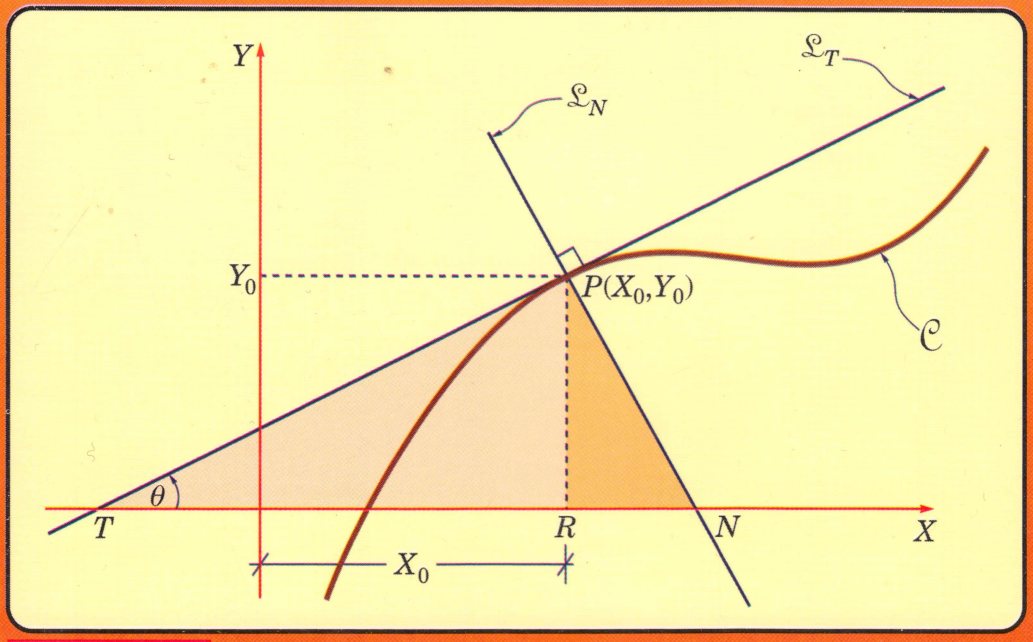
ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Cálculo Diferencial

LIMITES - CONTINUIDAD - DERIVADAS
REPRESENTACION PARAMETRICA DE CURVAS
DERIVADAS PARCIALES - DERIVACION IMPLICITA
APLICACIONES DE LAS DERIVADAS
DIFERENCIALES
LA DERIVADA DE LA FUNCION INVERSA
POLINOMIO DE TAYLOR



MOSHERA EDITORIAL

MOISÉS LÁZARO C.

ANÁLISIS MATEMÁTICO I

Cálculo Diferencial

- La Derivada
- Curvas Planas, Ecuaciones Paramétricas
- Derivadas Parciales
- Derivación Implícita
- Aplicaciones de la Derivada
- Diferenciales
- La Derivada de la Función Inversa
- Polinomio de Taylor

MOISÉS LÁZARO C.

EDITORIAL MOSHERA

Autor : Moisés Lázaro Carrión
Estudios : Lic. en Matemáticas Puras, Lic. en Educación, Maestría (Métodos Cuantitativos de la Economía U.N.M.S.M.), Maestría (Matemáticas Puras P.U.C.P.).

Experiencia Docente:
Pontificia Universidad Católica del Perú
Universidad Ricardo Palma
Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad Nacional de Ancash - Santiago Antúnez de Mayolo
Universidad Nacional del Callao
Universidad Particular San Martín de Porres

La presentación y disposición en conjunto de:

ANÁLISIS MATEMÁTICO I
CÁLCULO DIFERENCIAL
Autor: Moisés Lázaro Carrión

Son propiedad de: Dis. Imp. Edit. Lib. **MOSHERA S.R.L.**

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio, sin autorización escrita de la editorial.

Decreto Legislativo ..... : 822
Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú Nº ... : 2014-02916
International Standard Book Number ISBN ..... : 978-9972-813-81-8

Derechos reservados ©

Cuarta edición: Marzo 2014

Tiraje: 500 ejemplares

Obra editada, impresa y distribuida por:
Distribuidora, Imprenta, Editorial, Librería
MOSHERA S.R.L.
RUC: 20101220584
Jr. Tacna 2975 - San Martín de Porres
Lima - Perú / Telefax : 567-9299

PEDIDOS AL POR MAYOR
Distribuidora - Imprenta - Editorial - Librería
MOSHERA S.R.L.
Jr. Tacna 2975 - San Martín de Porres
Telefax: 567-9299
e-mail: editorialmoshera@hotmail.com

Impreso en el Perú - Printed in Perú

Dedico este libro a todos los trabajadores de la Editorial Moshera S.R.L. por su sacrificada labor en hacer realidad la presente obra.

PRÓLOGO

Con el título de CALCULO DIFERENCIAL, que es parte de todo curso de Análisis Matemático I, se presenta al lector que sigue las carreras de: Ciencias, Ingeniería, Economía, Administración y Contabilidad el presente Libro que contiene ocho capítulos bien definidos que son:

Capítulo 1: *La derivada de una función y los teoremas relativos al tema.*

Capítulo 2: *Representación paramétrica de las curvas, su gráfico y derivadas.*

Capítulo 3: *Derivadas parciales y sus aplicaciones a la economía.*

Capítulo 4: *Derivación implícita y sus aplicaciones.*

Capítulo 5: *Aplicaciones de la derivada, los máximos y mínimos de una función, problemas de aplicación, los puntos de inflexión y gráfica de funciones.*

Capítulo 6: *La diferencial de una función, como aplicación lineal, aplicaciones de la razón de cambio a diversos problemas.*

Capítulo 7: *La derivada de la función inversa, su existencia y teoremas.*

Capítulo 8: *El polinomio de Taylor, su aplicación para aproximaciones a funciones.*

Cada uno de los capítulos están sustentados con sus respectivas definiciones y teoremas, para los cuales he tenido cuidado de respetar su rigurosidad y formalidad para que el lector no caiga en error alguno.

El libro tiene la característica de ser: didáctico, práctico y riguroso. Se han hecho diversos y variados ejemplos que ayudarán al estudiante a salir de dudas y sobre todo reforzar su aprendizaje.

Sugiero al lector respetar los enunciados y definiciones tal como se dan, una alteración de ello sólo llevará a situaciones incongruentes y ahondaría las dudas.

Agradezco al economista Cesar Sandoval M. por su gentil colaboración en el capítulo relativo a las aplicaciones a la Economía.

El Autor.

ÍNDICE GENERAL

Capítulo 1: LA DERIVADA

0 Introducción

0.1 Función Real de una Variable Real 1

0.2 Puntos de Acumulación 2

0.3 Límite de una Función 3

0.4 Funciones Continuas 7

1 La Derivada

1.1 Derivada de una Función en un Punto 9

1.2 Otra Forma de Definir la Derivada de f en a 12

1.3 La Función Derivada 13

1.4 Derivadas Laterales 13

1.5 Interpretación Geométrica de la Derivada 14

1.6 Derivada de una Función en un Intervalo 15

2 Teoremas Sobre Derivadas 16

3 Velocidad y Aceleración 26

4 Razón de Cambio y Análisis Marginal 31

4.1 Coste Marginal 31

4.2 Razón Porcentual de Cambio 32

4.3 Ecuación de la demanda, Función Ingreso Total, Función Ingreso Marginal, Función de Ganancia 33

4.4 La Función Ingreso Total 34

4.5 La Función Ganancia 36

5 Diferenciabilidad de una Función en un Punto 39

5.1 Ejemplos 41

6 La Derivada de la Composición de dos Funciones 44

6.1 Problemas 47

7 Derivación por Medio de Fórmulas 58

7.1 Ejercicios Diversos 87

7.2 Ejercicios Propuestos 97

7.3 Problemas 99

Capítulo 2: CURVAS PLANAS, ECUACIONES PARAMÉTRICAS

1 Introducción 103

2 Parametrización, Ecuaciones Paramétricas 104

3 Función Vectorial 117
3.1 Imagen de una Función Vectorial 117

4 Definición de Curva Plana 118
4.1 Parametrización de una Curva 118

5 Camino o Trayectoria 119

6 Curva Cerrada (lazo) 120

7 Punto Múltiple 120

8 Curva Regular 122

9 Derivada Paramétrica 127

10 Tangentes 128

11 Gráfica de una Curva en Coordenadas Paramétricas 129

12 Importancia de los Caminos 150

Capítulo 3: DERIVADAS PARCIALES

1 Definición de una Función que Depende de dos Variables 152

2 Derivada Parcial de f respecto a "x" y Respecto a "y" 152

3 Derivadas Parciales Aplicadas a la Microeconomía (Multiplicadores de Lagrange) Demanda de Bienes de Consumo, Demanda de factores de Producción 154

Capítulo 4: DERIVACIÓN IMPLÍCITA

0 Introducción

1 Definición 165

2 Derivación Implícita 165
2.1 Problemas 166
2.2 Ejercicios Propuestos 185

3 Derivada Logarítmica Aplicando Propiedades y Derivación Implícita 188

4 Derivadas de Orden Superior 194

Capítulo 5: APLICACIONES DE LA DERIVADA

1 Aplicaciones Geométricas de la Derivada 203
1.1 Ecuaciones de las Rectas: Tangente y Normal 203
1.2 Problemas 204

2 Angulo Entre Dos Curvas 212

3 Máximos y Mínimos de una Función 216
3.1 Definición 1 216
3.2 Definición 2 216
3.3 Aclaraciones en estas Definiciones 216
3.4 Definición 3 217
3.5 Definición 4 217
3.6 Definición 5 217
3.7 Ejemplos Aclaratorios 217

4 Puntos Críticos de una Función 219
4.1 Definición 219
4.2 Ejemplos 219

5 Teoremas Relativos a la Derivada 223

6 Funciones Derivables en un Intervalo 227

7 Aplicaciones del Teorema del Valor Medio 235

8 Función Lipschitziana 237

9 Problemas Resueltos Sobre el T.V.M. 237
9.1 Otros Problemas Respecto al T.V.M. 241

10 Regla de L´hopital para el Cálculo de Límites Indeterminados de la Forma $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$ 248
10.1 Problemas 250

11 Funciones Crecientes y Decrecientes 257

12 Criterios para Extremos Relativos 259

13 Problemas Relativos a Máximos y Mínimos 262
13.1 Funciones Polinómicas 262
13.2 Funciones Racionales 273
13.3 Funciones Irracionales 279
13.4 Funciones Exponenciales 288
13.5 Funciones Logarítmicas 292

14 Problemas de Máximos y Mínimos 298

15 Concavidad y Puntos de Inflexión 323
15.1 Reglas para Posibles Puntos de Inflexión 331
15.2 Aplicaciones al Trazado de la Gráfica de una Función 332

Capítulo 6: DIFERENCIALES

1 Incremento de una Variable Independiente e Incremento de una Función 337
1.1 Definición 337
1.2 Error Relativo y Error Porcentual Aproximado 341

2 Diferenciales 344

3 Razón de Cambio 348
3.1 Problemas de Aplicación 350

Capítulo 7: LA DERIVADA DE LA FUNCION INVERSA

1 Teoremas Relativos a Funciones Inversas 363

2 Dos Teoremas Relativos a la Continuidad de la Inversa de la Función f, Cuando f es Continua 364

3 Derivada de la Función Inversa 366

4 Derivada de las Funciones Trigonométricas Inversas 374

5 Derivada de Funciones Trigonométricas Inversas Compuestas 380

Capítulo 8: POLINOMIO DE TAYLOR

1 Polinomios de Taylor y Aproximaciones 395
1.1 Definición del n-ésimo Polinomio de Taylor 395
1.2 Resto de un Polinomio de Taylor 401

Problemas Propuestos 412

CAPÍTULO 1

LA DERIVADA

0. INTRODUCCIÓN

Antes de definir la derivada de una función real de una variable real, recordemos brevemente cuatro definiciones previas: función real de una variable real, punto de acumulación, límite de una función y continuidad de una función.

0.1. FUNCIÓN REAL DE UNA VARIABLE REAL

Dado el subconjunto $A \subset \mathbb{R}$, diremos que "f es una función o aplicación definida en A y con valores en $\mathbb{R}$" a toda correspondencia f que asocia a cada elemento $x \in A$ con un único elemento $f(x) \in \mathbb{R}$ llamado el valor de la función que asume en el punto x.

NOTACIÓN:

a) La notación $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ se lee "f es una aplicación de A en $\mathbb{R}$".

donde
- A: es el dominio de la función.
- $\mathbb{R}$: es el conjunto de llegada. El rango de la función f es un subconjunto del conjunto de llegada.
- $f(A) = \{ f(x) / x \in A \}$ es la imagen de A por f o el rango de f.

b) La notación $x \longrightarrow f(x)$ indica "a x corresponde el valor $f(x)$"
"x" es la variable independiente.

0.1.1. GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$

$$Gr(f) = \{ (x, f(x)) / x \in A \}$$

$Gr(f)$: gráfica de f

Ejemplo 1.

Sea la función $f: [-1,8\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -3 + \sqrt{x+1}$

En este ejemplo tenemos:

a) El dominio de f, es el intervalo $[-1,8\rangle$.

b) El rango de f es un subconjunto de $\mathbb{R}$. ¿Cómo se halla?

Se halla "ACOTANDO" la función a partir del dominio.

Así: $x \in [-1,8\rangle \Rightarrow -1 < x < 8$

Sumar 1 $\Rightarrow 0 \le x+1 < 9$

Extraer raíz $\Rightarrow 0 \le \sqrt{x+1} < 3$

Por 2 $\Rightarrow 0 \le 2\sqrt{x+1} < 6$

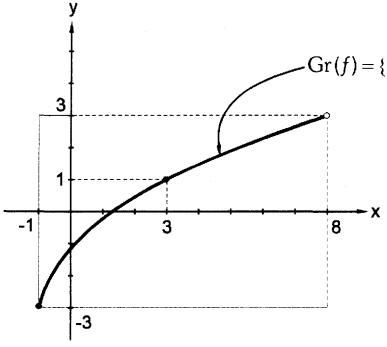
Sumar –3 $\Rightarrow -3 \le -3+2\sqrt{x+1} < 3$

El rango de f es el intervalo $[-3,3\rangle = f([-1,8\rangle)$

c) El valor de f en 3 es $f(3) = -3+2\sqrt{3+1} = 1$

d) La expresión algebraica "$-3+2\sqrt{x+1}$" es la ***regla de correspondencia de la función f***, el cual nos permite calcular el valor de la función f en cada $x \in [-1,8\rangle$.

e) Graficar la función f.



$Gr(f) = \{(x,y) \in [-1,8\rangle \times [-3,3\rangle / y = -3+2\sqrt{x+1}\}$

Como vemos: $Gr(f) \subset [-1,8\rangle \times [-3,3\rangle$

El dominio está contenido en el Eje X.

El rango está contenido en el Eje Y.

0.2. PUNTO DE ACUMULACIÓN

Sea $A \subset \mathbb{R}$. Un número real $a \in \mathbb{R}$ se llama ***punto de acumulación del conjunto A*** cuando todo intervalo abierto $\langle a-\varepsilon, a+\varepsilon\rangle$, de centro en "a" contiene algún punto $x \in A$ diferente de A. dicho de otra manera:

"$a \in \mathbb{R}$ es punto de acumulación de A, si y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $x \in A$, tal que $\langle a-\varepsilon, a+\varepsilon\rangle \cap A \neq \varnothing$. Esto es, $0 < |x-a| < \varepsilon$.

Ejemplo 2.

En los intervalos: $\langle a,b\rangle$, $[a,b]$, $\langle -\infty,b\rangle$, $\langle a,+\infty\rangle$; son puntos de acumulación los extremos a, b y todos los puntos interiores a cada intervalo.

NOTA: Si "a" es punto de acumulación de A, puede ocurrir que $a \in A$ o que $a \notin A$.

0.3. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Definición.

Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función con valores reales definida en un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$.

Sea x_0 un punto de acumulación de A. Diremos que el número real L es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 y escribimos.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

si para cada número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, podemos encontrar otro número real $\delta > 0$ tal que se cumple $|f(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $x \in A \ \wedge \ 0 < |x - x_0| < \delta$.

Abreviando, escribimos:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ si, y sólo si $(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)$ tal que

$$\underbrace{x \in A \ \wedge \ 0 < |x - x_0| < \delta}_{x \in A \cap \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle} \ \Rightarrow \ \underbrace{|f(x) - L| < \varepsilon}_{f(x) \in A \cap \langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle}$$

Ejemplo 3.

Dado la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 0.2x}{x^3 - 0.04x}$, $\begin{matrix} x \neq 0 \\ x \neq \pm 0.2 \end{matrix}$

a) Calcular $\lim_{x \to 0} f(x)$.

b) Aplicando la definición de límite, halle δ en términos de ε.

Solución.

a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 0.2x}{x^3 - 0.04x} = \lim_{x \to 0} \dfrac{x(x - 0.2)}{x(x - 0.2)(x + 0.2)} = \lim_{x \to 0} \dfrac{1}{x + 0.2} = \dfrac{1}{0.2} = 5$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+0.2}=5$ si, y sólo si, dado $\varepsilon>0$, existe

$\delta>0$ tal que $x\in\mathbb{R}-\{0,0.2,-0.2\}\ \wedge\ \underbrace{0<|x-0|<\delta}_{|x|<\delta}\ \Rightarrow\ \left|\frac{1}{x+0.2}-5\right|<\varepsilon$

BUSCAR δ EN TÉRMINOS DE ε

Partir de $\left|\frac{1}{x+0.2}-5\right|$, sumar, simplificar y factorizar hasta encontrar el término $|x|$ (necesitamos la hipótesis $|x-x_0|<\delta$).

Veamos:

1) $\left|\frac{1}{x+0.2}-5\right|=\left|\frac{1-5x-1}{x+0.2}\right|=\left|\frac{-5x}{x+0.2}\right|=5|x|\frac{1}{|x+0.2|}$

2) Por hipótesis, se tiene: $|x|<\delta$.

Faltaría acotar la función $\frac{1}{|x+0.2|}$. Para tal efecto, elegir un δ' tal que $|x|<\delta\le\delta'\ \Rightarrow\ |x|<\delta'$ de modo que su tamaño no sea mayor que la distancia de "0" a la asíntota $x=-0.2$ (dicha distancia es 0.2). Por ejemplo, convendría elegir $\delta'=0.1$ o 0.03, etc. si elegimos $\delta'=0.1$ tendremos:

$|x|<0.1 \quad\Rightarrow\quad -0.1<x<0.1$

Sumar 0.2 $\quad\Rightarrow\quad 0.1<x+0.2<0.3$

Invertir $\quad\Rightarrow\quad \frac{1}{0.3}<\frac{1}{x+0.2}<\frac{1}{0.1}$

$\quad\Rightarrow\quad \frac{10}{3}<\frac{1}{x+0.2}<10$

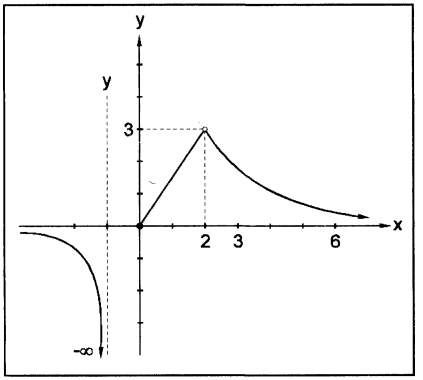
$\quad\Rightarrow\quad \frac{1}{|x+0.2|}<10$

3) Al retornar al paso 1) tendremos: $5|x|\frac{1}{|x+0.2|}<(5\delta)(10)=50\delta$ hacer $50\delta=\varepsilon\ \Rightarrow\ \delta=\frac{\varepsilon}{50}$.

Como hay $\delta'=0.1$ y $\delta=\frac{\varepsilon}{50}$, elegimos el más pequeño, es decir hacemos $\delta=\min\left\{0.1\,,\frac{\varepsilon}{50}\right\}$, ε es cualquier número real positivo muy pequeño, casi cero.

0.3.1. LÍMITES LATERALES.

Ejemplo 4.



Sea la función:

$$f(x)\begin{cases}\frac{1}{x+1} & , \quad x<-1\\ x+1 & , \quad -1<x<2\\ 3-\sqrt{x-2} & , \quad x>2\end{cases}$$

En esta función tenemos que los extremos -1 y 2 son puntos de acumulación.

Así tenemos:

a) -1 es punto de acumulación a la izquierda de $\langle -\infty,-1\rangle$

b) -1 es punto de acumulación a la derecha de $\langle -1,2\rangle$

c) 2 " " " " a la izquierda de $\langle -1,2\rangle$

d) 2 " " " " a la derecha de $\langle 2,+\infty\rangle$

Es en estos puntos, donde se estudian los limites laterales.

Empecemos a analizar:

a) En el punto de acumulación $x=-1$, se tiene:

i) $\lim\limits_{\substack{x\to -1^-\\ x<-1\\ x+1<0}} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{-0}=-\infty$

En este caso decimos que, el límite por la izquierda de -1 no existe.

NOTA: Cuando en el resultado obtenemos $-\infty$ o $+\infty$, diremos que no existe límite (este hecho es porque el $-\infty$ y el $+\infty$ no son números reales, solo son símbolos)

---

ii) $\lim\limits_{\substack{x\to -1^+\\ x>-1}} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}=-1+1=0$

En este caso, afirmamos que, el límite por la derecha de -1 existe y su valor es cero.

Conclusión: En el punto de acumulación $x=-1$, no existe límite. En efecto, por la izquierda es $-\infty$ y por la derecha es cero, son resultados que no podemos comparar ya que $-\infty$ no es un número real. Se comparan entre dos números reales.

b) En el punto de acumulación $x=2$, se tiene:

$$\left.\begin{array}{ll} i) & \lim\limits_{\substack{x\to 2^+ \\ x>2}} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(3-\sqrt{x-2})=3-0=3 \\ ii) & \lim\limits_{\substack{x\to 2^- \\ x<2}} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(x+1)\qquad =2+1=3 \end{array}\right\}\ \text{son iguales}$$

Conclusión: Cuando los límites laterales existen y son iguales, diremos que $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$, el cual es único.

DEFINICIÓN DE LÍMITES LATERALES

A) LÍMITE A LA DERECHA

Sea la función $f:\langle x_0,b\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$, $b=+\infty$ o finito.

Diremos que $\lim\limits_{\substack{x\to x_0^+ \\ x>x_0}} f(x)=L$ s.s.s. $(\forall\,\varepsilon>0)\ (\exists\,\delta>0)$

(L: número real)

tal que $x\in\langle x_0,b\rangle \ \wedge\ 0<x-x_0<\delta$ implica $|f(x)-L|<\varepsilon$.

B) LÍMITE A LA IZQUIERDA

Sea la función $f:\langle b,x_0\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$, $b=-\infty$.

Diremos que $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x)=L$ s.s.s. $(\forall\,\varepsilon>0)\ (\exists\,\delta>0)$

(L: número real)

tal que $x\in\langle b,x_0\rangle \ \wedge\ 0<x_0-x<\delta$ implica $|f(x)-L|<\varepsilon$.

Ejemplo 5. En la función $f(x)=\frac{2}{|x-1|}$, $x\neq 1$

Se tiene: a) $\lim\limits_{\substack{x\to 1^+ \\ x>1 \\ x-1>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1^+ \\ x>1}} \frac{2}{x-1}=\frac{2}{+0}=+\infty$

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 1^- \\ x<1 \\ x-1<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 1^{-1} \\ x<1}} \frac{2}{-(x-1)} = \frac{2}{-(-0)} = \frac{2}{+0} = +\infty$

Conclusión: En el punto de acumulación $x = 1$, no existe límite.

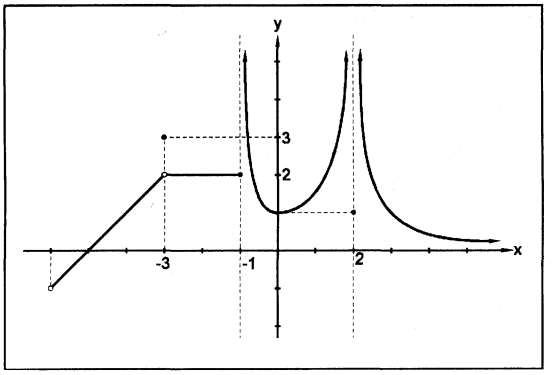
0.4. FUNCIONES CONTINUAS

En funciones reales con una variable real surgen dos interrogantes de gran importancia:

1) Cuándo una función es continua en un punto?

2) Cuándo una función es continua en un intervalo?

Antes de responder estas interrogantes, observemos el gráfico de la siguiente función.



$$f(x) = \begin{cases} x+5 & , \quad -6 < x < -3 \\ 3 & , \quad x = -3 \\ 2 & , \quad -3 < x \leq -1 \\ \frac{1}{x+1} & , \quad -1 < x \leq 0 \\ \frac{2}{|x-2|} & , \quad 0 < x < 2 \\ 1 & , \quad x = 2 \\ \frac{2}{|x-2|} & , \quad x > 2 \end{cases}$$

Sí observamos en los puntos: –3, –1, 0 y 2 que son los extremos de los intervalos (puntos de acumulación), la función $f(x)$ sufre las siguientes manifestaciones:

a) En el punto $x = -3 \in \text{Dom}(f)$, la función f tiene un "agujero". Es decir, f no es continua en $x = -3$, pero esta discontinuidad se puede evitar.

b) En el punto $x = -1 \in \text{Dom}(f)$, la función f se ha roto "totalmente", es imposible de evitar dicha rotura. Es decir, f no es continua en $x = -1$ (hay discontinuidad infinita).

c) En $x = 0$, la función f no tiene agujero ni ha sufrido rotura. Es decir, $f(x)$ es continua en $x = 0$.

d) En $x = 2$, la función f tiene una rotura inevitable. Es decir, $f(x)$ es discontinua en $x = 2$ (discontinuidad infinita).

En cambio, si observamos el comportamiento de la función en cada intervalo, tenemos los siguientes resultados:

a) En el intervalo abierto $\langle -6,-3\rangle$ la función $f(x)$ no tiene agujeros ni roturas, el trazo de la línea es ininterrumpida; matemáticamente hablando, $f(x)$ es continua en el intervalo $\langle -6,-3\rangle$.

b) En el intervalo abierto $\langle -3,-1\rangle$, $f(x)$ es continua.

c) En el intervalo abierto $\langle -1,-2\rangle$, $f(x)$ es continua.

d) En el intervalo abierto $\langle 2,+\infty\rangle$, $f(x)$ es continua.

La idea de continuidad, es el tema central de ***LA TOPOLOGIA*** porque ella trata de la deformación continua de las figuras geométricas. Por ejemplo una línea cerrada simple se puede reducir "continuamente" en un punto.

0.4.1. DEFINICIÓN PUNTUAL DE CONTINUIDAD.

Dado la función $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, diremos que f es continua en el punto $a \in A$, si cumple tres condiciones:

1° f está definida en "a", es decir existe $f(a)$.

2° Los límites laterales en "a" son iguales, es decir: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$

3° $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$

NOTA: La 3ª condición define la continuidad de la función f en el punto $a \in A$. Las condiciones 1ª y 2ª se mencionan sólo por carácter didáctico.

DEFINICIÓN EQUIVALENTE

Sea $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$

Diremos que la función f es continua en el punto $a \in A$, si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, podemos hallar $\delta > 0$ tal que.

$$x \in A \ \wedge\ |x-a| < \delta \text{ implica } |f(x)-f(a)| < \varepsilon$$

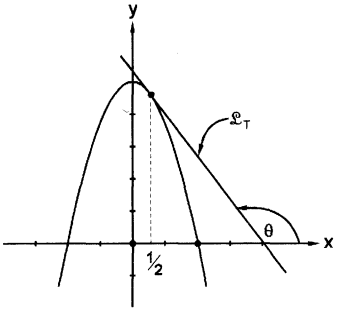
0.4.2. DEFINICIÓN INTERVALICA DE CONTINUIDAD.

Diremos que $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua.

cuando f es continua en todos los puntos de A. (A es un intervalo).

1. LA DERIVADA

La interrogante que nos planteamos ahora, es: ¿cómo se halla la pendiente de una recta que es tangente a una curva?



θ es el ángulo de inclinación de la recta tangente y la tgθ es la pendiente de la recta.

Por ejemplo: dado la curva $f(x)=4-x^2$, cómo se halla la pendiente de una recta que es tangente a la curva en el punto $x=\frac{1}{2}$?

Respuesta: La pendiente de la recta $\mathcal{L}_T$ que es tangente a la curva en el punto $x=\frac{1}{2}$ ***es la derivada de f(x) en el punto*** $x=\frac{1}{2}$. Para llegar a esta afirmación pasaron siglos. Los genios Isacc Newton (1642 – 1727) y Gottfried Leibniz (1646 – 1716) descubrieron el cálculo diferencial y el cálculo integral. Este descubrimiento revolucionó toda la matemática hasta entonces conocidas.

A continuación daremos la definición de la derivada de una función en un punto de su dominio.

1.1. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

DEFINICIÓN: Sea la función $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ y "a" un punto de acumulación perteneciente al dominio de $f(A = \text{Dom}(f))$.

Diremos que f es derivable en el punto "a" cuando existe el límite $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (1)

En caso afirmativo, el límite $f'(a)$ se llama la derivada de f en el punto a.

Ejemplo 1.

Dada la función $f(x)=4-x^2$, hallar la derivada de f en $\frac{1}{2}$.

Solución:

$$f'(\tfrac{1}{2}) = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}} \quad , \quad \text{donde} \begin{cases} f(x) = 4-x^2 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 4-\frac{1}{4} = \frac{15}{4} \end{cases}$$

$$= \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{4-x^2-\frac{15}{4}}{x-\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{4}-x^2}{x-\frac{1}{2}} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{-(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{x\to\frac{1}{2}} -\left(x+\tfrac{1}{2}\right) = -\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\right) = -1$$

Conclusión: $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -1$

$\uparrow$ es la pendiente de la recta tangente en $x = \frac{1}{2}$

OBSERVACIÓN: Decir que existe el límite $f'(a)$ significa dos cosas:

a) $f'(a)$ es un número real único. Es decir el límite por la derecha de a y por la izquierda de a de la función $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ son números reales e iguales.

b) $f'(a)$ no es $+\infty$ ni $-\infty$.

Si por el contrario, ocurren uno de los siguientes tres casos:

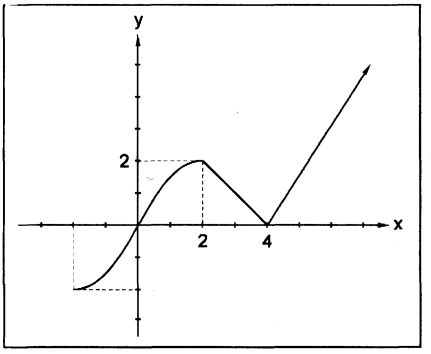
CASO 1 Si existen los limites laterales $\lim\limits_{\substack{x\to a^+ \\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ y $\lim\limits_{\substack{x\to a^- \\ x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, pero no son iguales; diremos que f no es derivable en "a". Es el caso de la función $f(x) = |x|$, que no es derivable en $x = 0$.

CASO 2 Si $\lim\limits_{\substack{x\to a^+ \\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$, diremos que no existe la derivada de f por la derecha de $x = a$.

CASO 3 Si $\lim\limits_{\substack{x\to a^- \\ x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$, diremos que no existe la derivada de f por la izquierda de $x = a$. Es el caso de la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$, que no existe la derivada de f en $x = 0$.

Ejemplo 2.

Sea la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:



$$f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{4x} & , \quad x \le 2 \\ |x-4| & , \quad x > 2 \end{cases}$$

Que al definir, el valor absoluto, obtenemos:

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{4x} & , \quad x \le 2 \\ -(x-4) & , \quad 2 < x < 4 \\ x-4 & , \quad x \ge 4 \end{cases}$$

En esta función, se tiene: $f(x)$ es continua en los puntos $x=0$, $x=2$ y $x=4$ pero no es derivable en dichos puntos.

Comprobemos:

a) En $x=0$. Comprobemos:

i) $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}=\dfrac{\sqrt[3]{4x}-0}{x-0}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt[3]{4}}{x^{2/3}}=+\infty$ Este resultado implica que no existe $f'_+(0)$.

ii) $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt[3]{4}}{x^{2/3}}=-\infty$, implica que no existe $f'_-(0)$.

Estos resultados nos indican que f no es derivable en $x=0$.

b) En $x=2$.

i) $f'_+(2)=\lim\limits_{\substack{x\to 2^+ \\ x>2}}\dfrac{f(x)-f(x)}{x-2}$, donde $\begin{cases} f(x)=-(x-4) \\ f(2)=\sqrt[3]{4(2)}=2 \end{cases}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-(x-4)-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-(x-2)}{x-2}=-1$

ii) $f'_-(2)=\lim\limits_{\substack{x\to 2^-\\ x<2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$, donde $\begin{cases} f(x)=\sqrt[3]{4x} \\ f(2)=2 \end{cases}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{4x}-2}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{4x}-\sqrt[3]{8}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt[3]{4x}-\sqrt[3]{8}\right)\left(\sqrt[3]{(4x)^2}+\sqrt[3]{(4x)(8)}+\sqrt[3]{8^2}\right)}{(x-2)\left(\sqrt[3]{(4x)^2}+....+\sqrt[3]{8^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{(x-2)(\sqrt[3]{(4x)^2}+.....\sqrt[3]{8^2})}=\frac{1}{4}$$

Como podemos apreciar, los limites laterales son números reales diferentes, por tanto $f(x)$ no es derivable en $x=2$.

c) En $x=4$.

i) $f'_+(4)=\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-2}=1$

ii) $f'_-(4)=\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-2}=-1$

} *DIFERENTES*

$\therefore$ No existe $f'(4)$. Es decir f no es derivable en $x=4$.

1.2. OTRA FORMA DE DEFINIR LA DERIVADA DE *f* en *a*.

Si en la definición $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

hacemos el cambio de variable: $x-a=h$

$x=a+h$

Obtenemos:

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad (2)$$

La derivada de f en a.

NOTA:

$x-a=\Delta x=h$

1.3. LA FUNCIÓN DERIVADA

Si f es una función, entonces.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad (3)$$

se llama la ***FUNCIÓN DERIVADA DE*** f.

Ejemplos:

a) Si $f(x) = x^n$, entonces $f'(x) = n x^{n-1}$ es la función derivada de f.

b) Si $f(x) = e^x$, entonces $f'(x) = e^x$ es la función derivada de f.

c) Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, entonces $f'(x) = \cos x$ es la función derivada de f.

NOTACIÓN: Si "y es función de $y''(y = f(x))$, la "derivada de y con respecto a x" se denota por:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = D_x y$$

es la notación de Leibniz [1]

1.4. DERIVADAS LATERALES

Si en la definición $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (1), hacemos: $x - a = h$, $x = a + h$

Tendremos: $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ (2)

Tanto ① como ② definen "La derivada de f en $a \in A$".

DEFINICIONES:

Supongamos que el dominio de la función $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ lo expresamos como $A = \langle b,a] \cup [a,c\rangle$, definimos:

i) $f'_+(a) = \lim\limits_{\substack{x\to a^+ \\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{\substack{h\to 0^+ \\ h>0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

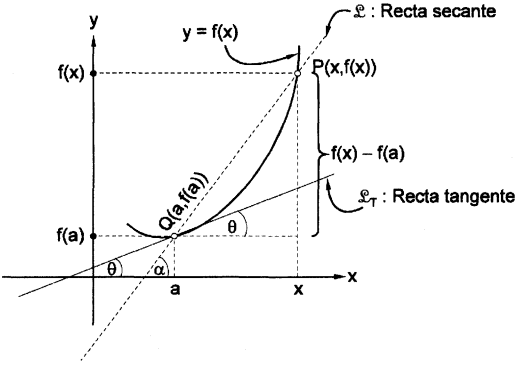
Si este límite existe; diremos que $f'_+(a)$ es la derivada de f a la derecha de a.

ii) $f'_-(a) = \lim\limits_{\substack{x\to a^- \\ x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{\substack{h\to 0^- \\ h<0}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, si este límite existe; diremos que $f'_-(a)$ es la derivada de f a la izquierda de a.

OBSERVACIÓN: En 2 aparece una nueva función, que es $q(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ definida en el conjunto $B = \{h \in \mathbb{R} - \{0\} / a+h \in A\}$.

1.5. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE LA DERIVADA

Dado la función $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$
¿qué interpretación geométrica tiene $f'(a)$, $a \in A$?



Observemos el gráfico:

Tenemos la recta secante $\mathcal{L}$ que corta a la función $f(x)$ en los puntos $Q(a, f(a))$ y $P(x, f(x))$, siendo Q un punto fijo y P un punto que se mueve acercándose a Q.

Deseamos que la recta secante $\mathcal{L}$ se convierta en la recta tangente $\mathcal{L}_T$, esto ocurrirá cuando P se mueva hasta coincidir con Q. Pero a medida que P se acerca a Q la pendiente de $\mathcal{L}$ irá variando hasta "coincidir" con la pendiente de $\mathcal{L}_T$.

La pendiente de la recta-secante $\mathcal{L}$ es: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Cuando P se mueve por la curva acercándose a Q, la variable "x" se va acercando al punto "a" y por lo tanto la diferencia $x-a$ se hace cada vez más pequeña acercándose a cero.

Es decir, cuando $x \to a$ entonces $(x-a) \to 0$ y la pendiente $\operatorname{tg}\alpha$ de $\mathcal{L}$, se convierte en $\operatorname{tg}\theta$, que viene a ser la pendiente de $\mathcal{L}_T$.

En el límite, se expresa del siguiente modo:

$$\text{pendiente de } \mathcal{L}_T = \operatorname{tg}\theta = \boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)}$$

Conclusión: $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto "a".

La ecuación de la recta tangente $\mathcal{L}_T$ es: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$.

Ejemplo 3.

Hallar la ecuación de la recta que es tangente a la curva $y = 4 - x^2$ en el punto $x = \frac{1}{2}$

Solución.

La ecuación de la recta tangente en ½ es:

$$y - f\left(\tfrac{1}{2}\right) = f'\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(x - \tfrac{1}{2}\right) \text{ , donde } \begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ \qquad = \frac{15}{4} \\ f'\left(\frac{1}{2}\right) = -1 \end{cases}$$

ver ejemplo 1.

$$y - \tfrac{15}{4} = -1\left(x - \tfrac{1}{2}\right)$$

$$4x + 4y - 17 = 0$$

1.6. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN INTERVALO CERRADO

Sea la función $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$

Se dice que f es derivable en un punto $x_0 \in [a,b]$ si cumplen las tres siguientes proposiciones:

1) Si $x_0 \in \langle a,b\rangle$, entonces las derivadas laterales en x_0 existen y son iguales.

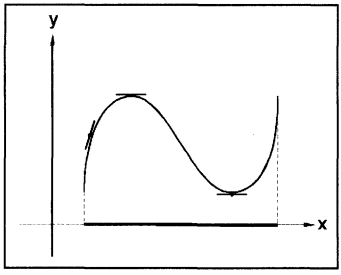
2) Si $x_0 = a$, entonces existe la derivada lateral por la derecha de a.[1]

3) Si $x_0 = b$, entonces existe la derivada lateral por la izquierda de a.

---

1 *Leibniz, es el matemático que formalizó la derivada $f'(a)$ como el límite de la función $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ cuando $x \to a$.*

1.7. INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA



Cuando decimos que $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en todo punto $x_0 \in [a,b]$, geométricamente significa que por cada punto $(x, f(x))$ perteneciente al gráfico de f se puede trazar una sola recta tangente.

2. TEOREMAS SOBRE DERIVADAS

Teorema 1 *(La derivada implica continuidad, el recíproco no es cierto)*
Sea la función $f:I \longrightarrow \mathbb{R}$, I = dominio de f y $a \in I$.
Si f es derivable en a entonces f es continua en a.

Demostración:
Recordar que: f es continua en a, si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, entonces bastará demostrar:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)-f(a)\right]=0 \quad , \quad x-a=h$$
$$\iff \lim_{h\to 0}\left[f(h+a)-f(a)\right]=0 \qquad x=h+a$$
$$\iff \lim_{h\to 0} f(h+a)=f(a)$$
$$\iff \lim_{x\to 0} f(x)=f(a)$$

Veamos:

1) Si existe la derivada $f'(a)$, entonces existe $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$,

2) Partir de $\lim_{x\to a}\left[f(x)-f(a)\right]$

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)-f(a)\right]=\lim_{x\to a}\frac{\left[f(x)-f(a)\right]}{x-a}(x-a) \quad , \quad x\neq a$$

Se ha dividido y multiplicado $(x-a)$

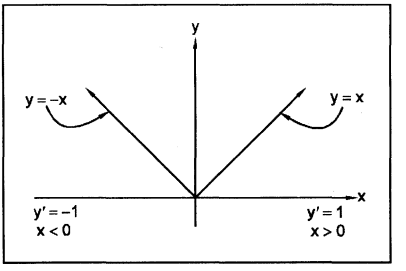
$$= \underbrace{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{f'(a)} \cdot \underbrace{\lim_{x\to a}(x-a)}_{0}$$
$$= 0$$

3) Luego, f es continua en el punto a.

NOTA: El recíproco de este teorema no siempre es verdadero, es decir, si una función f es continua en a, no implica que f sea derivable en a.

Ejemplo 4.

La función $f(x) = |x|$ es continua en cero, pero no es derivable en cero.



Probemos:

a) La derivada por la derecha de cero es:

$$f'_+(0) = \lim_{\substack{x\to 0^+ \\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x-0}{x-0} = \lim_{x\to 0}(1) = 1$$

b) La derivada por la izquierda de cero es:

$$f'_-(0) = \lim_{\substack{x\to 0^- \\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{-x-0}{x-0} = \lim_{x\to 0}(-1) = -1$$

Como observamos, las derivadas laterales existen pero no son iguales, por lo tanto, la función $f(x) = |x|$ no es derivable en cero.

En general, todas las funciones con valor absoluto de la forma $f(x) = |G(x)|$ no son derivables en los puntos $x \in \mathbb{R}$ en los cuales $G(x) = 0$.

Por ejemplo:

i) $f(x) = |x^2 - 4|$, no es derivable en $x = \pm 2$.

ii) $f(x) = 2|x-1| - 3x|2x+1|$, no es derivable en los puntos $x = 1$, $x = -\frac{1}{2}$.

Ejemplo 5.

La función $f(x) = \sqrt[3]{x-a}$ es continua en $x = a$, pero no es derivable en $x = a$, pues las derivadas por la derecha y la izquierda de $x = a$ no existen.

Demostremos:

$$i)\quad f'_+(a)=\lim_{\substack{x\to a^+\\ x>a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x-a}-0}{x-a}$$

$$=\lim_{\substack{x\to a^+\\ x>a}}\frac{1}{(x-a)^{2/3}}=+\infty$$

Como observamos, la derivada de f por la derecha de a, no existe. Similar cosa ocurre con $f'_-(a)$.

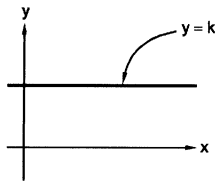
CONCLUSIÓN: $f(x)=\sqrt[3]{x-a}$ no es derivable en a.

Teorema 2 Si $f(x)=k$, k es una constante real, entonces $f'(x)=0$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

Prueba:

1. La derivada de f en x, es $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $h\neq 0$
2. Por hipótesis, se tiene $f(x)=k$
   $f(x+h)=k$
3. Sustituir 2 en 1. $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h}=\lim_{h\to 0}\left[\frac{0}{h}\right]=\lim_{h\to 0}[0]=0$

Ilustración Gráfica.



El gráfico de la función constante es una recta paralela al EJE X, su ángulo de inclinación es cero y por tanto su pendiente es $\operatorname{tg}0°=0$ el cual coincide con su derivada.

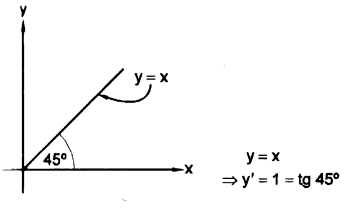
Pues si $y=k \Rightarrow y'=0=\operatorname{tg}0°$.

Teorema 3 Si $f(x)=x$, entonces $f'(x)=1$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

Prueba:

1. La derivada de f en x, es $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $h\neq 0$

Ilustración Gráfica



2. Como $f(x) = x$, entonces $f(x+h) = x+h$.

3. Sustituir 2. en 3.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{h+x-x}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

Teorema 4 (Regla de la Potencia)

Si $f(x) = x^n$, donde n es un número racional, entonces $f'(x) = nx^{n-1}$

Prueba: (Probaremos para el caso cuando "n" es un número entero positivo)

1. La derivada de f en x es: $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $h \neq 0$

2. Como $f(x) = x^n$ entonces $f(x+h) = (x+h)^n$.

3. Sustituir, 2 en 1.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left[(x+h)-x\right]\left[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \ldots\ldots\ldots + x^{n-1}\right]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \ldots\ldots + x^{n-1}\right]$$

$$= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + \ldots\ldots + x^{n-1}}_{\text{hay } n \text{ términos}}$$

$$= nx^{n-1}$$

EJEMPLOS:

FUNCIÓN	SU DERIVADA
1) $f(x)=x^5$	$f'(x)=5x^4$
2) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$	$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$
3) $f(x)=x^{-3}$	$f'(x)=-3x^{-4}=-\frac{3}{x^4}$
4) $f(x)=\frac{1}{x^5}=x^{-5}$	$f'(x)=-5x^{-6}=-\frac{5}{x^6}$

Teorema 5 (REGLA DEL PRODUCTO DE UNA CONSTANTE POR UNA FUNCIÓN)

Si $g(x)=cf(x) \Rightarrow g'(x)=c\cdot f'(x)$, c es un número real.

Prueba.

1. La derivada de g en x, es $g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$, $h\neq 0$

2. Pero $g(x+h)=cf(x+h)$, entonces
$$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{c[f(x+h)-f(x)]}{h}$$
$$=c\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{f'(x)}$$
$$=cf'(x).$$

EJEMPLOS:

FUNCIÓN	SU DERIVADA
1) $g(x)=5x$	$g'(x)=5(1)=5$
2) $g(x)=\frac{2}{3}x^3$	$g'(x)=\frac{2}{3}(3x^2)=2x^2$
3) $y=\frac{x^{1/3}}{4}$	$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right)=\frac{1}{12\sqrt[3]{x^2}}$
4) $y=\frac{5}{\sqrt{x}}$	$=5x^{-\frac{1}{2}}$ ... $\frac{dy}{dx}=5\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right)=-\frac{5}{2\sqrt{x^3}}$
5) $S=6t^{1/2}$	$\frac{ds}{dt}=6\left(\frac{1}{2}t^{-1/2}\right)=\frac{3}{\sqrt{t}}$

Teorema 6 (REGLA DE LA SUMA)

La derivada de la suma de dos funciones es la suma de sus derivadas es decir: Si $\mu(x) = f(x) + g(x) \Rightarrow \mu'(x) = f'(x) + g'(x)$

Prueba.

1. La derivada de μ en x, es $\mu'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\mu(x+h)-\mu(x)}{h}$, $h \neq 0$

2. Pero $\mu(x+h) = f(x+h) + g(x+h) \Rightarrow \mu'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[f(x+h)-f(x)]+[g(x+h)-g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= \quad f'(x) \quad + \quad g'(x)$$

EJEMPLOS:

FUNCIÓN	SU DERIVADA
1) $\mu(x) = 2x^4 + 3x^2 - 5x + 2$	$\mu'(x) = 2(4x^3) + 3(2x) - 5(1) + 0$ $= 8x^3 + 6x - 5$
2) $y = \frac{X^3}{9} - \frac{X^2}{4} + x - 5$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{9}(3x^2) - \frac{1}{4}(2x) + 1 - 0$ $= \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$
3) $S = 5\sqrt[3]{t^2} - \frac{2}{t^3} + 5t - 8$ $= 5t^{2/3} - 2t^{-3} + 5t - 8$	$\frac{ds}{dt} = 5\left(\frac{2}{3}t^{-1/3}\right) - 2(-3t^{-4}) + 5(1) - 0$ $= \frac{10}{3\sqrt[3]{t}} + \frac{6}{t^4} + 5$
4) $c = \frac{2}{Q} + 3Q$ $= 2Q^{-1} + 3Q$	$\frac{dc}{dQ} = 2(-Q^{-2}) + 3$ $= -\frac{2}{Q^2} + 3$

Teorema 7 (DERIVADAS DEL SENO Y COSENO)

a) Si $f(x)=\operatorname{sen}x$, entonces $f'(x)=\cos x$

b) Si $g(x)=\cos x$, entonces $g'(x)=-\operatorname{sen}x$

Prueba.

a) 1. La derivada de f en x, es: $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, $h\neq 0$

2. Como $f(x)=\operatorname{sen}x \Rightarrow f(x+h)=\operatorname{sen}(x+h)$

3. Sustituir 2 en 1. $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x}{h}$

4. Pero: $\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x=2\cos\frac{x+h+x}{2}\operatorname{sen}\frac{x+h-x}{2}$

$$=2\cos\frac{2x+h}{2}\operatorname{sen}\frac{h}{2}$$

5. Sustituir en 3. $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\frac{2x+h}{2}\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\frac{2x+h}{2}\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{2\left(\frac{h}{2}\right)}\longrightarrow 1$$

$$=\cos x$$

b) 1. La derivada de g en x, es $g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$, $h\neq 0$

2. Pero $g(x+h)=\cos(x+h)$, entonces $g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$

3. $\cos(h+h)-\cos x=-2\operatorname{sen}\frac{x+h+x}{2}\operatorname{sen}\frac{x+h-x}{2}$

$$=-2\operatorname{sen}\frac{2x+h}{2}\operatorname{sen}\frac{h}{2}$$

4. Sustituir en 2: $g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{-2\operatorname{sen}\frac{2x+h}{2}\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{2\left(\frac{h}{2}\right)}\longrightarrow 1$

$$=-\operatorname{sen}x$$

EJEMPLOS:

FUNCIÓN	SU DERIVADA
1) $y = 2x + \operatorname{sen} x + 2\cos x$	$y' = 2 + \cos x + 2(-\operatorname{sen} x)$ $= 2 + \cos x - 2\operatorname{sen} x$
2) $y = 3\operatorname{sen} t + 5\cos t$	$\frac{dy}{dt} = 3\cos t - 5\operatorname{sen} t$

Teorema 8 (REGLA DEL PRODUCTO)

Si $\mu(x) = f(x)\, g(x)$, entonces $\mu'(x) = f(x)\, g'(x) + f'(x)\, g(x)$.

Prueba.

1. La derivada de μ en x, es $\mu'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\mu(x+h) - \mu(x)}{h}$, $h \neq 0$

2. Pero $\mu(x+h) = f(x+h)\, g(x+h)$, entonces $\mu'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)\, g(x)}{h}$

3. Restar y sumar $f(x+h)\, g(x)$:

$$\begin{aligned}
\mu'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\big[\, g(x+h) - g(x)\,\big] + \big[\, f(x+h) - f(x)\,\big] g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{f(x+h)\big[\, g(x+h) - g(x)\,\big]}{h} + \frac{\big[\, f(x+h) - f(x)\,\big] g(x)}{h} \right\} \\
&= \qquad f(x)\cdot g'(x) \quad + \quad f'(x)\cdot g(x)
\end{aligned}$$

EJEMPLOS:

FUNCIÓN	SU DERIVADA
1) $f(x) = x^2 \cdot \cos x$	$f'(x) = x^2[\cos x]' + (\cos x)\,(x^2)'$ $= x^2[-\operatorname{sen} x] + (\cos x)\,(2x)$ $= -x^2 \operatorname{sen} x + 2x\cos x$
2) $y = (1 - x^3)\operatorname{sen} x$	$\frac{dy}{dx} = (1-x^3)[\operatorname{sen} x]' + \operatorname{sen} x[1-x^3]'$ $= (1-x^3)[\cos x] + \operatorname{sen} x[0 - 3x^2]$ $= (1-x^3)\cos x - 3x^2 \operatorname{sen} x$

3) $y = 2\cos x + 3x\operatorname{sen} x$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 2(\cos x)' + 3\left[\,(x)'\operatorname{sen} x + x(\operatorname{sen} x)'\,\right] \\ &= 2(-\operatorname{sen} x) + 3[1\cdot \operatorname{sen} x + x\cos x] \\ &= -2\operatorname{sen} x + 3\operatorname{sen} x + 3\,x\cos x \\ &= \operatorname{sen} x + 3x\cos x\end{aligned}$$

Teorema 9 (REGLA DEL COCIENTE)

La derivada del cociente de dos funciones derivables $f(x)$ y $g(x)$ está dada por:

Si: $\mu(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ entonces $\mu'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)\,g'(x)}{[g(x)]^2}$, $g(x) \neq 0$

Prueba:

1. La derivada de μ en x es: $\mu'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\mu(x+h) - \mu(x)}{h}$, $h \neq 0$

2. Como $\mu(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ entonces $\mu(x+h) = \frac{f(x+h)}{g(x+h)}$

3. Sustituir en 1 $\mu'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\;g(x) - f(x)\,g(x+h)}{h\,g(x+h)\;g(x)}$$

4. Restar y sumar el término $f(x)\,g(x)$ en el numerador:

$$\begin{aligned}\mu'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,g(h) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h\,g(x+h)\,g(x)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\left[f(x+h) - f(x)\right]g(x) - f(x)\;[g(x+h) - g(x)]}{h\,g(x+h)\,g(x)} \\ &= \lim_{h\to 0} \left\{ \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] \frac{g(x)}{g(x+h)\,g(x)} - \frac{f(x)}{g(x+h)g(x)} \left[\frac{g(x+h-g(x)}{h} \right] \right\} \\ &= \quad f'(x)\;\; \frac{g(x)}{[g(x)]^2} \;\; - \;\; \frac{f(x)}{[g(x)]^2}\cdot g'(x) \\ &= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}\,.\end{aligned}$$

EJEMPLOS:

FUNCIÓN

1) $y = \frac{x}{1-\cos x}$

SU DERIVADA

$$y' = \frac{(1-\cos x)(x)' - x(1-\cos x)'}{(1-\cos x)^2}$$

$$= \frac{1-\cos x - x(0+\operatorname{sen} x)}{(1-\cos x)^2}$$

$$= \frac{1-\cos x - x\operatorname{sen} x}{(1-\cos x)^2}$$

2) $y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1-x^2)(1+x^2)' - (1+x^2)(1-x^2)'}{(1-x^2)^2}$$

$$= \frac{(1-x^2)(2x) - (1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2}$$

$$= \frac{4x}{(1-x^2)^2}$$

3. VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

Supongamos que un objeto (una pelota, una partícula o cualquier otro móvil) se mueve por acción de una fuerza. Por ejemplo, si usted. deja caer un objeto de un edificio, dicho objeto cae por acción de la gravedad. Si se lanza una pelota desde un punto A, según la fuerza que le aplicamos, va recorrer cierta trayectoria en forma de parábola, hasta caer al suelo.

