 42, 79
triple producto, 79
matriz 2 × 2, 36, 37, 73
matriz 3 × 3, 37, 73
Maupertuis, Pierre-Louis de, 196-199
máximo
absoluto, 211-214, 225-227
global, 211-214, 227
local
condición de la derivada primera, 200-203
definición, 200
derivada segunda
criterio para máximos y mínimos de funciones de dos variables, 208-211
Maxwell, James Clerk, 56, 300, 302, 564
mejor aproximación lineal, 128
método
de los mínimos cuadrados, 250
de los multiplicadores de Lagrange, 218-222
para varias restricciones, 224-226
soluciones de extremos globales, 227
de sustitución, 372
métodos de la función de Green, 564
Milnor, John, 416
mínimo
absoluto, 211-214, 226
global, 211-214, 227
local, 200-211
criterio de la primera derivada, 200-203
definición, 200
derivada segunda
criterio de máximo y mínimo, 203-207
mínimos cuadrados, 250
Möbius, A. F., 470
modelo tolemaico del movimiento planetario, xiv, 196
módulo de elasticidad de Young, 409
momento, 87
de fuerza, 60
momentos de inercia, 390
Muir, T., 41
multiplicación, 3, 4, 7, 9
escalar, 3, 4, 7, 9, 51

N

Newton, Sir Isaac, xix, 53, 62, 260, 313, 391, 490
Noether, Emmy, 264
número
irracional, xxiii
racional, xvi
números
complejos, 52-54
imaginarios, 51, 52, 54

O

operador
diferencial, 250
elíptico, 250
laplaciano, 297
nabla, 286, 299
opuesto, 3
órbita
circular, 258, 259
geoestacionaria, 259
halo, 264
orden de integración, 339-342
organismos unicelulares, superficies de Delauney, 487-489
orientación
elemento de vector de superficie de una esfera, 473
gráficas, 473
inducida, 513, 514, 520, 550
superficies, 470-472
origen, 1

P

paraboloide, 353
de revolución, 94
hiperbólico, 95, 96
paralelepípedo, 47
paralelogramo, 373, 449, 450
cálculo con el producto vectorial, 43, 44
descripción paramétrica, 18, 19
parametrización, 135, 136, 361, 423, 430, 431, 434, 444-446, 474
conforme, 467, 495
por longitud de arco, 274
partición regular, 319
Pascal, Blaise, 138
permutando cíclicamente, 42
Plank, Max, 198, 555
plano tangente, 127, 444-446
a superficies de nivel, 161
planos
curvatura, 485
descripción paramétrica, 19, 20
dimensión, 20
ecuaciones de los, 48-50
parametrización, 441, 442
de tres coordenadas, 20

Plateau, Joseph, 456, 457
Platón, xii
Poincaré, 264
pompas de jabón, 487
potencial, 554
  gravitatorio, 182, 279, 390-394
  newtoniano, 182, 186
preserva la orientación
  parametrización, 471, 472
  reparametrización, 424, 425
presión, 558
Principia, xx
principio
  de acción de Hilbert, 494
  de Cavalieri, 312, 314
  de Hamilton, 264
  de la mínima acción, 196-199
  de Maupertuis, 196-198, 260
  fuerte del máximo, 512
  fuerte del mínimo, 512
problema de los tres cuerpos, 264
proceso adiabático, 439
producto
  cartesiano, 310
  escalar, 22-23, 27, 45, 51, 57, 65, 71
  exterior, 575
  mixto, 42, 79
  vectorial, 36, 41-45, 51, 290
productos escalares, 22, 23, 25, 28, 72
propiedad
  del cero, 4
  del elemento unidad, 4
propiedades
  derivadas, 144-146
  determinantes, 38-40, 78
  funciones continuas, 113
  integrales iteradas, 320-323
  integrales triples, 346-348
  límites, 109, 110
punto
  crítico degenerado, 209
  crítico del tipo de silla, 208-210, 233
  de silla, 200, 202, 209, 234
puntos
  críticos, 200-203, 208, 213, 214, 218, 231
  críticos no degenerados, 209, 211
  frontera, 104, 105
  singulares, 532