En ambos casos, al moverse el objeto o la pelota, por acción de una fuerza, describe una trayectoria rectilínea o parabólica, respectivamente. Cada punto P de la trayectoria pertenece a una función $S(t)$ que da la posición (respecto del origen) del móvil como función del tiempo t, llamado función de posición.

El conjunto $\{(t,s)/s = S(t), t \in [a,b]\}$ es la gráfica de la función $S(t)$ y cada pareja (t,s) es la posición de un punto P del móvil.

Los conceptos de **VELOCIDAD** y **ACELERACIÓN** de un objeto cuya función de posición de un punto P está dado por el conjunto de puntos $\{(t,s)/s = S(t), t \in [0,b]\}$, son simples derivada de la función $S(t)$ respecto al tiempo t.

Supongamos que la posición de un punto P esta dado por el conjunto de puntos $\{(t,s)/s = S(t), t \in [0,b]\}$ donde t es el tiempo y $s = S(t)$ es la trayectoria que recorre el punto P. Si el tiempo varía de t_0 a t se tiene que:

a) $\boxed{\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}}$ es la velocidad media de P durante el lapso de tiempo $[t_0,t]$.

Donde $\begin{cases} S(t)-S(t_0) = \Delta S & \text{ES LA VARIACIÓN DE LA TRAYECTORIA} \\ t-t_0 = \Delta t & \text{ES LA VARIACIÓN DEL TIEMPO} \end{cases}$

$\frac{\Delta S}{\Delta t}$ = Expresa la variación de la trayectoria respecto al tiempo (o velocidad del ⇩ móvil durante el lapso de tiempo $[t_0,t]$, $t = t_0 + \Delta t$.

cuando $\Delta t \to 0$ se convierte en

⇩

$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} =$ ..... expresa la variación instantánea del recorrido respecto al tiempo y es la velocidad del objeto P en el tiempo t_0.

$= S'(t_0)$

↑ derivada de S respecto a t en t_0.

b) $S'(t)$ = es la velocidad instantánea del móvil P en el tiempo t_0.

En general $S'(t) = V(t)$ es la función velocidad instantánea en cualquier $t \in [0,b]$

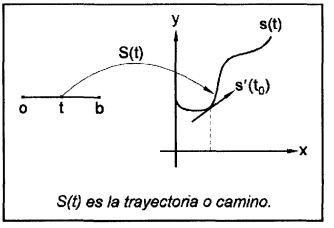
Si derivamos la función VELOCIDAD obtenemos la aceleración del móvil.

Así:

$$a(t_0) = V'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{V(t) - V(t_0)}{t - t_0} \quad , \quad t - t_0 = h = \Delta t$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{V(t_0 + h) - V(t_0)}{h}$$

es la aceleración del móvil en el tiempo t_0.



S(t) es la trayectoria o camino.

Donde: $\frac{V(t_0 + h) - V(t_0)}{h}$ es la aceleración media del móvil P en el lapso de tiempo $[t_0, t_0 + h]$.

En Consecuencia: $a(t_0) = V'(t_0) = S''(t_0)$

La aceleración del móvil P en el tiempo t_0 es la segunda derivada de la función $S(t)$ en el tiempo t_0.

Hagamos dos ejemplos aclaratorios:

Ejemplo 1.

Supongamos que un objeto cae libremente de un edificio de 144 pies de altura y la función de la caída libre es:

$$S(t) = -16t^2 + 144 \ ; \ t \in [0,3]$$

Se pide:

a) Graficar $S(t)$.

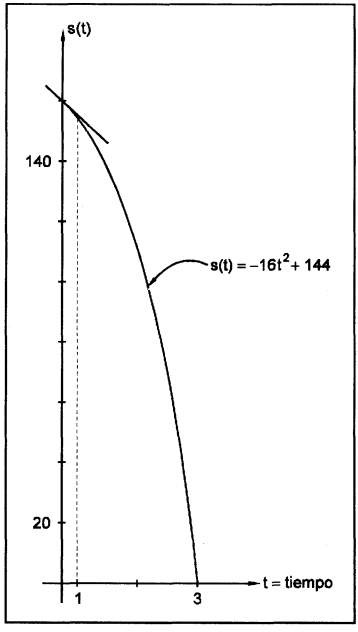
b) Hallar la función velocidad.

c) Hallar la velocidad del objeto cuando ha transcurrido el primer segundo.

d) Hallar la función aceleración.

e) ¿Qué tiempo transcurre cuando el objeto toca el suelo?

Solución:



a) El gráfico de $S(t)$ es una parábola de vértice en $(0,144)$.

Cuanto $t = 0 \Rightarrow S(0) = 144$ que expresa la altura del edificio (altura inicial del objeto).

b) La función velocidad es:

$S'(t) = -32t$

c) La velocidad del objeto en el primer segundo transcurrido es:

$S'(1) = -32$ pies/seg

EL SIGNO NEGATIVO INDICA QUE EL OBJETO ESTÁ BAJANDO.

d) La aceleración es la segunda derivada de la función $S(t)$:

$A(t) = S''(t) = -32$ pies/seg^2

Es la aceleración de la gravedad. Nos indica que en la caída libre de los objetos la aceleración es constante. Experimentalmente la aceleración de la gravedad es $g = -32{,}174$ pies/seg^2.

e) Si el objeto toca suelo, entonces $S(t) = 0$, es decir: $-16t^2 + 144 = 0$
En 3 segundos toca suelo dicho objeto. $t^2 = 9 \Rightarrow t = 3$

NOTA: En general, la posición de un objeto en caída libre está dada por la función $S(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0$.

donde: v_0 = es la velocidad inicial con que se suelta el objeto.

s_0 = altura inicial del objeto

$g = -32{,}174$ pies/seg^2 es la aceleración debida a la gravedad.

Ejemplo 2.

Si se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad de 128 m/seg , su distancia "s" sobre el punto de partida después de t segundos está dada por $s \quad 128t - 4.9t^2$. Se pide:

1) Hallar el tiempo que ha tardado la pelota en tocar el suelo.

Solución:

Basta hacer $s = 0 \Rightarrow 128t - 4.9t^2 \Rightarrow t = 0$, $t = 26.2$, luego, la posición de la pelota está dada por el conjunto $\{(t,s)/s = 128t - 4.9t^2 , t \in [0,26.2]\}$.

2) Se Pide:

a) Encuentre una expresión para la velocidad media en el intervalo de tiempo $[t_1, t_1 + h]$.

b) Encuentre la velocidad media del intervalo de 2 a 2.1 seg usando el resultado de (a) del intervalo de 2 a 2.01 seg. y del 2 a 2.001 seg.

c) Halle la velocidad en el tiempo t_1.

d) Halle la velocidad para $t = 2$, usando el resultado de c).

e) Calcule a los cuántos segundos de haber sido lanzada la pelota, lleva una velocidad de 50 m/seg., de 48 m/seg.

f) ¿Cuándo su velocidad es cero? ¿a qué altura está en ese instante? ¿Es esa la máxima altura que alcanza la pelota?

g) Calcule la aceleración en el tiempo t_1.

h) Halle la función velocidad y la función aceleración.

i) Grafique la función $s(t)$.

Solución:

a)

$$Vm = \frac{s(t_1 + h) - s(t_1)}{h}$$

$$= \frac{128(t_1 + h) - 4.9(t_1 + h)^2 - [128 t_1 - 4.9 t_1^2]}{h}$$

$$= \frac{128 t_1 + 128 h - 4.9 t_1^2 - 9.8 t_1 h - 4.9 h^2 - 128 t_1 + 4.9 t_1^2}{h}$$

$$= \frac{128 h - 9.8 t_1 h - 4.9 h^2}{h} = \frac{h(128 - 9.8 t_1 - 4.9h)}{h} = 128 - 9.8 t_1 - 4.9 h$$

Si $t_1 = 2$, $t_1 + h = 2.1 \Rightarrow h = 0.1$. Luego: $Vm = 128 - 9.8(2) - 4.9(0.1) = 107.91$

$$V(t_1) = \lim_{h \to 0} (128 - 9.8 t_1 - 4.9 h) = 128 - 9.8 t_1$$

d) $V(2) = 128 - 9.8(2) = 108.4$

e) Si $V = 50\ m/seg$ $\Rightarrow$ $50 = 128 - 9.8t$

$\Rightarrow$ $t = \frac{128-50}{9.8} = \frac{78}{9.8} = \frac{780}{98} = 7.9 \approx 8\ seg.$

Si $V = 48\ m/seg$ $\Rightarrow$ $48 = 128 - 9.8t$

$\Rightarrow$ $t = \frac{128-48}{9.8} = 8.16\ seg.$

f) Tenemos $V(t) = s'(t) = 128 - 9.8t$

Entonces $V(t) = 0$ si $128 - 9.8t = 0$ $\Rightarrow$ $t = \frac{128}{9.8} = 13.06\ seg.$

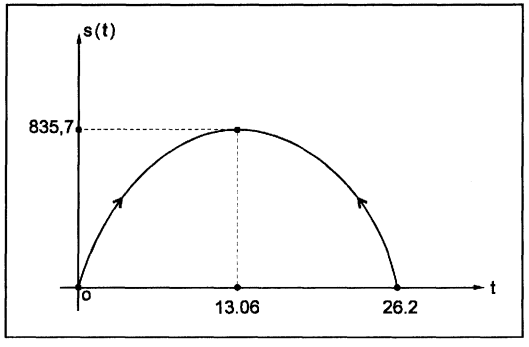
En el instante $t = \frac{128}{9.8}$, La altura será $s\left(\frac{128}{9.8}\right) = 128\left(\frac{128}{9.8}\right) - 4.9\left(\frac{128}{9.8}\right)^2$

$= 835.7$ es la máxima altura

g) La aceleración es $V'(t) = s''(t) = -9.8$, para todo $t \in \langle 0, 26.2\rangle$.

h) $V = \{(t,v)/v = 128 - 9.8t,\ t \in \langle 0, 26.2\rangle\}$; $A = \{(t,\alpha)/\alpha = -9.8,\ t \in [0, 26.2]\}$

i)



PROBLEMAS.

1. La altura S en el tiempo t de una naranja que se deja caer desde una altura de 1350 pies de altura viene dado por $S(t) = -16t^2 + 1350$, con S medida en pies y t en segundos.

a) Hallar la velocidad media en el intervalo $[1,2]$.

b) Hallar la velocidad instantánea para $t = 0.5$ y $t = 1.5$.

c) ¿Qué tiempo demora en llegar al suelo?

d) Hallar la velocidad de la naranja al tocar el suelo.

2. La velocidad de un camión que parte del reposo esta dada por la función $v = \frac{100t}{2t+5}$ con v medida en metros por segundo. Hallar la aceleración después de:

a) 3 segundos b) 5 segundos c) 20 segundos.

En los Ejercicios del 3 al 5 aplicar la función de posición $S(t) = -16t^2 + v_0 t + S_0$

3. Se lanza un cohete hacia arriba desde una base terrestre con velocidad inicial de 384 pies/seg. Hallar su velocidad después de 5 y 10 segundos.

4. Se deja caer una moneda desde 600 pies de altura. ¿Cuál es su velocidad al llegar al suelo?

5. Para estimar las alturas de un edificio se deja caer desde lo alto una piedra. Hallar la altura del edificio si golpea al suelo 6,8 segundos después de soltarla.

6. Un auto viaja a 66 pies/seg. en el momento en que el conductor pisa el freno. Su función de posición es $S(t) = -8,25t^2 + 66t$ con S medido en pies y t en segundos. Hallar su posición, su velocidad y aceleración para $t = 0,1,2,3,4$.

4. RAZÓN DE CAMBIO Y ANÁLISIS MARGINAL

(APLICACIONES A LA ECONOMÍA)

Definiciones.

4.1. COSTE MARGINAL

Supongamos que la función $C(q)$ exprese el costo total en dólares de fabricar q unidades, entonces:

$\frac{dC}{dq} = c'(q)$ es el ***COSTE*** Marginal por unidad, y expresa la razón de cambio instantánea de cambio del coste total con respecto a la producción.

Además: $C'(q_0) = \lim_{q \to q_0} \frac{C(q) - C(q_0)}{q - q_0}$ es el coste marginal cuando se han producido q_0.

4.1.1. Coste Real.

El coste de producir la q–ésima unidad, es: $C(q) - C(q-1) = \frac{C(q) - C(q-1)}{q - (q-1)} = \frac{cambio\ en\ C}{cambio\ en\ q}$

4.1.2. Coste Medio.

$\boxed{\frac{C'(q)}{q}}$ ⟵ es el coste medio

El coste medio por unidad, es el costo total dividido por el número de unidades producidas.

4.2. RAZÓN PORCENTUAL DE CAMBIO

Si y es función de x $(y = f(x))$, la **RAZÓN PORCENTUAL DE CAMBIO DE y CON RESPECTO A x** está dada por la fórmula:

$$\text{Razón Porcentual de Cambio} = 100\left(\frac{y'}{y}\right)$$

donde: $Y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$.

Problema 1 Suponga que el coste total en dólares de la fabricación de q unidades es $c(q) = 3q^2 + q + 500$.

a) Use el análisis marginal para estimar el coste de fabricación de la 41 unidad.

b) Calcule el coste real de fabricación de la 41 unidad.

Solución:

a) Se pide hallar $C'(41)$.

En primer lugar, hallar $C'(q)$: $C'(q) = 6q + 1$

En segundo lugar, hallar $C'(41)$: $C'(41) = 6(4) + 1 = 247$

b) El coste real de la 41 unidades:

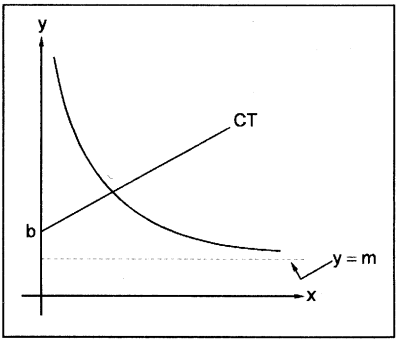
$$C(42) - C(41) = [3(42)^2 + 42 + 500] - [3(41)^2 + 41 + 500] = 250$$

Problema 2 Sea $C(x) = mx + b$, $m > 0$, $b > 0$ la función lineal de costo total:

a) Graficar $C(x)$ y diga qué representa la constante b.
b) Hallar la función del costo promedio.
c) Halle la función de costo marginal promedio.
d) Grafique la función de costo promedio en el mismo plano.

Solución:

a) $C(x) = mx + b$ es una línea recta de pendiente $m > 0$, lo cual nos indica que el ángulo de inclinación de la recta es agudo y la función es creciente. Como $b > 0$ y "x" es el número de unidades producidas debe ser $x \geq 0$, entonces la recta se ubica en el primer cuadrante en forma creciente.



La constante $b = c(0)$ es el ***COSTO FIJO***.

b) La función de costo promedio es: $\frac{mx+b}{x} = m + \frac{b}{x}$

que la llamaremos $\boxed{Q(x) = m + \frac{b}{x}}$ ⟵ es un hipérbola.

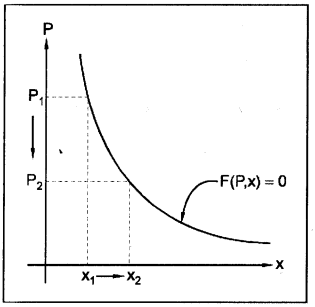
cuando $x \to +\infty$ entonces $Q(x) \to m$

o sea m es asíntota horizontal.

c) El costo marginal promedio es: $Q'(x) = -\frac{b}{x^2}$

4.3. ECUACIÓN DE LA DEMANDA, FUNCIÓN INGRESO TOTAL, FUNCIÓN INGRESO MARGINAL, FUNCIÓN DE GANANCIA (O LUCRO).

Consideremos dos variables: "P" el precio y "x" la cantidad de mercancía que se demanda (que se solicita) la relación entre "p" y "x" expresada por la ecuación $F(p,x) = 0$ es la ***ECUACIÓN DE LA DEMANDA***. Cuando el precio "P" de un bien baja entonces la cantidad demandada "x" crece y al revés si el precio sube la cantidad demandada baja, este comportamiento de demanda nos indica que la relación $F(p,x) = 0$ es ***DECRECIENTE***.



En el gráfico:

Si p_1 baja a p_2, entonces x_1 sube a x_2.

Si de la relación $F(p,x)=0$ despejamos "P" en términos de "x" obtendremos la función $\boxed{P=P(x)}$ que la llamaremos "la función del precio".

En la ecuación: $\boxed{p=P(x)}$ se tiene: $\begin{cases} \text{"}x\text{" es la cantidad que se solicita.} \\ P(x) \text{ es el precio que se paga por la cantidad "}x\text{".} \end{cases}$

4.4. LA FUNCIÓN INGRESO TOTAL

Definición 1

$$\underbrace{\text{El ingreso total}}_{R(x)} = \underbrace{\text{(cantidad demandada)}}_{x}\ \underbrace{\text{(precio de cada unidad)}}_{P(x)}$$

$$IT = \boxed{R(x)=xP(x)}\ ,\ x\geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$P(x)=\frac{R(x)}{x}$$

se llama ingreso promedio

Esta igualdad nos indica que "el ingreso promedio y el precio por unidad son iguales".

Definición 2 Si $R(x)$ es el **INGRESO TOTAL**. (en unidades monetarias) obtenido cuando se demandan "x" unidades de mercancía, entonces definimos la función Ingreso Marginal como la derivada de $R(x)$ con respecto a x.

Es decir: $\boxed{\underbrace{\text{Función Ingreso Marginal}}_{\text{IM}} = R'(x)}$

De modo que, el ingreso marginal para $x=x_1$ está definido por $R'(x_1)$, siempre que exista $R'(x_1)$ y expresa la razón de cambio del ingreso total por cambio unitario en la demanda cuando x_1 unidades son demandadas.

Puede ser: $R'(x_1)>0$, $R'(x_1)=0$ o $R'(x_1)<0$.

Problema 3 Supongamos que la ecuación de la demanda de cierta mercancía es $p^2 + x - 16 = 0$. Hallar las funciones del precio, del ingreso total y del ingreso marginal. Trazar las curvas de la demanda, del ingreso total y del ingreso marginal en el mismo sistema de coordenadas.

Solución:

a) La función del precio se halla despejando "P" de la ecuación de la demanda: $p^2 + x - 16 = 0$.

$$\Rightarrow \quad p^2 = 16 - x$$

$$\Rightarrow \quad p = \pm\sqrt{16 - x} \quad ; \quad p = P(x)$$

se elige el signo positivo porque el precio es positivo, entonces

$$\boxed{\begin{array}{c} p = \sqrt{16 - x} \\ \text{con } 16 - x \geq 0 \iff 0 \leq x \leq 16 \end{array}}$$

es la función del precio.

b) El ingreso total (IT), es: $R(x) = x \cdot P(x)$

$$\boxed{\begin{array}{c} R(x) = x\sqrt{16 - x} \\ \text{con } 0 \leq x \leq 16 \end{array}}$$

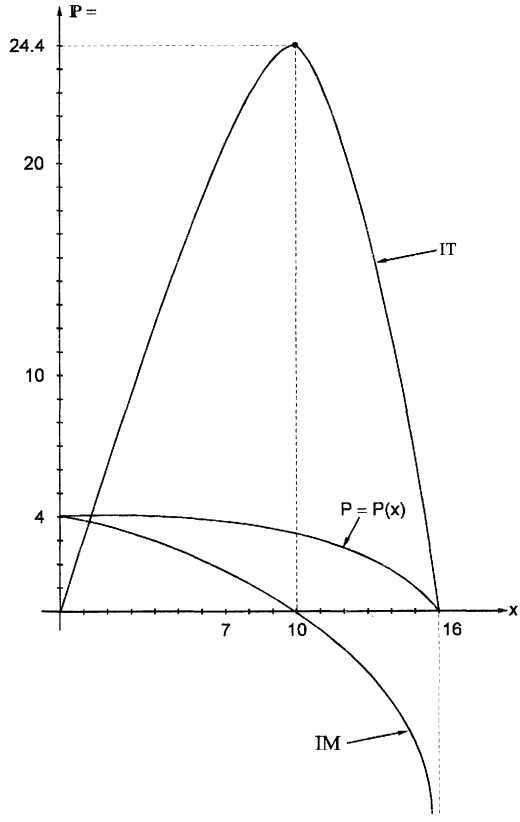
c) El ingreso marginal (IM), es:

$$R'(x) = (x)'\sqrt{16 - x} \quad + \quad x(\sqrt{16 - x})'$$

$$= \sqrt{16 - x} \quad + \quad x\left(\frac{-1}{2\sqrt{16 - x}}\right)$$

IM : $\boxed{R'(x) = \dfrac{32 - 3x}{2\sqrt{16 - x}} \ , \ 0 \leq x \leq 16}$

d) El gráfico es:



4.5. LA FUNCIÓN GANANCIA

Definición 3 La ganancia que obtiene un comerciante es la diferencia entre el ingreso total y el costo total.

Si denotamos por $S(x)$ la función ganancia, se tiene:

$$S(x) = R(x) - C(x) \quad \text{(1)}$$

Como: $R(x) = xP(x) \Rightarrow$ $S(x) = xP(x) - C(x)$

Si en (1) hallamos la primera y segunda derivada obtenemos:

$S'(x) = R'(x) - C'(x)$ ..... (2)

$S''(x) = R''(x) - C''(x)$ ..... (3)

Analicemos la ecuación (2):

a) $S'(x) > 0 \iff R'(x) - C'(x) > 0$

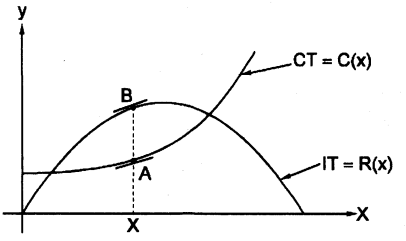
$\iff R'(x) > C'(x)$

Por lo tanto, la ganancia es creciente si y sólo si el ingreso marginal es mayor que el costo marginal.

b) ¿Para qué valor de "x" (llamado nivel de producción), la utilidad es máxima?
$S(x)$ tiene máximo relativo en un número "x" si $S'(x) = 0$ y $S''(x) < 0$.

De (2), si $S'(x) = 0 \Rightarrow R'(x) - C'(x) = 0 \Rightarrow R'(x) = C'(x)$

De (3), si $S''(x) < 0 \Rightarrow R''(x) - C''(x) < 0 \Rightarrow R''(x) < C''(x)$



En la figura, observamos:

1. $|AB| = R(x) - C(x) = S(x)$
2. El máximo absoluto de $S(x)$ ocurre cuando la longitud del segmento AB es la mayor de todas las otras verticales. Esto ocurre cuando existe un punto x donde las rectas tangentes en A y B son paralelas y esto se cumple cuando $C'(x) = R'(x)$.

Problema 4 Supongamos que la ecuación de la demanda de cierta mercancía es $P = 6 - 0.0003x$, donde x es el número de unidades producidas mensualmente y P dólares es el precio de cada unidad. El número de dólares del costo total de la producción de x unidades es $800 + 3x$. Si la utilidad mensual es máxima, encontrar:

a) El número de unidades que se producirán cada mes
b) El precio unitario.
c) La ganancia mensual.

Solución:

$$\textbf{DATOS:} \begin{cases} P = 6 - 0.0003x \\ C(x) = 800 + 3x \end{cases} \qquad x \in [0\,,\,20{,}000]$$

Se pide hallar el valor de "x" y "p" tal que maximice la ganancia. Según la teoría, la función ganancia se maximiza en un valor de x tal que: $R'(x) = C'(x)$ y $R''(x) < C''(x)$.

Veamos:

1. La función $R(x)$ es: $R(x) = xp$

$$= x(6 - 0.0003x)$$

$$R(x) = 6x - 0.0003x^2 \;;\; x \in [0,20,000]$$

Al derivar $\boxed{R'(x) = 6 - 0.0006x}$

Derivar otra vez $R''(x) = -0.0006$

2. La función costo total es: $C(x) = 800 + 3x$

Derivar $\boxed{C'(x) = 3}$

Derivar otra vez $C''(x) = 0$

3. La función ganancia es: $S(x) = R(x) - C(x) = 6x - 0.0003x^2 - 800 - 3x$

$$\boxed{S(x) = 3x - 0.0003x^2 - 800 \;\Big|\; x \in [0,20000]}$$

4. Igualar $R'(x)$ con $C'(x)$: $6 - 0.0006x = 3$

$$x = 5,000$$

Como: $-0.0006 < 0$, entonces la función $S(x)$ tiene

máximo en $x = 5,000$ y $P = 6 - 0.0003\,(5,000) = 4,5$

5. Luego, la ganancia máxima es: $S(5,000) = 3(5,000) - 0.0003(5,000)^2 - 800$

$$= 15,000 - 7,500 - 800$$

$$= 6,700$$

Conclusión: Para tener mayor utilidad mensual se deberán producir 5000 unidades mensuales para venderlas a 4,5 dólares cada una para obtener una ganancia de 6,700 dólares.

Problema 5 Si en el problema 4, el gobierno le aplica 30 centavos de impuesto al monopolista, por cada unidad producida.

Solución:

1. Cuando se exige un impuesto de 30 centavos por unidad, entonces el costo aumentará en $0,30x$, así tendremos que el nuevo costo será:

$$C(x) = (800 + 3x) + 0.30x = 800 + 3.30x$$

2. Para maximizar $S(x)$, hacer $C'(x) = R'(x)$

$$3.30 = 6 - 0.0006x$$
$$0.0006x = 2.7$$
$$x = 4,500$$

3. Como se tiene: $P(x) = 6 - 0.0003x$

$$S(x) = R(x) - C(x)$$
$$= 6x - 0.000x^2 - 3.30x - 800$$
$$= 2.7x - 0.0003x^2 - 800$$

se obtienen: $p(4,500) = 6 - 0.0003(4,500) = 4,65$

y $S(4,500) = 2.7(4,500) - 0.0003(4,500)^2 - 800$
$= 5,272$

5. DIFERENCIABILIDAD DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Definición 1 Sea la función $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en el intervalo abierto I. Supongamos que f es continua en I.

Definimos:

1. El incremento de x es: $h = \Delta x = x - x_0$
donde: $x = x_0 + h$

2. El incremento de la función f es $\Delta f(x) = f(x_0 + h) - f(x_0)$

3. La razón de cambio de f respecto a x es: $\frac{\Delta f}{\Delta x}$

4. Si existe $f'(x_0)$, entonces una buena aproximación de la función f en el punto $x = x_0 + h \in I$, es: $f(x_0) + hf'(x_0)$; esto es: $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0)$

Definición 2 Con la hipótesis de la definición 1, definimos:

f es diferenciable en x_0, si existe $f'(x_0)$ y además

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - hf'(x_0)}{h} = 0$$

Ejemplo Aclaratorio:

Sea la función $f: \langle 0,2\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(x)=2x^2$. ¿Es f diferenciable en $x=1$?

Solución:

1. Hallar $f'(1)$:

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(1+h)^2-2(1)^2}{h}=4$$

2. Hallar el límite: $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)-hf'(1)}{h}=$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2(1+2h+h^2)-f(1)-h(4)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h^2}{h}=\lim_{h\to 0}2h=0$$

3. Probar que $\lim_{h\to 0}2h=0$:

Dado $\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$ tal que $|2h-0|<\varepsilon$ siempre que $|h|<\delta \ \wedge\ h\in\mathbb{R}$.

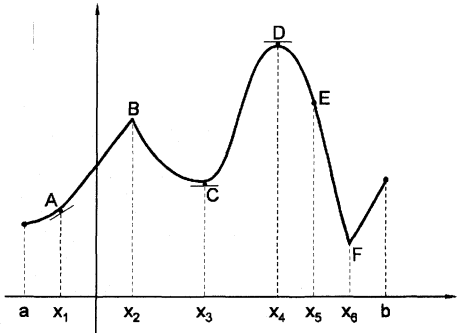
Busquemos δ en términos de ε:

Empezar en: $|2h| = 2|h|$

Como $|h|<\delta$ entonces $2|h|<2\delta$.

Hacer $2\delta=\varepsilon \ \Rightarrow\ \delta=\frac{1}{2}\varepsilon$

Ejemplo Gráfico: Sea la función $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ que aparece en el siguiente gráfico.



Fijémonos en los puntos A, B, C, D, E y F:

- La función es continua en todos los $x \in [a,b]$.
- En x_1, f es continua, es derivable y $f'(x_1) > 0$.
- En x_2, la función es continua pero no es derivable, es decir $\nexists\, f'(x_2)$.
- En x_3, f es continua, es derivable y $f'(x_3) = 0$
- En x_4, f es continua, es derivable y $f'(x_4) = 0$
- En x_5, f es continua, es derivable y $f'(x_5) < 0$
- En x_6, f es continua pero no es derivable, es decir $\nexists\, f'(x_6)$.

NOTA: En las "puntas aguja" la función no es derivable, porque las derivadas laterales existen pero son diferentes.

5.1. EJEMPLOS

1. Sea la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$.

¿Es f derivable en $x = 2$?

Solución:

Por definición de derivada de f en 2, es:

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{2/3}} = +\infty$$

Este resultado nos indica que ***NO EXISTE*** la $f'(2)$.

Por lo tanto, afirmamos que f no es derivable en $x = 2$.

2. Una función está definida del modo siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \le c \\ ax + b & \text{si} \quad x > c \end{cases}$$

(a, b, c constantes) hallar los valores de a y b (en función de c) tales que $f'(c)$ existe.

Solución:

MÉTODO I

i) Si $f(x)$ es derivable en $x = c$, es decir, si existe $f'(c)$, entonces:

$$\overbrace{\lim_{x\to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}}^{f'_+(c)} = \overbrace{\lim_{x\to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}}^{f'_-(c)}$$

$$(1) \ldots \lim_{x\to c^+} \frac{(ax+b)-(ac-b)}{x-c} = \lim_{x\to c^-} \frac{x^2-c^2}{x-c}$$

ii) Si existe $f'(c) \Rightarrow f$ es continua en $x = c$.

Luego: $\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x)$

$$ac + b = c^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

De (2) obtenemos:

$$\lim_{x\to c^+} \frac{ax+b-(ac+b)}{x-c} = \lim_{x\to c^-} \frac{x^2-c^2}{x-c}$$

$$\lim_{x\to c} \frac{a(x-c)}{(x-c)} = \lim_{x\to c} \frac{(x-c)(x+c)}{x-c}$$

$$\lim_{x\to c} (a) = \lim_{x\to c} (x+c)$$

$$a = c + c$$

$$\boxed{a = 2c} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Sustituir (3) en (2): $(2c)c + b = c^2$

$$\boxed{b = c^2}$$

MÉTODO II

i) Si $f'(c)$ existe $\longrightarrow$ $\underbrace{f'_+(c)}_{a} = \underbrace{f'_-(c)}_{2c}$

Donde:

$$\begin{cases} f'_+(c) = f'(x)\,\big]_{x>c} = a\,\big]_{x=c} = a \\ f'_-(c) = f'(x)\,\big]_{x<c} = 2x\,\big]_{x=c} = 2c \end{cases}$$

ii) Como f es derivable en $x = c$, entonces $f(x)$ es continua en $x = c$ luego:

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x)$$

$$ac + b = c^2$$

$$b = c^2 - ac$$

$$b = c^2 - (2c)c$$

$$\boxed{b = -c^2}$$

3. Una función f está definida del modo siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|}, \text{ si } |x| > c \leftrightarrow x > c \ \vee\ x < -c \\ a + bx^2, \text{ si } |x| \leq c \leftrightarrow -c \leq x \leq c \end{cases}$$

Hallar los valores de a y b (en función de c), tales que existe $f'(c)$.

Solución:

i) Si $f'(c)$ existe $\Rightarrow$ $\underbrace{f'_+(c)}_{} = \underbrace{f'_-(c)}_{}$

$$-\frac{1}{c^2} = 2bc$$

$$-\frac{1}{2c^3} = b$$

Donde: Si $0 < c$

$$f'_+(c) = f'(x)\,\big]_{x>c} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)\Big]_{x=c}$$

$$= -\frac{1}{x^2}\,\Big]_{x=c} = -\frac{1}{c^2}$$

$$f'_-(c) = f'(x)\,\big]_{x<c} = \frac{d}{dx}(a+bx^2)\,\Big]_{x=c}$$

$$= 2bx\,\big]_{x=c} = 2bc$$

ii) Como $f(x)$ es derivable en $x = c$, entonces $f(x)$ es continua en $x = c$ luego:

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x)$$

$$\frac{1}{c} = a + bc^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\alpha)$$

$$\frac{1}{c} = a + \left(-\frac{1}{2c^3}\right)c^2$$

$$\frac{1}{c} = a - \frac{1}{2c}$$

$$2 = 2ac - 1 \ \leftrightarrow\ 3 = 2ac$$

$$\boxed{\frac{3}{2c} = a}$$

4. Existe un polinomio,

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tal que

$P(0) = P(1) = -2$, $P'(0) = -1$ y

$P''(0) = 10$. Calcular a, b, c y d.

Solución:

i) Como $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$\Rightarrow P(0) = 0 + 0 + 0 + d$

$P(0) = -2 \Rightarrow d = -2$

ii) Además, si

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$\Rightarrow \underbrace{P(1)} = a + b + c + \underbrace{d}$

$-2 = a + b + c - 2$

$0 = a + b + c$ ..... (1)

iii) Como $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$\Rightarrow P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$\underbrace{P'(0)} = 0 + 0 + c$

$-1 = c$ ..... (2)

iv) Como $P'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$\Rightarrow \underbrace{P''(x)} = 6ax + 2b$

$10 = 2b$

$5 = b$ ..... (3)

v) Reemplazar (3) y (2) en (1):

$0 = a + 5 - 1$

$0 = a + 4 \iff a = -4$

5. Para cada uno de las siguientes funciones diga usted en qué puntos no son derivables. Justifique su repuesta.

a) $f(x) = |3x - 1|$

b) $g(x) = \begin{cases} 4x^2 - 1 & , \text{ si } |x| \geq 1/2 \\ 1 - 4x^2 & , \text{ si } |x| < 1/2 \end{cases}$

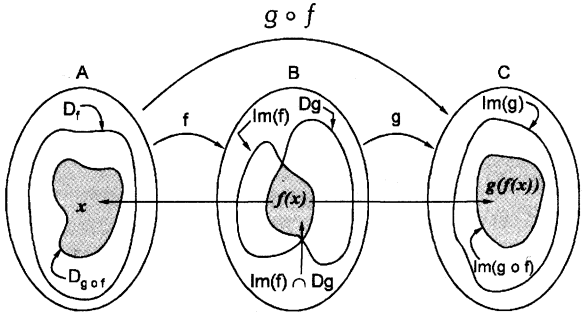
c) $h(x) = \begin{cases} 1 - 4x & , \text{ si } x < -1/4 \\ -1 + 4x & , \text{ si } x \geq -1/4 \end{cases}$

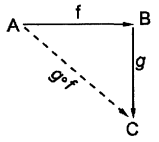
6. Demuéstrese que la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & , \text{ para } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ para } x = 0 \end{cases}$$

es diferenciable para todo $x \in \mathbb{R}$, pero $f'(x)$ no es continua en 0 y que $f''(0)$ existe para $x \neq 0$, pero que $f''(0)$ no existe.

6. LA DERIVADA DE LA COMPOSICIÓN DE DOS FUNCIONES (REGLA DE LA CADENA)





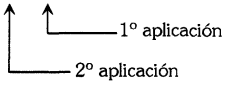
Si $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$\Rightarrow \quad (g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x))$

$= g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Aclaraciones para la Aplicación de la Regla de la Cadena:

1° La notación "$g \circ f$" se lee "f compuesta con g" o "la composición de f y g"



2° La función "$g \circ f$" existe, si $\text{Im}(f) \cap \text{Dom}(g) \neq \phi$.

3° La derivada de una composición de dos funciones, es igual al producto de la derivada de la primera aplicación por la derivada de la segunda aplicación. Ejemplos:

a) Si $(f \circ g)(x) = f(g(x)) \Rightarrow (f \circ g)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x))$

b) Si $(g \circ h \circ f)(x) = g(h(f(x))) \Rightarrow (g \circ h \circ f)'(x) = f'(x) \cdot h'(f(x)) \cdot g'(h(f(x)))$

4° **Regla práctica para derivar una composición de dos o más funciones.-** Para poder derivar con gran facilidad una composición de dos o más funciones, es mejor construir un ***DIAGRAMA DE FLECHAS*** que representen a las funciones, de modo que queden bien definidas y diferenciadas las variables independientes de las variables dependientes

Ejemplo

1. Sea la función $y = \operatorname{sen}(4-3x^2)$. Hallar $\frac{dy}{dx}$

En ésta función tenemos que $y = g(f(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dg}{df} \cdot \frac{df}{dx}$

Donde: Si $\begin{cases} g = \operatorname{sen} f \Rightarrow \frac{dg}{df} = \cos f \\ f = 4-3x^2 \Rightarrow \frac{df}{dx} = -6x \end{cases}$ $\quad g \to f \to x$

Entonces: $\frac{dy}{dx} = [\cos f][-6x] = [\cos(4-3x^2)][-6x] = -6x\cos(4-3x^2)$

Teorema 10 Si $g(x)$ es derivable en x_0 y f es derivable en $g(x_0)$, entonces $f \circ g$ es derivable en x_0 y; $(f \circ g)'(x_0) = [f'(g(x_0))][g'(x_0)]$.

Demostración:

Paso 1. Se sabe que $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, por definición de composición.

Paso 2. Por definición de **DERIVADA** de la función $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ en el punto $x = x_0$, tendremos:

$$(f \circ g)(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots *$$

En * podemos multiplicar en el numerador y el denominador el término $g(x_0+h) - g(x_0)$.

Así tendremos:

$$= \left[\lim_{h \to 0} \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h}\right]\left[\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{g(x_0+h) - g(x_0)}\right]$$

$$= \underbrace{\left[\lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{g(x_0+h) - g(x_0)}}_{\phi(h)}\right]}_{\lim_{k \to 0} \frac{f(g(x_0)+k) - f(g(x_0))}{k}} \underbrace{\left[\lim_{h \to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}\right]}_{f'(g(x_0))} \qquad g'(x_0)$$

Se supone que el término $g(x_0+h) - g(x_0)$ es diferente de cero cuando h es diferente de cero.

Paso 3. El problema fundamental radica, ahora, en demostrar que una función (que la llamaremos $\phi(h)$ adecuadamente construida y que contiene a la función $\frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{g(x_0+h)-g(x_0)}$ sea continua en $h=0$.

Para ello, definimos la función $\phi(h)$ del siguiente modo:

$$\varphi(h)=\begin{cases}\frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{g(x_0+h)-g(x_0)} & , \text{ Si } g(x_0+h)-g(x_0)\neq 0\\ f'(g(x_0)) & , \text{ Si } g(x_0+h)-g(x_0)=0\end{cases}$$

Intuitivamente tenemos:

i) Si $h=0$, entonces $g(x_0+h)-g(x_0)=0$ y en consecuencia $\phi(0)=f'(g(x_0))$

.

ii) $\lim_{h\to 0}\varphi(h)=\lim_{g(x_0+h)\to g(x_0)}\frac{f(g(x_0+h)-f(g(x_0))}{g(x_0+h)-g(x_0)}=f'(g(x_0))$

Lo cual prueba, intuitivamente, que $\phi(h)$ es continua en $h=0$.

Paso 4. Ahora, analicemos cuidadosamente, la función $\phi(h)$:

i) Por hipótesis se tiene que la función f es ***DERIVABLE EN EL PUNTO*** $g(x_0)$. Esto significa que:

$$f'(g(x_0))=\lim_{k\to 0}\frac{f(g(x_0)+k)-f(g(x_0))}{k}$$

De modo que $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\delta'>0$ tal que, para todo k,

$$\boxed{\text{Si } 0<|k|<\delta' \Rightarrow \left|\frac{f(g(x_0)+k)-f(g(x_0))}{k}-f'(g(x_0))\right|<\varepsilon} \quad (i\alpha)$$

ii) Por otro lado tenemos que g es derivable en $x=x_0$ y por lo tanto g es continua en $x=x_0$.
Como g es continua en $x=x_0$, se cumple: $\exists\,\delta>0$, tal que para todo h,

$$\boxed{\text{Si } 0<|h|<\delta \Rightarrow \underbrace{|g(x_0+h)-g(x_0)|}_{k}<\delta'} \quad (ii\alpha)$$

iii) Basado en la proposición $(ii\alpha)$ consideremos un h cualquiera con $|h|<\delta$ de modo que, si $k=g(x_0+h)-g(x_0)\neq 0$, entonces:

$$\boxed{g(x_0+h)=g(x_0)+k} \quad (iii\alpha)$$

Sustituyendo ($iii\alpha$) en la función $\phi(h)$ del paso 3, tendremos:

$$\varphi(h)=\frac{f(g(x_0+h)-f(g(x_0))}{g(x_0+h)-g(x_0)}=\frac{f(g(x_0+k)-f(g(x_0))}{k} \qquad (iii\beta)$$

iv) Volviendo a ($ii\alpha$) tendremos: $|k|<\delta'$

v) Sustituyendo ($iii\beta$) en ($i\alpha$): Si $0<|k|<\delta' \Rightarrow |\phi(h)-f'(g(x_0))|<\varepsilon$

vi) Por otra parte, según la definición de la función $\phi(h)$, visto en el paso 3, tendremos: Si $g(x_0+h)-g(x_0)=0 \Rightarrow \phi(h)=f'(g(x_0))$

vii) De éste modo, está garantizado que $|\phi(h)-f'(g(x_0))|<\varepsilon$
Lo cual indica que $\lim_{h\to 0}\varphi(h)=f'(g(x_0))$.

En consecuencia la función $\phi(h)$ es continua en $h=0$.

Conclusión.- Por el paso 4 hemos demostrado que la función $\phi(h)$ es continua en el punto $h=0$. Por el paso 2 hemos demostrado que: $(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$, lo cual garantiza la demostración de la **REGLA DE LA CADENA**.

6.1. PROBLEMAS

(1) Dada la función $h(x)=f(x-\sqrt{x-x^2})$, hallar $h'\left(\frac{1}{2}\right)$ sabiendo que $f'(0)=2$.

Solución:

$$h'(x)=\left[f'(x-\sqrt{x-x^2})\right]\left[x-\sqrt{x-x^2}\right]'$$

$$=\left[f'(x-\sqrt{x-x^2})\right]\left[1-\frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}\right]$$

$$h'\left(\tfrac{1}{2}\right)=\left[f'\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\right)\right]\left[1-\frac{1-2\left(\frac{1}{2}\right)}{2\left(\frac{1}{2}\right)}\right]$$

$$=f'(0)$$

$$=2$$

(2) Sean las funciones: $y = \mu^3 - 3\mu + 3 \quad \wedge \quad \mu = \frac{x-1}{x+1}$, hallar $\frac{dy}{dx}$.

Solución:

i) Observando las dos ecuaciones, podemos relacionar a través del siguiente diagrama:

$y \longrightarrow \mu \longrightarrow x$ se lee "y es función de μ" $\wedge$ "μ es función de x"

ii) Luego, la fórmula de la derivada de ésta función compuesta, será: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{dx}$

iii) Pero $\begin{cases} \text{si} \quad y = \mu^3 - 3\mu + 3 & \Rightarrow \quad \frac{dy}{d\mu} = 3\mu^2 - 3 \\ \text{si} \quad \mu = \frac{x-1}{x+1} & \Rightarrow \quad \frac{d\mu}{dx} = \frac{(x+1)(1)-(x-1)(1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} \end{cases}$

iv) Sustituir (*iii*) en (*ii*): $\frac{dy}{dx} = \left[3\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 - 3 \right]\left[\frac{2}{(x+1)^2} \right] = \frac{-24x}{(x+1)^2}$

(3) Hallar $\frac{dz}{dx}$, si $z = 3\mu^2 - 2\mu + 5$ donde $\mu = \sqrt{4 - y^2}$, $y = \frac{1}{x}$.

Solución:

1) De Las 3 ecuaciones, al relacionarlos, obtenemos el siguiente diagrama de flechas:

$z \longrightarrow \mu \longrightarrow y \longrightarrow x$

Se lee "z es función de μ" $\wedge$ "μ es función de y" $\wedge$ "y es función de x".

2) Por lo tanto, la regla de la cadena será: $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{d\mu}\frac{d\mu}{dy}\frac{dy}{dx}$

3) Pero: $\begin{cases} \text{Si} \quad z = 3\mu^2 - 2\mu + 5 & \Rightarrow \quad \frac{dz}{d\mu} = 6\mu - 2 \\ \text{Si} \quad \mu = \sqrt{4 - y^2} & \Rightarrow \quad \frac{d\mu}{dy} = \frac{-2y}{2\sqrt{4-y^2}} = \frac{-y}{\sqrt{4-y^2}} \\ \text{Si} \quad y = \frac{1}{x} & \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} \end{cases}$

4) Sustituir 3 en 2: $\frac{dz}{dx} = \left[6\mu - 2\right]\left[\frac{-y}{\sqrt{4-y^2}}\right]\left[-\frac{1}{x^2}\right] = 2(3\mu - 1)\frac{y}{x^2\sqrt{4-y^2}}$

(4) Si $f(x) = \cos(\text{sen}(\cos(1-x^2)))$, hallar $\frac{df}{dx}$.

Solución:

Paso 1: Antes de derivar analicemos cuantas funciones hay en la composición.

Veamos:

$$f(x) = \cos(\text{sen}(\cos(\underbrace{1-x^2}_{1})))$$

4 3 2

En $f(x)$ existen la composición de 4 funciones que al derivar se harán cuatro factores.

Paso 2: Para obtener $\frac{df}{dx}$ podemos empezar a derivar de 1 y terminar en 4 o viceversa. Si derivo partiendo de 1 para terminar en 4, será:

$$\frac{df}{dx} = [-2x][-\text{sen}(1-x^2)][\cos(\cos(1-x^2))][-\text{sen}(\text{sen}(\cos(1-x^2)))]$$

$$= -2x\,\text{sen}(1-x^2)\cos(\cos(1-x^2))\text{sen}(\text{sen}(\cos(1-x^2)))$$

(5) Si $f(x) = \text{tg}^3(\text{sen}^2(4ax+b))$. Si a y b son constantes, hallar $\frac{df}{dx}$.

Solución:

Paso 1. Analicemos cuántas funciones existen en la composición.

Veamos:

4 5 2 3

$$f(x) = \text{tg}^3(\text{sen}^2(\underbrace{4ax+b}_{1}))$$

En $f(x)$ existen la composición de cinco funciones, que al derivarse aparecerán cinco factores.

Paso 2. Al derivar partiendo de 5 para terminar en 1, obtenemos:

$$\frac{df}{dx} = [3\,tg^2(sen^2(4ax+b))][sec^2(sen^2(4ax+b))][2sen(4ax+b)][cos(4ax+b)][4a]$$

$$= 24a\cos(4ax+b)sen(4ax+b)sec^2(sen^2(4ax+b))tg^2(sen^2(4ax+b))$$

También se puede empezar a derivar por 1 y terminar en 5.

⑥ Si $g(x) = sen(x^2 + sen(x^2 + sen\,x^2))$, hallar $\frac{dg}{dx}$.

Solución:

Paso 1: Veamos cuántas funciones existen en la composición:

$$g(x) = \underset{\underset{2}{\vdots}}{sen}\underbrace{(x^2 + sen(x^2 + sen\,x^2))}_{1}$$

Paso 2: Empezaré a derivar de 1 para terminar en 2.

Veamos:

$$\frac{dg}{dx} = \left[\frac{d}{dx}(x^2 + sen(x^2 + sen\,x^2))\right][\cos(x^2 + sen(x^2 + sen\,x^2))]$$

$$= \left[2x + \frac{d}{dx}(\underset{\underset{4}{\vdots}}{sen}\underbrace{(x^2 + sen\,x^2)}_{3})\right][\cos(x^2 + sen(x^2 + sen\,x^2))]$$

empezar a derivar por 3 para terminar en 4

$$= [2x + (2x + 2x\cos x^2)\cos(x^2 + sen\,x^2)][\cos(x^2 + sen(x^2 + sen\,x^2))]$$

$$= 2[x + (x + x\cos x^2)\cos(x^2 + sen\,x^2)][\cos(x^2 + sen(x^2 + sen\,x^2))]$$

⑦ Si $f(x) = sen\left[\frac{x^3}{sen\left(\frac{x^3}{sen\,x}\right)}\right]$, hallar $\frac{df}{dx}$

Solución:

$$\frac{df}{dx}=\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{\operatorname{sen}\left(\frac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right)}\right)\right]\cos\left(\frac{x^3}{\operatorname{sen}\left(\frac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right)}\right)$$

$$=\frac{\left[\operatorname{sen}\left(\frac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right)\right]\frac{d}{dx}x^3-x^3\left[\frac{d}{dx}\operatorname{sen}\left(\frac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right)\right]}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right)}\cos\left(\frac{x^3}{\operatorname{sen}\left(\frac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right)}\right)$$

$$=\frac{\left[3x^2\operatorname{sen}\left(\frac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right)-x^3\cos\left(\frac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right)\left(\frac{3x^2\operatorname{sen} x-x^3\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\right)\right]}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right)}\cos\left(\frac{x^3}{\operatorname{sen}\left(\frac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right)}\right)$$

$$\frac{df}{dx}=x^2\frac{\left[3\operatorname{sen}\left(\frac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right)-x^3\left(\frac{3\operatorname{sen} x-x\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\right)\cos\left(\frac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right)\right]}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right)}\cos\left(\frac{x^3}{\operatorname{sen}\left(\frac{x^3}{\operatorname{sen} x}\right)}\right)$$

(8) Sea $g(x)=f\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$, si f es una función diferenciable en todo $\mathbb{R}$ con $f'(1)=2$, determinar $g'(0)$.

Solución:

1. Tenemos: $g(x)=f\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$

2. Hagamos: $\mu(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$

3. Entonces: $g(x)=f(\mu(x))$

4. Derivar: $g'(x)=f'(\mu(x))\,\mu'(x)$ donde $\begin{cases} f'(\mu(x))=\frac{df}{d\mu} \\ \mu'(x)=\frac{d\mu}{dx}=\frac{(x^2+1)(1)-(x+1)(2x)}{(x+1)^2} \\ \qquad\quad =\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2} \end{cases}$

5. Luego: $g'(x)=f'\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)\left[\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}\right]$

6. Por lo tanto: $g'(0) = f'\left(\frac{0+1}{0+1}\right)\left[\frac{0+0-1}{(0+1)^2}\right]$

$= f'(1)[-1]$, Pero $f'(1) = 2$

$= 2[-1]$

$g'(0) = -2$

9 Si $f(x) = \text{sen}((x+1)^2(x+2))$, hallar $\frac{df}{dx}$.

Solución:

$$f'(x) = ((x+1)^2(x+2))'\cos((x+1)^2(x+2))$$
$$= [(x+1)^2(x+2)' + (x+2)((x+1)^2)']\cos((x+1)^2(x+2))$$
$$= [(x+1)^2(1) + (x+2)(2(x+1))]\cos((x+1)^2(x+2))$$
$$= (x+1)(x+1+2x+4)\cos((x+1)^2(x+2))$$
$$= (x+1)(3x+5)\cos((x+1)^2(x+2))$$

10 Si $f(x) = \text{sen}(x\,\text{sen}\,x) + \text{sen}(\text{sen}\,x^2)$, hallar $f'(x) = \frac{df}{dx}$.

Solución:

$$f'(x) = (x\,\text{sen}\,x)'\cos(x\,\text{sen}\,x) + (\text{sen}\,x^2)'\text{sen}(\text{sen}\,x^2)$$
$$= (x\cos x + \text{sen}\,x)\cos(x\,\text{sen}\,x) + 2x\cos x^2\text{sen}(\text{sen}\,x^2)$$

11 Si $f(x) = (((x^2+x)^3+x)^4+x)^5$, hallar: $\frac{df}{dx} = f'(x)$.

Solución:

$$f'(x) = 5(((x^2+x)^3+x)^4+x)^4(((x^2+x)^3+x)^4+x)'$$
$$(4((x^2+x)^3+x)^3((x^2+x)^3+x)'+1)$$
$$(3(x^2+x)^2(x^2+x)'+1)+1$$
$$f'(x) = 5(((x^2+x)^3+x)^4+x)^4(4((x^2+x)^3+x)^3(3(x^2+x)^2(2x+1)+1)+1)$$

(12) Si $f(x)=\operatorname{sen}^2\left[\dfrac{x^2+3}{x+\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{x^2}{x-\operatorname{sen}^2 x}\right)}\right]$, hallar: $\dfrac{df}{dx}=f'(x)$

Solución:

Haciendo $\mu=\dfrac{x^2+3}{x+\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{x^2}{x-\operatorname{sen}^2 x}\right)}$, tendremos:

$$f'=2\operatorname{sen}\mu(\operatorname{sen}\mu)'$$
$$=2\operatorname{sen}\mu(\cos\mu)\mu'$$
$$=\mu'\operatorname{sen}2\mu \quad \ldots\ldots (1)$$

Pero: $\mu'=\dfrac{\left(x+\operatorname{sen}^2\dfrac{x^2}{x-\operatorname{sen}^2 x}\right)(2x)-(x^2+3)\left(x+\operatorname{sen}^2\dfrac{x^2}{x-\operatorname{sen}^2 x}\right)'}{\left(x+\operatorname{sen}^2\dfrac{x^2}{x-\operatorname{sen}^2 x}\right)^2}$ si $\nu=\dfrac{x^2}{x-\operatorname{sen}^2 x}$

$$\mu'=\frac{(x+\operatorname{sen}^2\nu)(2x)-(x^2+3)(1+2\operatorname{sen}\nu\cos\nu\,\nu')}{(x+\operatorname{sen}^2\nu)^2} \quad \ldots\ldots (2)$$

Además $\nu'=\dfrac{(x-\operatorname{sen}^2 x)(2x)-x^2(1-2\operatorname{sen}x\cos x)}{(x-\operatorname{sen}^2 x)^2}$

$$\nu'=\frac{2x^2-2x\operatorname{sen}^2 x-x^2+x^2\operatorname{sen}2x}{(x-\operatorname{sen}^2 x)^2}$$

$$\nu'=\frac{x^2-2x\operatorname{sen}^2 x+x^2\operatorname{sen}2x}{(x-\operatorname{sen}^2 x)^2} \quad \ldots\ldots (3)$$

Sustituir (3) en (2):

$$\mu'=\frac{(x+\operatorname{sen}^2\nu)(2x)-(x^2+3)\left[1+\operatorname{sen}2\nu\left(\dfrac{x^2-2x\operatorname{sen}^2 x+x^2\operatorname{sen}2x}{(x-\operatorname{sen}^2 x)^2}\right)\right]}{(x+\operatorname{sen}^2\nu)^2} \quad \ldots\ldots (4)$$

Sustituir (4) en (1):

$$f'(x)=\left[\frac{2x\,(x+\operatorname{sen}^2\nu)-(x^2+3)\left[1+\left(\frac{x^2-2x\operatorname{sen}^2 x+x^2\operatorname{sen}2x}{(x-\operatorname{sen}^2 x)^2}\right)\operatorname{sen}2\nu\right]}{(x+\operatorname{sen}^2\nu)^2}\right]\operatorname{sen}2\mu$$

(13) Hallar f' en términos de g', si $f(x)=g(x+g(a))$.

Solución:

Haciendo $x+g(a)=\mu(x)$, tenemos: $f(x)=g(\mu(x))$

entonces: $f'(x)=[g'(\mu(x)][\mu'(x)]$

$=[g'(\mu(x))][1+0]$

$=g'(x+g(a))$

(14) Si: $f(x)=g(x\,g(a))$, hallar f' en términos de g'.

Solución:

Hagamos $\mu(x)=x\,g(a)$, entonces tendremos: $f(x)=g(\mu(x))$

Al derivar $f(x)$ con respecto a x obtenemos: $f'(x)=g'(\mu(x))\cdot\mu'(x)$ ..... (1)

Como $\mu(x)=x\,g(a)\Rightarrow\mu'(x)=g(a)$ ..... (2)

Sustituir (2) en (1): $f'(x)=g'(x\,g(a))\,g(a)$

(15) Hallar f' en términos de g', Si $f(x)=g(x+g(x))$.

Solución:

$f'(x)=(g'(x+g(x)))\,(x+g(x))'$

$=(g'(x+g(x)))\,(1+g'(x))\,g'(x+g(x))$

16 Si: $f(x+3)=g(x^2)$, hallar $g'(4)$ sabiendo además que $f'(5)=8$.

Solución:

Derivando en la ecuación $f(x+3)=g(x^2)$ obtenemos:

$$[f'(x+3)][x+3]'=[g'(x^2)][x^2]'$$

$$[f'(x+3)][1+0]=[g'(x^2)][2x]$$

$$f'(x+3)=2x\,g'(x^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Como: $f'(5)=8 \Rightarrow x+3=5$

$$x=2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Sustituir (2) en (1): $f'(5)=2(2)\,g'(4)$

$$8=4\,g'(4) \Rightarrow g'(4)=2$$

17 Sea: $f(x)=\begin{cases} x^2\,\text{sen}\frac{1}{x} & , \quad x\neq 0 \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}$

Supongamos también que h y k son dos funciones, tales que:

$h'(x)=\text{sen}^2(\text{sen}(x+1))$ $\qquad$ $k'(x)=f(x+1)$

$h(0)=3$ $\qquad$ $k(0)=0$

Hallar: (i) $(f\circ h)(0)$; (ii) $(k\circ f)'$, (iii) $\alpha'(x^2)$, donde $\alpha(x)=h(x^2)$

Solución de (i):

1. Por definición de la derivada de una "composición de dos funciones" tenemos: $(f\circ h)'(0)=f'(h(0))\cdot h'(0)$.

2. Por hipótesis, se tiene $\begin{cases} h(0)=3 \\ Si \quad h'(x)=\text{sen}^2(\text{sen}(x+1)) \\ \Rightarrow \quad h'(0)=\text{sen}^2(\text{sen}1) \end{cases}$

3. Reemplazar (2) en (1): $(f\circ h)'(0)=f'(3)\cdot \text{sen}^2(\text{sen}1)$

4. De la ecuación: $f(x)=\begin{cases} x^2\operatorname{sen}\frac{1}{x} & , \quad x\neq 0 \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}$

obtenemos $f'(x)=\begin{cases} x^2\left(\left(\cos\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)+2x\operatorname{sen}\frac{1}{x} & , \quad x\neq 0 \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}$

$$f'(x)=\begin{cases} -\cos\frac{1}{x}+2x\operatorname{sen}\frac{1}{x} & , \quad x\neq 0 \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}$$

5. Si: $x=3 \Rightarrow f'(3)=-\cos\frac{1}{3}+6\operatorname{sen}\frac{1}{3}$

6. Sustituir (5) en (3): $(f\circ h)'(0)=\left[-\cos\frac{1}{3}+6\operatorname{sen}\frac{1}{3}\right]\operatorname{sen}^2(\operatorname{sen}1)$

(18) Si: $y=f(\mu)$ y $\mu=g(x)$, demostrar:

$$\frac{d^3y}{dx^2}=\frac{dy}{d\mu}\cdot\frac{d^3\mu}{dx^3}+3\frac{d^2y}{d\mu^2}\cdot\frac{d^2\mu}{dx^2}\cdot\frac{d\mu}{dx}+\frac{d^3y}{d\mu^3}\cdot\left(\frac{d\mu}{dx}\right)^3$$

Demostración:

1. Si $y=f(\mu) \wedge \mu=g(x)$, entonces el diagrama de flecha es: $y \xrightarrow{f} \mu \xrightarrow{g} x$

   Entonces: $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\mu}\cdot\frac{d\mu}{dx}$

2. En el anterior problema teníamos: $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{d\mu}\cdot\frac{d^2\mu}{dx^2}+\frac{d^2y}{d\mu^2}\left(\frac{d\mu}{dx}\right)^2$

3. Derivar con respecto a x: $\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{d\mu}\cdot\frac{d^2\mu}{dx^2}\right)+\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{d\mu^2}\cdot\left(\frac{d\mu}{dx}\right)^2\right)$

$$\Rightarrow \frac{d^3y}{dx^3}=\left[\frac{dy}{d\mu}\right]\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2\mu}{dx^2}\right)\right]+\left[\frac{d^2\mu}{dx^2}\right]\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{d\mu}\right)\right]+\left[\frac{d^2y}{d\mu^2}\right]\left[\frac{d}{dx}\left(\left(\frac{d\mu}{dx}\right)^2\right)\right]+\left[\left(\frac{d\mu}{dx}\right)^2\right]\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{a\mu^2}\right)\right]$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}= \frac{dy}{d\mu}\cdot\frac{d^3\mu}{dx^3} + \underbrace{\frac{d^2\mu}{dx^2}\cdot\left[\frac{d^2y}{d\mu^2}\cdot\frac{d\mu}{dx}\right]+\frac{d^2y}{d\mu^2}\left[2\frac{d\mu}{dx}\cdot\frac{d^2\mu}{dx^2}\right]} + \underbrace{\left(\frac{d\mu}{dx}\right)^2\cdot\left[\frac{d^2y}{d\mu^3}\cdot\frac{d\mu}{dx}\right]}$$

$$= \frac{dy}{d\mu}\cdot\frac{d^3\mu}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{d\mu^2}\cdot\frac{d^2\mu}{dx^2}\cdot\frac{d\mu}{dx} + \frac{d^3y}{d\mu^3}\left(\frac{d\mu}{dx}\right)^3$$

Desarrollo de: $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{d\mu}\right)$

Como (y es función de μ) $\wedge$ (μ es función de x) o sea: $y \longrightarrow \mu \longrightarrow x$

También se tiene:

($\frac{dy}{d\mu}$ es función de μ) $\wedge$ (μ es función de x) o sea: $\frac{dy}{d\mu} \longrightarrow \mu \longrightarrow x$

De la cadena: $\frac{dy}{d\mu} \longrightarrow \mu \longrightarrow x$

Obtenemos: $$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{d\mu}\right) = \frac{d}{d\mu}\left(\frac{dy}{d\mu}\right) \cdot \frac{d\mu}{dx}$$
$$= \frac{d^2y}{d\mu^2} \cdot \frac{d\mu}{dx}$$

Desarrollo de: $\frac{d}{dx}\left(\left(\frac{d\mu}{dx}\right)^2\right)$

Por derivada de potencia se tiene: $$\frac{d}{dx}\left(\left(\frac{d\mu}{dx}\right)^2\right) = 2\frac{d\mu}{dx} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{d\mu}{dx}\right)$$
$$= 2\frac{d\mu}{dx} \cdot \frac{d^2\mu}{dx^2}$$

Desarrollo de: $\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{d\mu^2}\right)$

Como ($\frac{d^2y}{d\mu^2}$ es función de μ) $\wedge$ (μ es función de x) o sea: $\frac{d^2y}{d\mu^2} \longrightarrow \mu \longrightarrow x$

De la cadena: $\frac{d^2y}{d\mu^2} \longrightarrow \mu \longrightarrow x$

Obtenemos:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{d\mu^2}\right) = \frac{d}{d\mu}\left(\frac{d^2y}{d\mu^2}\right) \cdot \frac{d\mu}{dx}$$
$$= \frac{d^3y}{d\mu^3} \cdot \frac{d\mu}{dx}$$

7. DERIVACIÓN POR MEDIO DE FÓRMULAS

Prescindiendo de la diferenciabilidad, derivar usando tablas:

1 $\frac{d}{dx}(c)=0$

Derivada de una constante con respecto a x es igual a cero.

Ejemplos:

1. Si $y=\underbrace{2\text{Ln}3+e^{-2}}_{\text{ES UN NÚMERO REAL (CONSTANTE)}} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=0$, si $y=f(x)$

2. $\frac{d}{dx}(-3/2)=0$ **3.** $\frac{d}{dt}(\sqrt{2})=0$

4. $\frac{d}{dp}(5)=0$ **5.** Si: $f(t)=2\sqrt{3}-5 \Rightarrow \frac{df}{dt}=0$, etc.

2 $\frac{d}{dx}(x)=1$

La derivada de la función identidad es igual a la unidad (La derivada de una variable con respecto a sí misma es igual a la unidad)

Ejemplos:

1. $\frac{dy}{dy}=1$ **2.** $\frac{dt}{dt}=1$ **3.** $\frac{dz}{dz}=1$ **4.** $\frac{dp}{dp}=1$

5. $\frac{de}{de}=1$ **6.** $\frac{dx_1}{dx_1}=1$ **7.** $\frac{dx_2}{dx_2}=1$ etc.

3 $\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$

La derivada de la potencia de la función identidad es igual a: bajar la potencia y disminuir la potencia una unidad.

Ejemplos:

1. $\frac{d}{dx}(x^5)=5\cdot x^{5-1}=5x^4$

2. $\frac{d}{dx}(x^{2/3})=\frac{2}{3}x^{2/3-1}=\frac{2}{3}x^{-1/3}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

3. $\frac{d}{dx}(x^{-3})=-3\cdot x^{-3-1}=-3x^{-4}=-\frac{3}{x^4}$

4. $\frac{d}{dx}(x^{-5/3})=-\frac{5}{3}\cdot x^{-5/3-1}=-\frac{5}{3}x^{-8/3}=-\frac{5}{3x^2\sqrt[3]{x^2}}$

5. $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t^5\sqrt[3]{t^2}}\right)=\frac{d}{dt}(t^{-17/3})=-\frac{17}{3}t^{-17/3-1}$

$=-\frac{17}{3}t^{-20/3}$

$=-\frac{17}{3t^6\sqrt[3]{t^2}}$

6. $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt[5]{t^2}}\right)=\frac{d}{dt}(t^{-2/5})=-\frac{2}{5}t^{-2/5-1}=-\frac{2}{5}t^{-7/5}$

7. $\frac{d}{dy}\left(\frac{5}{\sqrt{y}}\right)=5\frac{d}{dy}(y^{-1/2})=5\left(-\frac{1}{2}\right)y^{-1/2-1}=5\left(-\frac{1}{2}y^{-3/2}\right)$

$$=-\frac{5}{2\sqrt{y^3}}$$

3.1 $\frac{d}{dx}(kx^n)=knx^{n-1}$ (k: constante)

Ejemplos:

1. $\frac{d}{dx}(3x^2)=3.2x^{2-1}=6x$

2. $\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{5}x^{10}\right)=\frac{2}{5}\cdot 10x^{10-1}=4x^9$

3. $\frac{d}{dx}\left(-\frac{5}{3}x^{-3/5}\right)=-\frac{5}{3}\left(-\frac{3}{5}x^{-3/5-1}\right)=x^{-8/3}=\frac{1}{x^2\sqrt[3]{x^2}}$

4. $\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{5x^3}\right)=\frac{2}{5}\frac{d}{dx}(x^{-3})=\frac{2}{5}(-3x^{-3-1})=-\frac{6}{5}x^{-4}=-\frac{6}{5x^4}$

5. $\frac{d}{dy}\left(\frac{a}{by}\right)=\frac{a}{b}\frac{d}{dy}(y^{-1})=\frac{a}{b}(-1y^{-1-1})=\frac{a}{b}(-y^{-2})=-\frac{a}{by^2}$

6. $\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{4\sqrt{t^3}}\right)=-\frac{1}{4}\frac{d}{dt}(t^{-3/2})=-\frac{1}{4}\cdot\frac{-3}{2}t^{-3/2-1}=\frac{3}{8}t^{-5/2}=\frac{3}{8t^{5/2}}$

7. Si: $y=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}$, Hallar $\frac{dy}{dx}$

Solución: Antes de derivar, expresar cada término como potencia:

$$y=x^{-1}+2x^{-2}+3x^{-3}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-x^{-2}+2(-2x^{-3})+3(-3x^{-4})$$

$$=-\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}-\frac{9}{x^4}.$$

8. Si: $y=\frac{2}{3}-\frac{1}{5}x+x^2-0.6x^4$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=0-\frac{1}{5}(1)+2x-0.6(4x^3)$$

$$=-\frac{1}{5}+2x-2.4x^3$$

9. Si: $y = at^m + bt^{m+n} - 3t^{2/3} + \frac{at^6 + b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = amt^{m-1} + b(m+n)t^{m+n-1} - 2t^{-1/3} + \frac{6at^5}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

A continuación se dan cuatro fórmulas de derivación, que a veces, el principiante se equivoca y aplica una fórmula por otra y en consecuencia el resultado es adverso en el proceso de aprendizaje. Para ello describiré en conjunto estas cuatro fórmulas que son completamente diferentes ya que la regla de derivación es aplicada a cuatro funciones, también, completamente diferente.

Dichas funciones son:

- La función POTENCIA COMPUESTA : $y = [\mu(x)]^n$, Ej.: $y = (3x^2 - 1)^5$
- La función EXPONENCIAL : $y = a^{\mu(x)}$, Ej.: $y = 5^{1-x^2}$
- La función EXPONENCIAL SIMPLE : $y = e^{\mu(x)}$, Ej.: $y = e^{-x^2+2}$
- La función EXPONENCIAL COMPUESTA : $y = [\mu(x)]^{v(x)}$, Ej.: $y = (1-x^2)^{\sqrt{2x-1}}$

Cuando se desea derivar cada uno de las funciones mencionadas, tiene su propio Algoritmo (su propia regla o fórmula de derivación). Dichas fórmulas de derivación son la 4, 5, 6, y 7, respectivamente.

4 $\frac{d}{dx}(u^n) = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ donde $\begin{cases} u = u(x) \\ u' = \frac{du}{dx} \end{cases}$

La derivada con respecto a x, de la función POTENCIA, es igual a "bajar la potencia, restar la potencia una unidad y derivar la base".

Ejemplos:

1. Si: $y = f(x)$, donde $y = (3 + 2x^2)^3$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 3 \cdot (3 + 2x^2)^{3-1} (3 + 2x^2)'$$
$$= 3(3 + 2x)^2 (0 + 4x)$$
$$= 12x(3 + 2x)^2$$

2. Si: $y = (2b + 3at)^2$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = 2(2b + 3at)^{2-1} (2b + 3at)'$$
$$= 2(2b + 3at)(0 + 3a(1))$$
$$= 6a(2b + 3at)$$

3. Si: $y = (a^{2/3} - x^{2/3})^{2/3}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}(a^{2/3} - x^{2/3})^{2/3-1}(a^{2/3} - x^{2/3})'$$

$$= \quad " \quad (0 - \frac{2}{3}x^{2/3-1})$$

$$= \quad " \quad \left(-\frac{2}{3}x^{-2/3}\right)$$

$$= \frac{3}{2}(a^{2/3} - x^{2/3})^{1/2}\left(-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\sqrt{a^{2/3} - x^{2/3}}$$

4. Si: $y = \left(\frac{ax+b}{c}\right)^3$, a, b, c son constantes.

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3\left(\frac{ax+b}{c}\right)^{3-1}\left(\frac{ax+b}{c}\right)'$$

$$= 3\left(\frac{ax+b}{c}\right)^2\left(\frac{1}{c}(ax+b)'\right)$$

$$= 3\left(\frac{ax+b}{c}\right)^2\left(\frac{1}{c}(a+0)\right)$$

$$= \frac{3a}{c}\left(\frac{ax+b}{c}\right)^2$$

5. Si: $y = \sqrt[3]{a+bx^3} = (a+bx^3)^{1/3}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}(a+bx^3)^{1/3-1}(a+bx^3)'$$

$$= \frac{1}{3}(a+bx^3)^{-2/3}(0+3bx^2)$$

$$= \frac{bx^2}{\sqrt[3]{(a+bx^3)^2}}$$

6. Si: $f(x) = -\frac{1}{6(1-3\cos x)^2}$ Antes de derivar, expresar $f(x)$ como potencia:

$$f(x) = -\frac{1}{6}(1-3\cos x)^{-2}$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dx} = -\frac{1}{6}[-2(1-3\cos x)^{-3}(1-3\cos x)']$$

$$= \frac{1}{3}(1-3\cos x)^{-3}(0-3(-\operatorname{sen} x))$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{(1-3\cos x)^3}$$

7. Si: $y = \frac{1}{4}\text{Ln}^2 x$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}[2\text{Ln}\,x][\text{Ln}\,x]' = \frac{1}{4}[2\text{Ln}\,x]\left[\frac{1}{x}\right] = \frac{1}{2x}\text{Ln}\,x\,.$$

8. Sea: $y = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x}$, hallar $\frac{dy}{dx}$. Antes de derivar, convertir a potencia:

$$y = \tfrac{1}{3}\cos^{-3} x - (\cos x)^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}[-3\cos^{-4} x][\cos x]' + 1[\cos x]^{-2}[\cos x]'$$

$$= -\cos^{-4} x[-\text{sen}\,x] + \cos^{-2} x[-\text{sen}\,x]$$

$$= \frac{\text{sen}\,x}{\cos^4 x} - \frac{\text{sen}\,x}{\cos^2 x} = \frac{\text{sen}\,x}{\cos^2 x}\left[\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right] = \frac{\text{sen}\,x}{\cos^2 x}\left[\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\right]$$

$$= \frac{\text{sen}\,x}{\cos^2 x}\left[\frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}\right] = \frac{\text{sen}^3 x}{\cos^4 x}\,.$$

9. Sea: $y = \sqrt[3]{\text{sen}^2 x} + \frac{1}{\cos^3 x}$. Antes de derivar, expresar como potencia:

$$y = \text{sen}^{2/3} x + \cos^{-3} x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}\text{sen}^{2/3-1} x(\text{sen}\,x)' - 3\cos^{-4} x(\cos x)'$$

$$= \frac{2}{3}\text{sen}^{-1/3} x(\cos x) - 3\cos^{-4} x(-\text{sen}\,x) = \frac{2\cos x}{3\sqrt[3]{\text{sen}\,x}} + \frac{3\,\text{sen}\,x}{\cos^4 x}$$

10. Sea: $y = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$, hallar $\frac{dy}{dx}$. Antes de derivar, expresar como potencia.

$$y = [1+[1+x^{1/3}]^{1/3}]^{1/3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}[1+[1+x^{1/3}]^{1/3}]^{1/3-1}[1+[1+x^{1/3}]^{1/3}]'$$

$$= \frac{1}{3}[1+[1+x^{1/3}]^{1/3}]^{-2/3}\left[0 + \frac{1}{3}[1+x^{1/3}]^{-2/3}\left[\frac{1}{3}x^{-2/3}\right]\right]$$

$$= \frac{1}{27\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}\right)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}}$$

con $x \neq 0$, $x \neq -1$, $x \neq -8$

11. Si: $y = \frac{a^2}{3} \operatorname{Ln}^3 \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{a^2}{3} \left[3 \cdot \operatorname{Ln}^2 \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) \right] \left[\operatorname{Ln} \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) \right]'$$

$$= \quad " \quad \left[\frac{\left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right)'}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \right]$$

$$= \quad " \quad \left[\frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + a^2}}}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \right]$$

$$= \quad " \quad \left[\frac{\left(\sqrt{x^2 + a^2} + x \right)}{\sqrt{x^2 + a^2} \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right)} \right]$$

$$= \quad " \quad \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} \operatorname{Ln}^2 \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right).$$

12. Si: $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x} - (\operatorname{arc\,sen} x)^3$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} (\operatorname{arc\,tg} x)^{-1/2} (\operatorname{arctg} x)' - 3 (\operatorname{arcsen} x)^2 (\operatorname{arcsen} x)'$$

$$= \frac{1}{2} (\operatorname{arctg})^{-1/2} \left[\frac{x'}{1 + x^2} \right] - 3 (\operatorname{arcsen} x)^2 \left[\frac{x'}{\sqrt{1 - x^2}} \right]$$

$$= \quad " \quad \frac{1}{1 + x^2} - \quad " \quad \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2 (1 + x^2) \sqrt{\operatorname{arctg} x}} - \frac{3 (\operatorname{arcsen} x)^2}{\sqrt{1 - x^2}}$$

13. Si: $y=-\frac{15}{4(x-3)^4}-\frac{10}{3(x-3)^3}-\frac{1}{2(x-3)^2}$

Como: $y=-\frac{15}{4}(x-3)^{-4}-\frac{10}{3}(x-3)^{-3}-\frac{1}{2}(x-3)^{-2}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{15}{4}\left[-4(x-3)^{-5}\right]-\frac{10}{3}\left[-3(x-3)^{-4}\right]-\frac{1}{2}\left[-2(x-2)^{-3}\right]$$

$$=\frac{15}{(x-3)^5}+\frac{10}{(x-3)^4}+\frac{1}{(x-3)^3}=\frac{x^2+4x-6}{(x-3)^5}$$

14. Si: $y=\log^3 x^2-\frac{1}{15}\text{Ln}^5(2x-1)+\frac{3}{2}\log^2(1-x^2)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=3\log^2 x^2[\log x^2]'-\frac{1}{15}5\text{Ln}^4(2x-1)[\text{Ln}(2x-1)]'+\frac{3}{2}2\log(1-x^2)[\log(1-x^2)]'$$

$$=3\log^2 x^2\left[\frac{(x^2)'}{x^2}\log e\right]-\frac{1}{3}\text{Ln}^4(2x-1)\left[\frac{(2x-1)'}{2x-1}\right]+3\log(1-x^2)\left[\frac{(1-x^2)'}{1-x^2}\log e\right]$$

$$=3\log^2 x^2\left[\frac{2x}{x^2}\log e\right]-\frac{1}{3}\text{Ln}^4(2x-1)\left[\frac{2}{2x-1}\right]+3\log(1-x^2)\left[\frac{-2x}{1-x^2}\log e\right]$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{6}{x}\log e\cdot\log^2 x^2-\frac{2}{3(2x-1)}\text{Ln}^4(2x-1)-\frac{6x\log e}{1-x^2}\log(1-x^2)$$

Mensaje: *Trate de hacer lo propio en cada derivada similar que se presenta.*

5 $\frac{d}{dx}(a^u)=a^u\cdot u'\cdot \text{Ln}\,a$ $\quad a>0,\ a\neq 1$ $\quad u=u(x),\ u'=\frac{du}{dx}$

tiene 3 tiempos "LA DERIVADA DE UNA EXPONENCIAL; es igual a la misma exponencial, por la derivada del exponente, por el logaritmo natural de la base"

Ejemplos:

1. Si: $y=2^x-2^{-x}+3^{2x}-2(1-5^{-x})^5$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=2^x(x)'\text{Ln}2-2^{-x}(-x)'\text{Ln}2+3^{2x}(2x)'\text{Ln}3-2\left[5(1-5^{-x})^{5-1}(1-5^{-x})'\right]$$

$$=2^x\text{Ln}2-2^{-x}(-1)\text{Ln}2+3^{2x}(2)\text{Ln}3-2\left[5(1-5^{-x})^4(0-5^{-x}(x)'\text{Ln}5)\right]$$

$$=2^x\text{Ln}2+2^{-x}\text{Ln}2+(2\text{Ln}3)3^{2x}-10\text{Ln}5(1-5^{-x})^4\,5^{-x}$$

2. Si: $y = -\frac{1}{3}3^x + 2^{x+3} - 2^{-x^2} - 5^{3-2x}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3}[3^x(x)'\text{Ln}3] + 2^{x+2}(x+2)'\text{Ln}2 - 2^{-x^2}(-x^2)'\text{Ln}2 - 5^{3-2x}(3-2x)'\text{Ln}5$$

$$= -\frac{1}{3}[3^x\text{Ln}3] + 2^{x+2}\,\text{Ln}2 - 2^{-x^2}(-2x)\,\text{Ln}2 - 5^{3-2x}(-2)\,\text{Ln}5$$

$$= -\frac{\text{Ln}3}{3}3^x + 2^{x+2}\,\text{Ln}2 + (2\text{Ln}2)\,x2^{-x^2} + (2\text{Ln}5)\,5^{3-2x}$$

3. Si: $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x^2-4|}$, hallar $\frac{dy}{dx}$

$$= 2^{-|x^2-4|}$$

Solución:

Antes de derivar definir el valor absoluto:

$$y = \begin{cases} 2^{-(x^2-4)} & , \text{ Si: } x^2-4 \geq 0 \\ 2^{x^2-4} & , \text{ Si: } x^2-4 < 0 \end{cases} \qquad y = \begin{cases} 2^{4-x^2} & , \text{ Si: } x \geq 2 \ \vee \ x \leq -2 \\ 2^{x^2-4} & , \text{ Si: } -2 < x < 2 \end{cases}$$

Ahora derivar: $\frac{dy}{dx} = \begin{cases} 2^{4-x^2}(0-2x)\,\text{Ln}2 & , \ x \geq 2 \ \vee \ x \leq -2 \\ 2^{x^2-4}(2x-0)\,\text{Ln}2 & , \ -2 < x < 2 \end{cases}$

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} (-2\,\text{Ln}2)\times 2^{4-x^2} & , \ x \geq 2 \ \vee \ x \leq -2 \\ (2\,\text{Ln}2)\times 2^{x^2-4} & , \ -2 < x < 2 \end{cases}$$

6 $\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \cdot u'$, donde $\begin{cases} u = u(x) \\ u' = \frac{du}{dx} \end{cases}$

tiene 2 tiempos: "la derivada de una EXPONENCIAL SIMPLE; es igual a la misma exponencial, por la derivada del exponente.

Ejemplos:

1. Si: $y = e^x + \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{3}{2}e^{-x^2}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x(x)' + \frac{1}{4}e^{2x}(2x)' - \frac{3}{2}e^{-x^2}(-x^2)'$$

$$= e^x(1) + \frac{1}{4}e^{2x}(2) - \frac{3}{2}e^{-x^2}(-2x)$$

$$= e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + 3xe^{-x^2}$$

2. Si: $y = c_1 + c_2\, e^{-x} + \frac{x^2}{2} + x$. c_1, c_2 son constantes.

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 + c_2\, e^{-x}(-1) + \tfrac{1}{2}\cdot 2x + 1$$

$$= -c_2\, e^{-x} + x + 1$$

3. Si: $y = c_1 + c_2\, e^{-x} + c_3\, e^{3x}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 + c_2 \cdot e^{-x}(-1) + c_3\, e^{3x}(3)$$

$$= -c_2\, e^{-x} + 3c_3\, e^{3x}$$

4. Si: $y = c_1 + c_2\, e^{-2x} + c_3 x e^{-2x}$ (es producto)

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 + c_2 \cdot e^{-2x}(-2) + c_3\,[(x)'\, e^{-2x} + x(e^{-x})']$$

$$= -2c_2\, e^{-2x} + c_3\,[e^{-2x} - x e^{-x}]$$

5. Si: $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2} + x}$; si denotamos $\frac{df}{dx} = f'(x)$.

$$\Rightarrow f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2} + x}\left(-\frac{x^2}{2} + x\right)'$$

$$= e^{-\frac{x^2}{2} + x}\left(-\tfrac{1}{2}\cdot 2x + 1\right) = (1 - x)\, e^{-\frac{x^2}{2} + x}$$

6. Sea: $y = x - e^{-|x|}$, hallar: $\frac{dy}{dx}$

Solución:

$$\text{Pero: } y = \begin{cases} x - e^{-x} & , \text{ si: } x \geq 0 \\ x - e^{x} & , \text{ si: } x < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \begin{cases} 1 + e^{-x} & , \text{ si: } x \geq 0 \\ 1 - e^{x} & , \text{ si: } x < 0 \end{cases}$$

7. De:

$$\begin{cases} x = a_1 e^{t} + 4a_2 e^{2t} + 5a_3 e^{3t} - 5e^{-t} + 2 \\ y = -a_1 e^{t} - 5a_2 e^{2t} - 7a_3 e^{-3t} - 3e^{-t} - 1 \end{cases}$$

obtenemos: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1 e^t + 8a_2 e^{2t} + 15a_3 e^{3t} + 5e^{-t} \\ \frac{dy}{dt} = -a_1 e^t - 10a_2 e^{2t} + 21a_3 e^{-3t} + 3e^{-t} \end{cases}$

7 $\frac{d}{dx}(U^v) = v \cdot U^{V-1} \cdot U' + U^V \cdot v' \cdot \operatorname{Ln} U$

como fórmula 4 como fórmula 5

Ejemplos:

1. Si: $y = x^x$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x \cdot x^{x-1}(x)' + x^x (x)' \operatorname{Ln} x \quad , \quad x' = \frac{dx}{dx} = 1$

$= x^{x-1+1} + x^x \operatorname{Ln} x = x^x + x^x \cdot \operatorname{Ln} x = x^x (1 + \operatorname{Ln} x)$

2. Sea: $y = x^{\operatorname{Ln} x}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \operatorname{Ln} x \cdot x^{\operatorname{Ln} x - 1}(x)' + x^{\operatorname{Ln} x}(\operatorname{Ln} x)' \operatorname{Ln} x$

$= \operatorname{Ln} x \cdot x^{\operatorname{Ln} x - 1} + x^{\operatorname{Ln} x}\left(\frac{1}{x}\right)\operatorname{Ln} x$

$= \operatorname{Ln} x \cdot x^{\operatorname{Ln} x - 1} + x^{\operatorname{Ln} x - 1} \cdot \operatorname{Ln} x = 2x^{\operatorname{Ln} x - 1} \operatorname{Ln} x$

3. Sea: $y = (x+1)^{\frac{2}{x}}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x}(x+1)^{\frac{2}{x}-1}(x+1)' + (x+1)^{\frac{2}{x}}\left(\frac{2}{x}\right)' \operatorname{Ln}(x+1)$

$= \frac{2}{x}(x+1)^{\frac{2}{x}-1} + (x+1)^{\frac{2}{x}}\left(-\frac{2}{x^2}\right)\operatorname{Ln}(x+1)$

$= \frac{2}{x}(x+1)^{\frac{2}{x}}\left[(x+1)^{-1} - \frac{1}{x}\operatorname{Ln}(x+1)\right] = 2\sqrt[x]{(x+1)^2}\left[\frac{1}{x(x+1)} - \frac{\operatorname{Ln}(x+1)}{x^2}\right]$

4. Sea: $y = (x^2+1)^{\operatorname{sen} x}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \operatorname{sen} x \cdot (x^2+1)^{\operatorname{sen} x - 1}(2x) + (x^2+1)^{\operatorname{sen} x}(\cos x)\operatorname{Ln}(x^2+1)$

$= (x^2+1)^{\operatorname{sen} x}\left[\frac{2x \operatorname{sen} x}{x^2+1} + \cos x \operatorname{Ln}(x^2+1)\right]$

5. Sea: $y = x^{x^x}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^x \cdot x^{x^x-1}(x)' + x^{x^x}(x^x)' \operatorname{Ln} x$$

$$= x^x \cdot x^{x^x-1} + x^{x^x}\left[x^x(1+\operatorname{Ln} x)\right]\operatorname{Ln} x$$

$$= x^{x^x} \cdot x^x \left[\operatorname{Ln}^2 x + \operatorname{Ln} x + \frac{1}{x}\right]$$

Observación: Todas las funciones exponenciales son fáciles de derivar, si se procede del siguiente modo.

Primero, aplicar logaritmo natural en ambos miembros:

De: $y = \mu^v$

$\Rightarrow \operatorname{Ln} y = v \cdot \operatorname{Ln} \mu$

Segundo, derivar como producto:

$$\frac{y'}{y} = v' \operatorname{Ln} \mu + v(\operatorname{Ln} \mu)'$$

Tercero: $y' = y[v' \operatorname{Ln} \mu + v(\operatorname{Ln} \mu)']$

Ejemplo:

1. Sea: $y = 3x^{\sqrt{x}}$, hallar $\frac{dy}{dx}$

1°) $\operatorname{Ln} y = \operatorname{Ln} 3 + \sqrt{x} \cdot \operatorname{Ln} x$

2°) $\frac{y'}{y} = 0 + (\sqrt{x})' \operatorname{Ln} x + \sqrt{x}(\operatorname{Ln} x)'$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{Ln} x + \sqrt{x}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$y' = y\left[\frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{Ln} x + \frac{\sqrt{x}}{x}\right]$$

$$= 3x^{\sqrt{x}}\left[\frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{Ln} x + \frac{\sqrt{x}}{x}\right]$$

Ejercicios Dado $y = f(x)$ hallar: $\frac{dy}{dx}$

2. $y = x^{\frac{1}{x}}$ ***R.*** $y' = x^{\frac{1}{x}-2}(1-\text{Ln}\,x)$

3. $y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$ ***R.*** $y' = \left(\frac{x}{x+1}\right)^x \left(\frac{1}{x+1} + \text{Ln}\frac{x}{x+1}\right)$

4. $y = (1-x^2)^{e^{-x}}$ **13.** $y = (1-\sqrt{x})^{\frac{2}{x}}$

5. $y = \left[\text{Ln}(x-1)\right]^{\frac{2}{x^2}}$ **14.** $y = (5^x)^{2^x}$

6. $y = (2x-1)^{2^x}$ **15.** $y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{1-x^2}}$

7. $y = \left[\sqrt{1-e^x}\right]^{\frac{x}{2}}$ **16.** $y = \left[e^{\sqrt{\text{Ln}\,x}}\right]^{2^{-x}}$

8. $y = (\cos x)^{\text{sen}\,x}$ **17.** $y = x^{1-2x}$

9. $y = [x \cdot \text{sen}\,x]^x$ **18.** $y = (\text{sen}\,2x)^{\cos 2x}$

10. $y = x^{\text{arc tg}\,x}$ **19.** $y = (1-x)^{x^2}$

11. $y = [e^{-x}]^{2^{-x}}$ **20.** $y = x^{tg\,x}$

12. $y = x^{x^2}$

8 $\frac{d}{dx}(U \cdot V) = U' \cdot V + U \cdot V'$

"La derivada de un producto, es igual a la derivada del 1er. factor por el 2do. factor, más; el 1er. factor por la derivada del 2do. factor"

Ejemplos:

1. Sea $f(x) = (x^3 - 3x + 2)(x^4 + x^2 - 1)$, hallar $\frac{df}{dx}$

$$\Rightarrow f'(x) = (x^3 - 3x + 2)'(x^4 + x^2 - 1) + (x^3 - 3x + 2)(x^4 + x^2 - 1)'$$
$$= (3x^2 - 3)(x^4 + x^2 - 1) + (x^3 - 3x + 2)(4x^3 + 2x)$$
$$= 7x^6 - 10x^4 + 8x^3 - 12x^2 + 4x + 3$$

2. Sea $y=(x^2-2x+3)e^x$, hallar $\frac{dy}{dx}$

$$\Rightarrow \quad y'=(x^2-2x+3)'e^x+(x^2-2x+3)[e^x]'$$
$$=(2x-2)e^x+(x^2-2x+3)e^x=e^x(x^2+1)$$

3. Sea $y=(x+1)\text{Ln}^2(x+1)$, hallar $\frac{dy}{dx}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=(x+1)'\,\text{Ln}^2(x+1)+(x+1)\,[\text{Ln}^2(x+1)]'$$
$$=1\cdot\text{Ln}^2(x+1)+(x+1)\,[2\text{Ln}(x+1)]\,[\text{Ln}(x+1)]'$$
$$=\text{Ln}^2(x+1)+2(x+1)\,[\text{Ln}(x+1)]\left[\frac{1}{x+1}\right]=\text{Ln}(x+1)[\text{Ln}(x+1)+1]$$

4. Sea $y=xe^x(\cos x+\text{sen}\,x)$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=(xe^x)'(\cos x+\text{sen}\,x)+xe^x(\cos x+\text{sen}\,x)'$$
$$=(1\cdot e^x+\underline{\underline{xe^x}})(\cos x+\text{sen}\,x)+\underline{\underline{xe^x}}(-\text{sen}\,x+\cos x)$$
$$=e^x(\cos x+\text{sen}\,x)+xe^x(\cos x+\text{sen}\,x-\text{sen}\,x+\cos x)$$
$$=e^x(\cos x+\text{sen}\,x)+2xe^x\cos x=e^x(\cos x+\text{sen}\,x+2x\cos x)$$

5. Sea $y=A\,e^{-k^2x}\,\text{sen}\,(wx+\alpha)$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=A\left\{(e^{-k^2x})'\,\text{sen}(wx+\alpha)+e^{-k^2x}[\text{sen}(wx+\alpha)]'\right\}$$
$$=A\,[-k^2e^{-k^2x}\cdot\text{sen}(wx+\alpha)+e^{-k^2x}\cdot w\cos(wx+\alpha)]$$
$$=Ae^{-k^2x}\,[-k^2\,\text{sen}(wx+\alpha)+w\cdot\cos(wx+\alpha)]$$

6. $y=x^2\,e^{-\frac{x^2}{a^2}}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=2xe^{-\frac{x^2}{a^2}}+x^2\cdot e^{-\frac{x^2}{a^2}}\left(-\frac{1}{a^2}2x\right)$$
$$=2xe^{-\frac{x^2}{a^2}}\left[1-\frac{1}{a^2}x^2\right]=\frac{2x}{a^2}e^{-\frac{x^2}{a^2}}(a^2-x^2)$$

7. $y = a^x x^a$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (a^x)' x^a + a^x (x^a)'$$

$$= (a^x \operatorname{Ln} a) x^a + a^x (a x^{a-1})$$

$$= a^x x^a \operatorname{Ln} a + a^{x+1} x^{a-1} = a^x x^{a-1} (x \operatorname{Ln} a + a)$$

8. $y = e^{ax}(a \operatorname{sen} x - \cos x)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (e^{ax})'(a \operatorname{sen} x - \cos x) + e^{ax}(a \operatorname{sen} x - \cos x)'$$

$$= a e^{ax}(a \operatorname{sen} x - \cos x) + e^{ax}(a \cos x + \operatorname{sen} x)$$

$$= a^{ax}(a^2 \operatorname{sen} x - a \cos x + a \cos x + \operatorname{sen} x)$$

$$= e^{ax}(a^2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x) = [e^{ax} \operatorname{sen} x](a^2 + 1) = (a^2 + 1) e^{ax} \operatorname{sen} x$$

9. $y = e^x (\operatorname{sen} 3x - 3 \cos 3x)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = [e^x]'(\operatorname{sen} 3x - 3 \cos 3x) + e^x (\operatorname{sen} 3x - 3 \cos 3x)'$$

$$= e^x (\operatorname{sen} 3x - 3 \cos 3x) + e^x (3 \cos 3x + 9 \operatorname{sen} 3x)$$

$$= e^x (\operatorname{sen} 3x - 3 \cos 3x + 3 \cos 3x + 9 \operatorname{sen} 3x)$$

$$= e^x (10 \operatorname{sen} 3x) = 10 e^x \operatorname{sen} 3x.$$

10. $y = 3x^3 \cdot \operatorname{arcsen} x + (x^2 + 2)\sqrt{1 - x^2}$

$y' = 9x^2 \cdot \operatorname{csc} \operatorname{sen} x$

11. $y = e^x \operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x$

$y' = e^x \operatorname{sen} x \cos^2 x (1 + \operatorname{ctg} x - 3 \operatorname{tg} x)$

12. $y = x e^{1 - \cos x}$

$y' = e^{1 - \cos x} (1 + x \operatorname{sen} x)$

13. $y = \operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{sen} x^2$

$y' = 2 \operatorname{sen} x (x \operatorname{sen} x \cos x^2 + \cos x \cdot \operatorname{sen} x^2)$

14. $y = e^{2x+3}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)$

$y' = 2x^2 e^{2x+3}$

9 $\frac{d}{dx}\left(\frac{\mu}{\upsilon}\right) = \frac{\upsilon \cdot \mu' - \mu \cdot \upsilon'}{\upsilon^2}$ "la derivada de un cociente es igual: denominador al cuadrado; denominador por derivada del numerador, menos el numerador por derivada del denominador".

Ejemplos:

1. $y = \frac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}$

$$y' = \frac{(1+x+x^2)(1-x+x^2)' - (1-x+x^2)(1+x+x^2)'}{(1+x+x^2)^2}$$

$$\frac{(1+x+x^2)(0-1+2x) - (1-x+x^2)(0+1+2x)}{(1+x+x^2)^2}$$

$$\frac{-1-x-x^2+2x+2x^2+2x^3-1+x-x^2-2x+2x^2-2x^3}{(1+x+x^2)^2}$$

$$y' = \frac{2(x^2-1)}{(1+x+x^2)^2}$$

2. $y = \frac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1} \Rightarrow y' = \frac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$

3. $y = \frac{4\sqrt{3}}{9x\sqrt{1-x}} \Rightarrow y' = \frac{2\sqrt{2}(3x-2)}{9x^2(1-x)\sqrt{1-x}}$

4. $y = \frac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x^2(3x^2+4x+7) - (x^3+2x^2+7x-3)(4x)}{4x^4}$$

$$= \frac{6x^4+8x^3+14x^2-4x^4-8x^3-28x^2+12x}{4x^4}$$

$$= \frac{2x^4-14x^2+12x}{4x^4} = \frac{x^3-7x+6}{2x^3}$$

$$y' = \frac{(x-1)(x-2)(x+3)}{2x^3}$$

5. $y = x + \frac{\ln x}{x}$, $y' = \frac{x^2 - \ln x + 1}{x^2}$

6. $y = \dfrac{16}{x(4-x^2)}$, $y' = \dfrac{16(3x^2-4)}{x^2(4-x^2)^2}$

7. $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-4}}$

$$y' = \frac{\sqrt[3]{x^2-4}\,(1) - x\,\frac{1}{3}(x^2-4)^{-2/3}(2x)}{\sqrt[3]{(x^2-2)^2}} = \frac{3(x^2-4)-2x^2}{3\sqrt[3]{(x^3-4)^2}} = \frac{x^3-12}{3\sqrt[3]{(x^2-4)^2}}$$

8. $y = \dfrac{1+x\cdot \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$y' = \frac{\sqrt{1+x^2}\left(0+1\cdot\operatorname{arctg}x + x\cdot\frac{1}{1+x^2}\right) - (1+x\cdot\operatorname{arctg}x)\left(\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)}{1+x^2}$$

$$= \frac{(1+x^2)\left(\operatorname{arctg}x + \frac{x}{1+x^2}\right) - x(1+x\cdot\operatorname{arctg}x)}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{\operatorname{arctg}x}{(1+x^2)^{3/2}}$$

9. $y = \dfrac{\mu\cdot\operatorname{arcsen}\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} + \frac{1}{2}\operatorname{Ln}(1-\mu^2)$, $\mu = e^{-x^2}$

$$\Rightarrow\quad y' = \frac{\sqrt{1-\mu^2}\,(\mu\cdot\operatorname{arcsen}\mu)' - (\mu\cdot\operatorname{arcsen}\mu)\left(\sqrt{1-\mu^2}\right)'}{1-\mu^2} + \frac{1}{2}\left[\frac{-2\mu\,\mu'}{1-\mu^2}\right]$$

$$y' = \frac{\sqrt{1-u^2}\left[\mu'\cdot\operatorname{arcsen}\mu + \mu\cdot\frac{\mu'}{\sqrt{1-\mu^2}}\right] - \left[\mu\cdot\operatorname{arcsen}\mu\right]\left[\frac{-2\mu\cdot\mu'}{2\sqrt{1-\mu^2}}\right]}{1-\mu^2} + \frac{1}{2}\left[\frac{-2\mu\mu'}{1-\mu^2}\right]$$

$$= \frac{\mu'\cdot\sqrt{1-\mu^2}\cdot\operatorname{arc\,sen}\mu + \mu\cdot\mu' + \frac{\mu^2\mu'}{\sqrt{1-\mu^2}}\operatorname{arc}.\operatorname{sen}\mu}{1-\mu^2} - \frac{\mu.\mu'}{1-\mu^2}$$

$$y' = \frac{\mu'\cdot\operatorname{arc\,sen}\mu}{(1-\mu^2)^{3/2}} = \frac{-2x\,e^{-x^2}\cdot\operatorname{arc\,sen}e^{-x^2}}{(1-e^{-2x^2})^{3/2}} \quad , \quad \text{como} \quad \mu = e^{-x^2} \Rightarrow \mu' = -2xe^{-x^2}$$

10. $y = \dfrac{\mu}{1+\mu^2} - \dfrac{1-\mu^2}{1+\mu^2}\cdot\operatorname{arctg}\mu$, $\mu = a^x$

$$y' = \frac{(1+\mu^2)\mu' - \mu(1+\mu^2)'}{(1+\mu^2)^2} - \left[\frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}\right]' \operatorname{arctg}\mu - \left[\frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}\right](\operatorname{arctg}\mu)'$$

$$y' = \frac{\mu' + \mu^2\mu' - \mu(0+2\mu\mu')}{(1+\mu^2)} - \frac{(1+\mu^2)(-2\mu\mu') - (1-\mu^2)(2\mu\mu')}{(1+\mu^2)^2}\operatorname{arctg}\mu - \left[\frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}\right]\frac{\mu'}{1+\mu^2}$$

$$y' = \frac{4\mu\cdot\mu'}{(1+\mu^2)^2}\operatorname{arctg}\mu, \text{ como : } \mu = a^x \Rightarrow \mu' = a^x \operatorname{Ln} a$$

$$y' = \frac{4a^x a^x \operatorname{Ln} a}{(1+a^{2x})^2}\operatorname{arctg} a^x = \frac{4a^{2x}\operatorname{Ln} a}{(1+a^{2x})^2}\operatorname{arctg} a^x$$

11. $y = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\operatorname{ctg} x} + \dfrac{\cos^2 x}{1+\operatorname{tg} x}$

$$y' = \frac{(1+\operatorname{ctg} x)(\operatorname{sen}^2 x)' - \operatorname{sen}^2 x(1+\operatorname{ctg} x)'}{(1+\operatorname{ctg} x)^2} + \frac{(1+\operatorname{tg} x)(\cos^2 x)' - \cos^2 x(1+\operatorname{tg} x)'}{(1+\operatorname{tg} x)^2}$$

$$y' = \frac{(1+\operatorname{ctg} x)\,2\operatorname{sen} x\cos x - \operatorname{sen}^2 x(-\csc^2 x)}{(1+\operatorname{ctg} x)^2} + \frac{(1+\operatorname{tg} x)(-2\cos x\operatorname{sen} x) - \cos^2 x(\sec^2 x)}{(1+\operatorname{tg} x)^2}$$

$$= \frac{2\operatorname{sen} x\cos x + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\cdot 2\operatorname{sen} x\cos x + (\operatorname{sen} x\cdot\csc x)^2}{\left(1+\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)^2} + \frac{-2\cos x\operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\cdot 2\cos x\operatorname{sen} x - 1}{\left(1-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)^2}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} 2x + 2\cos^2 x + 1}{\frac{(\operatorname{sen} x+\cos x)^2}{\operatorname{sen}^2 x}} + \frac{-\operatorname{sen} 2x - 2\operatorname{sen}^2 x - 1}{\frac{(\cos x+\operatorname{sen} x)^2}{\cos^2 x}}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2 x\operatorname{sen} 2x + 2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x\operatorname{sen} 2x - 2\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x - \cos^2 x}{(\operatorname{sen} x+\cos x)^2}$$

$$y' = \frac{(\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x)(\operatorname{sen} 2x + 1)}{1+\operatorname{sen} 2x} = -\cos 2x$$

10 $\dfrac{d}{dx}(\log_a \mu) = \dfrac{\mu'}{\mu}\cdot\log_a e$

Ejemplos:

1. $y = \log_3(x^2-1)$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{(x^2-1)'}{x^2-1}\log_3 e = \frac{2x}{x^2-1}\log_3 e = \frac{2x}{x^2-1}\frac{1}{\operatorname{Ln} 3} \quad , \text{ pues } \operatorname{Ln}_3 e = \frac{1}{\operatorname{Ln} 3}$$

2. Sea $y = 2^{\frac{x}{\operatorname{Ln} x}}$, hallar $\dfrac{dy}{dx}$

Tomar: $\text{Log}_2 y = \frac{x}{\text{Ln}\, x}\text{Log}_2 2$, $\text{Log}_2 2 = 1$, $\text{Log}_2 y = \frac{x}{\text{Ln}\, x}$

Derivar: $\frac{y'}{y}\log_2 e = \frac{\text{Ln}\, x \cdot 1 - x \cdot \frac{1}{x}}{\text{Ln}^2 x}$

$$\frac{y'}{y}\log_2 e = \frac{\text{Ln}\, x - 1}{\text{Ln}^2 x}$$

$$\frac{y'}{y}\frac{1}{\text{Ln}\, 2} = \frac{\text{Ln}\, x - 1}{\text{Ln}^2 x} \quad \Rightarrow \quad y' = y\,\text{Ln}\, 2\left[\frac{\text{Ln}\, x - 1}{\text{Ln}^2 x}\right] = 2^{\frac{x}{\text{Ln}\, x}}\,\text{Ln}\, 2\left[\frac{\text{Ln}\, x - 1}{\text{Ln}^2 x}\right]$$

3. Si $y = x^2 \log_3 x$

$$\Rightarrow \quad y' = 2x \cdot \log_3 x + x^2 \cdot \frac{1}{x}\log_2 e = 2x \cdot \log_3 x + \frac{x}{\text{Ln}\, 3}$$

4. Si $y = \frac{x-1}{\log_2 x}$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{\log_2 x\,(1-0) - (x-1)\frac{1}{x}\log_2 e}{(\log_2 x)^2} \quad , \text{ donde } \begin{cases} \log_2 e = \frac{1}{\text{Ln}\, 2} \\ \log_2 x = \frac{\text{Ln}\, x}{\text{Ln}\, 2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{\text{Ln}\, 2\,(x\,\text{Ln}\, x - x + 1)}{\text{Ln}^2 x}$$

5. $y = x - \text{Ln}(2e^x + 1 + \sqrt{e^{2x} + 4e^x + 1})$

$$y' = 1 - \frac{\left(2e^x + 1 + \sqrt{e^{2x} + 4e^x + 1}\right)'}{2e^x + 1 + \sqrt{e^{2x} + 4e^x + 1}} = 1 - \frac{2e^x + 0 + \frac{2e^{2x} + 4e^x + 0}{2\sqrt{e^{2x} + 4e^x + 1}}}{2e^x + 1 + \sqrt{e^{2x} + 4e^x + 1}}$$

$$y' = 1 - \frac{2e^x\sqrt{e^{2x} + 4e^x + 1} + e^{2x} + 2e^x}{\left(2e^x + 1 + \sqrt{e^{2x} + 4e^x + 1}\right)\sqrt{e^{2x} + 4e^x + 1}} = \frac{2e^x\sqrt{} + \sqrt{} + e^{2x} + 4e^x + 1 - 2e^x\sqrt{} - e^{2x} - 2e^x}{\left(2e^x + 1 + \sqrt{e^{2x} + 4e^x + 1}\right)\sqrt{e^{2x} + 4e^{2x} + 1}}$$

$$y' = \frac{\left(2e^x + 1 + \sqrt{e^{2x} + 4e^x + 1}\right)}{\left(2e^x + 1 + \sqrt{e^{2x} + 4e^x + 1}\right)\sqrt{e^{2x} + 4e^x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{e^{2x} + 4e^x + 1}}$$

11 $\frac{d}{dx}(\text{Ln}\, u) = \frac{U'}{U}$

1. $y = \text{Ln}(x + \sqrt{a^2 + x^2})$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)'}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{a^2 + x^2}}}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2} + x}{\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

2. $y = \ln\dfrac{x+\sqrt{1-x^2}}{x} = \text{Ln}(x+\sqrt{1-x^2}) - \text{Ln}\,x$

$$\Rightarrow\quad y' = \frac{\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)'}{2+\sqrt{1-x^2}} - \frac{x'}{x} = \frac{1+\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{x+\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)}$$

3. $y = \sqrt{x^2+1} - \ln\left(\dfrac{1}{x}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)$

$$\Rightarrow\quad y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - \frac{\dfrac{-\frac{1}{x^2}+\dfrac{0-\frac{2}{x^3}}{2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}}{\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}}{}$$

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{-\frac{1}{x^2}\left[1+\sqrt{1+x^2}\right]}{\frac{1}{x}[1+\sqrt{1+x^2}]\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

4. $y = \text{Ln}\,(e^x \cos x + e^{-x}\,\text{sen}\,x)$

$$\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx} = \frac{(e^x\cdot\cos x + e^{-x}\cdot\text{sen}\,x)'}{e^x\cdot\cos x + e^{-x}\cdot\text{sen}\,x}$$

$$= \frac{e^x\cdot\cos x + e^x(-\text{sen}\,x) + (-e^{-x})\,\text{sen}\,x + e^{-x}\cdot\cos x}{e^x\cdot\cos x + e^{-x}\,\text{sen}\,x} = \frac{e^x(\cos x - \text{sen}\,x) + e^{-x}(\cos x - \text{sen}\,x)}{e^x\cos x + e^{-x}\,\text{sen}\,x}$$

$$y' = \frac{(\cos x - \text{sen}\,x)(e^x + e^{-x})}{e^x\cos x + e^{-x}\,\text{sen}\,x}$$

5. $y = \text{Ln}\,\text{tg}\,\frac{x}{2} - \text{ctg}\,x\cdot\text{Ln}(1+\text{sen}\,x) - x$

$$y' = \frac{\left[\text{tg}\,\frac{x}{2}\right]'}{\text{tg}\,\frac{x}{2}} - (\text{ctg}\,x)'\,\text{Ln}(1+sex) - \text{ctg}\,x\,\frac{(1+\text{sen}\,x)'}{1+\text{sen}\,x} - 1$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}}{\text{tg}\,\frac{x}{2}} - (\csc^2 x)\,\text{Ln}(1+\text{sen}\,x) - \text{ctg}\,x\left[\frac{0+\cos x}{1+\text{sen}\,x}\right] - 1$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{\text{sen}\,\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}} + \frac{1}{\text{sen}^2 x}\,\text{Ln}(1+\text{sen}\,x) - \frac{\cos x}{\text{sen}\,x}\left[\frac{\cos x}{1+\text{sen}\,x}\right] - 1$$

$$= \frac{1}{2\,\text{sen}\,x/2\cos x/2} + \frac{1}{\text{sen}^2 x}\,\text{Ln}(1+\text{sen}\,x) - \frac{\cos^2 x}{\text{sen}\,x\,(1+\text{sen}\,x)} - 1$$

$$= \frac{1}{\text{sen}\,x} + \frac{1}{\text{sen}^2 x}\,\text{Ln}(1+\text{sen}\,x) - \frac{(1-\text{sen}\,x)(1+\text{sen}\,x)}{\text{sen}\,x\,(1+\text{sen}\,x)} - 1$$

$$y' = \frac{1}{\text{sen}\,x} + \frac{\text{Ln}\,(1+\text{sen}\,x)}{\text{sen}^2 x} - \frac{1}{\text{sen}\,x} + 1 - 1 = \frac{\text{Ln}\,(1+\text{sen}\,x)}{\text{sen}^2 x}$$