R

rango, xxiv
rapidez, 139, 258, 269
  unitaria, 274, 380
recta tangente a una trayectoria, 142, 143
rectas
  dimensión, 20
  ecuaciones de, 13-17
  expresión paramétrica, 14-17
  forma punto-vector director, 14
  que pasan por los extremos de dos vectores, 16
región conexa por arcos, 358
regiones
  elementales, 348, 349
    integrales dobles sobre, 331-333
    integrales triples sobre, 349-353
    simétricas, 350, 351
    teorema de Gauss, 541-543
    teorema de Green, 501
  exhaustivas, 397
  no acotadas, 404
  simples, 331, 332, 336
  x-simples, 337, 500
  y-simples, 331, 334, 335, 396, 500
regla
  de Cramer, 40
  de L'Hôpital, 116
  de la cadena, 144, 146, 150-152, 179, 180, 183, 218, 254, 515
    caso general y demostración, 146, 149
    primer caso especial, 146, 147
    segundo caso especial, 148, 149
  de la mano derecha, 43
  de la multiplicación por una constante, 144
  de la multiplicación por una función escalar, 254
  de la suma, 144, 254
  del cociente, 145
  del producto, 144
  del producto escalar, 254
  del producto vectorial, 254
reparametrización, 424-428
resta de vectores, 8
Riemann, Bernhard, 53, 80, 81, 329, 457, 489, 491
rigidez EI, 409
$\mathbb{R}^n$, 3
rotacional, 519-524
  asociación rotacional, 292
  definición, 290-292
  divergencia, 296
  escalar, 295, 296
  flujo del rotacional, 293
  gradientes, 294
rueda con paletas, 533

S

Schwartz, H. A., 457
sección
  normal de una viga, 409
  transversal de un toro, 458
secciones cónicas, xii
segunda ley de Newton, 253, 257-259, 263, 271, 281
semieje
  mayor, 228
  menor, 228
series de Taylor, 193
silla, 95-97
sólido de revolución, 317
solitón, 183
subconjunto, xxiv
suma de vectores, 3-7
  definición, 5
  geometría de la, 5-7
  interpretación física, 6
  libres, 7
  vectores de la base canónica, 10
sumas de Riemann, 309-313, 320, 325, 413, 449
superficie
  cerrada, 529
  de un donuts, 439
  orientada, 470-474
  regular, 443, 444
  suave, 443-445
superficies
  integral de 2-formas sobre superficies, 572-574
  integrales de funciones escalares sobre superficies, 460-462
  de nivel, 94, 160
  de películas jabonosas, 456, 457
  equipotenciales, 170, 280
  mínimas, 495
  parametrizadas, 518-520
    cambio en la orientación, 525, 526
    como aplicaciones, 441, 442
    definición, 441
    integrales de superficie, 480
    plano tangente a, 444-446
    restricciones en gráficas, 439, 440
    superficie regular, 442, 443
    teorema de Stokes, 518, 519
    vectores tangentes a, 442, 443

T

Tait, Peter Guthrie, 55, 57
Tales de Mileto, xii
Tartaglia, Nicola, 51, 52, 389
temperatura, 166, 171, 172, 439, 481
  potencial, 171
teorema
  de Euler, 169
  de Fary-Milnor, 416
  de Fubini, 324-329
    para integrales impropias, 400-403
  de Gauss, 499, 541
    de la divergencia, 544-546
    divergencia como flujo por unidad de volumen, 548
    formas diferenciales, 581
    generalización de, 546-548
    regiones elementales y fronteras, 541-543
  de Gauss-Bonnet, 492-494
  de Green, 501
    área de una región limitada por una curva, 505, 506
    de la divergencia en el plano, 508, 509
    forma vectorial, 506-508
    formas diferenciales, 580
    generalización de, 503, 504
    lemas, 501-503
    orientación correcta para la frontera de una región, 503
    regiones simples y elementales, y sus fronteras, 500, 501
  de la circulación de Kelvin, 476
  de la función implícita en un caso particular, 238, 239
    y superficies, 239, 240
  de la función implícita, 238, 241-243
  de la función inversa, 243, 244
  de Pappus, 459
  de Pitágoras, 23
  de Stokes, 292, 476, 499, 513
    campos conservativos, 530, 531
    conexión con la geometría no euclídea, 526
    formas diferenciales, 580
    ley de Faraday, 523, 54
    para gráficas, 513-517
    rotacional como circulación por unidad de área, 519-522
  de Taylor, 187, 205
    de una variable, 187
    fórmula de primer orden, 188, 189, 192, 193
    fórmula de segundo orden, 188, 189, 192, 193
    fórmula de tercer orden, 192
    para varias variables, 189-195
  del cambio de variables, 367
  fundamental del álgebra, 52
  fundamental del cálculo, 187, 271, 327, 501, 567
  fundamental del cálculo integral, 324

general de la función implícita, 241-243
teoremas
cambio de variables, 367
circulación de Kelvin, 476
Euler, 169
Fary-Milnor, 416
Fubini, 324-329, 400-403
función implícita de la general, 241-243
función implícita, caso particular, 238-241
función inversa, 243-245
fundamental del cálculo, 188, 271, 327, 501, 567
Gauss-Bonnet, 492-494
Green, 499-508
Pappus, 459
Pitágoras, 23
Stokes, 292, 499
Taylor, 187, 205
transporte, 557, 558
valor medio, 413
y superficies, 239-241
teoría general de la relatividad de Einstein, 489-490
terna, 2
tetraedro, 335, 336
Thomae, Karl J., 329
Thompson, D'Arcy, 488
tiempo propio de una trayectoria, 275
Tolomeo, xiii
topológico invariante, 493
toro, 440, 458, 493, 494, 566
torsión, 275
trabajo, 87, 419, 420, 423
transformaciones, viii
trayectoria, 134-138
cicloidal, 140
diferenciación, 254-256
integración de una función escalar sobre, 411-416
opuesta, 426
regular diferenciable, 256
suave, 212
suave a trozos, 286
termodinámica, 438
triple producto mixto, 79

U

unión, xxiv

V

valor
absoluto, xxiv
medio de una función, 384-385
promedio, 417
Vandermonde, 40
vector
binormal, 274
cero, 34
desplazamiento, 32, 33
flujo de energía, 561
libre, 7
momento, 60
normal principal, 274
normalizado, 24, 25
posición, 433
Poynting, 566
que une dos puntos, 12
unitario, 24
velocidad, 32, 33, 139, 141, 149, 150
angular, 292
vectores
de fuerza, 34
n dimensionales, 70
ortogonales, 28, 42
ortonormales, 28, 68
perpendiculares, 28
tangente, 140, 150, 442, 443
velocidad de escape, 281
Vía Láctea, 490

W

Weierstrass, 457
Wente, Henry, 487
Weyl, Hermann, 82
Wilson, E. B., 57, 301

CRÉDITOS DE LAS ILUSTRACIONES

Portada: David Gifford/Photo Researchers
Fig. 3: Erich Lesssing/Art Resource, NY
Fig. 4: De *Theoreticae novae planetarum*
Fig. 5: Science Photo Library/Photo Researchers, Inc.
Fig. 6: J. L. Charmet/Photo Researchers, Inc.
Fig. 7: Del *Codex Virgilanus*, Biblioteca de El Escorial, Madrid
Fig. 8: Michael Pasdzior/Getty
Fig. 9: Alinar/Art Resource
Fig. 10: Corbis
Fig. 11: Corbis
Fig. 12: De *Astronomia Nova* de Kepler (1609), p. 4
Fig. 14: Corbis
Fig. 15: De *Principia*
Fig. 1.3.8: Corbis
Fig. 1.3.9: Getty Images
Fig. 1.5.1: Corbis
CO3: Science Photo Library/Photo Researchers, Inc.
Fig. 3.3.1: De *Parsimonious Universe*/Cortesía de Anthony Tromba
Fig. 4.1.5: Corbis
Fig. 4.1.6: Cern/Science Photo Library/Photo Researchers, Inc.
Fig. 4.1.11: Roby Wilson, JPL
Fig. 4.4.9: Corbis
Fig. 6.3.3: Del tratado de Leonardo sobre pintura, *Tractat vond der Mahlerey*, 2ª edición, Nüremberg, 1747
Fig. 7.4.4: Städtische Galerie; Liebieghaus Frankfurt am Main
Fig. 7.4.5: Fritz Goro
Fig. 7.6.4: Moebius Strip II, 1963, de M. C. Escher. Fundación Escher, Haags Gemeentemuseum, La Haya
Fig. 7.7.2: Cortesía de Anthony Tromba
Fig. 7.7.3: © 1997 Michael Dalton/Fundamental Photographs, NYC
Fig. 7.7.12: Corbis