12 $\frac{d}{dx}(\text{sen}\,u) = u' \cdot \cos u$

Ejemplos:

1. Si $y = \text{sen}\,x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos x$

2. Si $y = \text{sen}\,3x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (3x)'\cos 3x = 3 \cdot \cos 3x$

3. Si $y = \frac{5}{2}\text{sen}(4x-3) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{5}{2}(4x-3)'\cos(4x-3)$

$$= \frac{5}{2} \cdot 4\cos(4x-3) = 10 \cdot \cos(4x-3)$$

4. Si $y = \text{sen}\,3x + \text{sen}\frac{1}{x} - 3(1+\text{sen}^2 x)^4$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (3x)'\cos 3x + \left(\frac{1}{x}\right)'\cos\frac{1}{x} - 12\,(1+\text{sen}^2 x)^3\,(1+\text{sen}^2 x)'$$

$$= 3\cos 3x - \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x} - 12\,\text{sen}\,2x\,(1+\text{sen}^2 x)^3$$

5. Si $y = \text{Ln}^4\,\text{sen}\,x + \text{sen}(2^x) + \text{sen}(e^{x^2+3x-2})$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4\,\text{Ln}^3\,\text{sen}\,x[\text{Ln}\,\text{sen}\,x]' + (2^x)'\cos(2^x) + (e^{x^2+3x-2})'\cos(e^{x^2+3x-2})$$

$$= 4\,\text{Ln}^3\,\text{sen}\,x\left[\frac{\cos x}{\text{sen}\,x}\right] + 2^x\,\text{Ln}\,2 \cdot \cos 2^x + (2x+3)e^{\mu} \cdot \cos\mu$$

$$= 4\,\text{cotg}\,x\,\text{Ln}^3\,\text{sen}\,x + 2^x\,\text{Ln}\,2\cos 2^x + (2x+3)e^{\mu} \cdot \cos\mu$$

$$\mu = x^2 + 3x - 2.$$

6. Si $y = 3^{\text{sen}\,x} + 10^{1-\text{sen}^4 3x}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 3^{\operatorname{sen} x}(\operatorname{sen} x)' \operatorname{Ln} 3 + 10^{1-\operatorname{sen}^4 3x}(1-\operatorname{sen}^4 3x)' \operatorname{Ln} 10$$

$$= 3^{\operatorname{sen} x} \cos x \operatorname{Ln} 3 + 10^{1-\operatorname{sen}^4 3x}(-4\operatorname{sen}^3 3x)(3\cos 3x)\operatorname{Ln} 10$$

$$= 3^{\operatorname{sen} x} \cos x \operatorname{Ln} 3 + 10^{1-\operatorname{sen}^4 3x}(-12\cos 3x \operatorname{sen}^3 3x \cdot \operatorname{Ln} 10)$$

13 $\frac{d}{dx}(\cos \mu) = -\mu' \cdot \operatorname{sen} \mu$

Solución:

1. Si $y = \cos x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{sen} x$

2. Si $y = \cos \frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \left[\frac{x}{2}\right]'\left(-\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}$

3. Si $y = 3\operatorname{Ln}\cos\frac{x}{3} - 5(3-2\cos^2 3x)^3$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3\frac{\left(\cos\frac{x}{3}\right)'}{\cos\frac{x}{3}} - 15(3-2\cos^3 3x)^2 (3-2\cos^2 3x)'$$

$$= 3\left[\frac{\frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{x}{3}}{\cos\frac{x}{3}}\right] - 15(3-2\cos^2 3x)^2 (0-2\cdot 2\cos 3x(-3\operatorname{sen} 3x))$$

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg}\frac{x}{3} - 90\operatorname{sen} 2x(3-2\cos^2 3x)^2$$

4. Si $y = \frac{2\operatorname{sen}^2 x}{\cos 2x} + \frac{1}{\cos(x-\cos x)}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(\cos 2x)(4\operatorname{sen} x \cos x) - 2\operatorname{sen}^2 x(-2\operatorname{sen} 2x)}{(\cos 2x)^2} + \frac{\left[\cos(x-\cos x)\right][0] - 1.\left[x-\cos x\right]'\left[-\operatorname{sen} u\right]}{\cos^2(x-\cos x)}$$

$$= \frac{2\operatorname{sen} 2x}{\cos^2 2x} + \frac{(1+\operatorname{sen} x)\operatorname{sen}(x-\cos x)}{\cos^2(x-\cos x)} \quad .$$

5. $y = \frac{\operatorname{sen} 3x}{2\operatorname{sen}^2 x . \cos x}$, hallar $\frac{dy}{dx}$

Solución: Antes de derivar reemplazar $\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} x(2\cos 2x + 1)$

$2\operatorname{sen} x \cdot \cos x = \operatorname{sen} 2x$

$$y = \frac{\operatorname{sen} x(2\cos 2x+1)}{\operatorname{sen} x . \operatorname{sen} 2x} = \frac{2\cos 2x + 1}{\operatorname{sen} 2x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(\operatorname{sen}2x)(2\cos 2x+1)' - (2\cos 2x+1)(\operatorname{sen}2x)'}{\operatorname{sen}^2 2x} = \frac{(\operatorname{sen}2x)(-4\operatorname{sen}2x) - (2\cos 2x+1)(2\cos 2x)}{\operatorname{sen}^2 2x}$$

$$\frac{-4\operatorname{sen}^2 2x - 4\cos^2 2x - 2\cos 2x}{\operatorname{sen}^2 2x} \quad \frac{-4(\operatorname{sen}^2 2x + \cos^2 2x) - 2(2\cos^2 x - 1)}{\operatorname{sen}^2 2x}$$

$$y' = \frac{-4 - 4\cos^2 x + 2}{\operatorname{sen}^2 2x} = \frac{-2 - 4\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 2x}$$

6. $y = \cos^2 x + \cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2\cos x(-\operatorname{sen}x) - \operatorname{sen}x - \frac{1}{3}\cdot 3\cos^2 x(-\operatorname{sen}x)$$

$$= -\operatorname{sen}2x - \operatorname{sen}x + \operatorname{sen}x\cdot\cos^2 x$$

7. $y = \cos^3 4x - \frac{1}{20}\cos(5x^2) - \frac{1}{4}\cos x^2$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 3\cos^2 4x(-4\operatorname{sen}4x) - \frac{1}{20}(-10x\operatorname{sen}(5x^2)) - \frac{1}{4}(-2x\operatorname{sen}x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = -12\operatorname{sen}4x\cdot\cos^2 4x + \frac{x}{2}\operatorname{sen}(5x^2) + \frac{x}{2}\operatorname{sen}x^2$$

8. $f(x) = -\frac{1}{6(1-3\cos x)^2} + \frac{1}{3\cos^3 x} + \frac{1}{3\cos 3x} = \frac{1}{6}(1-3\cos x)^{-2} + \frac{1}{3}\cos^{-3} x + \frac{1}{3}\cos^{-1} 3x$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{2}{6}[1-3\cos x]^{-3}[3\operatorname{sen}x] - \frac{3}{3}\cos^{-4} x[-\operatorname{sen}x] - \frac{1}{3}\cos^{-2} 3x[-3\operatorname{sen}3x]$$

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sen}x}{(1-3\cos x)^3} + \frac{\operatorname{sen}x}{\cos^4 x} + \frac{\operatorname{sen}3x}{\cos^2 3x}$$

14 $\frac{d}{dx}(\operatorname{tg}u) = u'\cdot\sec^2 u$

Ejemplos:

Si $y = \operatorname{tg}x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \sec^2 x$

$$y = 5\operatorname{tg}\tfrac{x}{5} + \operatorname{tg}\tfrac{x}{8} + \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 5\left(\frac{x}{5}\right)'\sec^2\frac{x}{5} + 0 + \frac{1}{2}[1+\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x]^{-\frac{1}{2}}[1+\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x]$$

$$= 5\cdot\frac{1}{5}\sec^2\frac{x}{5} + \frac{1}{2}[1+\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x]^{-\frac{1}{2}}[0 + 2\operatorname{tg}x\sec^2 x + 4\operatorname{tg}^3 x\sec^2 x]$$

$$= \sec^3 \tfrac{x}{5} + \frac{\operatorname{tg} x\left[1+\operatorname{tg}^2 x\right]}{\cos^2 x\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x}}$$

3. $y = \operatorname{Ln}\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \cos x \cdot \operatorname{Ln}\operatorname{tg} x$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\left[\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right]'}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} - [\cos x]'[\operatorname{Ln}\operatorname{tg} x] - [\cos x][\operatorname{Ln}\operatorname{tg} x]'$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} - [-\operatorname{sen} x][\operatorname{Ln}\operatorname{tg} x] - [\cos x]\frac{[\sec^2 x]}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{Ln}\operatorname{tg} x$$

4. $y = \frac{\operatorname{sen} x}{4\cos^4 x} + \frac{3\operatorname{sen} x}{8\cos^2 x} + \frac{3}{8}\left[\operatorname{Ln}(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}) - \operatorname{Ln}(1-\operatorname{tg}\frac{x}{2})\right]$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}\left[\frac{\cos^4 x\,.\cos x - \operatorname{sen} x\,(4\cos^3 x)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^8 x}\right]$$

$$+\frac{3}{8}\left[\frac{\cos^2 x\,.\cos x - \operatorname{sen} x\,(2\cos x)(-\operatorname{sen} x)}{\cos^4 x}\right]$$

$$+\frac{3}{8}\left[\frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} - \frac{-\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right] = \sec^5 x\ .$$

15 $\frac{d}{dx}(\operatorname{ctg}\mu) = -\mu'.\csc^2\mu$

Ejemplos:

1. $y = \operatorname{ctg} x \ \Rightarrow\ \frac{dy}{dx} = -\csc^2 x$

2. Si: $y = \frac{2}{3}\operatorname{ctg}(3x-2) \ \Rightarrow\ \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}\cdot 3\cdot \csc^2(3x-2)$

$$= \csc^2(3x-2)$$

3. $y = 3\cdot \operatorname{ctg}(3x+5) + c\operatorname{tg}\sqrt[3]{1+x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = 3[-(3x+5)']\csc^2(3x+5) - (\sqrt[3]{1+x^2})'\csc^2(\sqrt[3]{1+x^2})$$

$$= 3[-3]\csc^2(3x+5) - \frac{1}{3}(1+x^2)^{-2/3}(2x)\csc^2\sqrt[3]{1+x^2}$$

$$= -9\csc^2(3x+5) - \frac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}\csc^2\sqrt[3]{1+x^2}$$

4. $y = \frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4 2x - Ln\operatorname{ctg}(2x) + 3\operatorname{ctg} e^{1-3x}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}\cdot 4\operatorname{ctg}^3 2x\,[-2\csc^2 2x] - \frac{-2\csc^2(2x)}{\operatorname{ctg}(2x)} + 3\,[e^u]'[-\csc^2\mu] \quad , \quad \mu = e^{1-3x}$$

$$= -2\operatorname{ctg}^3 2x\cdot\csc^2 2x + 2\sec 2x\cdot\csc 2x + 9e^{1-3x}\csc^2(e^{1-3x})$$

16 $\frac{d}{dx}(\sec\mu) = \mu'\cdot\sec\mu\cdot\operatorname{tg}\mu$

Ejemplos:

1. $y = \sec x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \sec x\,.\,\operatorname{tg} x$

2. $y = \sec 2x - 3\sec\frac{x}{3} + \frac{1}{3}\sec^3 5x$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (2x)'\sec 2x\cdot\operatorname{tg} 2x - 3\left[\frac{x}{3}\right]'\sec\frac{x}{3}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{3} + \frac{1}{3}.3\sec^2 5x\cdot[\sec 5x]'$$

$$= 2\sec 2x\cdot\operatorname{tg} 2x - 3\cdot\frac{1}{3}\sec\frac{x}{3}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{3} + \sec^2 5x[5x]'\sec 5x\cdot\operatorname{tg} 5x$$

$$= 2\sec 2x\cdot\operatorname{tg} 2x - \sec\frac{x}{3}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{3} + 5\sec^3 5x\cdot\operatorname{tg} 5x$$

3. $y = \frac{5}{3}\sec 3\theta - \frac{2}{5}\sec^2(1-\theta^5)$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{5}{3}[3\theta]'\sec 3\theta.\operatorname{tg} 3\theta - \frac{2}{5}.2\sec(1-\theta^5)\left[(1-\theta^5)\right]'$$

$$= \frac{5}{3}\cdot 3\sec 3\theta.\operatorname{tg} 3\theta - \frac{4}{5}\sec(1-\theta^5)\left[(1-\theta^5)'\sec(1-\theta^5)\operatorname{tg}(1-\theta^5)\right]$$

$$= 5.\sec 3\theta.\operatorname{tg} 3\theta - \frac{4}{5}\sec(1-\theta^5)\left[-5\theta^4.\sec(1-\theta^5).\operatorname{tg}(1-\theta^5)\right]$$

$$= 5.\sec 3\theta.\operatorname{tg} 3\theta + 4\theta^4\sec^2(1-\theta^5).\operatorname{tg}(1-\theta^5)$$

4. $y = 2\sec x^2 - 2\sec 2x + 2\sec^2\frac{x}{2}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2(x^2)'\sec x^2.\operatorname{tg} x^2 - 2(2x)'\sec 2x\,.\operatorname{tg} 2x + 2.2\sec\frac{x}{2}\left[\sec\frac{x}{2}\right]'$$

$$= 4x\sec x^2.\operatorname{tg} x^2 - 4\sec 2x.\operatorname{tg} 2x + 4\sec\frac{x}{2}\left[\left(\frac{x}{2}\right)'\sec\frac{x}{2}.\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right]$$

$$= 4x.\sec x^2.\operatorname{tg} x^2 - 4\sec 2x.\operatorname{tg} 2x + 2\sec^2\frac{x}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot$$

17 $\frac{d}{dx}(\csc\mu) = -\mu' \cdot \csc\mu \,.\, \operatorname{ctg}\mu$

Ejemplos:

1. $y = \csc x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\csc x \,.\, \operatorname{ctg} x$

2. $y = -\frac{2}{3}\csc 3x - \frac{3}{5}\csc^5 \frac{x}{3}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{3}\left[-(3x)'\csc 3x \cdot \operatorname{ctg} 3x\right] - \frac{3}{5}.5\csc^4\frac{x}{3}\left[\csc\frac{x}{3}\right]'$$

$$= -\frac{2}{3}[-3\csc 3x \cdot \operatorname{ctg} 3x] - 3\csc^4\frac{x}{3}\left[-\frac{1}{3}\csc\frac{x}{3}\cdot\operatorname{ctg}\frac{x}{3}\right]$$

$$= 2\csc 3x \,.\, \operatorname{ctg} 3x + \csc^5\frac{x}{3}\cdot\operatorname{ctg}\frac{x}{3}\cdot$$

3. $y = \frac{1}{2}e^{-2x}\csc 2x$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}[(e^{-2x})' \,.\, \csc 2x + e^{-2x}(\csc 2x)']$$

$$= \frac{1}{2}[-2e^{-2x} \,.\, \csc 2x + e^{-2x}(-2\csc 2x \,.\, \operatorname{ctg} 2x)]$$

$$= -e^{-2x} \,.\, \csc 2x[1 + \operatorname{ctg} 2x]$$

4. $y = 2x^2 \,.\, \csc\frac{x}{4} - 5\csc\frac{x}{5}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2\left[(x^2)' \cdot \csc\frac{x}{4} + x^2\left(\csc\frac{x}{4}\right)'\right] - 5\left[-\left(\frac{x}{5}\right)'\csc\frac{x}{5}\operatorname{ctg}\frac{x}{5}\right]$$

$$= 2\left[2x \,.\, \csc\frac{x}{4} + x^2\left(-\frac{1}{4}\csc\frac{x}{4}\operatorname{ctg}\frac{x}{4}\right)\right] + 5\left[\frac{1}{5}\csc\frac{x}{5}\operatorname{ctg}\frac{x}{5}\right]$$

$$= 4x \cdot \csc\frac{x}{4} - \frac{1}{2}x^2\csc\frac{x}{4}\cdot\operatorname{ctg}\frac{x}{4} + \csc\frac{x}{5}\cdot\operatorname{ctg}\frac{x}{5}$$

18 $\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsen}\mu) = \frac{\mu'}{\sqrt{1-\mu^2}}$

Ejemplos:

1. $y = \operatorname{arcsen} x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2. $y = x \cdot \operatorname{arcsen}(\operatorname{Ln} x)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (x)' \cdot \operatorname{arcsen}(\operatorname{Ln} x) + x \cdot \left[\operatorname{arcsen}(\operatorname{Ln} x)\right]'$$

$$= 1 \cdot \operatorname{arcsen}(\operatorname{Ln} x) + x \cdot \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\operatorname{Ln}^2 x}}$$

$$= \operatorname{arcsen}(\operatorname{Ln} x) + \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{Ln}^2 x}}$$

3. $y = \alpha \cdot \operatorname{arcsen}(\alpha x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \alpha \cdot \frac{(\alpha x)'}{\sqrt{1-\alpha^2 x^2}}$, $(\alpha x)' = \alpha$

$$= \frac{\alpha^2}{\sqrt{1-\alpha^2 x^2}}$$

4. $y = 2 \cdot \operatorname{arcsen}\frac{x-2}{\sqrt{6}} - \sqrt{2+4x-x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot \frac{\left[\frac{x-2}{\sqrt{6}}\right]'}{\sqrt{1-\left(\frac{x-2}{\sqrt{6}}\right)^2}} - \frac{\left[2+4x-x^2\right]'}{2\sqrt{2+4x-x^2}}$$

$$= 2 \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{6}}}{\frac{\sqrt{6-(x-2)^2}}{\sqrt{6}}} - \frac{4-2x}{2\sqrt{2+4x-x^2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2+4x-x^2}} - \frac{2-x}{\sqrt{2+4x-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{2+4x-x^2}}$$

19 $\frac{d}{dx}(\arccos \mu) = -\frac{\mu'}{\sqrt{1-\mu^2}}$

1. $\mu = \arccos x \Rightarrow \frac{d\mu}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \mu'$

2. $y = \mu^2\left[\operatorname{Ln}^2\mu - \operatorname{Ln}\mu + \frac{1}{2}\right]$, $\mu = \arccos x$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (\mu^2)'\left[\operatorname{Ln}^2\mu - \operatorname{Ln}\mu + \tfrac{1}{2}\right] + \mu^2\left[\operatorname{Ln}^2\mu - \operatorname{Ln}\mu + \tfrac{1}{2}\right]'$$

$$= 2\mu \,.\, \mu'\left[\operatorname{Ln}^2\mu - \operatorname{Ln}\mu + \tfrac{1}{2}\right] + \mu^2\left[2\operatorname{Ln}\mu\left(\operatorname{Ln}\mu\right)' - \frac{\mu'}{\mu}\right]$$

$$= 2\mu \,.\, \mu' \operatorname{Ln}^2\mu - 2\mu\mu' \operatorname{Ln}\mu + \mu \,.\, \mu' + 2\mu \,.\, \mu' \operatorname{Ln}\mu - \mu \,.\, \mu'$$

$$= 2 \,.\, \mu \,.\, \mu' \operatorname{Ln}^2\mu = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arccos x \cdot \operatorname{Ln}^2 \arccos x \quad , \quad \mu = \arccos x$$

3. $y = \arccos\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\left[\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}\right]'}{\sqrt{1-\left[\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}\right]^2}} = -\frac{\dfrac{(x^{2n}+1)(2nx^{2n-1})-(x^{2n}-1)(2nx^{2n-1})}{(x^{2n}+1)^2}}{\dfrac{\sqrt{(x^{2n}+1)^2-(x^{2n}-1)^2}}{x^{2n}+1}}$$

$$= \frac{-4n\,x^{2n-1}}{(x^{2n}+1)\sqrt{4x^{2n}}}$$

$$= -\frac{2nx^{n-1}}{x^{2n}+1} \quad .$$

20 $\dfrac{d}{dx}(\operatorname{arctg}\mu) = \dfrac{\mu'}{1+\mu^2}$

1. Si $y = \operatorname{arctg} x \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}$

2. $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\left[\dfrac{x\sqrt{3}}{1-x^2}\right]'}{1+\left[\dfrac{x\sqrt{3}}{1-x^2}\right]^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\dfrac{(1-x^2)\sqrt{3}-x\sqrt{3}(-2x)}{(1-x^2)^2}}{\dfrac{(1-x^2)^2+3x^2}{(1-x^2)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}\,x^2+2\sqrt{3}\,x^2}{1-2x^2+x^4+3x^2} = \frac{\sqrt{3}\,(1+x^2)}{\sqrt{3}\,(1+x^2+x^4)} = \frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}$$

3. $y = \dfrac{2}{3}\operatorname{arc\,tg} x + \dfrac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{1-x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}\frac{(x)'}{1+x^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\left[\dfrac{x}{1-x^2}\right]'}{1+\left[\dfrac{x}{1-x^2}\right]^2}$$

$$= \frac{2}{3}\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{3}\frac{\dfrac{(1-x^2)(1)-x(-2x)}{(1-x^2)^2}}{\dfrac{(1-x^2)^2+x^2}{(1-x^2)^2}} = \frac{1+x^4}{1+x^6}$$

4. $y = \dfrac{1}{m\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(e^{mx}\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{m\sqrt{ab}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{a}{b}}\left[me^{mx} \right]}{1+\left(e^{mx}\sqrt{\frac{a}{b}} \right)^2} = \frac{m\sqrt{\frac{a}{b}}}{m\sqrt{ab}} \frac{e^{mx}}{\left[\frac{b+ae^{mx}}{b} \right]} = \frac{e^{mx}}{b+ae^{2mx}}$$

21 $\quad \frac{d}{dx}(\operatorname{arcctg}\mu) = -\frac{\mu'}{1+\mu^2}$

1. $\quad y = \operatorname{arcctg} x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}$

2. $\quad y = \operatorname{arcctg}(2x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{(2x)'}{1+(2x)^2} = -\frac{2}{1+4x^2}$

3. $\quad y = \operatorname{arcctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left[\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right]'}{1+\left[\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right]^2} = -\frac{\frac{1}{2}\left[\frac{1-x}{1+x} \right]^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{1-x}{1+x} \right]'}{1+\frac{1-x}{1+x}} = -\frac{\frac{1}{2}\left[\frac{1-x}{1+x} \right]^{-\frac{1}{2}} \left[\frac{(1+x)(-1)-(1-x)(1)}{(1+x)^2} \right]}{\frac{(1+x)+(1-x)}{1+x}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$$

4. $\quad y = x^3 \cdot \operatorname{arc\,ctg} x^3$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = (x^3)' \cdot \operatorname{arc\,ctg} x^3 + x^3 (\operatorname{arc\,ctg} x^3)'$$

$$= 3x^2 \cdot \operatorname{arc\,ctg} x^3 + x^3\left(-\frac{3x^2}{1+x^6} \right) = 3x^2 \operatorname{arc\,ctg} x^3 - \frac{3x^5}{1+x^6}$$

22 $\quad \frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,sec}\mu) = \frac{\mu'}{\mu\sqrt{\mu^2-1}}$

1. $\quad y = \operatorname{arc\,sec} x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

2. $\quad y = \operatorname{arc\,sec}(1-2x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(1-2x)'}{(1-2x)\sqrt{(1-2x)^2-1}}$

$$= \frac{-2}{(1-2x)\sqrt{(1-2x)^2-1}}$$

3. $\quad y = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sec}\frac{3x-1}{2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{3x-1}{2} \right)'}{\left(\frac{3x-1}{2} \right)\sqrt{\left(\frac{3x-1}{2} \right)^2-1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{3}{2}}{\left(\frac{3x-1}{2} \right)\sqrt{\left(\frac{3x-1}{2} \right)^2-1}} = \frac{3}{(3x-1)} \frac{1}{\sqrt{9x^2-6x-3}}$$

23 $\frac{d}{dx}(\operatorname{arc\,csc}\mu) = -\frac{\mu'}{\mu\sqrt{\mu^2-1}}$

1. $y = \operatorname{arc\,csc} x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

2. $y = \operatorname{arc\,csc}(3-5x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{(3-5x)'}{(3-5x)\sqrt{(3-5x)^2-1}}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-5}{(3-5x)\sqrt{(3-5x)^2-1}} = \frac{5}{(3-5x)\sqrt{25x^2-30x+8}}$$

3. $y = -\frac{1}{6}\operatorname{arc\,csc}\left(\frac{2-3x}{2}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{6}\left[-\frac{\left(\frac{2-3x}{2}\right)'}{\left(\frac{2-3x}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{2-3x}{2}\right)^2-1}}\right] = \frac{1}{6}\frac{-\frac{3}{2}}{\left(\frac{2-3x}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{2-3x}{2}\right)^2-1}} = \frac{1}{(3x-2)\sqrt{9x^2-12x}}$$

EJERCICIOS

(1) $f(x) = x(\operatorname{arcsen} x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\cdot \operatorname{arc\,sen} x$

$$\Rightarrow \frac{df}{dx} = 1\cdot(\operatorname{arcsen} x)^2 + x\cdot 2(\operatorname{arcsen} x)(\operatorname{arcsen} x)' - 2$$

$$+ 2[(\sqrt{1-x^2})'\cdot \operatorname{arc\,sen} x + \sqrt{1-x^2}\cdot(\operatorname{arc\,sen} x)']$$

$$= (\operatorname{arcsen} x)^2 + 2x(\operatorname{arcsen} x)\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right] - 2 + 2\left[\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}.\operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2}.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$

$$= \quad " \qquad " \quad -2 - 2x(\operatorname{arc\,sen} x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 2 = (\operatorname{arc\,sen} x)^2$$

(2) $f(x) = \operatorname{Ln}\left[\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right] + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

$$= \operatorname{Ln}[\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}] - \operatorname{Ln}[\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}] + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})'}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} - \frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})'}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} + 2\frac{\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)'}{1+\left[\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right]^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} - \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}} + \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} + 2\left[\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\right] = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[\frac{1}{x}+1\right] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left[\frac{1+x}{x}\right] = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

(3) $f(x) = \operatorname{Ln}\sqrt[4]{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$

$$= \frac{1}{4}\left[\operatorname{Ln}(x^2+x+1) - \operatorname{Ln}(x^2-x+1)\right] + \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{4}\left[\frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1} - \frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}\right] + \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\frac{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)'}{1+\left[\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]^2} + \frac{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)'}{1+\left[\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]^2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{2x-1}{x^2-x+1}\right] + \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{3+(2x+1)^2}{3}} + \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{3+(2x-1)^2}{3}}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{-2x^2+2}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}\right] + \frac{1}{4}\left[\frac{2x^2+2}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}\right] = \frac{1}{x^4+x^2+1}$$

7.1. EJERCICIOS DIVERSOS

Para los siguientes ejercicios, hallar $\frac{dy}{dx} = y'$ sabiendo que $y = f(x)$.

(1) $y = \left(\frac{ax+b}{c}\right)^3$; a, b, c son constantes.

Solución:

$$y' = 3\left(\frac{ax+b}{c}\right)^2\left(\frac{ax+b}{c}\right)'$$

$$= 3\left(\frac{ax+b}{c}\right)^2\left(\frac{1}{c}(ax+b)'\right)$$

$$= 3\left(\frac{ax+b}{c}\right)^2\left(\frac{1}{c}\cdot a\right)$$

$$= \frac{3a}{c}\left(\frac{ax+b}{c}\right)^2.$$

2 $y = \frac{3}{56(2x-1)^7} - \frac{1}{24(2x-1)^6} - \frac{1}{40(2x-1)^5}$

Solución:

Antes de derivar, podemos expresar la función en términos de una potencia negativa:

$$y = \tfrac{3}{56}(2x-1)^{-7} - \tfrac{1}{24}(2x-1)^{-6} - \tfrac{1}{40}(2x-1)^{-5}$$

Derivando:

$$y' = \tfrac{3}{46}(-7)(2x-1)^{-8}(2) - \tfrac{1}{24}(-6)(2x-1)^{-7}(2) - \tfrac{1}{40}(-5)(2x-1)^{-6}(2)$$

$$y' = -\frac{3}{4}\frac{1}{(2x-1)^8} + \frac{1}{2}\frac{1}{(2x-1)^7} + \frac{1}{4}\frac{1}{(2x-1)^6}$$

$$y' = \frac{1}{4}\frac{1}{(2x-1)^6}\left[-\frac{3}{(2x-1)^2} + \frac{2}{(2x-1)} + 1 \right]$$

$$y' = \frac{1}{4}\frac{1}{(2x-1)^6}\left[\frac{-3+2(2x-1)+(2x-1)^2}{(2x-1)^2} \right]$$

$$y' = \frac{1}{4}\frac{1}{(2x-1)^8}[-3+4x-2+4x^2-4x+1]$$

$$y' = \frac{1}{4}\frac{1}{(2x-1)^8}(4x^2-4)$$

$$y' = \frac{1}{4}\frac{1}{(2x-1)}4(x^2-1)$$

$$y' = \frac{x^2-1}{(2x-1)^8}$$

3 $y = -\frac{1}{6(1-3\cos x)^2}$

Expresando en términos de potencia negativa:

$$y = -\tfrac{1}{6}(1-3\cos x)^{-2}$$

Derivando:

$$y' = -\tfrac{1}{6}(-2)(1-3\cos x)^{-3}(1-3\cos x)'$$

$$y' = \tfrac{1}{3}(1-3\cos x)^{-3}(0-3(-\operatorname{sen} x))$$

$$y' = \frac{\operatorname{sen} x}{(1-3\cos x)^3}$$

4 $y = \ln^2 x - \ln(\ln x)$

Solución:

$$y' = 2\ln x\,(\ln x)' - \frac{(\ln x)'}{\ln x}$$

$$y' = (2\ln x)\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}$$

$$y' = \frac{2}{x}\ln x - \frac{1}{x\ln x}$$

$$y' = \frac{2\ln^2 x - 1}{x\ln x}$$

5 $y = \ln(e^x + 5\operatorname{sen} x - 4\operatorname{arc\,sen} x)$

Solución:

$$y' = \frac{(e^x + 5\operatorname{sen} x - 4\operatorname{arcsen} x)'}{e^x + 5\operatorname{sen} x - 4\operatorname{arcsen} x}$$

$$y' = \frac{e^x + 5\cos x - 4\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{e^x + 5\operatorname{sen} x - 4\operatorname{arcsen} x}$$

$$y' = \frac{(e^x + 5\cos x)\sqrt{1-x^2} - 4}{(e^x + 5\operatorname{sen} x - 4\operatorname{arcsen} x)\sqrt{1-x^2}}$$

$$y' = \frac{(e^x + 5\cos x)\sqrt{1-x^2} - 4}{e^y\sqrt{1-x^2}}$$

6 $y = \sqrt{\ln x + 1} + \ln(\sqrt{x} + 1)$

Solución:

$$y' = \frac{(\ln x + 1)'}{2\sqrt{\ln x + 1}} + \frac{(\sqrt{x} + 1)'}{\sqrt{x} + 1}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{x} + 0}{2\sqrt{\ln x + 1}} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} + 0}{\sqrt{x} + 1}$$

$$y' = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x + 1}} + \frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}$$

7 $y = \frac{1}{\sqrt{b}}\operatorname{arc\,sen}\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$

$$= \frac{1}{3}\frac{2}{2+x^2} + \frac{1}{6}\frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{3(2+x^2)} + \frac{1}{3(x^2-1)}$$

$$= \frac{2(x^2-1)+2+x^2}{3(2+x^2)(x^2-1)} = \frac{2x^2-2+2+x^2}{3(2+x^2)(x^2+1)}$$

$$= \frac{3x^2}{3(2+x^2)(x^2+1)} = \frac{x^2}{(2+x^2)(x^2+1)}$$

$$f'(x) = \frac{x^2}{x^4+x^2-2}$$

12 $f(x) = \ln\dfrac{1+\sqrt{\operatorname{sen} x}}{1-\sqrt{\operatorname{sen} x}} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{sen} x}$

Solución: Aplicar la propiedad $\ln\frac{A}{B} = \ln A - \ln B$

Así: $f(x) = \operatorname{Ln}(1+\sqrt{\operatorname{sen} x}) - \ln(1-\sqrt{\operatorname{sen} x}) + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\operatorname{sen} x}$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{(1+\sqrt{\operatorname{sen} x})'}{1+\sqrt{\operatorname{sen} x}} - \frac{(1-\sqrt{\operatorname{sen} x})}{1-\sqrt{\operatorname{sen} x}} + 2\cdot\frac{(\sqrt{\operatorname{sen} x})'}{1+(\sqrt{\operatorname{sen} x})^2}$$

$$= \frac{0+\frac{(\operatorname{sen} x)'}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}}{1+\sqrt{\operatorname{sen} x}} - \frac{0-\frac{(\operatorname{sen} x)'}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}}{1-\sqrt{\operatorname{sen} x}} + 2\cdot\frac{\frac{(\operatorname{sen} x)'}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}}{1+\operatorname{sen} x}$$

$$= \frac{\frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}}{1+\sqrt{\operatorname{sen} x}} + \frac{\frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}}{1-\sqrt{\operatorname{sen} x}} + \frac{\frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}}{1+\operatorname{sen} x}$$

$$= \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}(1+\sqrt{\operatorname{sen} x})} + \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}(1-\sqrt{\operatorname{sen} x})} + \frac{\cos x}{\sqrt{\operatorname{sen} x}(1+\operatorname{sen} x)}$$

$$= \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}\left[\frac{1}{1+\sqrt{\operatorname{sen} x}} + \frac{1}{1-\sqrt{\operatorname{sen} x}} + \frac{2}{1+\operatorname{sen} x}\right]$$

$$= \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}\left[\frac{(1-\sqrt{\operatorname{sen} x})(1+\operatorname{sen} x)+(1+\sqrt{\operatorname{sen} x})(1+\operatorname{sen} x)+2(1+\sqrt{\operatorname{sen} x})(1-\sqrt{\operatorname{sen} x})}{(1+\sqrt{\operatorname{sen} x})(1-\sqrt{\operatorname{sen} x})(1+\operatorname{sen} x)}\right]$$

$$= \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}\left[\frac{1+\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} x\sqrt{\operatorname{sen} x}-\sqrt{\operatorname{sen} x}+1+\operatorname{sen} x+\sqrt{\operatorname{sen} x}+\operatorname{sen}\sqrt{\operatorname{sen} x}+2-2\operatorname{sen} x}{(1-\operatorname{sen} x)(1+\operatorname{sen} x)}\right]$$

$$f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}\left[\frac{4}{1-\operatorname{sen}^2 x}\right] = \frac{4\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{2}{\sqrt{\operatorname{sen} x}\cos x}$$

13 $f(x) = \frac{3}{4}\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right) + \frac{1}{4}\operatorname{Ln}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$

Solución:

$$f(x)=\tfrac{3}{4}[\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)]+\tfrac{1}{4}\left[\ln(x-1)-\ln(x+1)\right]+\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x$$

$$\Rightarrow\quad f'(x)=\tfrac{3}{4}\left[\frac{2x}{x^2+1}-\frac{2x}{x^2-1}\right]+\tfrac{1}{4}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right]+\tfrac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}$$

$$f'(x)=\tfrac{3}{4}\left[\frac{2x(x^2-1)-2x(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2-1)}\right]+\tfrac{1}{4}\left[\frac{x+1-x+1}{(x-1)(x+1)}\right]+\tfrac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}$$

$$f'(x)=\tfrac{3}{4}\left[\frac{2x^3-2x-2x^3-2x}{(x^2+1)(x^2-1)}\right]+\tfrac{1}{4}\left[\frac{2}{(x-1)(x+1)}\right]+\tfrac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}$$

$$f'(x)=\tfrac{3}{4}\left[\frac{-4x}{(x^2+1)(x^2-1)}\right]+\tfrac{1}{2}\frac{1}{(x^2-1)}+\frac{1}{2(1+x^2)}$$

$$f'(x)=\frac{-3x(2)+x^2+1+x^2-1}{2(x^2+1)(x^2-1)}=\frac{2x^2-6x}{2(x^2+1)(x^2-1)}=\frac{2x(x-3)}{2(x^4-1)}=\frac{x(x-3)}{x^4-1}$$

14 $\quad f(x)=\tfrac{1}{2}\ln(1+x)-\tfrac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\tfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$

Solución:

$$f'(x)=\tfrac{1}{2}\frac{(1+x)'}{1+x}-\tfrac{1}{6}\frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)'}{1+\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$f'(x)=\tfrac{1}{2}\frac{1}{1+x}-\tfrac{1}{6}\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\frac{(2x-1)^2}{3}}$$

$$\text{“}\qquad\text{“}\qquad+\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{3}{3+(2x-1)^2}$$

$$\text{“}\qquad\text{“}\qquad+\frac{2}{3+(2x-1)^2}$$

$$\text{“}\qquad\text{“}\qquad+\frac{2}{3+4x^2-4x+1}$$

$$\text{“}\qquad\text{“}\qquad+\frac{2}{4(x^2-x+1)}$$

$$f'(x)=\tfrac{1}{2}\frac{1}{1+x}-\tfrac{1}{6}\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2(x^2-x+1)}$$

$$f'(x)=\frac{3(x^2-x+1)-(2x-1)(x+1)+3(1+x)}{6(1+x)(x^2-x+1)}$$

$$f'(x)=\frac{3x^2-3x+3-2x^2-2x+x+1+3+3x}{6(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{x^2-x+7}{6(x^3-1)}$$

15 $f(x)=\frac{x\operatorname{arcsen}x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$

Solución:

Pero: $f(x)=\frac{x\operatorname{arcsen}x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$

Derivando:

$$f'(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}\,[x\operatorname{arcsen}x]'-x\operatorname{arcsen}x\left[\sqrt{1-x^2}\right]'}{\left(\sqrt{1-x}\right)}+\frac{1}{2}\frac{(1-x^2)'}{1-x^2}$$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}\left[x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\operatorname{arcsen}x\right]-x\operatorname{arcsen}x\left(\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\right)}{1-x^2}+\frac{1}{2}\frac{-2x}{1-x^2}$$

$$=\frac{x+\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen}x+\frac{x^2\operatorname{arcsen}x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}-\frac{x}{1-x^2}$$

$$=\frac{x\sqrt{1-x^2}+(1-x^2)\operatorname{arcsen}x+x^2\operatorname{arcsen}x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}-\frac{x}{1-x^2}$$

$$=\frac{x\sqrt{1-x^2}+\operatorname{arcsen}x-x^2\operatorname{arcsen}x+x^2\operatorname{arcsen}x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}-\frac{x}{1-x^2}$$

$$=\frac{x\sqrt{1-x^2}+\operatorname{arcsen}x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}-\frac{x}{1-x^2}$$

$$f'(x)=\frac{x\sqrt{1-x^2}+\operatorname{arcsen}x-x\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{\operatorname{arcsen}x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

16 $f(x)=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$

Solución:

$$f'(x)=\frac{x}{2}(\sqrt{x^2-a^2})'+\sqrt{x^2-a^2}\left(\frac{x}{2}\right)'-\frac{a^2}{2}\frac{\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)'}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$=\frac{x}{2}\frac{2x}{2\sqrt{x^2-a^2}}+\sqrt{x^2-a^2}\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{a^2}{2}\left[\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2-a^2}}}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\right]$$

$$= \frac{x^2}{2\sqrt{x^2-a^2}} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\left[\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\right]$$

$$= \frac{x^2}{2\sqrt{x^2-a^2}} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\frac{\left(\sqrt{x^2-a^2}+x\right)}{\sqrt{x^2-a^2}\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)}$$

$$= \frac{x^2}{2\sqrt{x^2-a^2}} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+x^2-a^2-a^2}{2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{2x^2-2a^2}{2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{2(x^2-a^2)}{2\sqrt{x^2-a^2}} = \sqrt{x^2-a^2}$$

17 $\quad f(x) = \ln\left[\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}-x}\right]$

Solución: Antes de derivar, aplicar la propiedad $\ln\frac{A}{B} = \ln A - \ln B$.

Pero: $\quad f(x) = \ln(\sqrt{x^2+a^2}+x) - \ln(\sqrt{x^2+a^2}-x)$

Derivando: $\quad f'(x) = \dfrac{\left(\sqrt{x^2+a^2}+x\right)'}{\sqrt{x^2+a^2}+x} - \dfrac{\left(\sqrt{x^2+a^2}-x\right)'}{\sqrt{x^2+a^2}-x}$

$$= \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}+1}{\sqrt{x^2+a^2}+x} - \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}-1}{\sqrt{x^2+a^2}-x}$$

$$= \frac{\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}}}{\sqrt{x^2+a^2}+x} - \frac{\frac{x-\sqrt{x^2+a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}}}{\sqrt{x^2+a^2}-x}$$

$$= \frac{\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)}{\sqrt{x^2+a^2}\left(\sqrt{x^2+a^2}+x\right)} + \frac{\left(\sqrt{x^2+a^2}-x\right)}{\sqrt{x^2+a^2}\left(\sqrt{x^2+a^2}-x\right)}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{2}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

18 $\quad f(x) = \frac{m}{2}\ln(x^2-a^2) + \frac{n}{2a}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)$

Solución:

Pero: $f(x)=\frac{m}{2}\ln(x^2-a^2)+\frac{n}{2a}\left[\ln(x-a)-\ln(x+a)\right]$

Derivando:

$$\frac{df}{dx}=\frac{m}{2}\frac{(x^2-a^2)'}{x^2-a^2}+\frac{n}{2a}\left[\frac{(x-a)'}{x-a}-\frac{(x+a)'}{x+a}\right]$$

$$=\frac{m}{2}\frac{2x}{x^2-a^2}+\frac{n}{2a}\left[\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right]$$

$$=\frac{mx}{x^2-a^2}+\frac{n}{2a}\left[\frac{x+a-x+a}{(x-a)(x+a)}\right]$$

$$\frac{df}{dx}=\frac{mx}{x^2-a^2}+\frac{n}{2a}\left[\frac{2a}{(x-a)(x+a)}\right]=\frac{mx}{x^2-a^2}+\frac{n}{x^2-a^2}=\frac{mx+n}{x^2-a^2}$$

19 $g(x)=x\,\text{sen}\left(\ln x-\frac{\pi}{2}\right)$

Solución:

$$\frac{dg}{dx}=x\left[\text{sen}\left(\ln x-\tfrac{\pi}{4}\right)\right]'+\left[\text{sen}\left(\ln x-\tfrac{\pi}{4}\right)\right][x]'$$

$$=x\left[\cos\left(\ln x-\tfrac{\pi}{4}\right)\right]\left[\ln x-\tfrac{\pi}{4}\right]'+\text{sen}\left(\ln x-\tfrac{\pi}{4}\right)$$

$$=x\left[\cos\left(\ln x-\tfrac{\pi}{4}\right)\right]\left[\tfrac{1}{x}\right]+\text{sen}\left(\ln x-\tfrac{\pi}{4}\right)$$

$$=\cos\left(\ln x-\tfrac{\pi}{4}\right)+\text{sen}\left(\ln x-\tfrac{\pi}{4}\right)$$

$$=\cos\ln x\cos\tfrac{\pi}{4}+\text{sen}\ln x\,\text{sen}\tfrac{\pi}{4}+\text{sen}\ln x\cos\tfrac{\pi}{4}-\cos\ln x\,\text{sen}\tfrac{\pi}{4}$$

$$=(\cos\ln x)\tfrac{\sqrt{2}}{2}+(\text{sen}\ln x)\tfrac{\sqrt{2}}{2}+(\text{sen}\ln x)\tfrac{\sqrt{2}}{2}-(\cos\ln x)\tfrac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{dg}{dx}=2(\text{sen}\ln x)\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\,\text{sen}\ln x$$

7.2. EJERCICIOS PROPUESTOS

Verificar que:

1 Si $f(x)=(7x+4)\sqrt{49x^2+56x+7}-9\ln(7x+4+\sqrt{49x^2+56x+7})$
entonces $\frac{df}{dx}=14\sqrt{(7x+4)^2-9}$

2 Si $g(x)=(x+1)\left[(x-1)\ln(1-x)^2-(x+1)\right]$, entonces $\frac{dg}{dx}=4x\ln(1-x)$

3 Si $f(x)=(3-4x)\sqrt{16x^2-24x-7}-16\ln(3-4x+\sqrt{16x^2-24x-7})$
entonces $\frac{df}{dx}=-8\sqrt{(4-3)^2-16}$

4 Si $f(x)=(1-2x)\sqrt{4x^2-4x+5}+4\ln(1-2x+\sqrt{4x^2-4x+5})$
$\frac{df}{dx}=-4\sqrt{(1-2x)^2+4}$

5 Si $f(x)=\frac{1}{\cos x}\left[(1-\operatorname{sen}x)\sqrt{\operatorname{sen}^2x-2\operatorname{sen}x+5}+4\ln(1-\operatorname{sen}x+\sqrt{\operatorname{sen}^2x-2\operatorname{sen}x+5})\right]$
entonces $\frac{df}{dx}=-2\sqrt{(1-\operatorname{sen}x)^2+4}$

6 Si $f(x)=(5-6x)\sqrt{60x-36x^2-21}+4\operatorname{arcsen}\left(\frac{5-6x}{2}\right)$;
$\frac{df}{dx}=-12\sqrt{4-(5-6x)^2}$

7 Si $f(x)=\sqrt{2}\,x\,.\operatorname{arcsec}\sqrt{2}x-2\sqrt{3}\ln(\sqrt{2}x+\sqrt{2x^2-12})$; $\frac{df}{dx}=\sqrt{2}\operatorname{arcsec}\frac{x}{\sqrt{6}}$

8 Si $f(x)=2x\sqrt{1-4x^2}+(8x^2-1)\operatorname{arcsen}2x$; $\frac{df}{dx}=16x\cdot\operatorname{arcsen}2x$

9 Si $f(x)=\sqrt{3+4x-4x^2}-2\ln\left(\frac{2+\sqrt{3+4x-4x^2}}{1-2x}\right)$; $\frac{df}{dx}=-2\frac{\sqrt{4-(1-2x)^2}}{1-2x}$

10 Si $f(x)=\frac{2\sqrt{4-x^2}}{x^2}+\ln\left(\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}\right)$; $\frac{df}{dx}=\frac{-16}{x^3\sqrt{4-x^2}}$

11 Si $f(x)=-\sqrt{6x-x^2}+3\arccos\left(1-\frac{x}{3}\right)$, $\frac{df}{dx}=\frac{x}{\sqrt{9-(x-3)^2}}$

12 Si $f(x)=e^{3x}(3\operatorname{sen}2x-2\cos2x)$; $\frac{df}{dx}=26e^{3x}\operatorname{sen}2x$

13 Si $f(x)=(1-5x)\operatorname{arcsen}(1-5x)+\sqrt{10x-25x^2}$; $\frac{df}{dx}=-5\operatorname{arcsen}(1-5x)$

14 Si $f(x)=(2-\sqrt{5}x)\operatorname{arctg}(2-\sqrt{5}x)-\ln\sqrt{5x^2-4\sqrt{5}x+5}$,
$\frac{df}{dx}=-\sqrt{5}\operatorname{arctg}(2-\sqrt{5}x)$

15 Si $f(x)=(5-3x)\operatorname{arcsec}(5-3x)-\ln(5-3x+\sqrt{9x^2-30x+24})$
entonces $\frac{df}{dx}=-3\,arc\sec(5-3x)$

16 Si $f(x)=(27x^2-6)\operatorname{sen}3x+(1x-27x^3)\cos3x$, $\frac{df}{dx}=81x^3\operatorname{sen}3x$

17 Si $f(x)=\ln(\operatorname{cosec}2x-\operatorname{cotg}2x)^3-\operatorname{cosec}2x\cdot\operatorname{cotg}2x(3+2\operatorname{cosec}^2 2x)$
entonces $\frac{df}{dx}=16\cos ec^5\,2x$

7.3. PROBLEMAS

7.3.1. NIVEL 1

Sabiendo que $y = f(x)$, se pide:

a) Hallar $f'(x)$ b) Factorizar $f'(x)$ c) Resolver $f'(x) = 0$
d) $f'(x) > 0$ e) $f'(x) < 0$ f) Grafique $f(x)$

4. $f(x) = x^2\sqrt{1-x^2}$, $-1 \le x \le 1$ Sol. $f'(x) = \frac{x(2-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$

5. $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+4}}$ Sol. $f'(x) = \frac{x^2+12}{3(x^2+4)^{4/3}}$

6. $f(x) = x^3 - 3x^2$, $[-1,3]$ Sol. $f'(x) = 3x(x-2)$

7. $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2(4-x)$ Sol. $f'(x) = \frac{3}{2}(x-1)(3-x)$

8. $f(x) = \frac{x^2}{x^2+4}$ Sol. $f'(x) = \frac{8x}{(x^2+4)^2}$

9. $f(x) = -3x\sqrt{x+1}$ Sol. $f'(x) = -\frac{3}{2}\frac{(3x+2)}{\sqrt{x-1}}$

10. $f(x) = 4 - |x|$ Sol. $f'(x) = \begin{cases} -1 , & x \ge 0 \\ 1 , & x < 0 \end{cases}$

7.3.2 NIVEL 2

En cada uno de los siguientes problemas, elegir la respuesta correcta.

11. $\lim_{h\to 0} \frac{e^{2h+2} - e^2}{h} = \quad : \quad ;$ A) 1 B) 0 C) 2 D) e^2 E) $2e^2$

12. Si $f(x) = |x+3|$, luego $f'(x)$ es continua ¿para qué valores de x?

A) $x < 3$ B) $x > 3$ C) $x \neq 3$ D) $x \neq -3$ E) Todo x

13. Si $f(x) = \text{Ln}\sqrt{\cos 2x}$, $f'(x) = :$

A) $\text{Ln}\sqrt{\cos x \operatorname{sen} x}$ B) $-\tan 2x$ C) $\frac{-\operatorname{sen} 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$ D) $\frac{1}{2\cos 2x}$ E) N.A

14. ¿Cuál es la tangente del ángulo en el cual la curva $y = \frac{1}{x} - 2$ corta al eje x?

A) $\frac{1}{4}$ B) $-\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{4}$ D) -4 E) 4

15. Si $y = e^x x^e$, entonces $\frac{dy}{dx} = ?$

A) $e^x x^e (x e^{-1} + 1)$ B) $e^x x^e \left(1 + \frac{e}{x}\right)$ C) $e^x x^{e-1}$

D) x^{ex} E) $x^{ex} x^{e-1}$

16. $f(x) = \cot(t\,\text{sen}(t))$, $f'(t) = :$

A) $(t\cos t + \text{sen}t)\csc^2(t\,\text{sen}t)$ B) $-(t\,\text{sen}t + \cos t)\csc^2(t\,\text{sen}t)$

C) $-(\text{sen}t + t\cos t)\csc^2(t\,\text{sen}t)$ D) $-(\text{sen}t - t\cos t)\csc^2(t\,\text{sen}t)$ E) N.A.

17. $y = 2\,\text{sen}^2 x + \text{sen}\,2x$. Encontrar y'.

A) $2(\text{sen}\,2x + \cos 2x)$ B) $4\,\text{sen}\,x\cos x + 2\cos x$

C) $2(\text{sen}\,2x + \cos x)$ D) $2(2\,\text{sen}\,2x + \cos 2x)$ E) N.A.

18. $f(x) = \text{arcsen}\sqrt{1 - 9x^2}$. Encontrar $f'(x)$ si $x > 0$

A) $\frac{-3}{\sqrt{1-9x^2}}$ B) $\frac{3x}{\sqrt{1-9x^2}}$ C) $\frac{-9x}{\sqrt{1-9x^2}}$

D) $\frac{-9}{\sqrt{1-9x^2}}$ E) $\frac{1-9x^2}{18}$

19. Si $f(x) = e^x$. ¿Cuáles son iguales a $f'(1)$?

I. $\lim_{t\to 1} \frac{e^t - e}{t-1}$ II. $\lim_{t\to 1} \frac{e^{x+h} - e}{t-1}$ III. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x+1} - e}{x}$

A) I B) II C) Todas pero no I D) Todas menos II E) N.A.

20. Si $y = \cos^2 x + \text{sen}^2 x$, $\frac{dy}{dx} = ?$

A) $2\,\text{sen}\,x + 2\cos x$ B) $\cos^2 x - \text{sen}^2 x$ C) $\text{sen}\,2x$

D) $\text{sen}^2 x - \cos^2 x$ E) 0

21. Si: $y = be^{c^2 + x^2}$ $\frac{dy}{dx} = ?$

A) $be^{c^2}\,2x$ B) $2xbe^{x^2}$ C) $b(c^2 + x^2)e^{c^2 + x^2 - 1}$

D) $2bxe^{c^2 + x^2}$ E) $be^{c^2 + x^2}$

22. Si: $S = t^{t^2}$, encontrar $\frac{ds}{dt}$

A) $s(2\text{Ln}t+1)$ B) $2t\text{Ln}t+1$ C) $st(2\text{Ln}t+1)$ D) $\frac{s}{Lnt}$ E) N.A.

23. $\frac{d}{dx}(x^2e^{x^2}) = ?$

A) $2xe^{x^2}$ B) $\frac{x^3e^{x^2}}{3}$ C) $4x^2e^{x^2}$

D) $3xe^{x^2} + x^4e^{x^2-1}$ E) $2x^3e^{x^2} + 2xe^{x^2}$

24. Si: $f(x) = 5|2x-1| - 2|3x^2-4|$, entonces $f'(-1) =$:

A) 2 B) 0 C) 22 D) –22 E) –2

25. Si $f(x) = x^2$, $h(x) = f(1+g(x))$, $g'(1) = 1$ y $h'(1) = 1$, luego $g(1) =$:

26. Si $f'(x) = xf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $f(-2) = 3$, luego $f''(-2) =$:

A) –18 B) –1 C) 1 D) 12 E) 15

27. Si f es una función finitamente diferenciable en $(c, f(c))$, luego la intersección con el eje Y de la recta tangente al gráfico de f en $(c, f(c))$ es:

A) $f'(c)$ B) $f(c) - f'(c)$ C) $f(c) - cf'(c)$

D) $c(f(c) - f'(c))$ E) no necesariamente algunos de A, B, C, D

28. Una partícula se mueve a lo largo del eje X tal que para el tiempo $t \geq 0$ la posición de la partícula es dado por $x(t) = \frac{t^3}{3} + t^2 - 2t - 2$. ¿En qué tiempo será la aceleración y la velocidad de la partícula el mismo?

A) $t = 00$ B) $t = 1$ C) $t = 2$ D) $2\sqrt{3}$ E) $t = 6$

29. $\lim_{b \to 0} \frac{2x + b + b^2}{b} =$: A) 2 B) x C) $d(x^2)$ D) $\frac{d}{dx}(x^2)$ E) 1

30. Sea $f(x) = g(h(x))$ donde g y h tienen segunda derivada ¿cuál es $f''(x)$?

A) $g''[h(x)]$ B) $g''[h(x)]h'(x)$ C) $g''[h(x)][h'(x)]^2$

D) $g''[h(x)]h'(x) + g'[h(x)]h''(x)$ E) $g''[h(x)][h'(x)]^2 + g'[h(x)]h''(x)$

31. Si la derivada de una función $f(x)$ existe en $x = a \neq 0$ y es denotado por $f'(a)$, luego $\frac{f(a)f'(a)}{a}$ es siempre igual a:

A) $\lim_{x\to a} \frac{f^2(x) - f^2(a)}{x^2 - a^2}$ B) $\lim_{x\to a} \frac{[f(x) - f(a)]^2}{x - a}$ C) $\lim_{x\to a} \frac{f^2(x) - f^2(a)}{x - a}$

D) $\lim_{x\to a} \frac{[f(x) - f(a)]}{(x-a)^2}$ E) $\lim_{x\to a} f^2(x)$

32. Si $f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } x \leq 0 \\ p(x) & , \text{ si } 0 < x < 1 \\ 1 & , \text{ si } x \geq 1 \end{cases}$ donde $P(x)$ es el polinomio de grado mínimo tal que $f(x)$ es diferenciable por todo $x \in \mathbb{R}$, entonces $P(x) =$:

A) x^3 B) x^2 C) $2x^2 - x^3$ D) $2x^2 - x^4$ E) $3x^2 - 2x^3$

33. Si la curva $y = f(x)$ es tangente a la recta $y = 3x + 5$ en el punto $(1,8)$ y si $f''(1) = 4$ entonces ¿cuál es la función cuadrática de $f(x) = ax^2 + bx + c$?

A) $4x^2 + 3x + 1$ B) $4x^2 - 5x + 12$ C) $4x^2 - 5x + 9$

D) $2x^2 - x + 4$ E) $2x^2 - x + 7$

34. Si $\lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1-x)}{2h} = L$, entonces

A) $L = 0$
B) $f'(1)$ necesariamente existe pero no puede ser igual a L.
C) Si f es continua en $S = 1$, $f'(1)$ existe y es igual a L.
D) $f'(1)$ no existe, pero si existe es igual a L.
E) N.A.

35. Si $y = |x^3 - x^2|$, $y' = ?$

A) $3x^2 - 2x$ B) $(3x^2 - 2x)\frac{|x-1|}{x-1}$

C) $(3x^2 - 2x)\frac{|x^3| - |x^2|}{x^3 - x^2}$ D) $|3x^2 - 2x|\frac{|x^3 - x^2|}{x^3 - x^2}$ E) N.A.

CAPÍTULO 2

CURVAS PLANAS, ECUACIONES PARAMÉTRICAS

1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo estudiaremos las ecuaciones paramétricas de la recta, de la circunferencia, de la elipse, de la hipérbola, y otras curvas.

Pero antes, hagamos un breve repaso de las ecuaciones cartesianas.

En el plano Euclidiano $\mathbb{R}^2$, representado geométricamente por dos ejes rectangulares: Eje X y Eje Y; se estudian la recta, la circunferencia, la elipse, la hipérbola y otras curvas donde cada una de ellas se expresan por una sola ecuación $F(x,y)=0$ con dos variables "x" e "y" llamadas ecuaciones cartesianas o ecuaciones rectangulares.

Así tenemos:

$\mathcal{L}$: $Ax+By+C=0$, es la ecuación cartesiana de la recta.

$\mathcal{C}$: $x^2+y^2=a^2$, es la ecuación cartesiana de la circunferencia de centro en el origen y radio "a".

$\mathcal{E}$: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, es la ecuación cartesiana de la elipse de centro en el origen y semiejes "a" y "b".

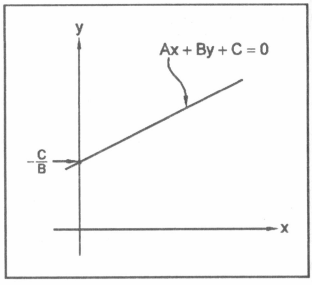
$\mathcal{H}$: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, es la ecuación cartesiana de la hipérbola de centro en el origen y semiejes "a" y "b".

Ahora nos interesa expresar las variables "x" e "y" que son las coordenadas de un punto $P(x,y)$ pertenecientes a una curva C, en términos de una sola variable "t" que la llamaremos **parámetro**.

Al proceso de "convertir" las variables "x", "y" $(y\,R\,x)$ en dos ecuaciones paramétricas se llama **parametrizar**.

2. PARAMETRIZACIÓN, ECUACIONES PARAMÉTRICAS

1) Parametrizar la recta $\mathcal{L}: Ax+By+C=0$



La parametrización de la recta $\mathcal{L}$, es:

$$\mathcal{L}: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

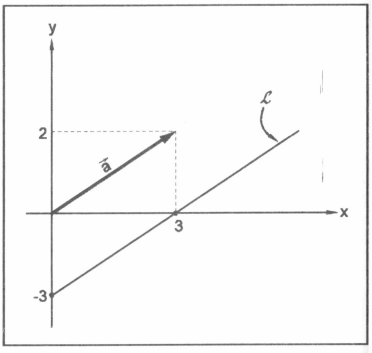
donde (x_0, y_0) es un punto cualquiera de la recta y el vector (a_1, a_2) se obtiene restando dos puntos cualesquiera de $\mathcal{L}$.

$$(a_1, a_2) = (x_1, x_2) - (x_0, y_0)$$

Vector dirección de la recta.

Ejemplo:

Parametrizar la recta $\mathcal{L}: 2x-3y-6=0$



Solución:

Algunos puntos de $\mathcal{L}$ son:

	P_0	P_1	P_2
x	−3	0	6
y	−4	−2	2

El vector dirección es $\vec{a} = P_1 - P_0 = (3,2)$

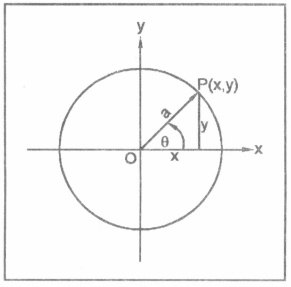
a) Una parametrización de $\mathcal{L}$, es: $\mathcal{L}: \begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = -4 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

b) otra parametrización de $\mathcal{LL}$, es: $\mathcal{L}: \begin{cases} x = 0 + 6t \\ y = -2 + 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Como vemos, la recta tiene una única ecuación rectangular, pero varias ecuaciones paramétricas.

2) Parametrizar la circunferencia $\mathcal{C}$: $x^2 + y^2 = a^2$

Solución:



Si θ es el ángulo que se forma entre OX y $\overrightarrow{OP}$, moviéndose $\overrightarrow{OP}$ en sentido antihorario, se obtiene las coordenadas de $P \in \mathcal{C}$ en términos de θ.

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x = a \cdot \cos\theta \\ y = a \cdot \operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

son las ecuaciones paramétricas de la circunferencia de radio "a" y centro en el origen.

Nota Importante:

Las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$

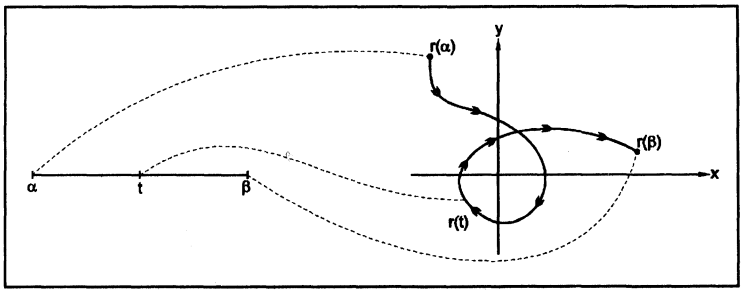
dan origen a dos conceptos matemáticos muy importantes que son: Función Vectorial y Camino.

i) La función vectorial $\vec{r} : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definida por: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$

$t \longrightarrow (x(t), y(t))$

describe a una curva $\mathcal{C}$ y es la trayectoria de un proyectil o partícula.

ii) La función $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$ es un *CAMINO DIRIGIDO*.



a cada número real "t" $\in [\alpha, \beta]$ corresponde el punto $(x(t), y(t))$ perteneciente a la curva $\mathscr{C} \subset \boldsymbol{R}^2$

Ejemplos:

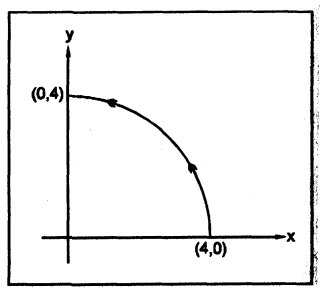
1 Parametrizar parte de la circunferencia: $x^2 + y^2 = 16$ que está definida sólo en el primer cuadrante.

Solución:

Datos: Necesitamos el radio y la variación del ángulo θ.

radio = 4

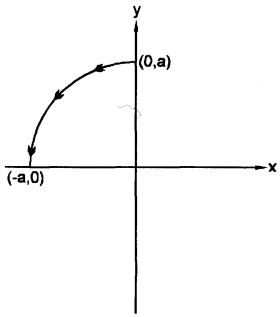
Variación del ángulo: $0 \le \theta \le \pi/2$



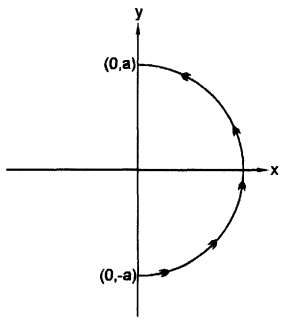
Las ecuaciones paramétricas correspondientes son:

$$\begin{cases} x = 4\cos\theta \\ y = 4\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \qquad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

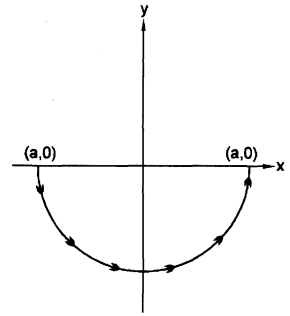
2 Otros ejemplos relativos a la circunferencia: $x^2 + y^2 = a^2$



$$\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = a \cdot \operatorname{sen} t \end{cases} \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$



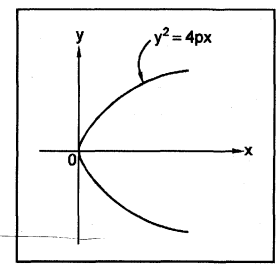
$$\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = a \cdot \operatorname{sen} t \end{cases} \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



$$\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = a \cdot \operatorname{sen} t \end{cases} \quad t \in [\pi, 2\pi]$$

NOTA: Si escribimos $\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = a \cdot \operatorname{sen} t \end{cases}$ $t \in [0, 4\pi]$, el camino es dos vueltas de circunferencia.

3 Parametrización de la parábola.



a) Parametrizar la parábola $\mathcal{P}$: $y^2 = 4px$, $p > 0$

Solución:

Esta parábola se parametriza en función de "m" = pendiente de la recta tangente.

Así: Hallar $\frac{dy}{dx} = m$ de la ecuación $y^2 = 4px$

$$2y \cdot y' = 4p$$

$$y \cdot y' = 2p$$

$y = \frac{2p}{y'} = \frac{2p}{m}$, $m = tg\alpha$, $\alpha =$ ángulo de inclinación de la recta tangente, $y' \neq 0$

Sustituir en: $y^2 = 4px$

$$\frac{4p^2}{m^2} = 4px \quad \Rightarrow \quad x = \frac{p}{m^2}$$

Luego, las ecuaciones paramétricas de $y^2 = 4px$ son:

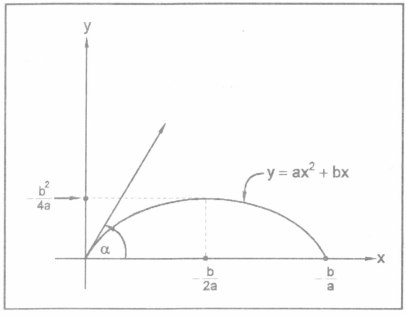
$$P = \begin{cases} x = \frac{p}{m^2} \\ y = \frac{2p}{m} \end{cases} \quad m \neq 0 \qquad \text{ó} \qquad \begin{cases} x = p\ \text{cotg}^2\alpha \\ y = 2p\ \text{cotg}\alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

m : parámetro $\qquad$ α : parámetro

b) Parametrizar la parábola: $y = ax^2 + bx$, $a < 0$, $b > 0$, $0 \leq x \leq -\frac{b}{a}$.

Solución:

El gráfico de esta parábola es:



Esta parábola expresa la trayectoria de un proyectil que es lanzado desde (0,0), llega a su máxima altura en $-\frac{b}{2a}$ y cae en $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$

La parametrización de esta trayectoria parabólica se obtiene hallando el $\cos\alpha$,

($\alpha =$ ángulo de la recta tangente en (0,0)) y expresando la abscisa x de cada punto $P(x,y)$ de la parábola como: $x = (\cos\alpha)t$

$t =$ parámetro.

Veamos:

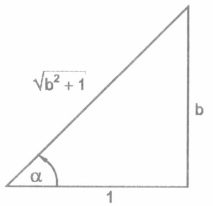
Derivar: $y = ax^2 + bx$

$y' = 2ax + b$

En $x = 0$: $y' = 0 + b$, pero $y' = \operatorname{tg}\alpha$

$\operatorname{tg}\alpha = b$

De $\operatorname{tg}\alpha = b$ se deduce el siguiente triángulo:

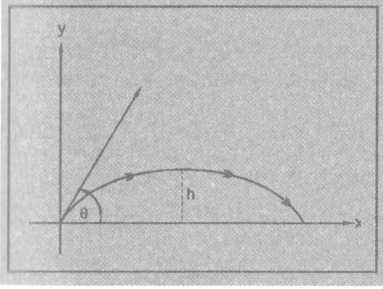


$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{b^2+1}}$

Hacer: $\boxed{x = (\cos\alpha)t}$ y reemplazar en $y = ax^2 + b$ para obtener las ecuaciones paramétricas:

$$P : \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{b^2+1}}\,t \\ y = \dfrac{a}{b^2+1}\,t^2 + \dfrac{b}{\sqrt{b^2+1}}\,t \end{cases} \qquad 0 \le t \le -\frac{b\sqrt{b^2+1}}{a}$$

Caso particular: Curva trayectoria: $y = x \cdot \operatorname{tg}\theta - \dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\,x^2$

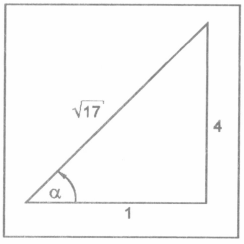


$$P : \begin{cases} x = (v_0\cos\theta)\,t \\ y = (v_0\,\operatorname{sen}\theta)\,t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

v_0 = velocidad del proyectil

t = tiempo

Ejemplo: Parametrizar la parábola $y = -x^2 + 4x$.



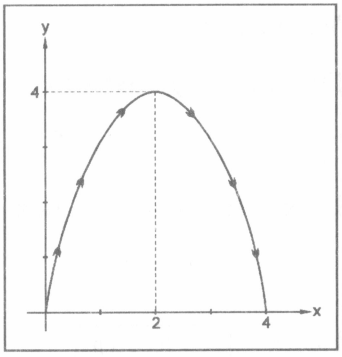
Solución:

Derivar: $y = -x^2 + 4x$

$y' = -2x + 4$

En $x = 0$: $y' = 4$, como $\underbrace{y'}_{4} = \operatorname{tg}\alpha$

Se tiene: $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$



Como: $x = (\cos\alpha)t$

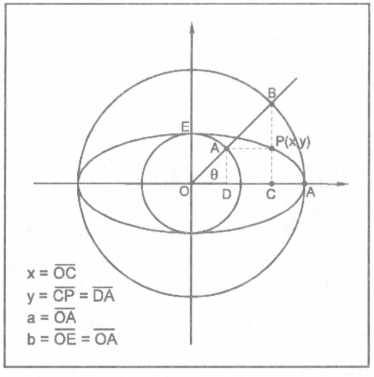
$$x = \frac{1}{\sqrt{17}}t \quad , \quad y = -\left(\frac{1}{\sqrt{17}}t\right)^2 + 4\left(\frac{1}{\sqrt{17}}t\right)$$

La parametrización de la parábola $y = -x^2 + 4x$, es:

$$P: \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{17}}t \\ y = -\frac{1}{17}t^2 + \frac{4}{\sqrt{17}}t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 4\sqrt{17}$$

4 Parametrizar la elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Solución:



Trazar una circunferencia inscrita y otra circunscrita de centro en el origen.

El parámetro es "θ".

Deseamos hallar (x, y) en términos de θ y de los semiejes "a" y "b".

En el triángulo rectángulo OCB se tiene:

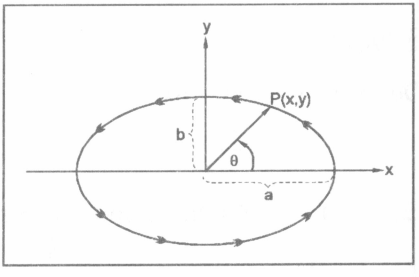
$$\underbrace{\overline{OC}}_{x} = \underbrace{\overline{OB}}_{a} \cdot \cos\theta$$

En el triángulo ODA, se tiene:

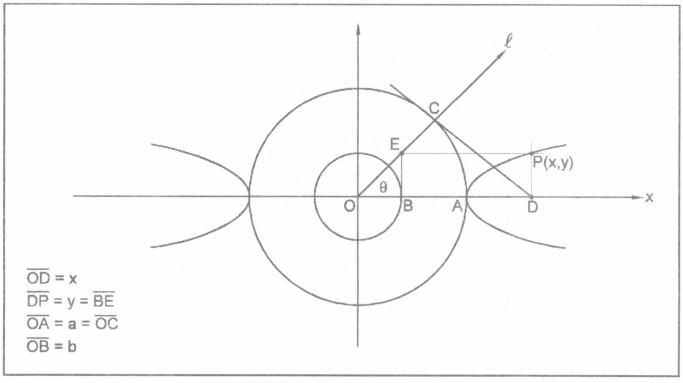
$$\underbrace{\overline{DA}}_{y} = \underbrace{\overline{OA}}_{b} \cdot \operatorname{sen}\theta$$

Por tanto, la parametrización es:

$$\mathcal{E}: \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$



5 Parametrizar la hipérbola: $H: \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$



Trazar dos circunferencias concéntricas de radios: $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$.

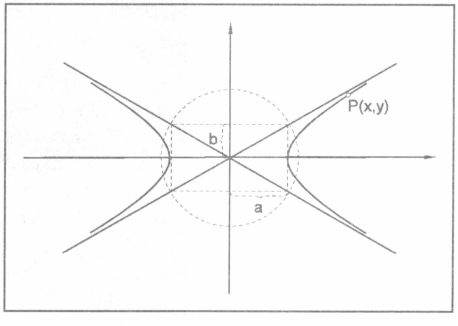
Debo expresar las coordenadas (x, y) en términos de a, b y el parámetro θ.

- En el triángulo rectángulo OCD, se tiene: $\overline{OD} = \overline{OC} \cdot \sec\theta$
  $x = a \cdot \sec\theta$

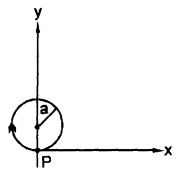
- En el triángulo rectángulo OBE, se tiene: $\overline{BE} = \overline{OB} \cdot \operatorname{tg}\theta$
  $y = b \cdot \operatorname{tg}\theta$

- Por tanto, las ecuaciones paramétricas de una hipérbola se centro en $(0,0)$ y semiejes a y b, son:

$$H: \begin{cases} x = a \cdot \sec\theta \\ y = b \cdot \operatorname{tg}\theta \end{cases} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

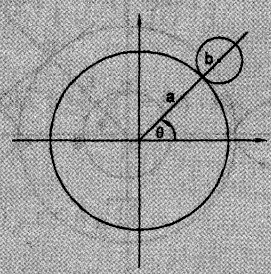


6 Hay tres familias de curvas cuyas ecuaciones paramétricas se generan cuando una circunferencia rueda sobre el eje x o sobre otra circunferencia o en el interior de otra circunferencia.



Al rodar la circunferencia $\mathcal{C}$ de radio "a", el punto P genera la cicloide cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$$



La circunferencia $\mathcal{C}_2$ de radio "b" rueda sobre la circunferencia $\mathcal{C}_1$ de radio "a", generando la epicicloide:

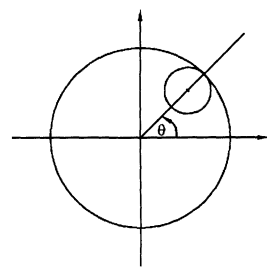
$$\begin{cases} x = (a+b)\cos\theta - b\cos\frac{a+b}{b}\theta \\ y = (a+b)\operatorname{sen}\theta - b\operatorname{sen}\frac{a+b}{b}\theta \end{cases}$$

Si $b = a$, obtenemos la cardioide:

$$\begin{cases} x = 2a\cos\theta - a\cos 2\theta \\ y = 2a\operatorname{sen}\theta - a\operatorname{sen} 2\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a(2\cos\theta - \cos 2\theta) \\ y = a(2\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen} 2\theta) \end{cases}$$

Nota: *En la relación $a = rb$, si r es un número entero, la epicicloide tendrá r picos y r arcos.*



La circunferencia $\mathcal{C}_2$ de radio "b" rueda en el interior de $\mathcal{C}_2$ de radio "a" generando la hipocicloide:

$$\begin{cases} x = (a-b)\cos\theta + b\cos\frac{a-b}{b}\theta \\ y = (a-b)\operatorname{sen}\theta - b\operatorname{sen}\frac{a-b}{b}\theta \end{cases}$$

Haciendo $b = \frac{1}{4}a$ obtenemos:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4}a\cdot\cos\theta + \frac{a}{4}\cos 3\theta \\ y = \frac{3}{4}a\cdot\cos\theta - \frac{a}{4}\cos 3\theta \end{cases}$$

Sustituir:

$$\begin{cases} \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \\ \operatorname{sen} 3\theta = 3\operatorname{sen}\theta - 4\operatorname{sen}^3\theta \end{cases}$$

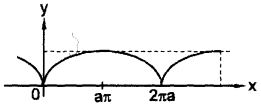
y obtenemos la ASTROIDE:

$$\begin{cases} x = a\cdot\cos^3\theta \\ y = a\cdot\operatorname{sen}^3\theta \end{cases}$$

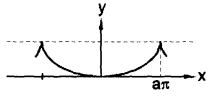
7 Otras curvas expresadas por ecuaciones paramétricas:

1 CICLOIDE

$$\begin{cases} x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$$



CICLOIDE DE VERTICE EN (0,0)

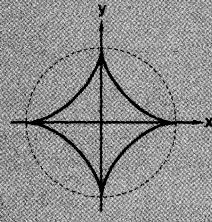


$$\begin{cases} x = a(\theta + \operatorname{sen}\theta) \\ y = a(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

2 LA ASTROIDE

$$\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\operatorname{sen}^3\theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

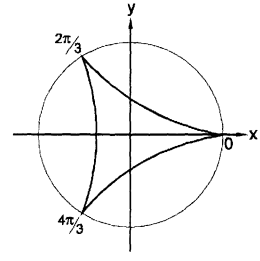
$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$



La astroide es una hipocicloide de 4 picos.

3 HIPOCICLOIDE DE 3 PICOS.

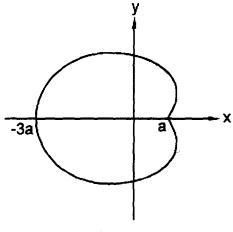
$$\begin{cases} x = 2a\cos t + a\cos 2t \\ y = 2a\operatorname{sen} t - a\operatorname{sen} 2t \end{cases} \quad a > 0$$



4 LA CARDIOIDE

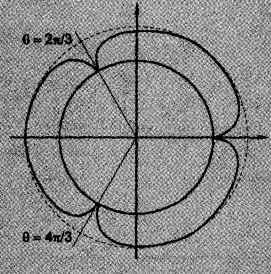
$$\begin{cases} x = a(2\cos t - \cos 2t) \\ y = a(2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t) \end{cases}$$

$$t \in [0, 2\pi]$$



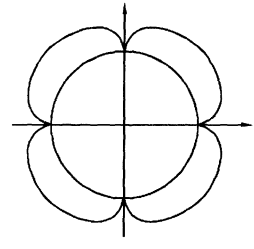
5 EPICICLOIDE DE 3 PICOS

$$\begin{cases} x = 4\cos\theta - \cos 4\theta \\ y = 4\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen} 4\theta \end{cases}$$



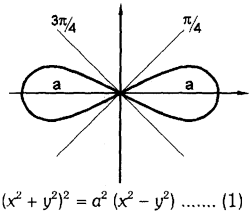
6 EPICICLOIDE DE 4 PICOS

$$\begin{cases} x = 5\cos t - \cos 5t \\ y = 5\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 5t \end{cases}$$



7 LEMNISCATA DE BERNOULLI

$$\begin{cases} x = \dfrac{a\sqrt{1-t^4}}{1+t^4} \\ y = \dfrac{at^2\sqrt{1-t^4}}{1+t^4} \end{cases} \quad -1 \le t \le 1$$



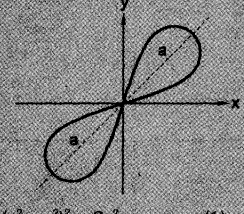
$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \ldots\ldots (1)$$

$$r^2 = a^2\cos 2\theta$$

$y = t^2 x$ parametriza (1)

8 LEMNISCATA ROSA DE DOS HOJAS

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}a\dfrac{t}{1+t^4} \\ y = \sqrt{2}a\dfrac{t^3}{1+t^4} \end{cases}$$



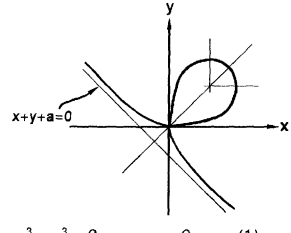
$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy \ldots\ldots (1)$$

$$r^2 = a^2\operatorname{sen} 2\theta$$

$y = t^2 x$ parametriza (1)

9 FOLIUM DE DESCARTES

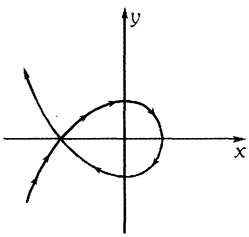
$$\begin{cases} x = 3a\dfrac{t}{1+t^3} \\ y = 3a\dfrac{t^2}{1+t^3} \end{cases} \quad t \neq -1$$



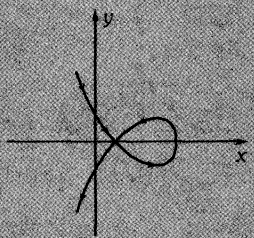
$$x^3 + y^3 = 3a\,x\,y\,,\ a > 0 \ldots\ldots (1)$$

$y = tx$ parametriza (1)

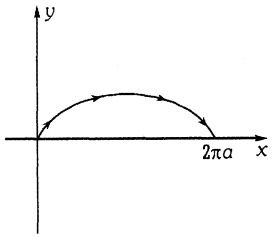
$$\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = 4t - t \end{cases}$$



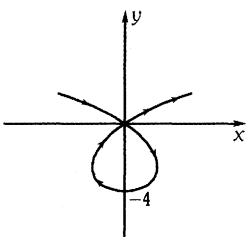
$$\begin{cases} x = 4 - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases}$$



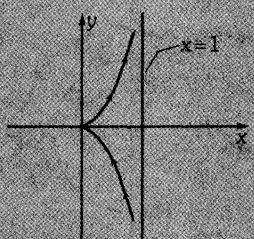
$$\begin{cases} x = at \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$



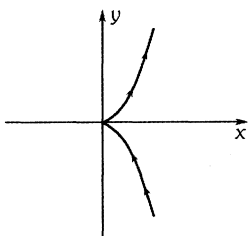
$$\begin{cases} x = t^3 - 4t \\ y = t^2 - 4 \end{cases}$$



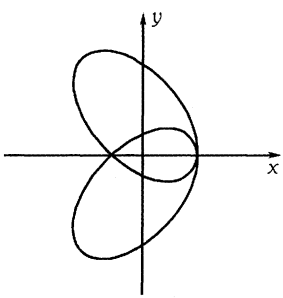
$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ y = \dfrac{t^3}{1+t^2} \end{cases}$$



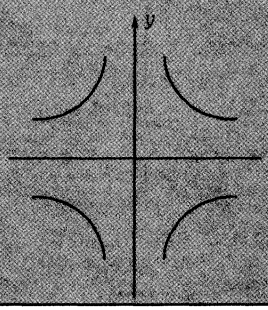
$$\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 4t^3 \end{cases}$$



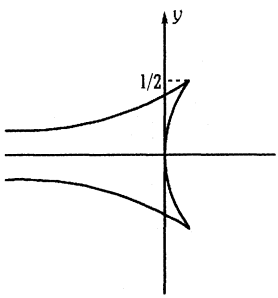
$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} 2t - \operatorname{sen} t \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = \operatorname{tg} t \\ y = \dfrac{1}{\operatorname{sen} t} \end{cases}$$

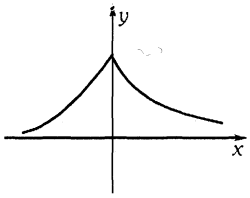


$$\begin{cases} x = \cos^2 t + \operatorname{Ln} \operatorname{sen} t \\ y = \operatorname{sen} t \cdot \cos t \end{cases}$$



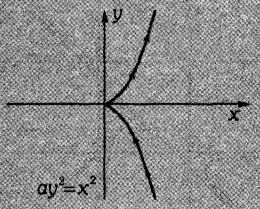
LA TRACTRIZ:

$$\begin{cases} x = a\left(\text{Ln tg}\,\frac{t}{2} + \cos t\right) \\ y = a\,\text{sen}\,t \end{cases}$$



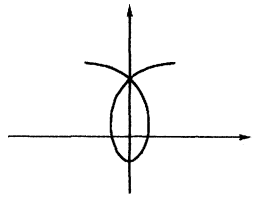
PARÁBOLA SEMICÚBICA

$$\begin{cases} x = at^2 \\ y = at^3 \end{cases}$$

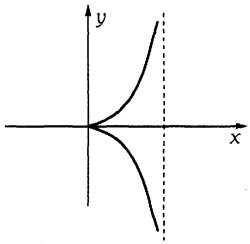


CICLOIDE PROLADA

$$\begin{cases} x = 2t - \pi\,\text{sen}\,t \\ y = 2 - \pi\cos t \end{cases}$$



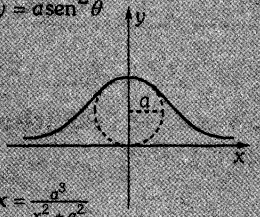
$$\begin{cases} x = 2\,\text{sen}^2\theta \\ y = 2\,\text{sen}^2 tg\,\theta \end{cases} \quad 0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$$



BRUJA DE AGNESI

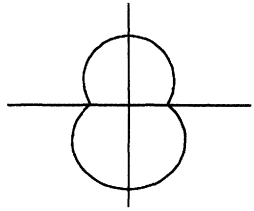
$$\begin{cases} x = 2\,\text{ctg}\,\theta \\ y = 2\,\text{sen}^2\theta \end{cases} \quad 0 < \theta < \pi$$

$$\begin{cases} x = a\,\text{ctg}\,\theta \\ y = a\,\text{sen}^2\theta \end{cases}$$



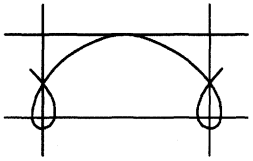
NEFROIDE

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}a(3\cos\theta - \cos 3\theta) \\ y = \frac{1}{2}a(3\,\text{sen}\,\theta - \text{sen}\,3\theta) \end{cases}$$



CICLOIDE PROLADA

$$\begin{cases} x = \theta - \frac{2}{3}\,\text{sen}\,\theta \\ y = 1 - \frac{3}{2}\cos\theta \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = a\theta - b\,\text{sen}\,\theta \\ y = a - b\cos\theta \end{cases}$$

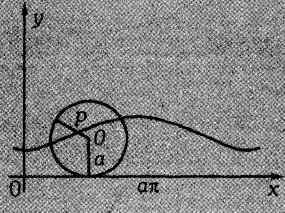
ECUACIONES GENERALES

CICLOIDE CURLATA

$$\begin{cases} x = 2\theta - \text{sen}\,\theta \\ y = 2 - \cos\theta \end{cases}$$

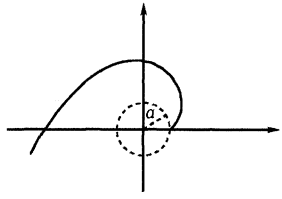
Las ecuaciones generales:

$$\begin{cases} x = a\theta - b\cdot\text{sen}\,\theta & a > b \\ y = a - b\cdot\cos\theta & \overline{OP} = b \end{cases}$$

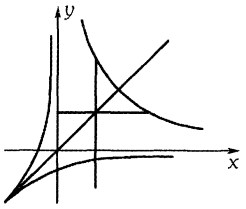


INVOLUTA DEL CÍRCULO

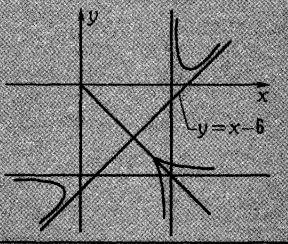
$$\begin{cases} x = a\cos\theta + a\,\text{sen}\,\theta \\ y = a\,\text{sen}\,\theta + a\cos\theta \end{cases}$$



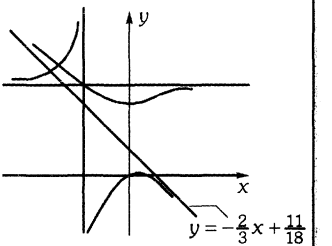
$$\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = \dfrac{1+2t}{t^2} \end{cases}$$



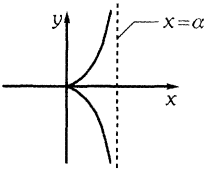
$$\begin{cases} x = \dfrac{(t+2)^2}{t+1} \\ y = \dfrac{(t-2)^2}{t-1} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{t^2-1} \\ y = \dfrac{t-2}{(t-1)(t+2)} \end{cases}$$



CISOIDE DE DIOCLES



1) $y^2(a-x) = x^3$

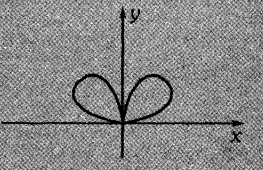
se parametriza con $y = tx$

2) $x = \dfrac{at^2}{1+t^2}$

$y = \dfrac{at^3}{1+t^2}$

3) $r = a\,\text{sen}\,\text{tg}\,\theta$

BIFOLIUM

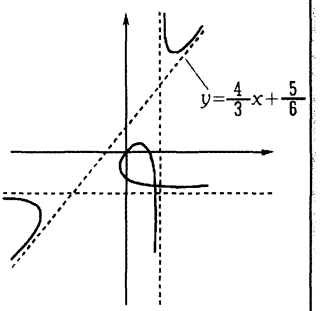


1) $(x^2+y^2)^2 = ax^2y$

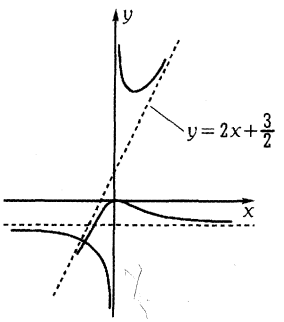
2) con $y = tx \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{at}{(1+t^2)^2} \\ y = \dfrac{at^2}{(1+t^2)^2} \end{cases}$

3) $r = a \cdot \text{sen}\theta \cdot \cos^2\theta$

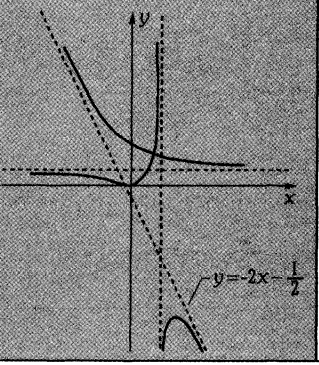
$$\begin{cases} x = \dfrac{t+2}{t^2-1} \\ y = \dfrac{t+5}{t^2-4t+3} \end{cases}$$



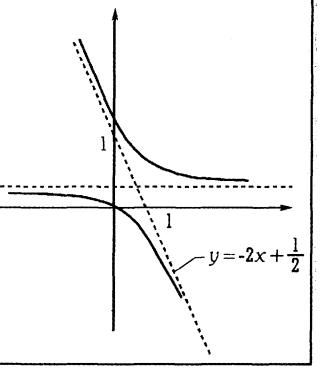
$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{t^2-1} \\ y = \dfrac{t^2}{t-1} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{t^2-1} \\ y = \dfrac{1}{(t-1)(t-2)} \end{cases}$$



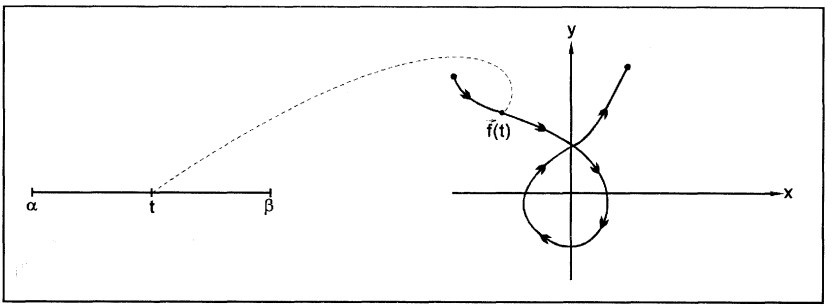
$$\begin{cases} x = \dfrac{t(t+2)}{t^2-1} \\ y = \dfrac{t}{t+1} \end{cases}$$



3. FUNCIÓN VECTORIAL

Sea: $I = [\alpha, \beta]$ un intervalo contenido en $\mathbb{R}$.

Diremos que $\vec{f}$ es una función de I en $\mathbb{R}^2$, si a cada $t \in I$ corresponde un único vector $(x(t), y(t))$ tal que: $\vec{f}(t) = (x(t), y(t))$.



Una función de la forma $f(t) = (x(t), y(t))$ se conoce como función vectorial

$$= x(t)i + y(t)y$$

Ejemplos:

1. Sea la función vectorial $\vec{f} : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por: $\vec{f} : (t) = (t, 2t^2)$
2. $\vec{g}(t) = (5\cos\theta, 5sen\theta)$, $\theta \in [0, \pi]$
3. $\vec{h}(t) = (1 - t^2 \cdot 4t - t^3)$, $t \in \mathbb{R}$

3.1. IMAGEN DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

Sea $\vec{f} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función vectorial tal que: $\vec{f}(t) = (x(t), y(t))$

Definimos: $\text{Im}(\vec{f}) = \{(x(t), y(t)) / t \in [\alpha, \beta]\}$

Imagen de $\vec{f}$, es el conjunto de parejas ordenadas $(x(t), y(t))$ pertenecientes al plano $\mathbb{R}^2$, tal que $t \in [\alpha, \beta]$.

La $\text{Im}(\vec{f})$ se llama GRAFICA de $\vec{f}$.

4. DEFINICIÓN DE CURVA PLANA

Sea: $\vec{f} : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una función vectorial que toma valores en $\mathbb{R}^2$ describiendo un conjunto de puntos $\vec{f}(t)$ llamado gráfica de $\vec{f}$.

Si $\vec{f}$ es continua en $[\alpha, \beta]$, la gráfica de $\vec{f}$ se llama CURVA.

Sea $C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t \in [\alpha, \beta]$ ó $\vec{f}(t) = (x(t), y(t))$

Decir que $\vec{f}(t)$ es continua en $[\alpha, \beta]$ implica que cada una de las funciones **reales** $x(t)$, $y(t)$ es continua en $[\alpha, \beta]$.

Por lo **tanto**, si cada una de las funciones reales $x(t)$, $y(t)$ son continuas en $[\alpha, \beta]$ diremos que $\mathcal{C}$ es la curva descrita por $\vec{f}$.

4.1. PARAMETRIZACIÓN DE UNA CURVA C

Definición: Sea la función vectorial $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$

A la **función** $\vec{r}(t)$ que describe a una curva $\mathcal{C}$ se llama una ***PARAMETRIZACIÓN DE*** $\mathcal{C}$.

Ejemplo 1.

$\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 9$ es descrita por la ***PARAMETRIZACIÓN***:

$\vec{r}(t) = (3\cos t, 3\text{sen}t)$, $0 \le t \le 2\pi$

También se dice: $\mathcal{C}$ ha sido ***PARAMETRIZADO*** por:

$$\vec{r}(t) = (3\cos t\,,\, 3\operatorname{sen} t) \quad , \quad [0\,,\,2\pi]$$

Ejemplo 2.

$C: x^3 + y^3 = 3axy$ es descrita por la parametrización:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases} \qquad t \neq -1$$

Esta parametrización se logra haciendo $y = tx$.

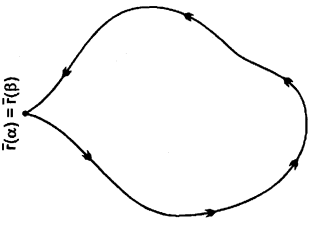
5. CAMINO O TRAYECTORIA

Definición: A una curva C con una parametrización $\vec{r}(t)$ se le llama ***CAMINO*** o ***TRAYECTORIA***.

Las curvas pueden ser cerradas o abiertas.

$\vec{r}: [\alpha,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

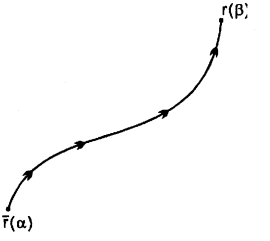
$t \longrightarrow \vec{r}(t) = (x(t), y(t))$



Curva Cerrada

$\vec{r}: [\alpha,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$t \longrightarrow \vec{r}(t) = (x(t), y(t))$



Curva Abierta

6. CURVA CERRADA (lazo)

Definición: La función $\vec{r}:[\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ describe una ***CURVA CERRADA*** $\mathcal{C}$ si $\vec{r}(\alpha)=\vec{r}(\beta)$

Ejemplos:

1) $\vec{r}(t)=(a\cos t, a\operatorname{sen} t)$, $t \in [\overrightarrow{0, 2\pi}]$

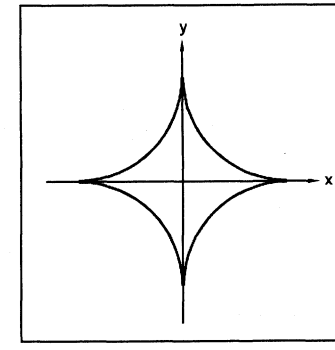
describe una curva cerrada, porque $\vec{r}(0)=\vec{r}(2\pi)$.

Pues: $\vec{r}(0)=(a\cdot\cos 0, a\operatorname{sen} 0)$ y $\vec{r}(2\pi)=(a\cdot\cos 2\pi, a\operatorname{sen} 2\pi)$

$=(a,0)$ $=(a,0)$

2) $\mathcal{C}$: $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\operatorname{sen}^3 t \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$

es una curva cerrada.



3) $\mathcal{C}$: $\begin{cases} x=a(2\cos t-\cos 2t) \\ y=a(2\operatorname{sen} t-\operatorname{sen} 2t) \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$

es una curva cerrada.

4) $\vec{r}(t)=(5\cos t-\cos 5t, 5\operatorname{sen} t-\operatorname{sen} 5t)$ (t), $0\le t\le 2\pi$

es una curva cerrada porque $\vec{r}(0)=\vec{r}(2\pi)$.

7. PUNTO MÚLTIPLE

Definición: Se dice que $P(x(t), y(t))$ es un punto múltiple si existen por lo menos dos valores de t:

$t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$, $t_1 \neq t_2$ tal qué $(x(t_1), y(t_1)) = (x(t_2), y(t_2))$

Ejemplo:

Hallar los puntos dobles del arco parametrizado:

$$\begin{cases} x = 2t + t^2 \\ y = 2t - \dfrac{1}{t^2} \end{cases} \qquad t \neq 0$$

Solución:

Sean: t_1 y t_2, $t_1 \neq t_2$ tal que $(x(t_1), y(t_1)) = (x(t_2), y(t_2))$

Se obtienen las ecuaciones simultáneas:

$$x(t_1) = x(t_2) \Rightarrow 2t_1 + t_1^2 = 2t_2 + t_2^2 \Rightarrow 2(t_1 - t_2) + (t_1 - t_2)(t_1 + t_2) = 0$$

$$y(t_1) = y(t_2) \Rightarrow 2t_1 - \frac{1}{t_1^2} = 2t_2 - \frac{1}{t_2^2} \Rightarrow 2(t_1 - t_2) + \frac{(t_1 - t_2)(t_1 + t_2)}{t_1^2 + t_2^2} = 0$$

Como: $t_1 \neq t_2$, se reduce a: $\begin{cases} 2 + t_1 + t_2 = 0 \\ 2 + \dfrac{t_1 + t_2}{t_1^2\, t_2^2} = 0 \end{cases}$

Hacer: $\begin{cases} S = t_1 + t_2 \\ P = t_1\, t_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 + s = 0 \Rightarrow s = -2 \\ 2 + \dfrac{s}{p^2} = 0 \Rightarrow P^2 = 1 \end{cases}$

Obtenemos:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = -2 \\ t_1\, t_2 = 1 \end{cases} \vee \quad t_1\, t_2 = -1$$

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = -2 \\ t_1\, t_2 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} t_1 + t_2 = -2 \\ t_1\, t_2 = -1 \end{cases}$$

FL FreeLibros

$$t_1 + \frac{1}{t_1} = -2 \qquad\qquad t_1 - \frac{1}{t_1} = -2$$

$$t_1^2 + 2t_1 + 1 = 0$$

$$(t_1 + 1)^2 = 0 \qquad\qquad t_1^2 + 2t_1 - 1 = 0$$

$$t_1 = -1 \qquad\qquad t_1 = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$t_2 = -1 \qquad\qquad t_1 = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$\Uparrow \qquad\qquad t_1 = -1 \pm \sqrt{2}$$

Estas soluciones no se toman en cuenta, porque se necesita $t_1 \neq t_2$

Si: $t_1 = -1 + \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -5 \end{cases}$ Si: $t_2 = -1 - \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -5 \end{cases}$

8. CURVA REGULAR (SUAVE O RECTIFICABLE)

Una curva $\mathcal{C}$: $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ $t \in I = [\alpha, \beta]$

Se denomina **REGULAR** (suave o rectificable) si cumple dos propiedades:

1. Las derivadas $f'(t)$ y $g'(t)$ son continuas en $]\alpha, \beta[$ y;
2. $f'(t)$ y $g'(t)$ no se anulan simultáneamente en $[\alpha, \beta]$ excepto quizás en los puntos extremos del intervalo $[\alpha, \beta]$. Esto es lo mismo que decir:

$$f'^2(t) + g'^2(t) \neq 0 \ ; \ \forall\, t \in]\alpha, \beta[$$

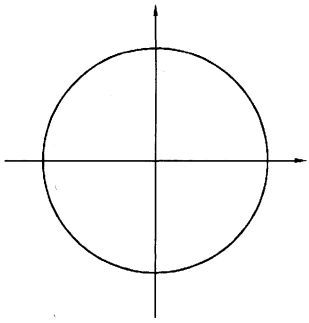
DEFINICIÓN EQUIVALENTE

Sea $\mathcal{C}: \vec{r}:[\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ un camino, continuo en $[\alpha,\beta]$. El camino $\vec{r}(t)$ se llama ***REGULAR***, si existe el vector derivada $r'(t) \neq 0$ y esta derivada es ***CONTINUA*** en el intervalo abierto $]\alpha,\beta[$.

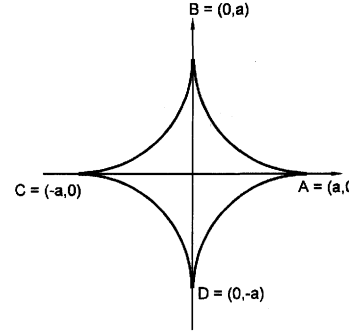
INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DE CURVA REGULAR

Sean las curvas:

$$\mathcal{C}_1: \begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = a \cdot \operatorname{sen} t \end{cases} \quad t \in [0,2\pi] \qquad \mathcal{C}_2: \begin{cases} x = a \cdot \cos^3 t \\ y = a \cdot \operatorname{sen}^3 t \end{cases} \quad t \in [0,2\pi]$$



En este caso $\mathcal{C}_1$ es regular en todo $t \in [0,2\pi]$. Geométricamente significa que $\mathcal{C}_1$ no tiene puntas aguja en todo $[0,2\pi]$.



En este caso, $\mathcal{C}_2$ no es regular en los puntos $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$.

Geométricamente, significa que C_1 tiene puntas aguja en $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ cuyas imágenes son: $A(0,a)$, $B(0,a)$, $C(-a,0)$, $D(0,-a)$.

¿Cómo se hallan las ***PUNTAS-AGUJA*** de una curva $\mathcal{C}$?

Algebraicamente, las Puntas - si existen - se hallan del siguiente modo:

1° Derivar las ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f'(t) \\ \frac{dy}{dt} = g'(t) \end{cases}$

2° Resolver simultáneamente: $\begin{cases} f'(t) = 0 \\ g'(t) = 0 \end{cases}$

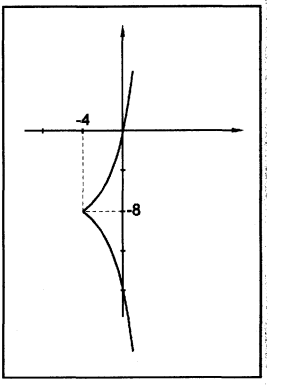
3° Aquellos puntos $t \in [\alpha, \beta]$ en los cuales $r'(t) = (0,0)$ son los puntos *NO-REGULARES*.

Ejemplo 1.

Sea: $\mathcal{C}: \begin{cases} x = t^2 - 4 \\ y = t^3 - 8 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Hallar los ángulos (puntas-aguja), si existen, en los cuales $\mathcal{C}$ es no-regular.

Solución:



1° Derivar: $\begin{cases} x' = 2t \\ y' = 3t^2 \end{cases}$

2° Resolver: $\left.\begin{cases} 2t = 0 \\ 3t^3 = 0 \end{cases}\right\rangle \quad t = 0$

3° En $t = 0$, se cumple $r'(0) = (0,0)$, entonces existe una ***PUNTA*** en $t = 0$, que es:

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = -8 \end{cases} \qquad r(0) = (-4, -8)$$

Ejemplo 2.

Sea: $\mathcal{C}: \begin{cases} x = a \cdot \cos^3 t \\ y = a \cdot \operatorname{sen}^3 t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$

Estudiar si existen "***PUNTAS-AGUJA***".

Solución:

1° Derivar $\mathcal{C}: \begin{cases} x'(t) = -3a \cos^3 \ t \cdot \operatorname{sen} t \\ y'(t) = -3a \operatorname{sen}^2 \ t \cdot \cos t \end{cases}$

2° Resolver $\begin{cases} -3a \cos^2 t \cdot \operatorname{sen} t = 0 \\ 3a \operatorname{sen}^2 t \cdot \cos t = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \cos t \cdot \operatorname{sen} t = 0 \\ \operatorname{sen} t \cdot \cos t = 0 \end{cases}$

$\cos t = 0 \quad \vee \quad \operatorname{sen} t = 0$

$t = \pi/2 \qquad t = 0$

$t = 3\pi/2 \qquad t = \pi$

$t = 2\pi$

3° Se cumplen: $r'(0) = r'(\pi/2) = r'(\pi) = r'(3\pi/2) = r'(2\pi) = (0,0)$

Luego, en $t = 0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2,\ 2\pi$ la curva $\mathcal{C}$ es no – regular

LAS PUNTAS SON: $r(0) = (a,0),\ r(\pi/2) = (0,a),\ r(\pi) = (-a,0)$

$r(3\pi/2) = (0,-a),\ r(2\pi) = (a,0)$

Ejemplo 3. Hallar los puntos no-regulares, si existen, de la curva:

$\begin{cases} x = a(2\cos t + \cos 2t) \\ y = a(2\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 2t) \end{cases} \quad t \in [0\ ,\ 2\pi]$

Solución:

1° Derivar: $\begin{cases} x'(t) = a[-2\operatorname{sen} t - 2\operatorname{sen} 2t] \\ y'(t) = a[2\cos t - 2\cos 2t] \end{cases}$

2° Resolver: $\begin{cases} x'(t) = 0 \Rightarrow -2\operatorname{sen} t - 2\operatorname{sen} 2t = 0 \quad (1) \\ y'(t) = 0 \Rightarrow 2\cos t - 2\cos 2t = 0 \quad (2) \end{cases}$

De (1):

$\operatorname{sen} t + 2\operatorname{sen} t \cdot \cos t = 0$

$\operatorname{sen} t(1 + 2\cos t) = 0$

$\operatorname{sen} t = 0 \quad \vee \quad \cos t = -\frac{1}{2}$

$t = 0\ ,\ \pi\ ,\ 2\pi \quad \vee \quad t = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

De (2):

$\cos t - [2\cos^2 t - 1] = 0$

$2\cos^2 t - \cos t - 1 = 0$

$(2\cos t + 1)(\cos t - 1) = 0$

$\cos t = -\frac{1}{2} \quad \vee \quad \cos t = 1$

$t = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \quad \vee \quad t = 0, 2\pi$

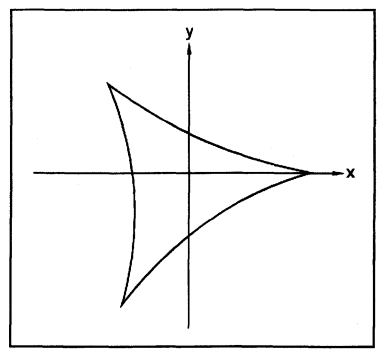
Las derivadas $\begin{cases} x'(t) \\ y'(t) \end{cases}$ se anulan simultáneamente en $t = 0\ ,\ \frac{2\pi}{3}\ ,\ \frac{4\pi}{3}$.

3° Los puntos no-regulares (Punta-aguja), son:

$$r(0) = (3a, 0)$$

$$r(2\pi/3) = \left(-\frac{3a}{2}, \frac{3\sqrt{3}a}{2}\right)$$

$$r(4\pi/3) = \left(-\frac{3a}{2}, \frac{-3\sqrt{3}a}{2}\right)$$



9. DERIVADA PARAMÉTRICA

Dadas las ecuaciones paramétricas de una curva.

$\mathcal{C}: \begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $t \in [\alpha, \beta]$, deseamos saber en qué momento existe la función $y = f(x)$ tal que $D_x y = \dfrac{D_t y}{D_t x}$.