DERIVADAS

1. $\dfrac{dau}{dx} = a\dfrac{du}{dx}$

2. $\dfrac{d(u+v)}{dx} = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$

3. $\dfrac{d(uv)}{dx} = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$

4. $\dfrac{d(u/v)}{dx} = \dfrac{v(du/dx) - u(dv/dx)}{v^2}$

5. $\dfrac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1}\dfrac{du}{dx}$

6. $\dfrac{d(u^v)}{dx} = vu^{v-1}\dfrac{du}{dx} + u^v(\log u)\dfrac{dv}{dx}$

7. $\dfrac{d(e^u)}{dx} = e^u\dfrac{du}{dx}$

8. $\dfrac{d(e^{au})}{dx} = ae^{au}\dfrac{du}{dx}$

9. $\dfrac{da^u}{dx} = a^u(\log a)\dfrac{du}{dx}$

10. $\dfrac{d(\log u)}{dx} = \dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx}$

11. $\dfrac{d(\log_a u)}{dx} = \dfrac{1}{u(\log a)}\dfrac{du}{dx}$

12. $\dfrac{d\,\mathrm{sen}\,u}{dx} = \cos u\dfrac{du}{dx}$

13. $\dfrac{d\cos u}{dx} = -\,\mathrm{sen}\,u\dfrac{du}{dx}$

14. $\dfrac{d\tan u}{dx} = \sec^2 u\dfrac{du}{dx}$

15. $\dfrac{d\cot u}{dx} = -\csc^2 u\dfrac{du}{dx}$

16. $\dfrac{d\sec u}{dx} = \tan u\sec u\dfrac{du}{dx}$

17. $\dfrac{d\csc u}{dx} = -(\cot u)(\csc u)\dfrac{du}{dx}$

18. $\dfrac{d\,\mathrm{arcsen}\,u}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}$

19. $\dfrac{d\arccos u}{dx} = \dfrac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}$

20. $\dfrac{d\arctan u}{dx} = \dfrac{1}{1+u^2}\dfrac{du}{dx}$

21. $\dfrac{d\,\mathrm{arccot}\,u}{dx} = \dfrac{-1}{1+u^2}\dfrac{du}{dx}$

22. $\dfrac{d\,\mathrm{arcsec}\,u}{dx} = \dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$

23. $\dfrac{d\,\mathrm{arccsc}\,u}{dx} = \dfrac{-1}{\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$

24. $\dfrac{d\,\mathrm{senh}\,u}{dx} = \cosh u\dfrac{du}{dx}$

25. $\dfrac{d\cosh u}{dx} = \mathrm{senh}\,u\dfrac{du}{dx}$

26. $\dfrac{d\tanh u}{dx} = \mathrm{sech}^2 u\dfrac{du}{dx}$

27. $\dfrac{d \coth u}{dx} = -(\operatorname{csch}^2 u)\dfrac{du}{dx}$

28. $\dfrac{d \operatorname{sech} u}{dx} = -(\operatorname{sech} u)(\tanh u)\dfrac{du}{dx}$

29. $\dfrac{d \operatorname{csch} u}{dx} = -(\operatorname{csch} u)(\coth u)\dfrac{du}{dx}$

30. $\dfrac{d \operatorname{arcsenh}^{-1} u}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}\dfrac{du}{dx}$

31. $\dfrac{d \operatorname{arccosh}^{-1} u}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx}$

32. $\dfrac{d \operatorname{arctanh}^{-1} u}{dx} = \dfrac{1}{1-u^2}\dfrac{du}{dx}$

33. $\dfrac{d \operatorname{arccoth}^{-1} u}{dx} = \dfrac{1}{u^2-1}\dfrac{du}{dx}$

34. $\dfrac{d \operatorname{arcsech}^{-1} u}{dx} = \dfrac{-1}{u\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx}$