Este problema se resuelve, en la siguiente proposición:

Proposición: Sean: $x = \phi(t)$ y $y = \psi(t)$ dos funciones derivables en el intervalo $\langle \alpha, \beta \rangle$ y supongamos que $x = \phi(t)$ tiene inversa $t = \phi^*(x)$ derivable en $\langle \alpha, \beta \rangle$.

Si en cada punto $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ se tiene $\phi'(t) \neq 0$, entonces las ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ implican que existe una función $f(x)$ derivable tal que $y = f(x)$ y $D_x y = \dfrac{D_t y}{D_t x}$

Demostración:

1) Como $y = \phi(t)$ $\wedge$ $t = \phi^*(x)$ es derivable $y \overset{f}{\longrightarrow} t \longrightarrow x$

Entonces por la regla de la cadena, tenemos:

$D_x y = D_t y \cdot D_x t$ ..... (1*)

2) Como existe $t = \phi^*(x)$ derivable en $\langle \alpha, \beta \rangle$ y $\phi'(t) \neq 0$, entonces:

$D_x t = D_x \phi^* = \dfrac{1}{D_x \phi} = \dfrac{1}{D_x y}$ ..... (2*)

3) Sustituir (2*) en (1*)

$D_x y = \dfrac{D_t y}{D_t x}$. También se denota por $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}}$

Derivada de Y con respecto a X.

si $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, $y = f(x)$

NOTA: Si $t = \phi^*(t) \Rightarrow D_x = D_x\phi^*$ derivada de la inversa ϕ^*

$$= \frac{1}{D_x\phi}, \quad \phi(t) = x$$

10. TANGENTES

Dada una curva $\mathcal{C}$, cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$$

Deseamos hallar la ecuación de una recta tangente en un punto $t_0 \in [\alpha, \beta]$.

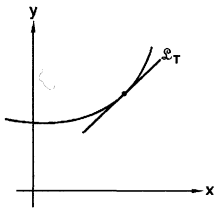
Como en toda recta tangente el problema es hallar su respectiva pendiente y dicha pendiente es la derivada de "y respecto de x en t_0", es decir:

$D_x y]_{t_0} = \frac{\psi'(t_0)}{\phi'(t_0)} =$ pendiente de la recta tangente en t_0.

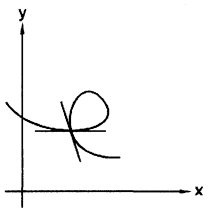
Desde el momento que "aparece" derivadas, el problema es garantizar la ***EXISTENCIA DE LA DERIVADA*** en t_0. Esto lo confirmaremos en la siguiente proposición.

Proposición: La pendiente de una recta $\mathcal{L}_T$, que es tangente a la curva $\mathcal{C}: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \; t \in [\alpha, \beta]$ en un punto $t \in [\alpha, \beta]$ existe, si $x'(t)$ e $y'(t)$ son continuas y $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \neq 0$.

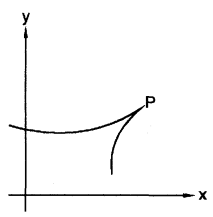
Según la proposición podemos deducir algunas consecuencias que ilustramos en los siguientes gráficos:



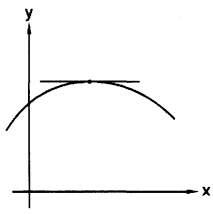
Una sola tangente
En este caso existe y es única $D_x y]_{t_0}$.



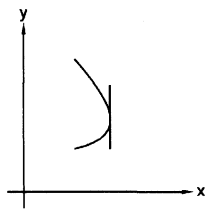
Dos tangentes en t_1 y t_2
$t_1 \neq t_2 \quad D_x y]_{t_1} \neq D_x y]_{t_2}$



En t_0 no existe tangente.
En este caso se cumple simultáneamente
$x'(t_0) = y'(t_0) = 0$



Tangente horizontal
En este caso se cumple.
$D_t y = 0$ en t_0



Tangente vertical.
En este caso se cumple:
$D_t x = 0$ en t_0

11. GRÁFICA DE UNA CURVA EN COORDENADAS PARAMÉTRICAS

Para graficar una curva $\mathcal{C}$ cuyos ecuaciones paramétricas son:

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in D_{x \cap y}$$

se sugiere seguir los siguientes pasos:

1. INTERSECCIÓN CON LOS EJES

a) Con el eje X: Se resuelve $y(t) = 0$

Si existen soluciones t_1, evaluar $x(t_i)$

b) Con el eje Y: Se resuelve $x(t) = 0$

Si existen soluciones t_i, evaluar $y(t_i)$

2. SIMETRÍAS

a) Respecto al eje X:

Si $\forall\ t_1 \in D_{x \cap y}$; $\exists\ t_2 \in D_{x \cap y}$ tal que: $(x(t_2), y(t_2)) = (x(t_1), -y(t_1))$

Un caso particular es cuando ocurre: Si $x(t)$ es ***PAR*** y $y(t)$ ***IMPAR***, la gráfica es simétrica respecto al eje X.

b) Respecto al eje Y:

Si $\forall\ t_1 \in D_{x \cap y}$; $\exists\ t_2 \in D_{x \cap y}$ tal que: $(x(t_2), y(t_2)) = (-x(t_1), y(t_1))$

Un caso particular es, si $x(t)$ es **IMPAR** y $y(t)$ es **PAR**, la gráfica resulta simétrica respecto al eje Y.

3. TANGENTES

En la fórmula de la derivada ***PARAMÉTRICA***: $D_x y = \frac{D_t y}{D_t x}$

Se hace el siguiente análisis:

a) Las tangentes horizontales se obtienen resolviendo $D_t y = 0$.

b) Las tangentes verticales se obtienen resolviendo $D_t x = 0$.

Si existen soluciones comunes para $D_t y = D_t x = 0$, se presentará un punto singular.

c) **PUNTOS CRÍTICOS Y MONOTONÍA.**
Los puntos críticos son:

i) Aquellos valores de $t \in D_{x \cap y}$ e n los cuales $D_x y = 0$

ii) Valores de t en los cuales $\nexists\ D_x\ y$

Como: $D_x y = \frac{D_t y}{D_t x}$

entonces no existe $D_x y$ en aquellos valores de t en los cuales: $D_t x = 0$

El total de los puntos críticos se obtiene uniendo todos los valores de t obtenidos en *i)* y *ii)*

iii) Los extremos de $[\alpha, \beta] = D_{x \cap y}$ son también puntos críticos

iv) Monotonía (¿En qué intervalos, la función $y = f(x)$ es creciente o decreciente)

4. PUNTOS MÚLTIPLES

Un punto $P(x(t), y(t))$ se dice que es un punto múltiple si existen por lo menos dos valores de t: t_1, $t_2 \in D_{x \cap y}$, $t_1 \neq t_2$ tal que cumpla:

$$(x(t_1), y(t_1)) = (x(t_2), y(t_2))$$

5. EXTENSIÓN Y ZONIFICACIÓN

En esta parte se debe hallar:

a) El recorrido de "x"

b) El recorrido de "y"

c) Asíntotas: verticales, horizontales y oblicuas.

6. TABULACIÓN

Para algunos valores de $t \in D_{x \cap y}$ se hallan las parejas $(x(t), y(t))$

Ejemplo 1.

Discutir la gráfica de la siguiente curva cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = a \cdot \cos^3 t \\ y = a \cdot \operatorname{sen}^3 t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Solución:

1. Intersección con los ejes:

a) Con el eje X. Se resuelve $y = 0$

$$a\,\text{sen}^3 t = 0$$
$$\text{sen}\,t = 0$$
$$t = 0\ ,\ \pi$$

Para $t = 0$, obtenemos el punto $A = (a, 0)$

Para $t = \pi$, obtenemos el punto $B = (-a, 0)$

b) Con EL EJE Y. Se resuelve $x = 0$

$$a\cos^3 t = 0$$
$$\cos t = 0$$
$$t = \tfrac{\pi}{2}\ ,\ \tfrac{3\pi}{2}$$

Para $t = \frac{\pi}{2}$ se obtiene el punto $C = (0, a)$

Para $t = \frac{3\pi}{2}$ se obtiene el punto $D = (0, -a)$

2. Simetrías

a) Respecto al eje X:

Se cumplen: $x(-t) = a\cos^3(-t) = a \cdot \cos^3 t = x(t)$

$$y(-t) = a\,\text{sen}^3(-t) = -a\,\text{sen}^3 t = -y(t)$$

implica que es simétrica respecto al eje X.

b) Respecto al eje Y:

Se cumple: $x(\pi - t) = -(t) \ \wedge \ y(\pi - t) = y(t)$, lo cual implica que es simétrica respecto al eje Y.

c) Respecto a la bisectriz $y = x$:

Se cumple: $x\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = y(t) \ \wedge \ y\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = x(t)$, lo cual implica que la curva es simétrica con respecto al origen.

3. Tangentes. Hallemos $D_x y$

Se tiene: $D_t y = 3a\,\text{sen}^2 t \cdot \cos t$

$$D_t x = -3a\cos^2 t \cdot \text{sen}\, t$$

$$\Rightarrow \quad D_x y = \frac{3a\,\text{sen}^2 t \cdot \cos t}{-3a\cos^2 t \cdot \text{sen}\, t} = -\frac{\text{sen}\, t}{\cos t} = -\text{tg}\, t$$

Concluimos que existen tangentes únicas en $\forall t$, tal que $D_t x \neq 0$, es decir:

$$-3a\cos^2 t\,\text{sen}\, t \neq 0 \leftrightarrow \cos t \cdot \text{sen}\, t \neq 0 \longleftrightarrow t \neq 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi.$$

No existen tangentes únicas en los puntos-aguja, es decir en aquellos valores de t tales que: $D_t x = 0 \ \wedge \ D_t y = 0$ que viene a ser: $t = 0, \ \frac{\pi}{2}, \ \pi, \ \frac{3\pi}{2}, \ 2\pi$

Estos valores se obtienen así:

De: $D_t y = 0 \longleftrightarrow 3a\,\text{sen}^2 t \cdot \cos t = 0$

$$\longleftrightarrow \text{sen}\, t = 0 \quad \vee \quad \cos t = 0$$

$$\longleftrightarrow t = 0, \pi, 2\pi \quad \vee \quad t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

De $D_t x = 0 \longleftrightarrow -3a\cos^2 t\,\text{sen}\, t = 0$

$$\longleftrightarrow \cos t = 0 \quad \vee \quad \text{sen}\, t = 0$$

$$\longleftrightarrow t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \qquad t = 0, \pi, 2\pi$$

No existen tangentes verticales ni horizontales.

Puntos críticos:

i) De: $D_x y = 0$ obtenemos $3a\,\text{sen}^2 t \cdot \cos t = 0 \ \Rightarrow \ t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$

ii) Valores de t en los cuales no existe $D_x y$, se obtiene de: $D_t x = 0$

$$-3a \cdot \cos^2 t \cdot \text{sen}\, t = 0$$

$$t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$$

iii) ***MONOTONÍA:*** Intervalos sobre los cuales la curva es creciente o decreciente, teniendo en cuenta que $y = f(x)$.

Hacer una tabla con los intervalos que definen los puntos críticos.

t	$0<t<\pi/2$	$\pi/2<t<\pi$	$\pi<t<3\pi/2$	$3\pi/2<t<2\pi$
x	$0<x<a$	$-a<x<0$	$-a<x<0$	$0<x<a$
y	$0<y<a$	$0<y<a$	$-a<y<0$	$-a<y<0$
$y'=-\text{tg}\,t$				
y'	$y'>0$ Decreciente	$y'>0$ Creciente	$y'<0$ Decreciente	$y'>0$ Creciente
$y''=\dfrac{1}{3a\cos^4 t.\text{sen}\,t}$				
y''	$y''>0$ Cóncava hacia arriba	$y''>0$ Cóncava hacia arriba	$y''<0$ Cóncava hacia abajo	$y''<0$ Cóncava hacia abajo

Existe mínimo en $t=0$ El mínimo está en $(a,0)$

Existe máximo en $t=\pi/2$ El máximo está en $(0,a)$

Existe mínimo en $t=\pi$ El mínimo esta en $(-a,0)$

Existe mínimo en $t=3\pi/2$ El mínimo esta en $(0,-a)$

4. Puntos múltiples: $\nexists$

5. Extensión y zonificación.

a) Recorrido de x:

Se sabe: $-1\le\cos t\le 1$

Al cubo: $-1\le\cos^3 t\le 1$

Por : $-a\le a\cos^3 t\le a\ ,\ a>0$

$-a\le x\le a$

b) Recorrido de Y:

De: $-1\le\text{sen}\,t\le 1$, se obtiene:

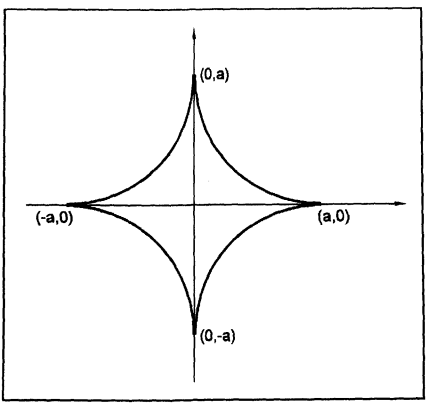
$-a\le y\le a$

c) Asíntotas: $\nexists$

6. Tabulación:

t	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π
x	a	$\frac{a\sqrt{2}}{4}$	0	$-\frac{a\sqrt{2}}{4}$	$-a$
y	0	$\frac{a\sqrt{2}}{4}$	a	$\frac{a\sqrt{2}}{4}$	0

7. El gráfico es:



Ejemplo 2.

Graficar la curva $\mathcal{C}: \begin{cases} x = \frac{t+1}{t-1} \\ y = t^2 \end{cases} \quad t \in [-1, 1]$

Discusión de la gráfica de $\mathcal{C}$.

1. Intersección con los ejes:

a) Con el eje X.

$$y = 0 \Rightarrow t^2 = 0 \rightarrow t = 0 \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \Big\} (-1,0) \in \mathcal{C}$$

b) Con el eje Y.

$$x = 0 \Rightarrow \frac{t+1}{t-1} = 0 \Rightarrow t = -1 \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

2. Simetrías: $\nexists$

3. Extensión y zonificación:

a) Recorrido de y. Se parte de:

$$t^2 \geq 0 \quad \forall \quad t \in [-1,1]$$
$$y \geq 0 \quad \wedge \quad -1 \leq t < 1$$
$$\wedge \quad [-1 = t \quad \vee \quad -1 < t < 1]$$
$$|t| < 1$$
$$y = 1 \quad \vee \quad t^2 < 1$$
$$y \geq 0 \quad \wedge \quad [y = 1 \quad \vee y < 1]$$
$$0 \leq y \leq 1$$

b) Recorrido de x.

Se tiene: $x = \frac{t+1}{t-1} \quad \wedge \quad -1 \leq t < 1$

Si: $t = -1 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

Si: $t \to 1^- \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \to 1^-} \frac{t+1}{t-1} = \frac{2}{-0} = -\infty$

$\longrightarrow -\infty < x \leq 0$

NOTA: $x = 1 + \frac{2}{t-1}$ Como: $-1 \leq t < 1$

$-2 \leq t - 1 < 0$

$-\frac{1}{2} \geq \frac{1}{t-1}$ por 2

$-1 \geq \frac{2}{t-1}$

$0 \geq 1 + \frac{2}{t-1}$ sumar 1

c) Cuando $t \to 1^-$ ocurre $\begin{cases} a) \lim_{t \to 1^-} x = -\infty \\ b) \lim_{t \to 1^-} y = 1 \end{cases}$ entonces $y = 1$ es asíntota vertical

4. Tabulación:

$-1 \leq t < 1$	-1	-1/2	0	1/3	1/2	$T \to 1^-$
x	0	-1/3	-1	-2	-3	$x \to -\infty$
y	1	1/4	0	1/9	1/4	$y \to 1$

5. Puntos críticos:

Hallar $\frac{dy}{dx}$ y analizar:

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{2t}{\frac{-2}{(t-1)^2}} = -t(t-1)^2$ $\begin{cases} \rightarrow y \text{ es crec.} \iff y' > 0 \iff -t(t-1)^2 > 0 \iff t < 0 \\ \rightarrow y \text{ es crec.} \iff y' > 0 \iff t > 0 \end{cases}$

i) $\dfrac{dy}{dt} = 2t$

ii) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{(t-1)(1)-(t+1)(1)}{(t-1)^2} = \dfrac{-2}{(t-1)^2}$

b) **Análisis:**

i) $\dfrac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow -t(t-1)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{t=0} \vee t = 1 \notin [-1,1[$

ii) Valores de t en los cuales $\nexists \dfrac{dx}{dt}$

se obtienen igualando a cero el denominador de $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{-2}{(t-1)^2}$

así obtenemos $t = 1$ es decir $\nexists \dfrac{dx}{dt}$ en $t = 1$. Pero $t = 1 \notin [-1,1[$

Solución común de $D_t x = D_t y = 0$ es $t = 0$ (pto. singular).

Además $t = -1 \in [-1,1[$ luego:

son puntos críticos: $t = -1, 0$

iii) **Monotonía** (intervalos sobre los cuales la curva es creciente o decreciente). ver el siguiente cuadro:

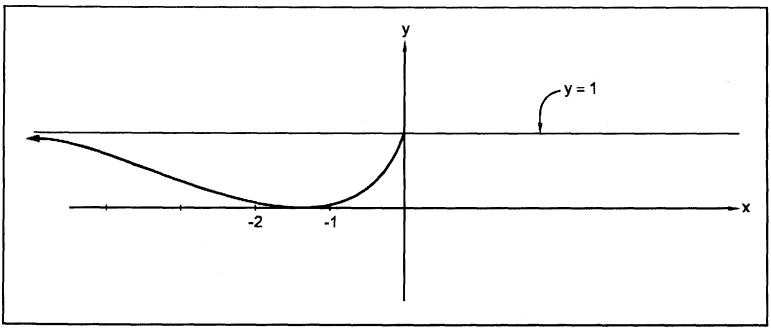
$t=-1$ $\quad$ $t=0$ MIN $\quad$ $t=1$

t	$1<t<0$	$0<t<1$
x	$-1<x<0$	$-\infty<x<-1$
y	$0<y<1$	$0<y<1$
y'	$y'>0$ Creciente	$y'<0$ Decreciente

El mínimo esta en $(-1, 0)$ cuando $t = 0$

$x(0)$ $y(0)$

El mínimo es $y(0) = 0$.



Ejemplo 3.

Discutir la gráfica de la curva $\mathcal{C}: \begin{cases} x = \dfrac{t+2}{(t-1)(t+1)} \\ y = \dfrac{t-5}{(t-3)(t-1)} \end{cases}$

Solución:

Como $x(t)$ y $y(t)$ son funciones racionales, analizar en $t = -1, 1, 3$ valores donde no están definidas $x(t)$ y $y(t)$.

1) El dominio de $f(t) = (x(t), y(t))$ es $D_f \cap D_g = (\mathbb{R} - \{1,-1\}) \cap (\mathbb{R} - \{3,-1\})$

$= \mathbb{R} - \{-1,1,3\}$

2) Hallar el recorrido de "x" e "y"; analizar límites laterales en $t = -1, 1, 3$

a) En $t = -1$

$$a_1: \begin{cases} \lim\limits_{\substack{t \to -1^+ \\ t > -1 \\ t+1 > 0}} x = \dfrac{1}{(-2)(+0)} = -\infty \\ \lim\limits_{t \to 1^+} y = \dfrac{-6}{(-4)(-2)} = -\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{3}{4} \text{ es ASÍNTOTA HORIZONTAL.}$$

$$a_2:\begin{cases}\lim\limits_{\substack{t\to -1^-\\ t<-1\\ t+1<0}} x=\dfrac{1}{(-2)(-0)}=+\infty\\[2ex] \lim\limits_{t\to -1^-} y=-\dfrac{3}{4}\end{cases}\Bigg\rangle\ y=-\frac{3}{4}\quad \text{es A.H.}$$

b) En $t=1$

$$b_1:\begin{cases}\lim\limits_{\substack{t\to 1^+\\ t>1\\ t-1>0}} x=\dfrac{3}{(+0)(2)}=+\infty\\[2ex] \lim\limits_{t\to 1^+} y=\dfrac{-4}{(-2)(+0)}=+\infty\end{cases}$$

$$b_2:\begin{cases}\lim\limits_{\substack{t\to 1^-\\ t<1}} x=\dfrac{3}{(-0)(2)}=-\infty\\[2ex] \lim\limits_{t\to 1^-} y=\dfrac{-4}{(-2)(-0)}=-\infty\end{cases}$$

> ***Nota:*** Si $x(t)$ e $y(t)$ tiende a $+\infty$ cuando $t\to t_0$ investigar si $y=ax+b$ es asíntota oblicua, donde a y b se obtiene así:
>
> $$a=\lim_{t\to t_0}\frac{y}{x}\quad\wedge\quad b=\lim_{t\to t_0}(y-ax)$$
>
> En el ejemplo tenemos:
>
> 1) $a=\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{(t-5)(t+1)}{(t-3)(t-2)}=\dfrac{4}{3}$
>
> 2) $b=\lim\limits_{t\to 1}\left(y-\dfrac{4}{3}x\right)=\dfrac{5}{6}$
>
> Luego: $y=\frac{4}{3}x+\frac{5}{6}$ es asíntota oblicua.

c) En $t=3$.

$$C_1:\begin{cases}\lim\limits_{t\to 3^+} x=\dfrac{5}{(2)(4)}=\dfrac{5}{8}\\[2ex] \lim\limits_{t\to 3^+} y=\dfrac{-2}{(+0)(2)}=-\infty\end{cases}\quad\Rightarrow\quad x=\frac{5}{8}\ \text{es ASÍNTOTA VERTICAL.}$$

$$C_2:\begin{cases}\lim\limits_{t\to 3^-} x=\dfrac{5}{(2)(4)}=\dfrac{5}{8}\\[2ex] \lim\limits_{t\to 3^-} y=\dfrac{-2}{(-0)(2)}=+\infty\end{cases}\quad\Rightarrow\quad x=\frac{5}{8}\ \text{es ASÍNTOTA VERTICAL.}$$

3) Monotonía: Hallemos: $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ y $\frac{dy}{dx}$ para luego analizar:

a) $\frac{dx}{dt} = \frac{(t^2+4t+1)}{(t^2-1)^2}$ b) $\frac{dy}{dt} = \frac{-(t^2-10t+17)}{(t-3)^2(t-1)^2}$

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{D_t t}{D_t x} = \frac{(t^2-10t+17)(t+1)^2}{(t-3)^2(t^2+4t+1}$

a_1) De $\frac{dx}{dt} = 0$ obtenemos: $t^2+4t+1=0$ (tangentes verticales)

$$t = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$t = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -2 \pm \sqrt{3} \quad \begin{matrix} t = 3{,}7 \rightarrow (-0.13, -0.27) \\ t = -0{,}3 \rightarrow (-1.8, 1{,}2) \end{matrix}$$

b_2) De $\frac{dy}{dt} = 0$ obtenemos: $t^2 - 10t + 17 = 0$ (tangentes horizontales)

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{100-4(1)(17)}}{2(1)}$$

$$t = \frac{10 \pm 4\sqrt{2}}{2}$$

$$t = 5 \pm 2\sqrt{2} \quad \begin{cases} t = 7.8 \rightarrow (0.16\,,\, 0.08) \\ t = 2.2 \rightarrow (1.09\,,\, 2.91) \end{cases}$$

4) Intervalos donde la curva es creciente o decreciente.

a) La curva es creciente si $D_x\, y > 0$,

$$\frac{(t^2-10t+17)(t+1)^2}{(t-3)^2(t^2+4t+1)} > 0$$

$$\frac{t^2-10t+17}{t^2+4t+1} > 0$$

$$\frac{(t-7.8)(t-2.2)}{(t+3.7)(t+0.3)} > 0$$

$$t \in \langle -\infty, -3{,}7 \rangle \cup \langle -0.3, 2.2 \rangle \cup \langle 7.8 + \infty \rangle$$

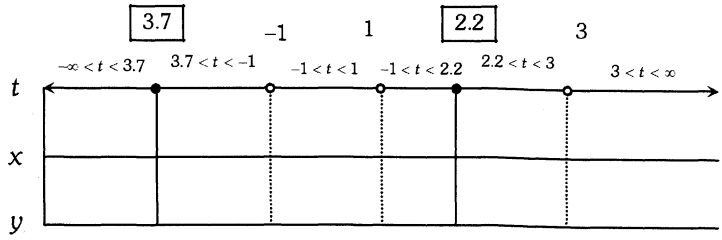
b) La curva es decreciente si $D_x y < 0$

$\Rightarrow \quad t \in \langle -3.7, -0.3 \rangle \cup \langle 2.2, 7.8 \rangle$

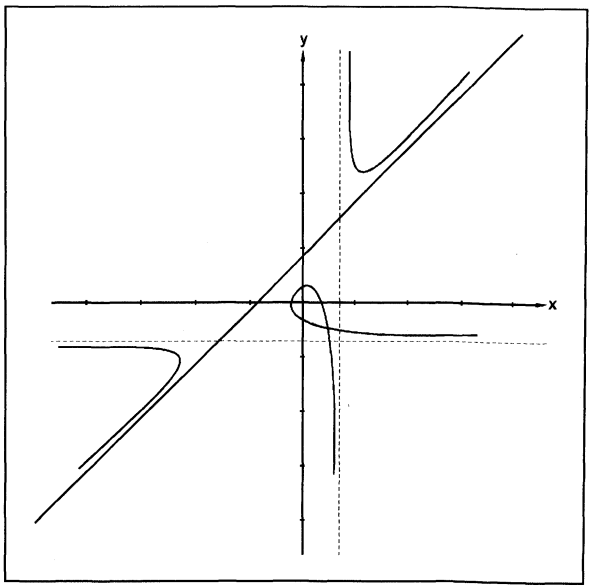
5) Tabla de variación:

En esta tabla de variación se hacen tres filas para t, x, y. Se llevan los valores notables de x e y, y los límites de los extremos de los intervalos de t.

Indicar con una flecha hacia arriba si la curva es creciente y con una flecha hacia abajo si la curva es decreciente.



6) Tabulando algunos valores de t se obtiene el siguiente gráfico.



Ejemplo 4.

Construir la curva $\mathcal{C}: \begin{cases} x = \frac{t}{t^2-1} \\ y = \frac{t^2}{t-1} \end{cases}$

Discusión de la gráfica de $\mathcal{C}$.

1. El dominio de $f(t) = (x(t), y(t))$ es la intersección de los dominios de $x(t)$ y $y(t)$.

El dominio de $x(t)$ es $t \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

El dominio de $y(t)$ es $t \in \mathbb{R} - \{1\}$

Luego, $\boxed{D_{x \cap y} = t \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}}$

2. Recorrido de $x(t)$ y de $y(t)$.

Como $x(t)$ y $y(t)$ son funciones racionales entonces el recorrido de $x(t)$ y de $y(t)$ se halla analizando los límites laterales en $t = -1$ y $t = 1$.

Veamos:

a) Límites laterales en $t = -1$

a_1) Límites a la derecha de $t = -1$ en $x(t)$ y en $y(t)$:

$$\lim_{t \to -1^+} x(t) = \lim_{\substack{t \to -1^+ \\ t > -1}} \frac{t}{(t-1)(t+1)} = \frac{-1}{(-2)(+0)} = +\infty$$

$$\lim_{t \to -1^+} y(t) = \lim_{t > -1} \frac{t^2}{t-1} = \frac{1}{-1-1} = -\frac{1}{2}$$

De este resultado se deduce que $\boxed{y = -\frac{1}{2}}$ es asíntota horizontal.

a_2) Límites a la izquierda de $t = -1$ en $x(t)$ y en $y(t)$:

$$\lim_{t \to -1^-} x(t) = \lim_{\substack{t \to -1^- \\ t < -1}} \frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{-1}{(-2)(-0)} = -\infty$$

$$\lim_{t\to -1^-} y(t) = \lim_{\substack{t\to -1^- \\ t<-1}} \frac{t^2}{t-1} = \frac{1}{-1-1} = -\frac{1}{2}$$

De este resultado se deduce que $y = -\frac{1}{2}$ es asíntota horizontal.

b) Límites laterales en $t = 1$

b_1) Límite a la derecha de $t = 1$ en $x(t)$ y en $y(t)$:

$$\lim_{t\to 1^+} x(t) = \lim_{\substack{t\to 1^+ \\ t>1}} \frac{t}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{(+0)(2)} = +\infty$$

$$\lim_{t\to 1^+} y(t) = \lim_{\substack{t>1^+ \\ t>1}} \frac{t^2}{t-1} = \frac{1}{+0} = +\infty$$

Si $x(t)$ tiende a $+\infty$ y $y(t)$ tiende a $+\infty$, entonces analicemos que $y = ax + b$ es asíntota oblicua.

Hallemos *a* y *b*:

$$a = \lim_{t\to 1} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to 1} t(t+1) = 2$$

$$b = \lim_{t\to 1} \left[y(t) - a x(t) \right]$$

$$= \lim_{t\to 1} \left[\frac{t^2}{t-1} - 2\frac{t}{t^2-1} \right] = \lim_{t\to 1} \frac{t+2}{t+1} = \frac{3}{2}$$

Por lo tanto: $\boxed{y = 2x + \frac{3}{2}}$ es asíntota oblicua:

b_2) Límites a la izquierda de $t = 1$ en $x(t)$ y en $y(t)$:

$$\lim_{t\to 1^-} x(t) = \lim_{\substack{t\to 1^- \\ t<1}} \frac{t}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{(-0)(2)} = -\infty$$

$$\lim_{t\to 1^-} y(t) = \lim_{\substack{t\to 1^- \\ t<1}} \frac{t^2}{t-1} = \frac{1}{-0} = -\infty$$

De manera similar, si $\lim_{t\to 1^-} x(t) = -\infty$ y $\lim_{t\to 1^{-1}} y(t) = -\infty$, afirmamos que $y = 2x + \frac{3}{2}$ es asíntota oblicua.

c) $\lim_{t\to +\infty} y(t) = \lim_{t\to +\infty} \frac{t^2}{t-1} = +\infty \quad \wedge$

$\lim_{t\to +\infty} x(t) = \lim_{t\to +\infty} \frac{t}{t^2-1} = 0$, entonces $x = 0$ es asíntota vertical.

3. Tangentes:

a) Tangentes horizontales

Las tangentes horizontales se obtiene resolviendo la ecuación $D_t\, y = 0$.

Veamos:

Como: $y = \frac{t^2}{t-1}$, entonces

Resolver la ecuación:

$$\frac{t(t-2)}{(t-1)^2} = 0 \Rightarrow t(t-2) \Rightarrow \boxed{t=0} \vee \boxed{t=2}$$

$t=0 \rightarrow (0,0)$ $\quad$ $t=2 \rightarrow \left(\frac{2}{3}, 4\right)$

En $(0,0)$ y en $\left(\frac{2}{3}, 4\right)$ existen tangentes horizontales.

NOTA: En las tangentes horizontales se encuentran los extremos de la curva (máximos y mínimos) considerando $y = f(x)$

b) Tangentes verticales

Las tangentes verticales se obtienen resolviendo la ecuación $D_t\, x = 0$.

Veamos:

Como: $x = \frac{t}{t^2-1}$, entonces

$$D_t x = \frac{(t^2-1)(1)-t(2t)}{(t^2-1)^2} = \boxed{-\frac{(t^2+1)}{(t^2-1)^2}}$$

Resolver la ecuación:

$-\frac{(t^2+1)}{(t^2-1)^2} = 0 \Rightarrow t^2+1=0$ En esta ecuación no existen soluciones reales. Lo cual nos indica que no existen tangentes verticales.

c) **Valores de t en los cuales existen "puntas".**

(Puntos en los cuales existen más de una recta tangente)

En las soluciones comunes de las ecuaciones $D_t x = 0 \wedge D_t y = 0$ existen "puntas".

En el problema, las ecuaciones:

$$\frac{t(t-2)}{(t-1)^2} = 0 \quad \wedge \quad \frac{(t^2+1)}{(t^2-1)^2} = 0$$

No tienen soluciones comunes, por tanto la curva no tiene puntas. Es decir la curva $\mathcal{C}$ es derivable en todo $x \in \mathbb{R}$, al considerarse $y = f(x)$.

Geométricamente significa que en cada punto de la curva se puede trazar una y sólo una recta tangente.

4. Puntos críticos y monotonía:

a) Son puntos críticos los $t \in D_{x \cap y}$ tales que:

$D_t y = 0$, $D_t x = 0$ y los valores en t en los cuales no está definido $x(t)$, $y(t)$.

En el problema los puntos críticos son: $t = -1, 0, 1, 2$

b) **Monotonía:** Hallemos $D_x y = \frac{D_t y}{D_t x}$

$$D_x y = \frac{\frac{t(t-2)}{(t-1)^2}}{-\frac{(t^2+1)}{(t^2-1)^2}}$$

Ahora analicemos en $D_x y$: $= -\frac{t(t-2)(t+1)^2}{t^2+1}$

b_1) Puntos singulares:

Al resolver $D_y y = 0$ obtenemos $\boxed{t=0}$, $\boxed{t=-2}$

$\downarrow$ (0,0) $\qquad$ $\downarrow$ $\left(\frac{2}{3}, 4\right)$

Los valores $y=0$, $y=4$ son <u>extremos</u> de la curva (considerada $y=f(x)$)

b_2) La curva C es creciente en los valores de $t \in D_{x \cap y}$ tales que:

$$D_x y > 0$$

$$-\frac{t(t-2)(t+1)^2}{t^2+1} > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{0 < t < 2}$$

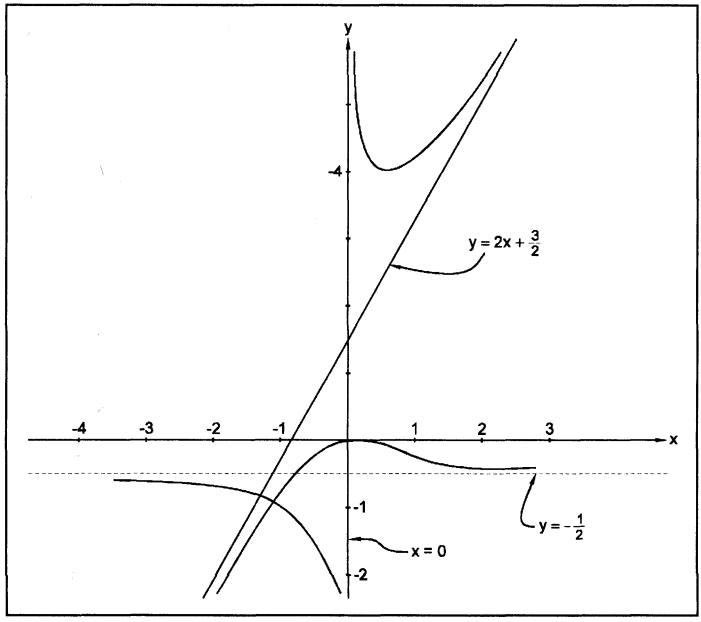
b_3) La curva C es decreciente en los valores de $t \in D_{x \cap y}$ tales que: $D_x y < 0$

$$\Rightarrow \boxed{t \in \langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 2, \infty \rangle}$$

5. Tabla.

t	$-\infty < t < 1$	**−1**	$-1 < t < 0$	**0**	$0 < t < 1$	**1**	$1 < t < 2$	**2**	$2 < t < \infty$
	Decrec. ↘		Decrec. ↘		Crec. ↗		Crec. ↗		Decrec. ↘
x	↘ $-\infty < x < 0$		↘ $0 < x < \infty$		↗ $-\infty < x < 0$		↗ $\frac{2}{3} < x < \infty$		↘ $0 < x < \frac{2}{3}$
y	$-\infty < y < -\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2} < y < 0$		$-\infty < y < 0$		$4 < y < \infty$		$5 < y < \infty$

Dados algunos valores de t, se obtiene el siguiente gráfico.



Problemas propuestos Cap. 2

Graficar cada una de las siguientes curvas cuyas ecuaciones paramétricas se dan. Discutir la gráfica y analizar su monotonía.

1 $\mathcal{C}: \begin{cases} x = 3t - t^3 \\ y = 3t^2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

2 $\mathcal{C}: \begin{cases} x = \frac{3t - t^3}{3} \\ y = t^2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

3 $\mathcal{C}: \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \cos^2 t \cdot \operatorname{sen} t \end{cases}$

4 $\mathcal{C}: \begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = 2a^2 \cdot \cos^2 t + a \cdot \operatorname{sen} t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi] \ , \ a > 0$

5 $\mathcal{C}: \begin{cases} x = t^3 - 3t \\ y = 3t^2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

6 $\mathcal{C}: \begin{cases} x = \frac{t+1}{t-1} \\ y = t^2 \end{cases} \quad t \in [-1, 11[$

7 $\mathcal{C}: \begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^3 - 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

8 $\mathcal{C}: \begin{cases} x = a\left[\cos t + \text{Ln}\left(\tan\frac{t}{2}\right)\right] \\ y = a \cdot \text{sen}\, t \end{cases}$
$t \in [0, \pi] \quad , \quad a > 0$

9 $\begin{cases} x = \frac{t}{1+t^4} \\ y = \frac{t^3}{1+t^4} \end{cases}$

10 $\begin{cases} x = \frac{(t+2)^2}{t+1} \\ y = \frac{(t-2)^2}{t-1} \end{cases}$

11 $\begin{cases} x = \frac{(1+2t)^2}{(3-2t)(1-2t)} \\ y = \frac{(1+2t)^2}{2(3-2t)} \end{cases}$

12 $\begin{cases} x = \frac{t^2+2}{t^2+t+1} \\ y = \frac{t^2+2}{t^2-t+3} \end{cases}$

13 $\begin{cases} x = t^2 - 4 \\ y = t^3 - 8 \end{cases}$

14 $\begin{cases} x = \frac{2a\,t}{1+t^2} \\ y = \frac{\pi\, t}{1+t} \end{cases} \quad a > 0$

15 $\begin{cases} x = t + t^2 \\ y = t^3 - 3t \end{cases}$

16 $\begin{cases} x = t^2 - t \\ y = t^3 - 3t \end{cases}$

17 $\begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = t^3 - 12t \end{cases}$

18 $\begin{cases} x = t^3 - t \\ y = t + t^2 \end{cases}$

19 $\begin{cases} x = e^{-\frac{1}{t}} \\ y = te^{\frac{2}{t}} \end{cases}$

20 $\begin{cases} x = t^2 - 4 \\ y = \frac{t}{2} \end{cases} \quad -2 \le t \le 3$

21 $\begin{cases} x = 4t^2 - 4 \\ y = t \end{cases} \quad -1 \le t \le \frac{3}{2}$

22 $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{t+1}} \\ y = \frac{t}{t+1} \end{cases}$

23 $\begin{cases} x = \cos^2 t + \operatorname{Ln}\operatorname{sen} t \\ y = \operatorname{sen} t \,.\cos t \end{cases}$

24 $\begin{cases} x = \operatorname{tg} t \\ y = \frac{1}{\operatorname{sen}\, t} \end{cases}$

25 $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \operatorname{sen} 2t - \operatorname{sen} t \end{cases}$

26 $\begin{cases} x = \cos 4t + 4\cos t \\ y = \operatorname{sen} 3t \end{cases}$

27 $\begin{cases} x = 3.\cos\theta \\ y = 4.\operatorname{sen}\theta \end{cases} \quad 0 \le \theta \le 2\pi$

28 $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t^2 \end{cases}$

29 $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = 1 - t \end{cases}$

30 $\begin{cases} x = t^3 \\ y = \frac{t^2}{2} \end{cases}$

31 $\begin{cases} x = \sqrt[3]{t} \\ y = 1 - t \end{cases}$

32 $\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{t} \\ y = t - 1 \end{cases}$

33 $\begin{cases} x = 2t \\ y = |t - 2| \end{cases}$

34 $\begin{cases} x = \sec\ \theta \\ y = \cos\ \theta \end{cases}$

35 $\begin{cases} x = 3\,.\cos\theta \\ y = 3\,.\operatorname{sen}\theta \end{cases}$

36 $\begin{cases} x = 4 \cdot \operatorname{sen} 2\theta \\ y = 2 \cdot \cos 2\theta \end{cases}$

37 $\begin{cases} x = 4.\sec\theta \\ y = 3.\operatorname{tg}\theta \end{cases}$

38 $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = e^{3t} \end{cases}$

39 $\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = e^{t} \end{cases}$

40 $\begin{cases} x = \cos\ \theta \\ y = 2 \cdot \cos\theta + 1 \end{cases}$

41 $\begin{cases} x = 24\sqrt{2}\, t \\ y = -16t^2 + 24\sqrt{2}\, t \end{cases}$

42 $\begin{cases} x = \sqrt{4 - t} \\ y = \sqrt{t} \end{cases}$

43 $\begin{cases} x = 2t - \pi.\operatorname{sen} t \\ y = 2 - \pi\,.\cos t \end{cases}$

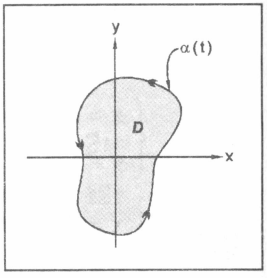
44 $\begin{cases} x = \frac{3\,t}{1 + t^3} \\ y = \frac{3t^2}{1 + t^3} \end{cases}$

12. IMPORTANCIA DE LOS CAMINOS (ECUACIONES VECTORIALES DE LAS CURVAS)

1. Los caminos $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, \beta]$ sirven para calcular integrales de línea.

2. Sea $\alpha(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ una curva cerrada, regular con sentido antihorario.

Si $\alpha(t)$ es la frontera de una región $D \subset \mathbb{R}^2$, entonces se puede hallar el área de la región D tan solo integrando el camino $\alpha(t)$ desde α hasta β (esto es el famoso teorema de Green).



3. En el curso de Análisis Complejo, las integrales de las funciones de variable compleja se hacen mediante caminos continuos y regulares.

4. En topología, hay un tema muy especial conocido con el nombre de **HOMOTOPIA DE CAMINOS** y son muy útiles para ciertos conceptos de matemática abstracta.

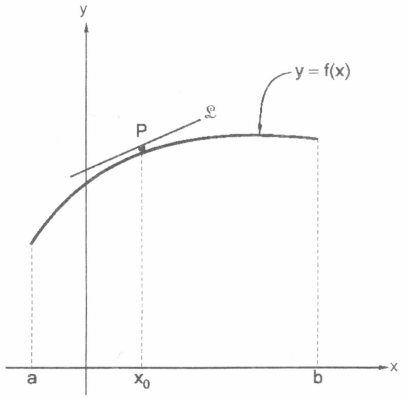
CAPÍTULO 3

DERIVADAS PARCIALES

Hagamos una comparación entre la derivada de una función con una variable con la derivada de otra función de dos variables.

Sea la función:

$$f : \langle a,b \rangle \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow y = f(x)$$



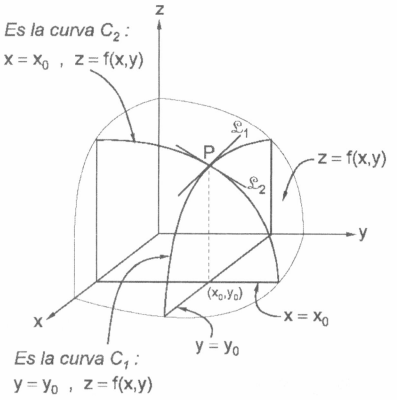
La derivada de la función $f(x)$ en x_0 es la pendiente de la recta tangente $\mathcal{L}$ en el punto $P(x_0 , f(x_0))$.

Es decir:

$$f'(x_0) = \text{ pendiente de } \mathcal{L}$$
$$\text{derivada de } f \text{ en } x_0 .$$

Sea la función: $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $D \subset \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \longrightarrow z = f(x,y)$$



Como $z = f(x,y)$ es una función que depende de dos variables (x,y), en el gráfico se tiene:

a) $\mathcal{L}_1$ es recta tangente a la curva C_1 en el punto $P(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$, donde la derivada parcial de f respecto a x, en el punto $(x_0,y_0) \in D$ es la pendiente de $\mathcal{L}_1$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \text{Pendiente de } \mathcal{L}_1$$
$$\text{derivara parcial de } f \text{ con respecto a } x, \text{ en } (x_0,y_0).$$

b) L_2 es recta tangente a la curva C_2 en el punto $P(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ donde la derivada parcial de f respecto a y, en el punto $(x_0,y_0) \in D$ es la pendiente de $\mathcal{L}_2$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \text{Pendiente de } \mathcal{L}_2$$
$$\text{derivara parcial de } f \text{ con respecto a } y, \text{ en } (x_0,y_0)$$

1. DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN QUE DEPENDE DE DOS VARIABLES

Sea D una región (subconjunto de $\mathbb{R}^2$). Diremos que f es una función definido en D y con valores en $\mathbb{R}$ si para cada $(x, y) \in D$ corresponde un único número $z \in \mathbb{R}$, tal que $z = f(x,y)$.

Notación: $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$

$(x,y) \longrightarrow z = f(x,y)$

El gráfico de la función f es el conjunto:

$Gr(f) = \{((x,y), z / z = f(x,y), (x,y) \in D\}$

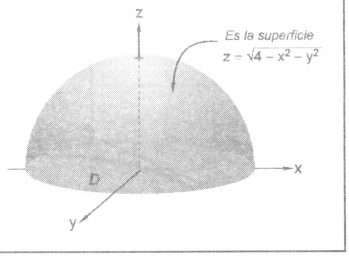
Gráficamente, $f(x,y)$ es una superficie en $\mathbb{R}^3$.

Sea la función:

$f : D \subset R^2 \longrightarrow R$ definida por:

$f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

$D = \{(x,y) / x^2 + y^2 \leq 4\}$



2. DERIVADA PARCIAL DE f RESPECTO A "x" Y RESPECTO A "y"

a) **Definición:** Sea f una función de dos variables x, y. La derivada parcial de **f con respecto a x** es aquella función, denotada por $\frac{\partial f}{dx}(x,y)$, tal que su valor en cualquier punto $(x,y) \in D$ está dado por:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$; Siempre que existe este límite.

En este caso: $h = \Delta x = x - x_0$

b) La derivada parcial de **f con respecto a y** es aquella función, denotada por:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{k}$$, Siempre que existe este límite.

En este caso: $k = \Delta y = y - y_0$

El proceso de hallar una derivada parcial se llama ***DIFERENCIACIÓN***.

Notación:

a) La derivada parcial de $f(x,y)$ respecto a "x" se denotan por: $\frac{\partial f}{\partial x}$, $D_1 f$, f_x .

b) La derivada parcial de $f(x,y)$ respecto a "y" se denotan por: $\frac{\partial f}{\partial y}$, $D_2 f$, f_y .

NOTA: Cuando se aplican las reglas de derivación tener en cuenta la siguiente recomendación:

a) En el proceso de hallar $\frac{\partial f}{\partial x}$, "$y$" es constante.

b) En el proceso de hallar $\frac{\partial f}{\partial y}$, "$x$" es constante.

Ejemplo 1.

Dada $f(x,y) = 5x^2 - 3xy + y^2$,

Obtenemos: a) $\frac{\partial f}{\partial y} = 10x - 3y\,(1) + 0 = 10x - 3y$

b) $\frac{\partial f}{\partial y} = 0 - 3x\,(1) + 2y = -3x + 2y$

Ejemplo 2.

Dado la función $U(x,y) = 20x + 40y - 2x^2 - 3y^2$ y la ecuación $28 = 4x + 5y$, definimos una nueva función con 3 variables del siguiente modo:

$U^*(x,y,\lambda) = 20x + 40y - 2x^2 - 3y^2 + \lambda(28 - 4x - 5y)$ ..... Obtenemos:

a) $\frac{\partial U^*}{\partial x} = 20 + 0 - 4x - 0 + \lambda\,(0 - 4 - 0) = 20 - 4x - 4\lambda$

b) $\frac{\partial U^*}{\partial y} = 0 + 40 - 0 - 6y + \lambda\,(0 - 0 - 5) = 40 - 6y - 5\lambda$

c) $\frac{\partial U^*}{\partial \lambda} = 0 + 0 - 0 - 0 + (28 - 4x - 5y) = 28 - 4x - 5y$

3. DERIVADAS PARCIALES APLICADAS A LA MICROECONOMÍA

(MULTIPLICADORES DE LAGRANGE)

1) Demanda de los bienes de consumo:

Supongamos que:

a) $U = U(x, y)$ sea la función utilidad (el gusto, la preferencia) de un consumidor donde x, y son , respectivamente, las cantidades de los bienes X, Y.

b) $M = xP_x + yP_y$ sea la recta ***PRESUPUESTO*** (o ingreso) del consumidor, donde P_x , P_y son respectivamente, los precios de mercado de los bienes, X, Y.

El punto (x_0, y_0) que hace máximo a la función utilidad $U(x, y)$ bajo la ***RESTRICCIÓN*** del presupuesto $M = x \cdot P_x + y P_y$, se halla del siguiente modo:

1° Se forma la función de ***LAGRANGE***: $U^* U(x, y) + \lambda(M - x \cdot P_x - y \cdot P_y)$

2° Se halla las 3 derivadas parciales:

$$\frac{\partial U^*}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} - \lambda P_x \qquad \frac{\partial U^*}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} - \lambda P_y$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial \lambda} = M - x \cdot P_x - y \cdot P_y$$

3° Se iguala a cero cada derivada parcial; obteniéndose un sistema de ecuaciones con 3 incógnitas, que se reduce a 2 incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial U}{\partial x} - \lambda P_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \dfrac{\frac{\partial U}{\partial x}}{P_x} \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} - \lambda P_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \dfrac{\frac{\partial U}{\partial y}}{P_y} \end{array}\right\} \quad \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{P_x} = \frac{\frac{\partial U}{\partial y}}{P_y} = \lambda$$

$$M - x \cdot P_x - y P_y = 0 \qquad \frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{P_x}{P_y}$$

Que se reduce a resolver:

$$\begin{cases} M = x \cdot P_x + y \cdot P_y \\ \dfrac{UM_g x}{UM_g y} = \dfrac{P_x}{P_y} \end{cases}$$

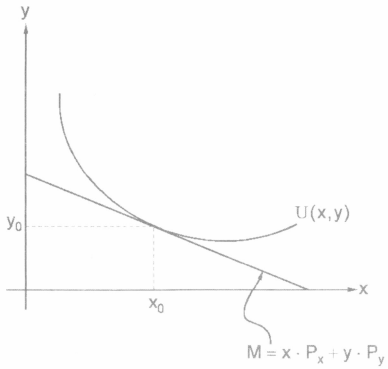
λ = Multiplicador de Lagrange

(*indica la utilidad marginal del ingreso gastado en el bien X*)

$\frac{\partial U}{\partial x} = U\,Mg\,X$, *es la utilidad marginal de x.* *(cambio de la utilidad total debido a un cambio de x*

$\frac{dU}{dy} = U\,Mg\,Y$, *es la utilidad marginal de Y.* *(cambio en la utilidad total debido a un cambio en y)*

$-\frac{dy}{dx} = \frac{U\,Mg\,X}{U\,Mg\,Y} = TM_g\ S_{yx}$ *es la tasa marginal de sustitución y por x.*



$m = -\frac{P_x}{P_y}$: pendiente de la recta presupuesto.

$-m = \frac{P_x}{P_y} = T\,M_g S_{yx}$ (tasa marginal de sustitución en el mercado).

Ejemplo 1.

La función utilidad de un ama de casa *A* es $U(x,y) = 20x + 40y - 2x^2 - 3y^2$, donde *x* e *y* son respectivamente las cantidades que se compran los bienes *X* (papa) y *Y* (camote). Supóngase que el ingreso monetario de *A* es \$ 28 y que los precios de *X* e *Y* son respectivamente \$4 , \$5.

Determine las cantidades de *X* e *Y* que maximice la función utilidad, considerando la restricción presupuestal.

Solución:

La recta presupuesto es: $28 = 4x + 5y$

1° La función de Lagrange es:

$$U = 20x + 40y - 2x^2 - 3y^2 + \lambda(28 - 4x - 5y)$$

2° De: $U = 20x + 40y - 2x^2 - 3y^2$ $\begin{cases} \rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = 20 - 4x \\ \rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = 40 - 6y \end{cases}$

3° Resolver el sistema: $\begin{cases} M = x \cdot P_x + y \cdot P_y \\ \frac{UM_g x}{UM_g y} = \frac{P_x}{P_y} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 28 = 4x + 5y \\ \frac{20 - 4x}{40 - 6y} = \frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 5(20 - 4x) = 4(40 - 6y) \\ 5x - 6y + 15 = 0 \end{array}$$

$$\text{por } 6 \begin{cases} 28 = 4x + 5y \\ \text{por } 5 \quad -15 = 5x - 6y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 168 = 24x + 30y \\ -75 = 25x - 30y \end{cases}$$

$93 = 49x$, El nivel de utilidad máximo del ama de casa será:

$x = \frac{93}{49} \approx 2$

$y = \frac{200}{49} \approx 4$

$U(2,4) = 20(2) + 40(4) - 2(2)^2 - 3(4)^2 = 144$

2. Demanda de los factores de producción

CASO I Maximización de la Producción

Supongamos que:

a) $X = f(K,L)$ sea la función de ***PRODUCCION***, y

b) $C = rK + wL$ sea la función ***COSTO***, en donde K, L son las cantidades de insumo de los factores de producción $\mathbb{K}$ y $\mathbb{L}$, y r, w son los costos respectivos de los factores (ya sean salarios o rentas).

Luego la función de Lagrange, en el cual, encontramos el punto (K_0, L_0) que haga ***MÁXIMO LA FUNCIÓN DE PRODUCCIÓN X***, sujeto a la función C, será:

1° $F(K,L,\lambda) = f(K,L) + \lambda(c - rK - wL)$

2° Las 3 derivadas parciales son:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial K} = \dfrac{\partial f}{\partial K} - \lambda r \\ \dfrac{\partial F}{\partial L} = \dfrac{\partial f}{\partial L} - \lambda w \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = c - rK - wL \end{cases}$$

3° Resolver el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial K} - \lambda r = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{\frac{\partial f}{\partial K}}{r} \\ \dfrac{\partial f}{\partial L} - \lambda w = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{\frac{\partial f}{\partial L}}{w} \\ c - rK - wL = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial K}}{r} = \frac{\frac{\partial f}{\partial L}}{w} \Rightarrow \frac{\frac{\partial f}{\partial K}}{\frac{\partial f}{\partial L}} = \frac{r}{w}$$

Donde:

$\dfrac{\partial f}{\partial K} = PM_g\ K$, es el producto marginal de K.

$\dfrac{\partial f}{\partial L} = PM_g\ L$, es el producto marginal de L.

4° Se reduce a resolver el sistema: $\begin{cases} \dfrac{PMgK}{PMgL} = \dfrac{r}{w} \\ c = rK + wL \end{cases}$

para hallar el par (K_0, L_0) que haga máximo a la función producción $X = f(K,L)$

Ejemplo 2.

La función de producción de la empresa A es $X = 26k + 15\ell + 2k\ell - 2k^2 - 2\ell^2$ en donde k, ℓ son las cantidades de insumos de los factores de producción $\mathbb{K}$ y $\mathbb{L}$. Supóngase que los salarios para $\mathbb{K}$ y $\mathbb{L}$ son respectivamente \$2 y \$3 , y que la empresa puede gastar únicamente \$ 50 en estos insumos. Encuentre la producción máxima (se utiliza la misma unidad de medida para X, que para el costo de producción).

Solución:

La función ***COSTO*** es: $50 = 2k + 3\ell$

1° La función de ***LAGRANGE*** es:

$$F(k,\ell,\lambda) = 26k + 15\ell + 2k\ell - 2k^2 - \ell^2 + \lambda(50 - 2k - 2\ell)$$

2° De: $X = f(k,\ell) = 26k + 15\ell + 2k\ell - 2k^2 - \ell^2$

$$\frac{\partial f}{\partial K} = 26 + 2\ell - 4k$$

$$\frac{\partial f}{\partial \ell} = 15 + 2k - 2\ell$$

3° Resolver el sistema:

$$\begin{cases} \frac{PMgK}{PMgL} = \frac{r}{w} \Rightarrow 2\ \frac{26 + 2\ell - 4k}{15 + 2k - 2\ell} = \frac{2}{3} \\ c = rK + wL \Rightarrow 50 = 2k + 3\ell \end{cases}$$

$$\begin{cases} 48 = 16k - 10\ell \\ 50 = 2k + 3\ell \end{cases}$$

por 3 $\quad \begin{cases} 24 = 8k - 5\ell \\ \end{cases}$

por 5 $\quad \begin{cases} 50 = 2k + 3\ell \end{cases}$

$$\begin{cases} 72 = 24k - 15\ell \\ 250 = 10k + 15\ell \end{cases}$$

$$322 = 34k \Rightarrow k = \frac{322}{34}$$

$$k = \frac{161}{17}$$

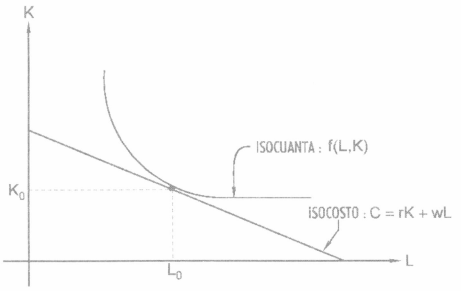
$$L = \frac{176}{17}$$

La producción máxima será:

$$X = f\left(\frac{161}{17}, \frac{176}{17}\right) = 26\left(\frac{161}{17}\right) + 15\left(\frac{176}{17}\right) + \ldots - \left(\frac{176}{17}\right)^2 = 311$$

CASO II Minimización del Costo de Producción

Supongamos que deseamos ***MINIMIZAR EL COSTO DE PRODUCCION***, sujeto a las posibilidades de producción, para ello debemos tener en cuenta dos funciones:



a) La curva de ***ISOCOSTO*** $C = rk + wL$ para una empresa (fabricante) que utiliza dos factores de producción: K (capital o renta) y L (trabajo o mano de obra), donde r es la tasa de capital, w es tasa de salario.

b) La función de ***PRODUCCION*** (isocuanto) de un producto es $Q = f(L,K)$.
Luego, la función de ***LAGRANGE*** en el cual encontramos el punto (L_0, K_0) que haga ***MINIMO EL COSTO TOTAL*** para obtener cierta producción Q_0, será:

1° $F(L,K,\lambda) = rK + wL + \lambda(Q_0 - f(L,K))$, λ = multiplicador de Lagrange (es el costo marginal de producción cuando el costo total del productor se minimiza, es decir: $\lambda = \frac{dc}{dQ_0}$

2° Las derivadas parciales son:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial K} = r - \lambda \frac{\partial f}{\partial K} \\ \frac{\partial F}{\partial L} = w - \lambda \frac{\partial f}{\partial L} \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = Q_0 - f(L,K) \end{cases}$$

3° Al resolver el sistema: $\left\{ \begin{array}{r} r - \lambda \frac{\partial f}{\partial K} = 0 \\ w - \lambda \frac{\partial f}{\partial L} = 0 \end{array} \right\}$ $\lambda = \frac{r}{\frac{\partial f}{\partial k}} = \frac{w}{\frac{\partial f}{\partial L}}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{\frac{\partial f}{\partial L}}{\frac{\partial f}{\partial k}} = \frac{w}{r}}$

$$\boxed{A_0 - f(L,K) = 0}$$

4° Se reduce a resolver el sistema:

$$\begin{cases} Q_0 = f(L,K) \\ \dfrac{PMgL}{PMgK} = \dfrac{w}{r} \end{cases} \quad \text{Donde} \quad \begin{cases} PMg\ L = \dfrac{\partial f}{\partial L} & \text{: Producto marginal de L} \\ PMg\ K = \dfrac{\partial f}{\partial K} & \text{: Producto marginal de K} \\ -\dfrac{PMg\ L}{PMg\ K} = \dfrac{dK}{dL} = TTS_{KL} & \text{: Tasa técnica de sustitución } K \text{ por } L \end{cases}$$

NOTA:

Si L es el eje horizontal
K es el eje vertical

entonces

PENDIENTE DE LA RECTA ISOCOSTO

$wL + rK = C$, es $m = -\frac{w}{r}$

PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE A LA CURVA ISOCUANTA $f(K,L)$, es:

$$\frac{dK}{dL} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial L}}{\frac{\partial f}{\partial K}}$$

Proposición: La condición necesaria para que la recta $c = wL + rK$ sea tangente a la curva $f(K,L)$ es que:

$$\underbrace{m}_{-\frac{w}{r}} = \underbrace{\frac{dK}{dL}}_{-\frac{\frac{\partial f}{\partial L}}{\frac{\partial f}{\partial K}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{w}{r} = \frac{PMg\ L}{PMg\ K}$$

Ejemplo 3.

La función de producción de un fabricante es $Q(L,K) = 2L^{1/2}K^{1/2}$ y los precios de L y K son 10 y 40 respectivamente. Hallar:

a) La combinación de L y K para que el costo sea mínimo si se desea alcanzar el nivel de producción de 100 unidades.

b) Su costo marginal de producción cuando se minimiza su función de costo total.

Solución:

Datos

La función de costo total es:

$$C = \underbrace{10L}_{w} + \underbrace{40K}_{r}$$

$$Q_0 = 100 \quad \Rightarrow \quad 100 = 2L^{1/2}K^{1/2}$$

1° La función de ***LAGRANGE*** será:

$$F(L,K,\lambda) = 10L + 40L + \lambda(100 - 2L^{1/2}K^{1/2})$$

2° De: $f(L,K) = 2L^{1/2}K^{1/2}$

$$\frac{\partial f}{\partial L} = 2K^{1/2}\left[\tfrac{1}{2}L^{1/2}\right] = \left[\frac{K}{L}\right]^{1/2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial K} = 2L^{1/2}\left[\tfrac{1}{2}K^{-1/2}\right] = \left[\frac{1}{K}\right]^{1/2}$$

3° Resolver el sistema:

$$\begin{cases} Q_0 = f(L,K) \Rightarrow \begin{cases} 100 = 2L^{1/2}K^{1/2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1) \\ \dfrac{\left[\frac{K}{L}\right]}{\left[\frac{L}{K}\right]} = \dfrac{10}{40} \Rightarrow \dfrac{K}{L} = \dfrac{1}{4} \end{cases} \\ \dfrac{PMgL}{PMgK} = \dfrac{w}{r} \Rightarrow \quad \Rightarrow L = 4K \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2) \end{cases}$$

(2) en (1): $100 = 2[4K]^{1/2}K^{1/2} \Rightarrow K = 25 \quad L = 100$

Luego:

a) El nivel de costo mínimo será:

$$C(100,25) = 10(100) + 40(25) = 2{,}000$$

b) El costo marginal de producción cuando se minimiza el costo total es:

$$\lambda = \frac{r}{\frac{\partial f}{\partial K}} = \frac{40}{\left(\frac{100}{25}\right)^{1/2}} = 20 = \frac{w}{\frac{\partial f}{\partial L}} = \frac{10}{\left(\frac{25}{100}\right)^{1/2}}$$

Otra forma de hallar λ: $\lambda = \dfrac{dC}{dQ_0} = \dfrac{10 \cdot dL + 40 \cdot dK}{\frac{1}{2}dL + 2 \cdot dK} = \dfrac{10(dL + 4 \cdot dK)}{\frac{1}{2}(dL + 4 \cdot dK)} = 20$

Donde:

$$dc = \frac{\partial C}{\partial L} \cdot dL + \frac{\partial C}{\partial K} \cdot dK$$

$$= 10 \cdot dL + 40 \cdot dK$$

$$df = dQ_0 = \frac{\partial f}{\partial L}\cdot dL + \frac{\partial f}{\partial K}\cdot dK$$

$$= \left[\frac{K}{L}\right]^{1/2}\cdot dL + \left[\frac{L}{K}\right]^{1/2}\cdot K$$

$$= \left[\frac{25}{100}\right]^{1/2}\cdot dL + \left[\frac{100}{25}\right]^{1/2}\cdot dK$$

$$= \frac{1}{2}\cdot dL + 2\cdot dK$$

PROBLEMAS

Del (1) al (4), se dan: la función de utilidad del consumidor, los precios de los bienes y el ingreso del consumidor. Hallar las cantidades de los bienes que maximicen su utilidad:

1. $U(q_1, q_2) = q_1^2 q_2$, $P_1 = 4$, $P_2 = 5$, $M = 120$ **R:** $q_1 = 20$, $q_2 = 8$

2. $U(x,y) = 20x + 40y - 2x^2 - 3y^2$, $P_x = 4$, $P_y = 5$, $M = 28$.

3. $U(x,y) = 2\text{Ln}\,x + \text{Ln}\,y$, $P_x = 2$, $P_y = 4$, $I_0 = 36$ **R:** $x = 12$, $y = 3$

4. $U(x,y) = xy + \frac{150}{100}\text{Ln}\,x + \text{Ln}\,y$, $P_x = 3$, $P_y = 4$, $I_0 = 100$ **R:** $x = 20$, $y = 10$

5. La producción $X = f(L,K)$, como la producción de los insumos $\mathbb{L}$ y $\mathbb{K}$ está dado por $f(L,K) = L^2 + 5LK - 4K^2$ Supóngase que los precios para $\mathbb{L}$ y $\mathbb{K}$ son, respectivamente, 2 y 3; y que el costo total sea 74.

Hallar las cantidades L, K que maximice la producción **R:** $L = 31$, $k = 4$

6. La función de producción de un fabricante es: $Q = f(L,K) = 27^{1/3}K^{1/3}$ y los precios de L y K son 4 y 27 , respectivamente.

Hallar: a) La combinación de L y K para que el costo sea mínimo, si el nivel de producción es 324 unidades.

b) El costo marginal de producción cuando se minimice su función de costo total.

R: $L = 27$, $K = 8$, $\lambda = 1$

En los siguientes problemas aplicar la ***CONDICIÓN DE SEGUNDO ORDEN*** para confirmar la existencia de la máxima utilidad en un punto crítico.

Para ello definimos el ***HESSIANO ORLADO***.

Dada la función utilidad $U = U(x,y)$, $(U_x , U_y > 0)$ sujeto a $xP_x + yP_y = B$, el hessiano orlado se define por la siguiente determinante.

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & P_x & P_y \\ P_x & U_{xx} & U_{xy} \\ P_y & U_{yx} & U_{yy} \end{vmatrix} = 2P_x P_y U_{xy} - P_y^2 U_{xx} - P_y^2 U_{yy}$$

Proposición: (condición de segundo orden)
Si $(\bar{x} , \bar{y})$ es punto crítico de la función Lagrangiana y $|\bar{H}| > 0$ en $(\bar{x} , \bar{y})$, entonces $U(\bar{x} , \bar{y})$ es máximo.

Problemas:

① Dada: $U = (x+2)(y+1)$ y $P_x = 6$, $P_y = 4$, $B = 112$:

a) Escribir la función logarítmica.

b) Hallar los niveles óptimos de compras de $(\bar{x} , \bar{y})$.

c) ¿Se cumple la condición de segundo orden para máximo?

② Dada: $U = (x+1)(y-2)$ y $P_x = 3$, $P_y = 4$, $B = 13$

a) Escribir la función lagrangiana.

b) Hallar los niveles óptimos de compras $\bar{x} , \bar{y}$.

c) ¿Se cumple la condición de segundo orden para máximos?

③ Dada la función utilidad $U(x,y) = xy$ y $P_x = 2$, $P_y = 3$, $B = 36$.
Hallar los niveles óptimos de compras del consumidor.

④ Supongamos que la función utilidad de un consumidor es $U(x,y) = 2(\text{Ln}x + \text{Ln}y)$ y la restricción presupuestaria es $3x + 2y = 18$. Hallar los niveles óptimos de compra del consumidor tal que maximice su utilidad.

5 Sea: $U(x,y)=2x^2$ y la función utilidad de un consumidor y su restricción presupuestaria es $x+2y=6$. Hallar los niveles óptimos de compra del consumidor tal que maximice su utilidad.

6 Resolver el sistema $\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases}$ en cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x,y)=x^2+(y-1)^2$

b) $f(x,y)=y^2-2x^2y+3x^4$

c) $f(x,y)=x^2y^2-y^3-x^3+xy$

d) $f(x,y)=x^2y^3(6-x-y)$

e) $f(x,y)=x^3-y^3-3xy$

f) $f(x,y)=3x^4+y^2-4x^2y$

g) $f(x,y)=y^4-x^3+x^2$

h) $f(x,y)=(3-x)(3-y)(x+y-3)$

i) $f(x,y)x^2+2xy+3y^2$

j) $f(x,y)=x^2-3xy-y^2-2y-6x$

k) $f(x,y)=4x^3-2x^2y+y^2$

l) $f(x,y)=x^2+4y^2-x+2y$

m) $f(x,y)=5+4x-2x^2+3y-y^2$

n) $f(x,y)=x^4+y^3+32x-9y$

o) $f(x,y)=\dfrac{4y+x^2y^2+8x}{xy}$

p) $f(x,y)=\dfrac{(x+y+1)^2}{x^2+y^2+1}$

q) $f(x,y)=(x^2+3y^2)\,e^{-x^2-y^2}$

7 **Criterio para máximos y mínimos:** Si $f(x,y)$ es una función de dos variables que tiene segundas derivadas parciales continuas en una región rectangular $D\subset \mathbb{R}^2$ y sea: $g(x,y)=f_{xx}(x,y)\,f_{yy}(x,y)-[f_{xy}(x,y)]^2$ para todo (x,y) en D. Si (a,b) está en D = dominio de f y además.

$$\begin{cases} f_x(a,b)=0 \\ f_y(a,b)=0 \end{cases}, \text{ entonces:}$$

i) $f(a,b)$ es un máximo local de f si $g(a,b)>0$ y $f_{xx}(a,b)<0$

i) $f(a.b)$ es un mínimo local de f si $g(a,b)>0$ y $f_{xx}(a,b)>0$

iii) $f(a,b)$ no es un valor extremo de f si $g(a,b)<0$.

Con este criterio, halle los máximos y mínimos de la función $f(x,y)$, si existen; en cada una de las funciones del problema anterior.

CAPÍTULO 4

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

0. INTRODUCCIÓN

Hasta el momento, hemos derivado funciones "explícitas" donde la variable dependiente "y" está expresado en términos de la variable independiente "x" es decir $y = f(x)$, en el que $f(x)$ está dado por una fórmula (regla de correspondencia de la función).

Por ejemplo: $y = \sqrt{4 - x^2}$

$y = x^2 \operatorname{sen}(1 - x)$

$y = e^{-x^2}(x - \operatorname{Ln}^2(1 - x^2))$, ... etc.

Esta vez, hallaremos la $\frac{dy}{dx}$ en las ecuaciones donde la variable dependiente "y" no está "despejado, es decir "y" no está expresado en términos de "X".

Por ejemplo: $x^2 - 4y = 0$

$x^2 - x\sqrt{xy} = 2y^2 + 6$

$\operatorname{Ln} x + e^{-\frac{y}{x}} = c$

1. DEFINICIÓN Si tenemos una ecuación de la forma $F(x,y) = 0$, con $y = f(x)$, en el cual la variable dependiente "y" no está "despejado" en términos de "x" entonces "y se llama función implícita de x".

En el ejemplo anterior tenemos: $F(x, y) = x^2 - 4y$

$F(x,y) = x^2 - x\sqrt{xy} - 2y^2 - 6$

$F(x,y) = \operatorname{Ln} x + e^{-\frac{y}{x}} - c$

2. DERIVACIÓN IMPLÍCITA Dado la ecuación en dos variables $F(x,y) = 0$, con $y = f(x)$, necesitamos algún procedimiento para hallar $\frac{dy}{dx}$, sin tener necesidad de despejar "y" en términos de "x". Existen dos procedimientos para hallar la $\frac{dy}{dx}$ en una ecuación $F(x,y) = 0$, con $y = f(x)$.

1er Método: Aplicando en ambos miembros de la ecuación $F(x,y)=0$, el operador "$\frac{d}{dx}$" y usando todas las reglas de derivación para finalmente despejar y'.

2do Método: Usando derivadas parciales en la fórmula: $\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$

Donde: $\frac{\partial F}{\partial x}$: Es la "DERIVADA PARCIAL DE F CON RESPECTO A X". En este caso, consideramos **sólo a x** como variable y el resto de letras se consideran como constantes.

$\frac{\partial F}{\partial y}$: Es la "derivada PARCIAL DE F CON RESPECTO A Y". En este caso, consideramos **sólo a y** como variable, las otras letras se consideran como constantes.

2.1. PROBLEMAS

1. En la ecuación $x^3+y^3-3axy=0$, donde $y=f(x)$, hallar $\frac{dy}{dx}$

Solución: **1er Método**

1) Aplicar el operador $\frac{d}{dx}$ en ambos miembros:

$$\frac{d}{dx}(x^3+y^3-3a\,xy)=\frac{d}{dx}(0)$$

$$\frac{d}{dx}(x^3)+\frac{d}{dx}(y^3)-\frac{d}{dx}(3a\,xy)=0$$

$$3x^2\frac{dx}{dx}+3y^2\frac{dy}{dx}-3a\frac{d}{dx}(xy)=0$$

$$3x^2\cdot 1+3y^2\frac{dy}{dx}-3a\left(x\cdot\frac{dy}{dx}+y\frac{dx}{dx}\right)=0$$

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}-3a\left(x\cdot\frac{dy}{dx}+y\cdot 1\right)=0$$

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}-3ax\cdot\frac{dy}{dx}-3ay=0$$

2) Despejar $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx}[3y^2-3ax]=3ay-3x^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3ay-3x^2}{3y^2-3ax}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a\,y-x^2}{y^2-a\,x}$$

2do Metodo:

1) Como $F(x,y)=x^3+y^3-3a\,x\,y$ obtenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=3x^2+0-3a\,y=3x^2-3a\,y$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=0+3y^2-3a\,x=3y^2-3a\,x$$

2) Fórmula:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{3x^2-3a\,y}{3y^2-3a\,x}=\frac{a\,y-x^2}{y^2-a\,x}$$

2. En la ecuación $x = \sqrt{y} + \sqrt[3]{y}$, donde $y = f(x)$, hallar $\frac{dy}{dx}$

Solución:

1er Método:

1) $\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(\sqrt{y}) + \frac{d}{dx}(\sqrt[3]{y})$

$$1 = \tfrac{1}{2}y^{-1/2} \cdot \frac{dy}{dx} + \tfrac{1}{3}y^{-2/3} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$1 = \frac{dy}{dx}\left[\tfrac{1}{2}y^{-1/2} + \tfrac{1}{3}y^{-2/3}\right]$$

$$6 = \frac{dy}{dx}[3y^{-1/2} + 2y^{-2/3}]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6}{3y^{-1/2} + 2y^{-2/3}}$$

$$= \frac{6}{\frac{3}{\sqrt{y}} + \frac{2}{\sqrt[3]{y^2}}} = \frac{\sqrt{y}\sqrt[3]{y^2}}{3\sqrt[3]{y^2} + 2\sqrt{y}}$$

$$= \frac{\sqrt{y}\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt{y}(3\sqrt[6]{y} + 2)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt[3]{y^2}}{3\sqrt[6]{y} + 2}$$

2do Método:

1) De: $F(x,y) = \sqrt{y} + \sqrt[3]{y} - x$

obtenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 + 0 - 1 = -1$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \tfrac{1}{2}y^{-1/2} + \tfrac{1}{3}y^{-2/3} - 0$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} = \frac{3\sqrt[3]{y^2} + 2\sqrt{y}}{6\sqrt{y}\sqrt[3]{y^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{y}(3\sqrt[6]{y} + 2)}{6\sqrt{y}\sqrt[3]{y^2}} = \frac{3\sqrt[6]{y} + 2}{6\sqrt[3]{y^2}}$$

2) Fórmula: $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{-1}{\frac{3\sqrt[6]{y} + 2}{6\sqrt[3]{y^2}}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6\sqrt[3]{y^2}}{3\sqrt[6]{y} + 2}$$

3. En la ecuación: $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $y = f(x)$, a es constante. Hallar $\frac{dy}{dx}$.

1er Método:

1) $\frac{d}{dx}(x^{2/3} + y^{2/3}) = \frac{d}{dx}(a^{2/3})$

$$\tfrac{2}{3}x^{-1/3} + \tfrac{2}{3}y^{-1/3} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$x^{-1/3} + y^{-1/3} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

2) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x^{-1/3}}{y^{-1/3}} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$

2do Método:

1) De $F(x,y) = x^{2/3} + y^{2/3} - a^{2/3}$

obtenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \tfrac{2}{3}x^{-1/3} + 0 - 0 = \tfrac{2}{3}x^{-2/3}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 + \tfrac{2}{3}y^{-1/3} - 0 = \tfrac{2}{3}y^{-2/3}$$

2) Fórmula: $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{2}{3}x^{-1/3}}{\frac{2}{3}y^{-1/3}} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$

4. En la ecuación $x^2 + a\sqrt{xy} + y^2 = b^2$, $y = f(x)$; a,b, son constantes. Hallar $\frac{dy}{dx} = y'$

1er Método

Usaré y' en lugar de $\frac{dy}{dx}$.

De $x^2 + a\sqrt{xy} + y^2 = b^2$, se obtiene:

$$2x + a\left[\frac{xy' + y}{2\sqrt{xy}}\right] + 2yy' = 0$$

$$\Rightarrow \quad y' = -\frac{4x\sqrt{xy} + ay}{ax + 4y\sqrt{xy}}$$

2do Método:

De $F(x,y) = x^2 + a\sqrt{xy} + y^2 - b^2$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + a\frac{y}{2\sqrt{xy}} + 0 - 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 + a\frac{x}{2\sqrt{xy}} + 2y - 0$$

$$\Rightarrow \quad y' = -\frac{2x + \frac{ay}{2\sqrt{xy}}}{2y + \frac{ax}{2\sqrt{xy}}} = -\frac{4x\sqrt{xy} + ay}{4y\sqrt{xy} + ax}$$

5. Dado: $y^3 = \frac{x-y}{x+y}$, $y = f(x)$. Hallar $\frac{dy}{dx} = y'$

1er Método:

De:

$$y^3 = \frac{x-y}{x+y} \Longleftrightarrow y^3x + y^4 = x - y$$

Al derivar:

$$3y^2y'x + y^3 \cdot 1 + 4y^3y' = 1 - y'$$

Despejar y':

$$3y^2xy' + 4y^3y' + y' = 1 - y^3$$

$$y'(3y^2x + 4y^3 + 1) = 1 - y^3$$

$$y' = \frac{1 - y^3}{3y^2x + 4y^3 + 1}.$$

2do Método:

De: $F(x,y) = y^3x + y^4 - x + y$

$\frac{\partial F}{\partial x} = y^3(1) + 0 - 1 + 0 = y^3 - 1$

$\frac{\partial F}{\partial y} = x(3y^2) + 4y^3 - 0 + 0 = 3xy^2 + 4y^3 + 1$

Fórmula: $y' = \frac{y^3 - 1}{3xy^2 + 4y^3 + 1}$

6. Dado: $a\cos^2(x+y) = b$, $y = f(x)$; a, b son constantes. Halle $\frac{dy}{dx}$.

1er Método:

De: $a \cdot \cos^2(x+y) = b$, al derivar:

$$2a \cdot \cos(x+y) \cdot \frac{d}{dx}[\cos(x+y)] = 0$$

$$2a \cdot \cos(x+y) \cdot [-\operatorname{sen}(x+y)]\left[\frac{d}{dx}(x+y)\right] = 0$$

$$-2a \cdot \cos(x+y) \cdot \operatorname{sen}(x+y)[1 + y'] = 0$$

$$\Rightarrow 1 + y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -1$$

2^do Método:

De: $F(x,y) = a \cdot \cos^2(x+y) - b$, obtenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = a \cdot 2 \cdot \cos(x+y)[-\operatorname{sen}(x+y)][1+0] - 0$$
$$= -2a\cos(x+y)\operatorname{sen}(x+y)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = a \cdot 2\cos(x+y)[-\operatorname{sen}(x+y)][0+1] - 0$$
$$= -2a\cos(x+y)\cdot\operatorname{sen}(x+y)$$

Fórmula:

$$y' = -\frac{-2\cos(x+y).\operatorname{sen}(x+y)}{-2\cos(x+y).\operatorname{sen}(x+y)} = -1$$

En los ejercicios 7–11 hallar las derivadas de las funciones $y = f(x)$ dadas en forma implícita.

7. $y^3 - 3y + 2ax = 0$

Solución:

$$3y^2y' - 3y' + 2a(1) = 0$$
$$y'(3y^2 - 3) = -2a$$
$$\Rightarrow \quad y' = \frac{-2a}{3y^2 - 3} = \frac{2a}{3(1-y^2)}$$

8. $y^2 - 2xy + b^2 = 0$

Solución:

$$2yy' - 2(1 \cdot y + xy') + 0 = 0$$
$$yy' - y - xy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{y}{y-x}$$

9. $x^4 + y^4 = x^2y^2$

Solución:

$$4x^3 + 4y^3y' = 2x \cdot y^2 + x^2 \cdot 2yy'$$
$$2x^3 + 2y^3y' = xy^2 + x^2yy'$$
$$y'(2y^3 - x^2y) = xy^2 - 2x^3$$
$$y' = \frac{xy^2 - 2x^3}{2y^3 - x^2y} = \frac{x}{y} \cdot \frac{y^2 - 2x^2}{2y^2 - x^2}$$

10. $x^3 + ax^2y + bxy^2 + y^3 = 0$

Solución:

$$3x^2 + a(2x \cdot y + x^2 \cdot y') + b(1 \cdot y^2 + x \cdot 2yy')$$
$$+3y^2y' = 0$$
$$3x^2 + 2axy + ax^2y' + by^2 + 2xyy'$$
$$+3y^2y' = 0$$
$$\Rightarrow \quad y' = \frac{-(3x^2 + 2axy + by^2)}{ax^2 + 2xy + 3y^2}$$

11. $y^3 + 3x^2y + x^2 - 2xy - 3 = 0$; $P(1,1)$

Solución:

$$3y^2y' + 3(2x \cdot y + x^2y') + 2x$$
$$-2(1 \cdot y + x \cdot y') - 0 = 0$$
$$3y^2y' + 6x \cdot y + 3x^2y' + 2x - 2y - 2xy' = 0$$

Como en $P(1,1)$, $x = 1$, $y = 1$. Entonces:

$$3y' + 6 + 3y' + 2 - 2 - 2y' = 0$$
$$4y' + 6 = 0$$
$$\Rightarrow \quad y' = -\frac{6}{4}$$
$$y' = -\frac{3}{2}$$

En los ejercicios 12 – 20 hallar las derivadas de las funciones $y = f(x)$ dadas en forma implícita:

12. $\operatorname{sen}(xy) + \cos(xy) = \operatorname{tg}(x+y)$

Solución:

$$\cos(xy)[1\cdot y + x\cdot y'] - \operatorname{sen}(xy)[1\cdot y + x\cdot y'] = \sec^2(x+y)[1+y']$$

$$y\cdot\cos(xy) + x\underline{y}'\cos(xy) - y\cdot\operatorname{sen}(xy) - x\underline{y}'\operatorname{sen}(xy) = \sec^2(x+y) + y'\sec^2(x+y)$$

$$\Rightarrow\quad y'[x\cdot\cos(xy) - x\cdot\operatorname{sen}(xy) - \sec^2(x+y)] = \sec^2(x+y) - y\cdot\cos(xy) + y\operatorname{sen}(xy)$$

$$\Rightarrow\quad y' = \frac{\sec^2(x+y) - y.\cos(xy) + y\operatorname{sen}(xy)}{x\cos(xy) - x\operatorname{sen}(xy) - \operatorname{sen}^2(x+y)}$$

13. $2^x + 2^y = 2^{x+y}$

Solución:

$$2^x\cdot\frac{dx}{dx} + 2^y\cdot\frac{dy}{dx} = 2^{x+y}\cdot\frac{d}{dx}(x+y)$$

$$\Rightarrow\quad 2^x + 2^y\cdot y' = 2^{x+y}(1+y')$$

$$\Rightarrow\quad 2^y\cdot y' - 2^{x+y}\cdot y' = 2^{x+y} - 2^x$$

$$\Rightarrow\quad y' = [2^y - 2^{x+y}] = 2^{x+y} - 2^x$$

$$y' = \frac{2^{x+y} - 2^x}{2^y - 2^{x+y}} = \frac{2^x[2^y - 1]}{2^y[1 - 2^x]} = 2^{x-y}\cdot\frac{2^y - 1}{1 - 2^x}$$

14. $2y\cdot\operatorname{Ln} y = x$

Solución:

$$2\left[y'\cdot\operatorname{Ln} y + y\cdot\frac{y'}{y}\right] = 1$$

$$2y'\cdot\operatorname{Ln} y + 2y' = 1$$

$$y'[2\cdot\operatorname{Ln} y + 2] = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{2(1+\operatorname{Ln} y)}$$

15. $x - y = \operatorname{arc\,sen} x - \operatorname{arc\,sen} y$

Solución:

$$1 - y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{y'}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = y' - \frac{y'}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{y'\left(\sqrt{1-y^2} - 1\right)}{\sqrt{1-y^2}} \quad\Rightarrow\quad y' = \frac{\sqrt{1-y^2}\left(\sqrt{1-x^2} - 1\right)}{\sqrt{1-x^2}\left[\sqrt{1-y^2} - 1\right]}$$

16. $x^y = y^x$

Aplicar Ln en ambos miembros:

$$\text{Ln}\,x^y = \text{Ln}\,y^x$$

$y \cdot \text{Ln}\,x + x \cdot \text{Ln}\,y$, derivar:

$$\Rightarrow \quad y' \cdot \text{Ln}\,x + y \cdot \frac{1}{x} = 1 \cdot Lny + x \cdot \frac{y'}{y}$$

$$y'\,\text{Ln}\,x - \frac{x\,y'}{y} = \text{Ln}\,y - \frac{y}{x}$$

$$y'\left[\text{Ln}\,x - \frac{x}{y}\right] = \text{Ln}\,y - \frac{y}{x}$$

$$y'\left[\frac{y.\text{Ln}\,x - x}{y}\right] = \frac{x \cdot \text{Ln}\,y - y}{x}$$

$$\Rightarrow \qquad y' = \frac{y}{x}\left[\frac{x.\text{Ln}\,y - y}{y.\text{Ln}\,x - x}\right]$$

17. $y = 1 + x \cdot e^x$

Solución:

$$y' = 0 + 1 \cdot e^y + xe^y y'$$

$$\Rightarrow \quad y' = e^y + xe^y \cdot y'$$

$$\Rightarrow \quad y'[1 - xe^y] = e^y \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{e^y}{1 - xe^y}$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{e^y}{1 - [y - 1]} \qquad \Rightarrow \quad y' = \frac{e^y}{2 - y}$$

18. $x \cdot \text{sen}\,y - \cos y + \cos 2y = 0$

Solución:

$$1 \cdot \text{sen}\,y + x \cdot (\cos y)y' - [-y'\,\text{sen}\,y]$$
$$-2y' \cdot \text{sen}\,2y = 0$$

$$\Rightarrow \quad \text{sen}\,y + xy'\cos y + y'\text{sen}\,y - 2y'\text{sen}\,2y = 0$$

$$\Rightarrow \quad \text{sen}\,y = y'(-x \cdot \cos y - \text{sen}\,y + 2\text{sen}\,2y$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{\text{sen}\,y}{2\,\text{sen}\,2y - \text{sen}\,y - x\,.\cos y}$$

19. $\text{tg} = \frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}} \cdot \text{tg}\frac{x}{2}$, $k =$ constante

Solución:

$$\frac{1}{2}y' \cdot \sec^2\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}} \cdot \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}$$

$$y' \cdot \sec^2\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}} \cdot \sec^2\frac{x}{2}$$

$$y' = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}} \cdot \frac{\sec^2 x/2}{\sec^2 y/2}$$

$$= \sqrt{\frac{1-k}{1+k}} \cdot \frac{1+\cos y}{1+\cos x}, \quad \text{pues:} \quad \cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

20. $y \cdot \text{sen}\,x - \cos(x - y) = 0$

Solución:

$$y' \cdot \text{sen}\,x + y \cdot \cos x - [-(1 - y')\text{sen}(x - y)] = 0$$

$$\Rightarrow \quad y' \cdot \text{sen}\,x + y\cos x + \text{sen}(x - y) - y'\text{sen}(x - y) = 0$$

$$\Rightarrow \quad y'[\text{sen}\,x - \text{sen}(x - y)] = -y\cos x + \text{sen}(x - y)$$

$$\Rightarrow \quad y'[-\text{sen}\,x + \text{sen}(x - y)] = y\cos x + \text{sen}(x - y)$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{y\cos x + \text{sen}(x - y)}{\text{sen}(x - y) - \text{sen}\,x}$$

En los ejercicios del 21–31 halle $\frac{dy}{dx}$ por derivación implícita y use ese resultado para determinar el valor numérico de $\frac{dy}{dx}$ en el punto que se indica.

21. $\operatorname{tg} y = xy$

Solución:

$$y'\sec^2 y = 1\cdot y + x y' \Rightarrow y' = \frac{y}{\sec^2 y - x}$$

22. $x\cdot y = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$

Solución:

$$\Rightarrow \quad 1\cdot y + x\cdot y' = \frac{\frac{x\cdot y' - y\cdot 1}{x^2}}{1+\left[\frac{y}{x}\right]^2}$$

$$\Rightarrow \quad y + x\cdot y' = \frac{\frac{x\cdot y' - y}{x^2}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}$$

$$\Rightarrow \quad y + x\cdot y' = \frac{x\cdot y' - y}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \quad y x^2 + y^3 + x^3\cdot y' + x y^2 y' = x y' - y$$

$$\Rightarrow \quad y'[x^3 + x y^2 - x] = -y - y x^2 - y^3$$

$$\Rightarrow \quad y' = -\frac{y(1+x^2+y^2)}{x(x^2+y^2-1)}$$

23. $\operatorname{arc\,tg}(x+y) = x$

Solución:

$$\frac{1+y'}{1+(x+y)^2} = 1$$

$$\Rightarrow \quad 1 + y' = 1 + (x+y)^2$$

$$\Rightarrow \quad y' = (x+y)^2$$

24. $e^y = x + y$

Solución:

$$e^y \cdot y' = 1 + y'$$

$$y'(e^y - 1) = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{e^y - 1}$$

25. $\operatorname{Ln} x + e^{-y/x} = c$

Solución:

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x} + e^{-\frac{y}{x}}\frac{d}{dx}\left[-\frac{y}{x}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x} + e^{-\frac{y}{x}}\left[-\frac{x\cdot y' - y\cdot 1}{x^2}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad x - e^{-\frac{y}{x}}[x y' - y] = 0$$

$$\Rightarrow \quad x - e^{-\frac{y}{x}} x y' + y e^{-\frac{y}{x}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{x + y e^{-\frac{y}{x}}}{x\cdot e^{-\frac{y}{x}}}$$

$$\Rightarrow \quad y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$$

26. $\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}(x^2+y^2)$

Solución:

$$\frac{\frac{d}{dx}\left[\frac{y}{x}\right]}{1+\left[\frac{y}{x}\right]^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{d}{dx}[x^2+y^2]}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\frac{x\,.\,y'-y\,.\,1}{x^2}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2y\,y'}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x\,.\,y'-y}{x^2+y^2} = \frac{x+y\,y'}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \quad x\cdot y'-y = x+y\cdot y'$$

$$\Rightarrow \quad y'(x-y) = x+y \;\Rightarrow\; y' = \frac{x+y}{x-y}$$

28. $ye^y = e^{x+1}$, en $A(0,1)$

Solución:

$$y'\cdot e^y + y\cdot e^y\cdot y' = e^{x+1}(1+0)$$

Reemplazar: $x=0$, $y=1$

$$\Rightarrow \quad y'\cdot e^1 + 1\cdot e^1\cdot y' = e^{0+1}$$

$$2y'\cdot e = e \quad \Rightarrow y' = \frac{e}{2e} = \frac{1}{2}$$

29. $y^2 = 4ax$, en $P(a,2a)$.

Solución:

$$2y\cdot y' = 4a$$

$$\Rightarrow \quad 2[2a]y' = 4a \quad \Rightarrow \quad y' = 1$$

27. $\sqrt{x^2+y^2} = c\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$

Solución:

$$\Rightarrow \quad \frac{\frac{d}{dx}[x^2+y^2]}{2\sqrt{x^2+y^2}} = c\cdot\frac{\frac{d}{dx}\left[\frac{y}{x}\right]}{1+\left[\frac{y}{x}\right]^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2x+2y\,y'}{2\sqrt{x^2+y^2}} = c\cdot\frac{\frac{x\,.\,y'-y\,.\,1}{x^2}}{\frac{x^2+y^2}{x^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x+y\,y'}{\sqrt{x^2+y^2}} = c\cdot\frac{x\,.\,y'-y}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2+y^2}\,(x+y\,.\,y') = c\cdot(x\cdot y'-y)$$

$$\Rightarrow \quad x\sqrt{x^2+y^2} + y\,y'\sqrt{x^2+y^2} = c\cdot x\,y' - c\cdot y$$

$$\Rightarrow \quad y'\left[y\sqrt{x^2+y^2} - cx\right] = -c\cdot y - x\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \quad y' = -\frac{x\sqrt{x^2+y^2}+cy}{y\sqrt{x^2+y^2}-c.x}$$

30. $y^2 = x + \operatorname{Ln}\frac{y}{x}$, en $P(1,1)$

Solución:

Antes de derivar, aplicar propiedad de logaritmos:

$$y^2 = x + \operatorname{Ln} y - \operatorname{Ln} x$$

Derivar: $2y\,y' = 1 + \frac{y'}{y} - \frac{1}{x}$

Remplazando: $x=1$, $y=1$

$$2(1)\,y' = 1 + \frac{y'}{1} - \frac{1}{1}$$

$$2y' = 1 + y' - 1 \quad \Rightarrow \quad y' = 0$$

31. $1+\frac{2}{y}-\frac{1}{x}=\frac{5}{xy}$, en $P(2,1)$

Solución:

Antes de derivar, obtener M.C.M.

$xy+2x-y=5$, derivar: $1\cdot y+x\cdot y'+2-y'=0$

Reemplazar: $x=2$, $y=1$

$$1+2y'+2-y'=0$$
$$y'+3=0$$
$$y'=-3$$

PROBLEMAS

32. Dado:

$$y=\sqrt{5+x^2\sqrt{5+x^2\sqrt{5+x^2\sqrt{\ldots}}}}$$

Hallar $\frac{dy}{dx}$ en el punto de abscisa 2.

Solución:

Elevar al cuadrado la función:

$$y^2=5+x^2\underbrace{\sqrt{5+x^2\sqrt{5+x^2\sqrt{5+x^2\sqrt{\ldots}}}}}_{y}\ \ldots 1$$

$y^2=5+x^2y$, Derivar:

$$\Rightarrow\ 2yy'=0+2x\cdot y+x^2y'$$
$$\Rightarrow\ 2yy'=2xy+x^2y'$$
$$\Rightarrow\ y'[2y-x^2]=2xy\Rightarrow y'=\frac{2xy}{2y-x^2}\ \ldots 2$$

Como la abscisa es $x=2$, Reemplazar en (1):

$$y^2=5+4y$$
$$y^2-4y-5=0$$
$$(y-5)(y+1)=0 \begin{cases} =-1 \\ y=5 \end{cases}$$

Reemplazar en (2) el único punto (2,5).

$$y'_{(2,5)}=\frac{2(2)(5)}{2(5)-(2)^2}=\frac{10}{3}$$

33. Si: $f'(2ax+1)=\sqrt[3]{2x^2+6x-16}$

$y=f(|x|^3+3)$, hallar $\frac{dy}{dx}$ en $x=a$.

Solución:

1° Tener en cuenta que:

$$\text{Si:}\quad y=|x|=\begin{cases} x & , \ x\geq 0 \\ -x & , \ x<0 \end{cases}$$

$$\text{entonces:}\quad \frac{dy}{dx}=\begin{cases} 1 & , \ x\geq 0 \\ -1 & , \ x<0 \end{cases}$$

$$\therefore\ \frac{d}{dx}(|x|)=\frac{x}{|x|}\ ,\ x\neq 0$$

2° Derivar: $y=f(|x|^3+3)$

$$\Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=f'(|x|^3+3)\frac{d}{dx}(|x|^3+3)$$
$$=\left[f'(|x|^3+3)\right]\left[3|x|^2\frac{x}{|x|}\right]$$

3° En $x=2$.

$$=[f'(|2|^3+3)]\underbrace{\left[3|2|^2\frac{2}{|2|}\right]}_{12}$$

$$\frac{dy}{dx}=12f'(11)$$

4º Como: $f'(2x+1)=\sqrt[3]{2x^2+6x-16}$

Entonces: $2x+1=11$

$\Rightarrow \quad x=5$

Luego: $f'(11)=\sqrt[3]{2(5)^2+6(5)-16}=4$

5º $\frac{dy}{dx}=12\,(4)=48$

34. En los puntos de intersección de la recta $x-y+1=0$ y la parábola $y=x^2-4x+5$ están trazadas las normales a la parábola. Hallar el área del triángulo engendrado por las normales y la cuerda que subtiende los referidos puntos de intersección:

Solución:

1. Hallemos los puntos de intersección, resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x-y+1=0 \Rightarrow y=x+1 \ldots\ldots \text{(I)} \\ y=x^2-4x+5 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)} \end{cases}$$

Igualando (I) y (II):

$$x+1=x^2-4x+5$$

$$0=x^2-5x+4$$

$$0=(x-4)(x-1) \quad \begin{matrix} \nearrow x=4\ ,\ y=5 \\ \searrow x=1\ ,\ y=2 \end{matrix}$$

2. Hallar las normales a la parábola $y=x^2-4x+5$ en los puntos $A(4,5)$, $B(1,2)$

Veamos:

De: $y=x^2-4x+5$

$$\Rightarrow y'=2x-4 \quad \begin{matrix} \nearrow \text{En } A\text{: } y'=2(4)-4=4 \\ \searrow \text{En } B\text{: } y'=2(1)-4=-2 \end{matrix}$$

3. a) La pendiente de la normal en el punto A, es: $-\frac{1}{y'}=-\frac{1}{4}$ y su ecuación será:

$$y-5=-\tfrac{1}{4}(x-4) \Longleftrightarrow N_1: x+4y-24=0$$

b) La pendiente de la normal en el punto B, es: $-\frac{1}{y'}=-\frac{1}{-2}=\frac{1}{2}$ y su ecuación, será:

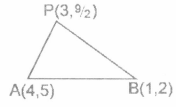
$$y-2=\tfrac{1}{2}(x-1) \Longleftrightarrow N_2: x-2y+3=0$$

4. El punto de intersección entre N_1 y N_2, se halla resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x+4y-24=0 \\ x-2y+3=0 \end{cases}$$

obteniéndose el punto $P(6,9/2)$.

5. El área del triángulo APB se halla por la determinante en valor absoluto:



$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 6 & 9/2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=\frac{15}{4}$$

35. Hallar la ecuación de la tangente a la curva: $x^2(x+y)=a^2(x-y)$ en el origen de las cordenadas.

Solución:

1. La pendiente de la tangente es y' en el punto $(0,0)$. Hallemos y' de la ecuación: $x^2(x+y)=a^2(x-y)$

$$\Rightarrow 2x(x+y)+x^2(1+y')=a^2(1-y')$$

En $(0,0)$:

$$2(0)(0+0)+0(1+y')=a^2(1-y')$$

$$0=a^2(1-y')$$

$$\Rightarrow y'=1$$

2. La ecuación de la tangente en (0,0) será: $y-0=1\cdot(x-0)$

$$y=x$$

36. ¿Qué ángulo forman las curvas:

C_1: $4y^3+x^2y-x+5y=0$

C_2: $x^4-4y^3+5x+y=0$

cuando se intersectan en el origen de las cordenadas?

Solución:

1. El ángulo entre dos curvas está definido por las tangentes.

2. Hallar y' e C_1: De:

$4y^3+x^2y-x+5y=0$, obtenemos:

$12y^2\cdot y'+2x\cdot y+x^2\cdot y'-1+5y'=0$

En (0,0):

$0+0+0-1+5y'=0 \longrightarrow y'=\frac{1}{5}$

3. Hallar y' de C_2: De:

$x^4-4y^3+5x+y=0$, obtenemos:

$4x^3-12y^2\cdot y'+5+y'=0$

En (0,0):

$0-0+5+y'=0 \Rightarrow y'=-5$

4. Comparando ambas pendientes el ángulo es 90°, pues: $\frac{1}{5}(-5)=-1$

37. a) Si $2y=1+xy^3$, hallar $\frac{dy}{dx}$ en el punto $M(1,1)$.

Solución:

De: $2y=1+xy^3$

Obtenemos: $2y'=0+x(3y^2y')+y^3(1)$

$$2y'=3xy^2y'+y^3$$

Reemplazando el punto $M(1,1)$, obtenemos:

$$2y'=3(1)(1)^2y'+(1)^3$$

$$2y'=3y'+1$$

$$2y'-3y'=1$$

$$\boxed{y'=-1}$$

b) Si $\mu=F(x,t)$ definido por:

$\mu=ae^{-9t}\cdot\cos(3x+b)$, probar que

$$\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2}=\frac{\partial\mu}{\partial t}$$

Solución:

1. De: $\mu=ae^{-9t}\cdot\cos(3x+b)$

Obtenemos:

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}=ae^{-9t}[-3\operatorname{sen}(3x+b)]$$

$$=-3ae^{-9t}\operatorname{sen}(3x+b)$$

$$\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2}=-3ae^{-9t}[3\cos(3x+b)]$$

$$=-9ae^{-9t}\cdot\cos(3x+b)$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial t}=a\cdot\cos(3x+b)[-9e^{-9t}]$$

$$=-9ae^{-9t}\cdot\cos(3x+b)$$

Son iguales

38. Si: $(x+y)^3=27(x-y)$, hallar:

$y'=\frac{dy}{dx}$ en el punto $P(2,1)$

Solución:

De: $(x+y)^3 = 27(x-y)$ se obtiene:

$$3(x+y)^2 \frac{d}{dx}(x+y) = 27\frac{d}{dx}(x-y)$$

$$3(x+y)^2\left(1+\frac{dy}{dx}\right) = 27\left(1-\frac{dy}{dx}\right) \quad ...(1)$$

Sustituir el punto $P(2.1)$ en (1):

$$3(2+1)^2\left(1+\frac{dy}{dx}\right) = 27\left(1-\frac{dy}{dx}\right)$$

$$27\left(1+\frac{dy}{dx}\right) = 27\left(1-\frac{dy}{dx}\right)$$

$$1+\frac{dy}{dx} = 1-\frac{dy}{dx}$$

$$2\frac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = 0}$$

39. Si: $y^4 = 4x^4 + 6xy$

Hallar $\frac{dy}{dx}$ en (1,2).

Solución:

De la ecuación: $y^4 = 4x^4 + 6xy$

Obtenemos: $4y^3y' = 16x^3 + 6[xy' + y]$

1) $4y^3y' = 16x^3 + 6xy' + 6y$

Sustituir el punto (1,2) en 1):

$$4(2)^3y' = 16(1)^3 + 6(1)y' + 6(2)$$

$$32y' = 16 + 6y' + 12$$

$$26y' = 28$$

$$y' = \frac{28}{26}$$

$$\boxed{y' = \frac{14}{13}}$$

40. La ecuación $x^3 + y^3 = 1$ define una o más funciones y de x.

a) Supuesto que existe la derivada y' y sin resolver la ecuación respecto a y, demostrar que y' satisface a la ecuación $x^2 + y^2y' = 0$

b) Supuesto que existe la segunda derivada y'', demostrar que y'' $y'' = -2xy^{-5}$ siempre que $y \neq 0$

Solución de a)

De: $x^3 + y^3 = 1$

Obtenemos: $3x^2 + 3y^2y' = 0$

$$\Rightarrow \quad x^2 + y^2y' = 0 \quad \text{..... (I)}$$

$$\Rightarrow \quad y' = -\frac{x^2}{y^2} \quad \text{..... (II)}$$

Donde y' es solución de la ecuación:

$$x^2 + y^2y' = 0$$

Solución de b)

De: $x^2 + y^2y' = 0$

Obtenemos:

$$2x + [y^2y'' + y'(2yy')] = 0$$

$$2x + y^2y'' + 2yy'^2 = 0 \ldots \text{(III)}$$

Sustituir (II) en (III):

$$2x + y^2y'' + 2y\left(-\frac{x^2}{y^2}\right)^2 = 0$$

$$2x + y^2y'' + 2y\left(\frac{x^4}{y^4}\right) = 0$$

$$2x + y^2y'' + \frac{2x^4}{y^3} = 0$$

$$2xy^3 + y^5y'' + 2x^4 = 0$$

$$y'' = \frac{-2xy^3 - 2x^4}{y^5}$$

$$y'' = -\frac{2x(y^3 + x^3)}{y^5}$$

Pero: $y^3 + x^3 = 1 \Rightarrow y'' = -\frac{2x}{y^5}$

41. Si $0 < x < 5$ La ecuación: $x^{1/2} + y^{1/2} = 5$ define "y como función de x°". Sin resolverla respecto a y demostrar que y' tiene signo negativo.

Demostración:

De: $x^{1/2} + y^{1/2} = 5$ .....(1)

Obtenemos: $\frac{1}{2}x^{-1/2} + \frac{1}{2}y^{-1/2}\,y' = 0$

$$x^{-1/2} + y^{-1/2}\,y' = 0$$

$$y' = -\frac{x^{-1/2}}{y^{-1/2}}$$

$$y' = -\sqrt{\frac{y}{x}} \quad ..... \quad (2)$$

En (1) dividir por $x^{1/2}$

$$1 + \frac{y^{1/2}}{x^{1/2}} = \frac{5}{x^{1/2}}$$

$$\sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{x^{1/2}} - 1 \quad ..... \quad (3)$$

Sustituir (3) en (2):

$$y' = -\left(\frac{5}{x^{1/2}} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \quad y' = 1 - \frac{5}{\sqrt{x}} \quad ..... \quad (4)$$

Como: $0 < x < 5$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{x} < \sqrt{5}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} > \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Multiplicar por 5: $\Rightarrow \quad \frac{5}{\sqrt{x}} > \frac{5}{\sqrt{5}}$

$$\Rightarrow \quad -\frac{5}{\sqrt{x}} < -\frac{5}{\sqrt{5}}$$

Sumar 1: $\Rightarrow \quad 1 - \frac{5}{\sqrt{x}} < 1 - \frac{5}{\sqrt{5}}$ ..... (5)

Comparando (4) con (5), obtenemos:

$y' < 1 - \frac{5}{\sqrt{5}}$ ⟵ *ES NEGATIVO.*

42. La ecuación $x\,\text{sen}\,xy + 2x^2 = 0$ define implícitamente y como función de x. Suponiendo que y' existe, demostrar que satisface la ecuación.

$$y'x^2 \cos xy + xy \cos xy + \text{sen}\,xy + 4x = 0$$

Demostración:

De: $x\,\text{sen}\,xy + 2x^2 = 0$. Obtengo:

$$x\left[\frac{d}{dx}\text{sen}\,xy\right] + \left[\frac{d}{dx}x\right]\text{sen}\,xy + 4x = 0$$

$$x\left[(\cos xy)\frac{d}{dx}xy\right] + 1.\text{sen}\,xy + 4x = 0$$

$$x\left[(\cos xy)(xy' + y)\right] + \text{sen}\,xy + 4x = 0$$

$$x^2y'\cos xy + xy\cos xy + \text{sen}\,xy + 4 = 0$$

43. La ecuación $3x^2 + 4y^2 = 12$ define implícitamente dos funciones y de x si $|x| \le 2$ Supuesto que la segunda derivada y" existe, demostrar que verifica la ecuación $4y^3y'' = -9$

Demostración:

De: $3x^2 + 4y^2 = 12$

Obtengo: $6x + 8y\,y' = 0$

Dividir por 2: $3x + 4y\,y' = 0$ ..... (1)

$$y' = -\frac{3x}{4y} \quad ..... \quad (2)$$

De (1): $3x+4yy'=0$

$3+4(yy''+y'\cdot y')=0$

$3+4yy''+4y'^2=0$ ..... (3)

Sustituir (2) en (3):

$$3+4yy''+4\left(-\frac{3x}{4y}\right)^2=0$$

$$3+4yy''+4\left(\frac{9x^2}{16y^2}\right)=0$$

$$12y^2+16y^3y''+9x^2=0$$

$$12y^2+16y^3y''+9x^2=0$$

$$3\underbrace{(4y^2+3x^2)}_{12}+16y^3y''=0$$

$$3(12)+16y^3y''=0$$

Dividir por 4:

$$3(3)+4y^3y''=0$$

$$\Rightarrow \quad 4y^3y''=-9$$

44. ¿Qué ángulo forman entre sí las parábolas $y=x^2$ y $y=x^3$ al cortarse?

Solución:

i) Los puntos donde se cortan las curvas $y=x^2$ y $y=x^3$ se hallan resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} y=x^2 \ .....(I) \\ y=x^3 \ .....(II) \end{cases}$$

Veamos:

Igualando las ecuaciones (I) y (II) obtenemos: $x^2=x^3$

$$\iff \quad x^2-x^3=0$$

$$\iff \quad x^2(1-x)=0$$

$$\iff \quad x=0 \ \vee \ x=1$$

Sustituir en (I) $\begin{cases} \text{Si} \quad x=0 \Rightarrow y=(0)^2=0 \iff A(0,0) \\ \text{Si} \quad x=1 \Rightarrow y=(1)^2=1 \iff B(1,1) \end{cases}$ ← PUNTOS DE INTERSECCIÓN

ii) Las pendientes de las rectas tangentes se obtienen derivando $f(x)=x^2$ y $g(x)=x^3$

De: $f(x)=x^2$ se obtiene:

$f'(x)=2x$

En $A(0,0)$, se tiene: $f'(1)=2(1)=2$

En $B(1,1)$, se tiene: $f'(1)=2(1)=2$

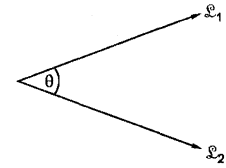
De: $g(x)=x^3$, se obtiene:

$g'(x)=3x^2$

En $A(0,0)$ se obtiene: $g'(0)=3(0)^2=0$

En $B(1,1)$, se obtiene: $g'(1)=3(1)^2=3$

iii) La fórmula $\boxed{\operatorname{tg}\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}}$ es para hallar el ángulo que forman dos rectas $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ de pendientes m_1 m_1 y m_2 m_2 respectivamente.