35. $\dfrac{d \operatorname{arccsch}^{-1} u}{dx} = \dfrac{-1}{|u|\sqrt{1+u^2}}\dfrac{du}{dx}$

INTEGRALES

1. $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1} \quad (n \neq -1)$

2. $\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x|$

3. $\int e^x\,dx = e^x$

4. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a}$

5. $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$

6. $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$

7. $\int \tan x\,dx = -\log|\cos x|$

8. $\int \cot x\,dx = \log|\operatorname{sen} x|$

9. $\int \sec x\,dx = \log|\sec x + \tan x| = \log|\tan(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi)|$

10. $\int \csc\,dx = \log|\csc x - \cot x| = \log|\tan\frac{1}{2}x|$

11. $\int \operatorname{arcsen}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2} \quad (a > 0)$

12. $\int \arccos\frac{x}{a}\,dx = x\arccos\frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} \quad (a > 0)$

13. $\int \arctan\frac{x}{a}\,dx = x\arctan\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\log(a^2 + x^2) \quad (a > 0)$

14. $\int \operatorname{sen}^2 mx\,dx = \frac{1}{2m}(mx - \operatorname{sen} mx\cos mx)$

15. $\int \cos^2 mx\,dx = \frac{1}{2m}(mx + \operatorname{sen} mx \cos mx)$

16. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x$

17. $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x$

18. $\int \operatorname{sen}^n x\,dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,dx$

19. $\int \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1} x \operatorname{sen} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$

20. $\int \tan^n x\,dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x\,dx \quad (n \neq 1)$

21. $\int \cot^n x\,dx = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x\,dx \quad (n \neq 1)$

22. $\int \sec^n x\,dx = \frac{\tan x \sec^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x\,dx \quad (n \neq 1)$

23. $\int \csc^n x\,dx = -\frac{\cot x \csc^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} x\,dx \quad (n \neq 1)$

24. $\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x$

25. $\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x$

26. $\int \tanh x\,dx = \log|\cosh x|$

27. $\int \coth x\,dx = \log|\operatorname{senh} x|$

28. $\int \operatorname{sech} x\,dx = \arctan(\operatorname{senh} x)$

29. $\int \operatorname{csch} x\,dx = \log\left|\tanh\frac{x}{2}\right| = -\frac{1}{2}\log\frac{\cosh x + 1}{\cosh x - 1}$

30. $\int \operatorname{senh}^2 x\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{senh} 2x - \frac{1}{2}x$

31. $\int \cosh^2 x\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{senh} 2x + \frac{1}{2}x$

32. $\int \operatorname{sech}^2 x\,dx = \tanh x$

33. $\int \operatorname{arcsenh}^{-1}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{arcsenh}^{-1}\frac{x}{a} - \sqrt{x^2 + a^2} \quad (a > 0)$

34. $\int \operatorname{arccosh}^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} x\operatorname{arccosh}^{-1}\dfrac{x}{a} - \sqrt{x^2 - a^2} & \left[\operatorname{arccosh}^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right) > 0,\ a > 0\right] \\ x\operatorname{arccosh}^{-1}\dfrac{x}{a} + \sqrt{x^2 - a^2} & \left[\operatorname{arccosh}^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right) < 0,\ a > 0\right] \end{cases}$

35. $\int \operatorname{arctanh}^{-1}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{arctanh}^{-1}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\log|a^2 - x^2|$

36. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}\,dx = \log\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) = \operatorname{arcsenh}^{-1}\frac{x}{a} \quad (a > 0)$

37. $\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} \quad (a > 0)$

38. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} \quad (a > 0)$

39. $\int (a^2 - x^2)^{3/2}dx = \frac{x}{8}(5a^2 - 2x^2)\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{3a^4}{8}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} \quad (a > 0)$

40. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen}\frac{x}{a} \quad (a > 0)$

41. $\int \frac{1}{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a + x}{a - x}\right|$

42. $\int \frac{1}{(a^2 - x^2)^{3/2}}\,dx = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2 - x^2}}$

43. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\log|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|$

44. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx = \log|x + \sqrt{x^2 - a^2}| = \operatorname{arccosh}^{-1}\frac{x}{a} \quad (a > 0)$

45. $\int \frac{1}{x(a + bx)}\,dx = \frac{1}{a}\log\left|\frac{x}{a + bx}\right|$

46. $$\int x\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2(3bx-2a)(a+bx)^{3/2}}{15b^2}$$

47. $$\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x}\,dx = 2\sqrt{a+bx} + a\int \frac{1}{x\sqrt{a+bx}}\,dx$$

48. $$\int \frac{x}{\sqrt{a+bx}}\,dx = \frac{2(bx-2a)\sqrt{a+bx}}{3b^2}$$

49. $$\int \frac{1}{x\sqrt{a+bx}}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}}\log\left|\dfrac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}\right| & (a>0) \\ \dfrac{2}{\sqrt{-a}}\arctan\left|\sqrt{\dfrac{a+bx}{-a}}\right| & (a<0) \end{cases}$$

50. $$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2-x^2} - a\log\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|$$

51. $$\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\tfrac{1}{3}(a^2-x^2)^{3/2}$$

52. $$\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^4}{8}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} \quad (a>0)$$

53. $$\int \frac{1}{x\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\frac{1}{a}\log\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|$$

54. $$\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\sqrt{a^2-x^2}$$

55. $$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a} \quad (a>0)$$

56. $$\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2+a^2} - a\log\left|\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right|$$

57. $$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2-a^2} - a\arccos\frac{a}{|x|} \quad (a>0)$$

58. $$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\log(x+\sqrt{x^2+a^2})$$

59. $$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\log\left|\frac{x}{a+\sqrt{x^2+a^2}}\right|$$

60. $$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{|x|} \quad (a>0)$$

Ing. PEREYRA 676 - [illegible] - CONCEPCION
ENTRE RIOS - REP. ARGENTI

61. $$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx = \mp \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{a^2 x}$$

62. $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx = \sqrt{x^2 \pm a^2}$$

63. $$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \log \left| \dfrac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right| & (b^2 > 4ac) \\ \dfrac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \arctan \dfrac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} & (b^2 < 4ac) \end{cases}$$

64. $$\int \frac{x}{ax^2 + bx + c}\,dx = \frac{1}{2a} \log |ax^2 + bx + c| - \frac{b}{2a} \int \frac{1}{ax^2 + bx + c}\,dx$$

65. $$\frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}} \log |2ax + b + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c}| & (a > 0) \\ \dfrac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{arsen} \dfrac{-2ax - b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} & (a < 0) \end{cases}$$

66. $$\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\,dx = \frac{2ax + b}{4a} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{4ac - b^2}{8a} \int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + b + c}}\,dx$$

67. $$\int \frac{x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,dx = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{a} - \frac{b}{2a} \int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,dx$$

68. $$\int \frac{1}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,dx = \begin{cases} \dfrac{-1}{\sqrt{c}} \log \left| \dfrac{2\sqrt{c}\sqrt{ax^2 + bx + c} + bx + 2c}{x} \right| & (c > 0) \\ \dfrac{1}{\sqrt{-c}} \operatorname{arcsen} \dfrac{bx + 2c}{|x|\sqrt{b^2 - 4ac}} & (c < 0) \end{cases}$$

69. $$\int x^3\sqrt{x^2 + a^2}\,dx = (\tfrac{1}{5}x^2 - \tfrac{2}{15}a^2)\sqrt{(a^2 + x^2)^3}$$

70. $$\int \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x^4}\,dx = \frac{\mp\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3}}{3a^2x^3}$$

71. $$\int \operatorname{sen} ax \operatorname{sen} bx\,dx = \frac{\operatorname{sen}(a - b)x}{2(a - b)} - \frac{\operatorname{sen}(a + b)x}{2(a + b)} \quad (a^2 \neq b^2)$$

72. $$\int \operatorname{sen} ax \cos bx\,dx = -\frac{\cos(a - b)x}{2(a - b)} - \frac{\cos(a + b)x}{2(a + b)} \quad (a^2 \neq b^2)$$

73. $$\int \cos ax \cos bx\,dx = \frac{\operatorname{sen}(a - b)x}{2(a - b)} + \frac{\operatorname{sen}(a + b)x}{2(a + b)} \quad (a^2 \neq b^2)$$

74. $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x$

75. $\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x$

76. $\int \cos^m x \operatorname{sen}^n x \, dx = \dfrac{\cos^{m-1} x \operatorname{sen}^{n+1} x}{m+n} + \dfrac{m-1}{m+n} \int \cos^{m-2} x \operatorname{sen}^n x \, dx$

$$= -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \cos^m x \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx$$

77. $\int x^n \operatorname{sen} ax \, dx = -\dfrac{1}{a} x^n \cos ax + \dfrac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax \, dx$

78. $\int x^n \cos ax \, dx = \dfrac{1}{a} x^n \operatorname{sen} ax - \dfrac{n}{a} \int x^{n-1} \operatorname{sen} ax \, dx$

79. $\int x^n e^{ax} \, dx = \dfrac{x^n e^{ax}}{a} - \dfrac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} \, dx$

80. $\int x^n \log ax \, dx = x^{n+1} \left[\dfrac{\log ax}{n+1} - \dfrac{1}{(n+1)^2} \right]$

81. $\int x^n (\log ax)^m \, dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} (\log ax)^m - \dfrac{m}{n+1} \int x^n (\log ax)^{m-1} \, dx$

82. $\int e^{ax} \operatorname{sen} bx \, dx = \dfrac{e^{ax}(a \operatorname{sen} bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2}$

83. $\int e^{ax} \cos bx \, dx = \dfrac{e^{ax}(b \operatorname{sen} bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2}$

84. $\int \operatorname{sech} x \tanh x \, dx = -\operatorname{sech} x$

85. $\int \operatorname{csch} x \coth x \, dx = -\operatorname{csch} x$

ÍNDICE DE SÍMBOLOS

Los símbolos están ordenados por orden de aparición en el texto

SÍMBOLO	NOMBRE
$\mathbb{R}$	números reales xxiii
$[a, b]$	intervalo cerrado $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ xxiii
(a, b)	intervalo abierto $\{x \mid a < x < b\}$ xxiii
$[a, b)$	intervalo semiabierto $\{x \mid a \leqslant x < b\}$ xxiii
$(a, b]$	intervalo semiabierto $\{x \mid a < x \leqslant b\}$ xxiii
$\lvert a \rvert$	valor absoluto de a xxiv
$\mathbb{Q}$	números racionales xxiv
$\mathbb{R}^n$	espacio n-dimensional 3
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	base canónica de $\mathbf{R}^3$ 10
$\lVert \mathbf{a} \rVert$	norma de un vector $\mathbf{a}$ 23
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	producto escalar de los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ 23
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	producto vectorial de los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ 41
(r, θ, z)	coordenadas cilíndricas 62
(ρ, θ, ϕ)	coordenadas esféricas 65
$D_r(\mathbf{x}_0)$	disco de radio r con centro $\mathbf{x}_0$ 102
$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0}$	límite cuando x tiende a $\mathbf{x}_0$ 106
$\lim_{x \to b^-}$	límite por la izquierda; $x \to b$ por la izquierda 121
$\dfrac{\partial f}{\partial x}$	derivada parcial de f con respecto a x 122
$\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$	derivada de f en el punto $\mathbf{x}_0$ 128
∇f	grad f, gradiente de la función f 130
C^1	diferenciable con continuidad 132
$\mathbf{c}$	una trayectoria 135
C^2	diferenciable con continuidad dos veces 176
$Hf(x_0)$	hessiano de f en el punto $\mathbf{x}_0$ 205
∇	del o nabla 286

$\nabla \cdot \mathbf{F}$	div $\mathbf{F}$, divergencia de $\mathbf{F}$ 287
$\nabla \times \mathbf{F}$	rot $\mathbf{F}$, rotacional de $\mathbf{F}$ 291
∇^2 o Δ	laplaciano 297
$\iint_D f\,dA = \iint_D f(x, y)\,dx,\ dy$	integral doble 333
$\iiint_W f\,dV = \iiint_W f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$	integral triple 347
$J = \dfrac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}$	jacobiano 368
$\mathbf{C}_{\text{op}}$	trayectoria opuesta 426
$\int_C f\,ds$	integral de trayectoria 431
$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$	integral de línea 431
$\iint_S f\,dS$	integral escalar sobre una superficie 460
$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\,dS$	integral vectorial sobre una superficie 474