Pero la pendiente de una recta, que es tangente a una curva, es la derivada en el punto de tangencia.

Así tenemos:

a) En el punto $A(0,0)$:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{f'(0) - g'(0)}{1 + f'(0)\,g'(0)} = \frac{0-0}{1+(0)(0)} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{tg} = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = arc\operatorname{tg} 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0^\circ \quad v \quad \theta = 2\pi$$

b) En el punto B (1,1):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f'(1) - g'(1)}{1 + f'(1)\,g'(1)} = \frac{2-3}{1+(2)(3)} = -\frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{7} \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{7}\right).$$

En las siguientes ecuaciones, hallar $y' = \frac{dy}{dx}$ sabiendo que $y = f(x)$

45. $a\cos^2 xy = b$; a, b son constantes.

Solución:

1er Método:

Si: $a\cos^2 xy = b$

Entonces: $a(2\cos xy)\left[\frac{d}{dx}\cos xy\right] = 0$

$$a(2\cos xy)\left[-\operatorname{sen} xy\right]\left[\frac{d}{dx}(xy)\right] = 0$$

$$(-2a\cos xy\operatorname{sen} xy)\left[x\frac{dy}{dx} + y\right] = 0$$

Si: $a\cos xy \operatorname{sen} xy \neq 0$, entonces:

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

2° Método:

De: $a\cos^2 xy = b$ tenemos:

$$F(x,y) = a\cos^2 xy - b$$

Donde:

i) $\frac{\partial F}{\partial x} = a[2\cos xy][-\operatorname{sen} xy][y] - 0$

$$= -2ay\cos xy\operatorname{sen} xy$$

ii) $\frac{\partial F}{\partial y} = a[2\cos xy][-\operatorname{sen} xy][x]$

$$= -2ax\cos xy\operatorname{sen} xy$$

iii) $\frac{dy}{dx} = -\frac{-2ay\cos xy\operatorname{sen} xy}{-2ax\cos xy\operatorname{sen} xy} = -\frac{y}{x}$

46. $e^{x+y} - e^{x-y} = 2$

Solución:

1er Método:

Aplicar $\frac{d}{dx}$ en ambos miembros:

$$\frac{d}{dx}(e^{x+y} - e^{x-y}) = \frac{d}{dx}(2)$$

$$e^{x+y}\left[1+\frac{dy}{dx}\right] - e^{x-y}\left[1-\frac{dy}{dx}\right] = 0$$

$$e^{x+y} + \frac{dy}{dx}e^{x+y} - e^{x-y} + \frac{dy}{dx}e^{x-y} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}\left[e^{x+y} + e^{x-y}\right] = e^{x-y} - e^{x+y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{x-y} - e^{x+y}}{e^{x+y} + e^{x-y}}$$

2do Método:

De: $e^{x+y} - e^{x-y} = 2$, se tiene:

$$F(x,y) = e^{x+y} - e^{x-y} - 2$$

Donde:

1) $\frac{\partial F}{\partial x} = e^{x+y}[1+0] - e^{x-y}[1-0] - 0$

$= e^{x-y} - e^{x-y}$

2) $\frac{\partial F}{\partial y} = e^{x+y}[0+1] - e^{x-y}[0-1] - 0$

$= e^{x+y} + e^{x-y}$

3) $\frac{dy}{dx} = -\frac{e^{x+y} - e^{x-y}}{e^{x+y} + e^{x-y}} = \frac{e^{x-y} - e^{x+y}}{e^{x+y} + e^{x-y}}$

47. $\operatorname{sen} y - n \operatorname{sen} x = 0$, n es constante.

Solución:

1er Método:

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} y - n\operatorname{sen} x) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$(\cos y)\frac{dy}{dx} - n\cos x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n\cos x}{\cos y}$$

2do Método:

Tenemos: $F(x,y) = \operatorname{sen} y - n\operatorname{sen} x$

Entonces:

1) $\frac{\partial F}{\partial x} = 0 - n\cos x = -n\cos x$

2) $\frac{\partial F}{\partial y} = \cos y - 0 = \cos y$

3) $\frac{dy}{dx} = -\frac{-n\cos x}{\cos y} = \frac{n\cos x}{\cos y}$

48. $a^{x+y} = \operatorname{sen}(x+y)$

Solución:

1er Método:

Derivar directamente, usando la notación y', si se sabe que $y' = \frac{dy}{dx}$

De: $a^{x+y} = \operatorname{sen}(x+y)$

Obtengo:

$$a^{x+y}[1+y']\operatorname{Ln} a = [\cos(x+y)][1+y']$$

Factorizar: $1+y'$, se obtiene:

$$1+y' = 0$$

$$y' = -1$$

2do Método

De: $a^{x+y} = \operatorname{sen}(x+y)$, tenemos:

$$F(x,y) = a^{x+y} - \operatorname{sen}(x+y)$$

Donde:

1) $\frac{\partial F}{\partial x} = a^{x+y}[1+0]\operatorname{Ln} a - [\cos(x+y)][1+0]$

$= a^{x+y}\operatorname{Ln} a - \cos(x+y)$

2) $\frac{\partial F}{\partial x} = a^{x+y}[0+1]\text{Ln}a - [\cos(x+y)][0+1]$

$= a^{x+y}\text{Ln}a - \cos(x+y)$

3) $\frac{dy}{dx} = -\frac{a^{x+y}\text{Ln}a - \cos(x+y)}{a^{x+y}\text{Ln}a - \cos(x+y)}$

$\frac{dy}{dx} = -1$

49. $x + \sqrt{xy} + y = a$, a es constante.

Solución:

1er Método

Derivando directamente, usando la notación y' De: $x + \sqrt{xy} + y = a$

Obtenemos:

$$1 + \frac{(xy)'}{2\sqrt{xy}} + y' = 0$$

$$1 + \frac{xy' + y}{2\sqrt{xy}} + y' = 0$$

$$2\sqrt{xy} + xy' + y + 2y'\sqrt{xy} = 0$$

$$y'(x + 2\sqrt{xy}) = -2\sqrt{xy} - y$$

$$y' = -\frac{2\sqrt{xy} + y}{x + 2\sqrt{xy}}$$

2do Método:

De: $x + \sqrt{xy} + y = a$, tenemos:

$F(x, y) = x + \sqrt{xy} + y - a$

Donde:

1) $\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + \frac{\frac{\partial}{\partial x}(xy)}{2\sqrt{xy}} + 0 - 0 = 1 + \frac{y}{2\sqrt{xy}}$

2) $\frac{\partial F}{\partial y} = 0 + \frac{\frac{\partial}{\partial x}(xy)}{2\sqrt{xy}} + 1 - 0 = \frac{x}{2\sqrt{xy}} + 1$

3) $\frac{dy}{dx} = -\frac{1 + \frac{y}{2\sqrt{xy}}}{\frac{x}{2\sqrt{xy}} + 1} = -\frac{2\sqrt{xy} + y}{x + 2\sqrt{xy}}$

50. Si: $(x+y)^3 = 27(x-y)$, hallar $y' = \frac{dy}{dx}$

Solución:

1er Método:

$$3(x+y)^2(1+y') = 27(1-y')$$

$$3(x+y)^2 + 3(x+y)^2 y' = 27 - 27y'$$

$$(x+y)^2 + (x+y)^2 y' = 9 - 9y'$$

$$(x+y)^2 y' + 9y' = 9 - (x+y)^2$$

$$y'[(x+y)^2 + 9] = 9 - (x+y)^2$$

$$y' = \frac{9 - (x+y)^2}{(x+y)^2 + 9}$$

2do Método

De: $F(x,y) = (x+y)^3 - 27(x-y)$

obtenemos:

1) $\frac{\partial F}{\partial x} = 3(x+y)^2(1+0) - 27(1-0)$

$= 3(x+y)^2 - 27$

2) $\frac{\partial F}{\partial y} = 3(x+y)^2(1+0) - 27(0-1)$

$= 3(x+y)^2 + 27$

3) $\frac{dy}{dx} = -\frac{3(x+y)^2 - 27}{3(x+y)^2 + 27} = \frac{9 - (x+y)^2}{(x+y)^2 + 9}$

51. Hallar $y' = \frac{dy}{dx}$ de la ecuación: $1 + xy = xy\,(e^{xy} e^{-xy})$

Solución:

1er Método:

$$\frac{d}{dx}[1+xy] = \frac{d}{dx}[xy\,(e^{xy} - e^{-xy})]$$

$$0 + x\frac{dy}{dx} + y = xy\frac{d}{dx}[e^{xy} - e^{-xy}] + (e^{xy} - e^{-xy})\frac{d}{dx}[xy]$$

$$= xy\left[e^{xy}\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) - e^{-xy}\left(-x\frac{dy}{dx} - y\right)\right] + (e^{xy} - e^{-xy})\left(x\frac{dy}{dx} + y\right)$$

$$x\frac{dy}{dx} + y = x^2 ye^{xy}\frac{dy}{dx} + xy^2 e^{xy} + x^2 ye^{-xy}\frac{dy}{dx} + xy^2 e^{-xy} + xe^{xy}\frac{dy}{dx} + ye^{xy} - xe^{-xy}\frac{dy}{dx} - ye^{-xy}$$

$$\frac{dy}{dx}[x - x^2 ye^{xy} - x^2 ye^{-xy} - xe^{xy} + xe^{-xy}] = xy^2 e^{xy} + xy^2 e^{-xy} + ye^{xy} - ye^{-xy} - y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2 e^{xy} + xy^2 e^{-xy} + ye^{xy} - ye^{-xy} - y}{x - x^2 ye^{xy} - x^2 ye^{-xy} - xe^{xy} + xe^{-xy}}$$

$$= \frac{y[xye^{xy} + xye^{-xy} + e^{xy} - e^{-xy} - 1]}{-x[-1 + xye^{xy} + xye^{-xy} + e^{xy} - e^{-xy}]}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

2do Método: Queda como ejercicio...

52. Hallar: $y' = \frac{dy}{dx}$ de la ecuación: $\operatorname{tg}(x^2 + y^2) + e^{x^2} + e^{y^2} = 0$

Solución:

1er Método:

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{tg}(x^2 + y^2) + e^{x^2} + e^{y^2}] = \frac{d}{dx}[0]$$

$$[\sec^2(x^2 + y^2)]\left[2x + 2y\frac{dy}{dx}\right] + 2xe^{x^2} + 2y\frac{dy}{dx}e^{y^2} = 0 \quad , \quad \text{Dividir por } 2:$$

$$[\sec^2(x^2 + y^2)]\left[x + y\frac{dy}{dx}\right] + xe^{x^2} + y\frac{dy}{dx}e^{y^2} = 0$$

$$x\sec^2(x^2 + y^2) + y\frac{dy}{dx}\sec^2(x^2 + y^2) + xe^{x^2} + y\frac{dy}{dx}e^{y^2} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}[y\sec^2(x^2 - y^2) + y\,e^{y^2}] = -x\sec^2(x^2 + y^2) - xe^{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x\sec^2(x^2+y^2)-x\,e^{x^2}}{y\sec^2 x^2+y^2+y\,e^{y^2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}\left[\frac{\sec^2(x^2+y^2)+e^{x^2}}{\sec^2(x^2+y^2)+e^{y^2}}\right]$$

2do Método: De la ecuación: $\operatorname{tg}(x^2+y^2)+e^{x^2}+e^{y^2}=0$

Tenemos: $F(x,y)=\operatorname{tg}(x^2+y^2)+e^{x^2}+e^{y^2}$

Donde: 1) $\frac{\partial F}{\partial x}=[\sec^2(x^2+y^2)][2x+0]+2xe^{x^2}+0$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x[\sec^2(x^2+y^2)+e^{x^2}]$$

2) $\frac{\partial F}{\partial y}=[\sec^2(x^2+y^2)][0+2y]+0+2ye^{y^2}$

$$=2y\sec^2(x^2+y^2)+2ye^{y^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=2y[\sec^2(x^2+y^2)+e^{y^2}]$$

3) $\frac{dy}{dx}=-\frac{2x[\sec^2(x^2+y^2)+e^{x^2}]}{2y[\sec^2 x^2+y^2+e^{y^2}]}=-\frac{x}{y}\left[\frac{\sec^2 x^2+y^2+e^{x^2}}{\sec^2 x^2+y^2+e^{y^2}}\right]$

53. Hallar $y'=\frac{dy}{dx}$ de la ecuación $4x^3-3xy^2+6x^2-5xy-8y^2+9x+14=0$

Solución:

1er. Método:

$$\frac{d}{dx}[4x^3-3xy^2+6x^2-5xy-8y^2+9x+14]=\frac{d}{dx}[0]$$

$$12x^2-3\frac{d}{dx}[x\,y^2]+12x-5\frac{d}{dx}[x\,y]-16y\frac{dy}{dx}+9+0=0$$

$$12x^2-3\left[x(2y\frac{dy}{dx})+y^2\right]+12x-5\left[x\frac{dy}{dx}+y\right]-16y\frac{dy}{dx}+9=0$$

$$12x^2-6xy\frac{dy}{dx}-3y^2+12x-5x\frac{dy}{dx}-5y-16y\frac{dy}{dx}+9=0$$

$$\frac{dy}{dx}[-6xy-5x-16y]=-12x^2+3y^2-12x+5y-9$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-12x^2+3y^2-12x+5y-9}{-6xy-5x-16y}=\frac{12x^2-3y^2+12x-5y+9}{6xy+5x+16y}$$

2do Método: Tenemos $F(x,y) = 4x^3 - 3xy^2 + 6x^2 - 5xy - 8y^2 + 9x + 14$

Donde:

1) $\frac{\partial F}{\partial x} = 12x^2 - 3y^2 + 12x - 5y - 0 + 9 + 0$

2) $\frac{\partial F}{\partial y} = 0 - 3x(2y) + 0 - 5x - 16y + 0 + 0$

3) $\frac{dy}{dx} = -\frac{12x^2 - 3y^2 + 12x - 5y + 9}{-6xy - 5x - 16y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{12x^2 - 3y^2 + 12x - 5y + 9}{6xy + 5x + 16y}$

54. En la ecuación: $e^{xy}\operatorname{sen} y - \cos x = 0$, $y = f(x)$. Hallar: $\frac{dy}{dx}$

Solución:

$$\left[\frac{d}{dx}e^{xy}\right]\operatorname{sen} y + e^{xy}\left[\frac{d}{dx}\operatorname{sen} y\right] - (-\operatorname{sen} x) = 0$$

$$\left[e^{xy}\frac{d}{dx}(xy)\right]\operatorname{sen} y + e^{xy}\cdot\cos y\cdot y' + \operatorname{sen} x = 0$$

$$e^{xy}[1\cdot y + xy']\operatorname{sen} y + y'e^{xy}\cos y + \operatorname{sen} x = 0$$

$$ye^{xy}\operatorname{sen} y + x\,\underline{y'}e^{xy}\operatorname{sen} y + \underline{y'}\,e^{xy}\cos y + \operatorname{sen} x = 0$$

$$y' = \frac{-(ye^{xy}\operatorname{sen} y + \operatorname{sen} x)}{e^{xy}(\cos y + x\operatorname{sen} y)}$$

2.2. EJERCICIOS PROPUESTOS

Funciones dadas en forma implícita:

1. Dado: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, hallar: $\frac{d^2y}{dx^2}$

2. Dado: $x^2 + y^2 = r^2$, hallar: $\frac{d^3y}{dx^3}$

3. $y = \operatorname{tg}(x + y)$, $\frac{d^3y}{dx^3}$

4. $e^{x+y} = x\cdot y$; $y'' = ?$

5. $e^y + xy = e$; hallar y'' para $x = 0$

6. $y^2 = 2px$, hallar: $k = \dfrac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$

7. Comprobar que de: $y^2 + x^2 = \mathbb{R}^2$ se deduce $k = \frac{1}{R}$, donde $k = \dfrac{|y''|}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$

8. Demostrar que si: $ax^2 + 2bx \cdot y + cy^2 + 2gx + 2fy + h = 0$, se tiene:

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{ax+by+g}{bx+cy+f}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{A}{(bx+cy+f)^3}$ donde A es una constante que no depende de x e y.

9. Demostrar que si: $(a+bx)e^{\frac{y}{x}} = x$, se tiene: $x^3 \dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(x\dfrac{dy}{dx} - y\right)^2$

10. Encuentre los puntos de la circunferencia cuya ecuación es: $x^2 + y^2 = 25$, en los que la tangente es paralela a la recta cuya ecuación es $4x = 3y$

Funciones dadas en forma paramétrica:

11. $\begin{cases} x = at^2 \\ y = bt^3 \end{cases}$ $\dfrac{d^2x}{dy^2} = ?$

12. $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\,\text{sen}\,t \end{cases}$ $\dfrac{d^2y}{dx^2} = ?$, $\dfrac{d^3y}{dx^3} = ?$

13. $\begin{cases} x = a(\phi - \text{sen}\,\phi) \\ y = a(1 - \cos\phi) \end{cases}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = ?$

14. $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\,\text{sen}^3 t \end{cases}$, $\dfrac{d^3y}{dx^3} = ?$

15. $\begin{cases} x = at.\cos t \\ y = at\,\text{sen}\,t \end{cases}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = ?$

16. Demostrar que la función $y = f(x)$ dadas mediante las ecuaciones paramétricas: $y = e^t \cdot \cos t$, $x = e^t \text{sen}\,t$, satisface la relación: $y''(x+y)^2 = 2(xy' - y)$

17. Demostrar que la función $y = f(x)$ dada mediante las ecuaciones paramétricas $y = 3t - t^3$, $x = 3t^2$ satisface la relación $36y''(y - \sqrt{3x}) = x + 3$

18. Si $y = f(x) \wedge \begin{cases} x = \operatorname{sen} t \\ y = \operatorname{sen} kt \end{cases}$ probar que: $(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + k^2 y = 0$

19. Demostrar que si: $\begin{cases} x = f(t)\cdot \cos t - f'(t)\operatorname{sen} t \\ y = (t)\cdot \operatorname{sen} t + f'(t)\cdot \cos t \end{cases}$

Se tiene: $ds^2 = dx^2 + dy^2 = [f(t) + f''(t)]^2 dt^2$

Respuestas:

1. $-\frac{b^4}{a^2 y^3}$

2. $-\frac{3r^3 x}{y^5}$

3. $-\frac{2(y^4 + 8y^2 + 5)}{y^8}$

4. $-\frac{y[(x-1)^2 + (y-1)^2]}{x^2 (y-1)^3}$

10. (4 , –3) , (–4, 3)

11. $-\frac{2a}{9b^2 t^4}$

12. $-\frac{a^2}{y^3} = -\frac{1}{a \operatorname{sen}^3 t}$, $-\frac{3b \cos t}{a^3 \operatorname{sen}^5 t}$

13. $-\frac{1}{a(1 - \cos\phi)^2}$

14. $\frac{\cos^2 t - 4\operatorname{sen}^2 t}{9a^2 \cos^7 t \operatorname{sen}^3 t}$

15. $\frac{2 + t^2}{a(\cos t - t \operatorname{sen} t)^3}$.

3. DERIVADA LOGARÍTMICA APLICANDO PROPIEDADES Y DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Cuando una función está expresado en forma de cociente, productos o potencias entonces, antes de derivar, debemos aplicar logaritmo y sus propiedades.

Las propiedades que se necesitan son:

I. $\text{Ln}(AB) = \text{Ln}\,A + \text{Ln}\,B$

II. $\text{Ln}\left(\frac{A}{B}\right) = \text{Ln}\,A - \text{Ln}\,B$

III. $\text{Ln}\,A^n = m\,\text{Ln}\,A$

Nota: "Ln" es la notación de Logaritmo Natural. Además ,el logaritmo natural tiene como base el número "e" y por definición tenemos que.

$$\text{Ln}\,N = x \Longleftrightarrow N = e^x$$

Además, si $y = \text{Ln}\,\mu \Rightarrow y' = \frac{\mu'}{\mu}$; $\mu = \mu(x)$; $\mu' = \frac{d\mu}{dx}$.

EJERCICIOS

1. Hallar: $y' = \frac{dy}{dx}$, sabiendo que: $y = x^{\cos x}$

Solución:

1er. Aplicar logaritmo natural a ambos miembros de la ecuación:

$$y = x^{\cos x}$$

$$\text{Ln}\,y = \cos x\,\text{Ln}\,x$$

2do. $\frac{y'}{y} = \cos x\left[\frac{1}{x}\right] + \text{Ln}\,x\,[-\text{sen}\,x]$

$$= \frac{1}{x}\cos x - \text{sen}\,x\,\text{Ln}\,x$$

$$y' = y\left[\frac{1}{x}\cos x - \text{sen}\,x\,\text{Ln}\,x\right]$$

$$y' = x^{\cos x}\left[\frac{1}{x}\cos x - \text{sen}\,x\,\text{Ln}\,x\right]$$

2. Si $y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt{(x+3)^3}}$, hallar: $y' = \frac{dy}{dx}$

Solución:

1°) Aplicando Ln: $\text{Ln}\, y = \text{Ln}\sqrt{x-1} - \text{Ln}\left(\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt{(x+3)^3}\right)$

$$= \tfrac{1}{2}\text{Ln}(x-1) - \left(\text{Ln}\sqrt[3]{(x+2)^2} + \text{Ln}\sqrt{(x+3)^3}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\text{Ln}(x-1) - \left(\tfrac{2}{3}\text{Ln}(x+2) + \tfrac{3}{2}\text{Ln}(x+3)\right)$$

$$\text{Ln}\, y = \tfrac{1}{2}\text{Ln}(x-1) - \tfrac{2}{3}\text{Ln}(x+2) - \tfrac{3}{2}\text{Ln}(x+3)$$

2°) $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{x+3}$

$$y' = y\left[\frac{1}{2(x-1)} - \frac{2}{3(x+2)} - \frac{3}{2(x+3)}\right]$$

$$= y\,\frac{3(x+2)(x+3) - 4(x-1)(x+3) - 9(x-1)(x+2)}{6(x-1)(x+2)(x+3)}$$

$$y' = y\,\frac{-10x^2 - 2x + 48}{6(x-1)(x+2)(x+3)} = y\,\frac{(-2)(5x^2 + x - 24)}{6(x-1)(x+2)(x+3)}$$

$$y' = -\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt{(x+3)^3}}\left[\frac{5x^2 - x - 24}{3(x-1)(x+2)(x+3)}\right]$$

$$\Longleftrightarrow \quad y' = -\frac{5x^2 - x - 24}{3(x+2)^{5/3}(x-1)^{1/2}(x+3)^{5/2}}$$

3. Si $y = \dfrac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$, hallar: $y' = \dfrac{dy}{dx}$

Solución:

1°) Aplicando Ln:

$$\text{Ln}\, y = \text{Ln}(x-2)^9 - \text{Ln}\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}$$

$$= 9\text{Ln}(x-2) - \tfrac{1}{2}\text{Ln}(x-1)^5(x-3)^{11}$$

$$= 9\text{Ln}(x-2) - \tfrac{1}{2}\left[5\text{Ln}(x-1) + 11\,\text{Ln}(x-3)\right]$$

$$\text{Ln}\, y = 9\text{Ln}(x-2) - \tfrac{5}{2}\text{Ln}(x-1) - \tfrac{11}{2}\text{Ln}(x-3)$$

2°) Derivando:

$$\frac{y'}{y} = 9\frac{1}{x-2} - \frac{5}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{11}{2}\frac{1}{x-3}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{18(x-1)(x-3) - 5(x-2)(x-3) - 11(x-2)(x-1)}{2(x-2)(x-1)(x-3)}$$

$$= \frac{18(x^2-4x+3) - 5(x^2-5x+6) - 11(x^2-3x+2)}{2(x-2)(x-1)(x-3)}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2x^2-14x+2}{2(x-2)(x-1)(x-3)}$$

$$y' = y\,\frac{2(x^2-7x+1)}{2(x-2)(x-1)(x-3)}$$

$$y' = \frac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}\;\frac{(x^2-7x+1)}{(x-2)(x-1)(x-3)}$$

$$y' = \frac{(x-2)^8(x^2-7x+11)}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}(x-1)(x-3)}}$$

4. Si $y = x^{x^{x^2}}$, hallar: $y' = \frac{dy}{dx}$

Solución:

1° Aplicando Ln: $\text{Ln}\, y = x^{x^2} \cdot \text{Ln}\, x$

2° Aplicando Derivada:

$$\frac{y'}{y} = x^{x^2}\frac{1}{x} + \text{Ln}\,x\left[\frac{d}{dx}x^{x^2}\right] \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Haciendo: $\mu = x^{x^2}$

Aplicando Ln: $\text{Ln}\,\mu = x^2\,\text{Ln}\,x$

Derivando: $\frac{\mu'}{\mu} = x^2 \cdot \frac{1}{x} + 2x \cdot \text{Ln}\,x$

$$\frac{\mu'}{\mu} = x + 2x\,\text{Ln}\,x$$

$$\mu' = \mu\,[x + 2x\,\text{Ln}\,x]$$

$$\frac{d\mu}{dx} = \mu' = x^{x^2}\,[x + 2x\,\text{Ln}\,x] \ldots (2)$$

Reemplazar (2) en (1):

$$\frac{y'}{y} = x^{x^2}\frac{1}{x} + x^{x^2}\left[x + 2x\,\text{Ln}\,x\right]\text{Ln}x$$

$$\frac{y'}{y} = x^{x^2}\left[\frac{1}{x} + (x + 2x\,\text{Ln}\,x)\,\text{Ln}\,x\right]$$

$$y' = y\,x^{x^2}\left[\frac{1}{x} + x\,\text{Ln}\,x + 2x\,\text{Ln}\,x\right]$$

$$y' = x^{x^{x^2}}\,x^{x^2}\left[\frac{1 + x^2\,\text{Ln}\,x + 2x^2\,\text{Ln}^2\,x}{x}\right]$$

$$y' = x^{x^{x^2}}\,x^{x^2-1}(1 + x^2\,\text{Ln}\,x + 2x^2\,\text{Ln}^2\,x)$$

5. Si $y = x\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2-1}}$, hallar: $y' = \frac{dy}{dx}$

Solución:

1° Aplicando Ln:

$$\text{Ln}\, y = \text{Ln}\, x + \text{Ln}\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}$$

$$= \text{Ln}\, x + \tfrac{1}{3}\text{Ln}\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)$$

$$= \text{Ln}\, x + \tfrac{1}{3}[\text{Ln}\, x^2 - \text{Ln}\,(x^2+1)]$$

$$= \text{Ln}\, x + \tfrac{1}{3}[2\,\text{Ln}\, x - \text{Ln}\,(x^2+1)]$$

$$\text{Ln}\, y = \text{Ln}\, x + \tfrac{2}{3}\text{Ln}\, x - \tfrac{1}{3}\text{Ln}\,(x^2+1)$$

2° Derivando:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{2}{3}\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\frac{2x}{x^2+1}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{3(x^2+1)+2(x^2+1)-2x^2}{3x(x^2+1)}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{3x^2+5}{3x(x^2+1)}$$

$$y' = y\,\frac{3x^2+5}{3x(x^2+1)}$$

$$y' = x\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}\;\frac{3x^2+5}{3x(x^2+1)}$$

$$y' = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}\left[\frac{3x^2+5}{x^2+1}\right]$$

6. Si $y = (x^2+1)(\text{arc tg}\, x)^x$, hallar: $y' = \frac{dy}{dx}$

1° Aplicar Ln: $\text{Ln}\, y = \text{Ln}\,(x^2+1) + x\,\text{Ln}\,(\text{arc tg}\, x)$

2° Derivando:

$$\frac{y'}{y} = \frac{2x}{x^2+1} + x\frac{(\text{arc tg}\, x)'}{\text{arc tg}\, x} + \text{Ln}\,(\text{arctg}\, x)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2x}{x^2+1} + x\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\text{arc tg}\, x} + \text{Ln}\,(\text{arc tg}\, x)$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{x}{(1+x^2)\,\text{arc tg}\, x} + \text{Ln}\,(\text{arc tg}\, x)$$

$$y' = y\left[\frac{2x\,\text{arc tg}\, x + x + (1+x^2)\,\text{arc tg}\, x\;\text{Ln}\,(\text{arc tg}\, x)}{(1+x^2)\,\text{arc tg}\, x}\right]$$

$$y' = (x^2+1)(\text{arc tg}\, x)^x\left[\frac{2x\,\text{arc tg}\, x + x + (1+x^2)\,\text{arc tg}\, x\;\text{Ln}\,(\text{arc tg}\, x)}{(1+x^2)\,\text{arc tg}\, x}\right]$$

$$y' = (\text{arc tg}\, x)^{x-1}\,[2x\,\text{arc tg}\, x + x + (1+x^2)\,\text{arc tg}\, x\,\text{Ln}\,(\text{arc tg}\, x)]$$

7. Si $y = x^{\text{Ln}x}$, hallar: $y' = \frac{dy}{dx}$

Solución:

1° $\text{Ln}\, y = \text{Ln}\, x\, \text{Ln}\, x$

$\text{Ln}\, y = \text{Ln}^2 x$

2° $\frac{y'}{y} = (2\text{Ln}\, x)(\text{Ln}\, x)'$

$\frac{y'}{y} = [2\text{Ln}\, x)\left(\frac{1}{x}\right)$

$y' = y[2\text{Ln}\, x]\left(\frac{1}{x}\right)$

$y' = x^{\text{Ln}x}[2\text{Ln}\, x]\left(\frac{1}{x}\right)$

$y' = 2x^{\text{Ln}x - 1}\, \text{Ln}\, x$

8. Si $y = \text{tg}\, x\left[\frac{1-e^x}{1+e^x}\right]$, hallar: $y' = \frac{dy}{dx}$

Solución:

1° Extraer Ln a ambos miembros:

$\text{Ln}\, y = \text{Ln}\, \text{tg}\, x + \text{Ln}\left[\frac{1-e^x}{1+e^x}\right]$

$\text{Ln}\, y = \text{Ln}\, \text{tg}\, x + \text{Ln}\,(1-e^x) - \text{Ln}\,(1+e^x)$

2° Derivando:

$$\frac{y'}{y} = \frac{\sec^2 x}{\text{tg}\, x} + \frac{-e^x}{1-e^x} - \frac{e^x}{1+e^x}$$

Pero: $\frac{\sec^2 x}{\text{tg}\, x} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\text{sen}\, x}{\cos x}} = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x \cos^2 x} = \frac{1}{\text{sen}\, x \cos x}$

$= \frac{2}{2\,\text{sen}\, x \cos x}$

$= \frac{2}{\text{sen}\, 2x}$

FL FreeLibros

Entonces: $\frac{y'}{y} = \frac{2}{\operatorname{sen} 2x} - \frac{e^x}{1-e^x} - \frac{e^x}{1+e^x}$

$$= \frac{2(1-e^x)(1+e^x) - e^x \operatorname{sen} 2x (1+e^x) - e^x \operatorname{sen} 2x (1-e^x)}{(1-e^x)(1+e^x)\operatorname{sen} 2x}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{2 - 2e^{2x} - e^x \operatorname{sen} 2x - e^{2x} \operatorname{sen} 2x - e^x \operatorname{sen} 2x + e^{2x} \operatorname{sen} 2x}{(1-e^x)(1+e^x)\operatorname{sen} 2x}$$

$$y' = y \left[\frac{2 - 2e^{2x} - 2e^x \operatorname{sen} 2x}{(1-e^x)(1+e^x)\operatorname{sen} 2x} \right]$$

$$y' = \operatorname{tg} x \left[\frac{1-e^x}{1+e^x} \right] \left[\frac{2 - 2e^{2x} - 2e^x \operatorname{sen} 2x}{(1-e^x)(1+e^x)\operatorname{sen} 2x} \right]$$

$$y' = \frac{2 \operatorname{tg} x (1 - e^{2x} - e^x \operatorname{sen} x)}{(1+e^x)^2 \operatorname{sen} 2x}$$

9. Si: $y = x^5 (a+3x)^3 (a-2x)^2$, hallar: $y' = \frac{dy}{dx}$

1° $\operatorname{Ln} y = \operatorname{Ln} x^5 + \operatorname{Ln} (a+3x)^3 + \operatorname{Ln} (a-2x)^2$

$\operatorname{Ln} y = 5 \operatorname{Ln} x + 3 \operatorname{Ln} (a+3x) + 2 \operatorname{Ln} (a-2x)$

2° $\frac{y'}{y} = 5 \frac{1}{x} + 3 \frac{3}{a+3x} + 2 \frac{-2}{a-2x}$

$$\frac{y'}{y} = \frac{5(a+3x)(a-2x) + 9x(a-2x) - 4x(a+3x)}{x(a+3x)(a-2x)}$$

$$y' = x^5 (a+3x)^3 (a-2x)^2 \left[\frac{5(a+3x)(a-2x) + 9x(a-2x) - 4x(a+3x)}{x(a+3x)(a-2x)} \right]$$

Siga simplificando ...

10. Si: $y = \frac{\sqrt[5]{(x-1)^2}}{\sqrt[4]{(x-2)^3}\ \sqrt[3]{(x-3)^7}}$, hallar: $y' = \frac{dy}{dx}$

1° $\operatorname{Ln} y = \frac{2}{5} \operatorname{Ln} (x-1) - \frac{3}{4} \operatorname{Ln} (x-2) - \frac{7}{3} \operatorname{Ln} (x-3)$

2° $\frac{y'}{y} = \frac{2}{5} \frac{1}{x-1} - \frac{3}{4} \frac{1}{x-2} - \frac{7}{3} \frac{1}{x-3}$

$$y' = y \left[\frac{24(x-2)(x-3) - 45(x-1)(x-3) - 140(x-1)(x-2)}{60(x-1)(x-2)(x-3)} \right]$$

$$y' = \frac{y[24(x^2 - 5x + 6) - 45(x^2 - 4x + 3) - 140(x^2 - 3x + 2)]}{60(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$y' = \frac{-161x^2 + 480x - 271}{60 \sqrt[5]{(x-3)^3}\ \sqrt[4]{(x-2)^7}\ \sqrt[3]{(x-3)^{10}}}$$

4. DERIVADAS DE ORDEN SUPERIOR

Si: $y = f(x)$, entonces las notaciones siguientes se leen en la forma indicada:

NOTACIÓN	SE LEE
$\frac{dy}{dx} = y'$	La 1ra derivada de y con respecto a x
$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = y''$	La 2da derivada de y con respecto a x
$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3} = y'''$	La 3ra derivada de y con respecto a x
$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = \frac{d^4y}{dx^4} = y^{(4)}$	La 4ta derivada de y con respecto a x
$\vdots$	
$\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}}\right) = \frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)}$	La n-ésima derivada de y con respecto a x

EJERCICIOS

1. Si: $y = \cos ax$, hallar $y^{(n)}$

Solución:

$$y' = -a\,\text{sen}\,ax = a\cos\left(ax + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'' = -a^2\cos ax = a^2\cos\left(ax + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''' = a^3\,\text{sen}\,ax = a^3\cos\left(ax + 3\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y^4 = -a^4\cos ax = a^4\cos\left(ax + 4\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = \qquad = a^n\cos\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right)$$

2. Si: $y = a^x$, hallar: $y^{(n)}$

Solución:

$$y' = a^x\,\text{Ln}\,a = (\text{Ln}\,a)\,a^x$$

$$y'' = (\text{Ln}\,a)a^x\,\text{Ln}\,a = (\text{Ln}\,a)^2\,a^x$$

$$y''' = (\text{Ln}\,a)^2a^x\,\text{Ln}\,a = (\text{Ln}\,a)^3a^x$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = (\text{Ln}\,a)^n a^x \qquad n \in Z^+$$

3. Si: $y = e^{-kx}$. Hallar $y^{(n)}$

Solución:

$$y' = -k\,e^{-kx}$$

$$y'' = k^2\,e^{-kx}$$

$$y''' = -k\,e^{-kx}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = (-1)^n\,k^n\,e^{-kx} \quad , \quad n \in Z^+$$

4 Si: $y = \text{Ln}\,(1+x)$. Hallar $y^{(n)}$

Solución:

$$y' = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

$$y'' = -(1+x)^{-2} = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$y''' = -(-2)(1+x)^{-3} = \frac{2}{(1+x)^3}$$

$$y^4 = -2\cdot 3(1+x)^{-4} = \frac{-2.3}{(1+x)^4}$$

$$y^5 = \underbrace{2\cdot 3\cdot 4}_{4!}(1+x)^{-5} = \frac{2.3.4}{(1+x)^5}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

5. $y = \frac{1-x}{1+x}$. Hallar $y^{(n)}$

Solución:

$$y' = \frac{(1+x)(-1)-(1-x)(1)}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2} = -2\,(1+x)^{-2}$$

$$y'' = -2\,(-2)\,(1+x)^{-3} = 2.2\,(1+x)^{-3}$$

$$y''' = 2.2\,(-3)\,(1+x)^{-4} = -2.2.3\,(1+x)^{-4}$$

$$y^4 = -2.2.3\,(-4)\,(1+x)^{-5} = 2.2.3.4\,(1+x)^{-5}$$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = 2\,(-1)^n\,n!\,(1+x)^{-(n+1)}$$

6. $y = xe^x$. Hallar $y^{(n)}$

Solución:

Para hallar la n-ésima derivada de un producto de dos funciones $y = \mu\nu$, aplicaremos la fórmula de ***LEIBNIZ***. Para ello hagamos la deducción correspondiente:

Si: $y = \mu\nu$, entonces:

1° $y' = \mu'\upsilon + \mu\upsilon'$

2° $y' = \mu''\upsilon + \mu'\upsilon' + \mu'\upsilon' + \mu\upsilon''$

$= \mu''\upsilon + 2\mu'\upsilon' + \mu\upsilon''$

3° $y''' = \mu'''\upsilon + 2(\mu''\upsilon' + \mu\upsilon'') + \mu'\upsilon'' + \mu\upsilon'''$

$= \mu'''\upsilon + 3\mu''\upsilon' + 3\mu'\upsilon'' + \mu\upsilon'''$

4° $y^{(4)} = \mu^{(4)}\upsilon + \underline{\mu'''\upsilon'} + 3(\underline{\mu'''\upsilon'} + \underline{\mu''\upsilon''}) + 3(\underline{\mu''\upsilon''} + \underline{\mu'\upsilon'''}) + \underline{\mu'\upsilon'''} + \mu\upsilon^{(4)}$

$= \mu^{(4)}\upsilon + 4\mu'''\upsilon' + 6\mu''\upsilon'' + 4\mu'\upsilon''' + \mu\upsilon^{(4)}$

$= \mu^{(4)}\upsilon + 4\mu^{(3)}\upsilon^{(1)} + 6\mu^{(2)}\upsilon^{(2)} + 4\mu^{(1)}\upsilon^{(3)} + \mu\upsilon^{(4)}$

⋮

n

$$y^{(n)} = (\mu\upsilon)^{(n)} = \mu^{(n)}\upsilon + n\mu^{(n-1)}\upsilon' + \frac{n(n-1)}{2!}\mu^{(n-2)}\upsilon'' + \frac{n(n-2)(n-1)}{3!}\mu^{(n-3)}\upsilon^{(3)} + \ldots\ldots + \mu\upsilon^{(n)}$$

Fórmula de Leibniz

Que es similar al ***BINOMIO DE NEWTON***:

$$(\mu+\upsilon)^n = \mu^n + n\mu^{n-1}\upsilon + \frac{n(n-1)}{2!}\mu^{n-2}\upsilon^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\mu^{n-3}\upsilon^3 + \ldots\ldots + \upsilon^n$$

En consecuencia, si $y = xe^x$

Hagamos:	$\mu = e^x$	$\upsilon = x$
Derivando:	$\mu' = e^x$	$\upsilon' = 1$
	$\mu'' = e^x$	$\upsilon'' = 0$
	$\mu''' = e^x$	⋮
	⋮	
	$\mu^{(n)} = e^x$	$\upsilon^{(n)} = 0$

Aplicando la fórmula de Leibniz:

$$Y^{(n)} = (e^x x)^n = e^x x + ne^x + 0\ldots + 0$$

$$= e^x(x+n)$$

FL FreeLibros

7. $y = x\,\text{sen}\,x$. Hallar: $y^{(n)}$

Solución:

1° Hacer: $\mu = \text{sen}\,x$

2° Derivar

$$\mu' = \cos x = \text{sen}\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) \qquad \upsilon = x$$
$$\mu'' = -\text{sen}\,x = \text{sen}\left(x + 2\tfrac{\pi}{2}\right) \qquad \upsilon' = 1$$
$$\mu''' = -\cos x = \text{sen}\left(x + 3\tfrac{\pi}{2}\right) \qquad \upsilon'' = 0$$
$$\mu^{(4)} = \text{sen}\,x = \text{sen}\left(x + 4\tfrac{\pi}{2}\right)$$
$$\mu^{(n)} = \text{sen}\left(x + n\tfrac{\pi}{2}\right)$$

3° Aplicando la fórmula de Leibniz:

$$y^{(n)} = \mu^{(n)}\,\upsilon + n\,\mu^{(n-1)}\,\upsilon' + \frac{n(n-1)}{2}\,\mu^{(n-2)}\upsilon'' + \ldots$$
$$y^{(n)} = \text{sen}\left(x + n\tfrac{\pi}{2}\right) + n\,\text{sen}\left(x + (n-1)\tfrac{\pi}{2}\right)\ldots$$
$$y^{(n)} = \text{sen}\left(x + n\tfrac{\pi}{2}\right) - n\cos\left(x + \tfrac{n}{2}\pi\right)$$

Pues:

$$\text{sen}\left(x + (n-1)\tfrac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\left(x + \tfrac{n}{2}\pi - \tfrac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\,A\,\underbrace{\cos\tfrac{\pi}{2}}_{0} - \cos A\,\underbrace{\text{sen}\,\tfrac{\pi}{2}}_{1}, \text{ siendo } A = x + \tfrac{n}{2}\pi$$
$$= -\cos\left(x + \tfrac{n}{2}\pi\right)$$

8. Si: $y = \text{sen}^2 x$. Hallar $y^{(n)}$

Solución:

$$y' = 2\,\text{sen}\,x\cos x = \text{sen}\,2x \qquad = -\cos\left(2x + \tfrac{\pi}{2}\right)$$
$$y'' = 2\cos 2x \qquad = -2\cos\left(2x + 2\tfrac{\pi}{2}\right)$$
$$y''' = -2\cdot 2\,\text{sen}\,2x = -2^2\,\text{sen}\,2x \qquad = -2^2\cos\left(2x + 3\tfrac{\pi}{2}\right)$$
$$y^{(4)} = -2^2\cdot 2\cos 2x = -2^3\cos 2x = -2^3\cos\left(2x + 4\tfrac{\pi}{2}\right)$$
$$\vdots$$
$$y^{(n)} = -2^{n-1}\cos\left(2x + n\tfrac{\pi}{2}\right)$$

9. Si: $y = x^2 e^{2x}$. Hallar: $y^{(n)}$

Solución:

1) Hacer:

$$\mu = e^{-2x} \qquad \upsilon = x^2$$
$$\mu' = -2e^{-2x} \qquad \upsilon' = 2x$$
$$\mu'' = -2e^{-2x} \qquad \upsilon'' = 2$$
$$\mu''' = -2^3 e^{-2x} \qquad \upsilon''' = 0$$
$$\vdots$$
$$\mu^{(n)} = (-1)^n 2^n e^{-2x}$$

2) $$y^{(n)} = (-1)^n 2^n e^{-2x} x^2 + n(-1)^{n-1} 2^{n-1} e^{-2x}(2x) + \frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-1} 2^{n-2} e^{-2x}(2)$$

$$y^{(n)} = 2^{n-1} e^{-2x} \left[2(-1)^n x^2 + 2n(-1)^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2} \right]$$

10. Hallar: $f^{(n)}(0)$. Si $f(x) = \text{Ln}\,\frac{1}{1-x}$

Solución:

1) Pero $$f(x) = \text{Ln}\,\frac{1}{1-x} = \text{Ln}\,0 - \text{Ln}(1-x)$$

$$f(x) = -\text{Ln}(1-x)$$

2) Derivar:

$$f'(x) = -\frac{-1}{1-x} = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$$
$$f''(x) = -1(1-x)^{-2}(-1) = (1-x)^{-2}$$
$$f'''(x) = -2(1-x)^{-3}(-1) = 2(1-x)^{-3}$$
$$f^{(4)}(x) = 2(-3)(1-x)^{-4}(-1) = 2 \cdot 3 (1-x)^{-4}$$
$$f^{(5)} x = 2 \cdot 3(-4)(1-x)^{-5}(-1) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (1-x)^{-5}$$
$$f^{(n)}(x) = (n-1)!(1-x)^{-n}$$

3) Luego: $f^{(n)}(0) = (n-1)!$

11. De: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Hallar a) $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, b) $y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$

Solución:

a) Derivar en $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

$$b^2(2x) + a^2(2yy') = 0$$

$$b^2x + a^2yy' = 0 \ldots\ldots (1)$$

$$y' = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

Derivar con respecto a x en la ecuación (1):

$$b^2 + a^2(y'y' + yy'') = 0$$

$$b^2 + a^2(y')^2 + a^2yy'' = 0 \ldots\ldots\ldots (2)$$

Sustituir (1) en (2):

$$b^2 + a^2\left(-\frac{b^2x}{a^2y}\right)^2 + a^2yy'' = 0$$

$$a^4b^2y^2 + a^2b^4x^2 + a^6y^2y'' = 0$$

$$a^2b^2\underbrace{(a^2y^2 + b^2x^2)}_{a^2b^2} + a^6y^2y'' = 0$$

$$a^2b^2(a^2b^2) + a^6y^2y'' = 0$$

$$a^4b^4 + a^6y^2y'' = 0 \ldots\ldots (3)$$

$$y'' = -\frac{a^4b^4}{a^6y^2} = -\frac{b^4}{a^2y^2}$$

b) Derivar en la ecuación (3):

$$0 + a^6[(2yy')y'' + y^2y'''] = 0$$

$$2yy'y'' + y^2y''' = 0$$

$$2y\left(-\frac{b^2x}{a^2y}\right)\left(-\frac{b^4}{a^2y^2}\right) + y^2y''' = 0$$

$$\frac{2b^6x}{a^4y^2} + y^2y''' = 0$$

$$2b^6x + a^4y^4y''' = 0$$

$$y''' = -\frac{2b^6x}{a^4y^4}$$

12. Demostrar que la función $y = \text{sen}(m\,\text{arcsen}\,x)$ satisface la ecuación diferencial.

$$(1-x^2)y'' - xy' + m^2y = 0$$

Demostración:

CÁLCULO DE Y'

De $y = \text{sen}(m\,\text{arcsen}\,x)$

$$y' = [\cos(m\,\text{arcsen}\,x)][m\,\text{arcsen}\,x]'$$

$$y' = [\cos(m\,\text{arcsen}\,x)]\left[m\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right]$$

$$y' = m\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cos(m\,\text{arcsen}\,x)$$

FL FreeLibros

CÁLCULO DE Y''

$$y' = m(m-x^2)^{-1/2}\cos(m\,\text{arc sen}\,x)$$

$$y'' = m\left(-\tfrac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2}(-2x)\cos(m\,\text{arc sen}\,x) + (1-x^2)^{-1/2}[-\text{sen}(m\,\text{arc sen}\,x)]\left(m\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\right)$$

$$y'' = m\left(\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\cos(m\,\text{arc sen}\,x) - \frac{m}{1-x^2}\,\text{sen}(m\,\text{arc sen}\,x)\right)$$

Sustituir: $y,\ y',\ y''$ en la ecuación diferencial $(1-x^2)\,y'' - x\,y' + m^2 y =$

$$(1-x^2)\left[\frac{m\,x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\cos(m\,\text{arc sen}\,x) - \frac{m^2}{1-x^2}\,\text{sen}\,(m\,\text{arc sen}\,x)\right] -$$

$$x\left[\frac{m}{\sqrt{1-x^2}}\cos(m\,\text{arc sen}\,x)\right] + m^2\,\text{sen}(m\,\text{arc sen}\,x)$$

$$\frac{m\,x}{\sqrt{1-x^2}}\cos(m\,\text{arc sen}\,x) - m^2\,\text{sen}(m\,\text{arc sen}\,x) - \frac{m\,x}{\sqrt{1-x^2}}\cos(m\,\text{arc sen}\,x) +$$

$$m^2\,\text{sen}\,(m\,\text{arc sen}\,x) = 0$$

13. Demostración que la función $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$ satisface la ecuación diferencial $y'' + 3y' + 2y = 0$ (c_1, c_2 son constantes).

Demostración:

CÁLCULO DE Y': De: $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$

$$y' = c_1 e^{-x}(-1) + c^2 e^{-2x}(-2)$$

$$y' = -c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{-2x}$$

CÁLCULO DE Y'': $y'' = -c_1 e^{-x}(-1) - 2c_2 e^{-2x}(-2)$

$$y'' = c_1 e^{-x} + 4c_2 e^{-2x}$$

Sustituir: $y,\ y',\ y''$ en $y'' + 3y' + 2y$ **OBTENEMOS**

$$(c_1 e^{-x} + 4c^2 e^{-2x}) + (-c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{-2x}) + 2(c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}) =$$

$$= c_1 e^{-x} + 4c_2 e^{-2x} - 3c_1 e^{-x} - 6c_2 e^{-2x} + 2c_1 e^{-x} + 2c_2 e^{-2x}$$

$$= 0$$

14. Demostrar que la función $y = \frac{1}{2}x^2\, e^x$ satisface la ecuación diferencial.

$$y'' - 2y' + y = e^x$$

Demostración:

CALCULO DE Y'

De $y = \frac{1}{2}x^2\, e^x$

$$y' = \tfrac{1}{2}[2x\, e^x + x^2\, e^x]$$

$$y' = x\, e^x + \tfrac{1}{2}x^2\, e^x$$

CALCULO DE Y"

$$y'' = e^x + x\, e^x + \tfrac{1}{2}[2x\, e^x + x^2\, e^x]$$

$$y'' = e^x + x\, e^x + x\, e^x + \tfrac{1}{2}x^2\, e^x$$

$$y'' = e^x + 2x\, e^x + \tfrac{1}{2}x^2\, e^x$$

Sustituir: $y,\ y',\ y''$ en la ecuación $y'' - 2y' + y = e^x$

$$(e^x + 2xe^x + \tfrac{1}{2}x^2 e^x) - 2\left(xe^x + \tfrac{1}{2}x^2 e^x\right) + \tfrac{1}{2}x^2 e^x =$$

$$= e^x + \underline{2xe^x} + \underline{\tfrac{1}{2}x^2 e^x} - \underline{2xe^x} - \underline{x^2 e^x} + \underline{\tfrac{1}{2}x^2 e^x} = e^x$$

15. Demostrar que la relación $x^2 - xy + y^2 = c^2$ satisface a la ecuación diferencial

$$(x - 2y)\, y' = 2x - y$$

Demostración:

CALCULO DE Y': de la ecuación $x^2 - xy + y^2 = c^2$

Derivando con respecto a x: $2x - (xy' + y) + 2yy' = 0$

$$2x - xy' - y + 2yy' = 0$$

$$y'(-x + 2y) = y - 2x \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{y - 2x}{-x + 2y} \iff y' = \frac{2x - y}{x - 2y}$$

$$\iff (x - 2y)\, y' = 2x - y$$

16. Demostrar que y, determinada como función de x por las ecuaciones $x = \operatorname{sen} t$ e $y = ae^{\sqrt{2}t} + be^{-\sqrt{2}t}$ satisface a la ecuación diferencial $(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 2y$

Demostración:

Se tiene que: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$ ..... (1)

Si: $x = \operatorname{sen} t \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \cos t$ ..... (2)

Si: $y = a\,e^{\sqrt{2}t} + b\cdot e^{-\sqrt{2}t} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \sqrt{2}\,a\,e^{\sqrt{2}t} - \sqrt{2}\,b\,e^{-\sqrt{2}t}$ ..... (3)

Sustituir: (2) y (3) en (1): $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2}\,a\,e^{\sqrt{2}t} - \sqrt{2}\,b\,e^{-\sqrt{2}t}}{\cos t}$ ..... (4)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\cos t[2ae^{\sqrt{2}t} + 2be^{-\sqrt{2}t}] - [\sqrt{2}\,ae^{\sqrt{2}t} - \sqrt{2}\,be^{-\sqrt{2}t}](-\operatorname{sen} t)}{\cos^2 t} \ldots (5)$$

La formula de la 2da derivada paramétrica es: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$ ..... (6)

Sustituir (2) y (5) en (6):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\cos t\left[\,2(a\,e^{\sqrt{2}t} + b\,e^{-\sqrt{2}t})\,\right] + \operatorname{sen} t\left(\sqrt{2}\,a\,e^{\sqrt{2}t} - \sqrt{2}\,b\,e^{-\sqrt{2}t}\right)}{\cos^3 t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\cos t\,(2y) + \operatorname{sen} t\,(\sqrt{2}\,a\,e^{\sqrt{2}t} - \sqrt{2}\,b\,e^{-\sqrt{2}t})}{\cos^3 t} \quad \ldots\ldots (7)$$

Sustituir (7) y (4) en $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx}$ obtenemos:

$$\cos^2 t\left[\frac{\cos t\,(2y) + \operatorname{sen} t\,(\sqrt{2}\,a\,e^{\sqrt{2}t} - \sqrt{2}\,b\,e^{-\sqrt{2}t})}{\cos^3 t}\right] - \operatorname{sen} t\left[\frac{\sqrt{2}\,a\,e^{\sqrt{2}t} - \sqrt{2}\,b\,e^{-\sqrt{2}t}}{\cos t}\right] =$$

$$2y + \operatorname{tg} t(\sqrt{2}\,a\,e^{\sqrt{2}t} - \sqrt{2}\,b\,e^{-\sqrt{2}t}) - \operatorname{tg} t\,(\sqrt{2}\,a\,e^{-\sqrt{2}t} - \sqrt{2}\,b\,e^{-\sqrt{2}t}) = 2y$$

17. Demostrar que la relación $y = \operatorname{Ln}(xy)$ satisface a la ecuación diferencial:

$$(xy - x)\,y'' + x\,y'^2 + y\,y' - 2y' = 0$$

Demostración: De la relación: $y = \operatorname{Ln}(xy)$

Por propiedad de Ln: $y = \ln x + \operatorname{Ln} y$

Derivando: $y' = \frac{1}{x} + \frac{y'}{y}$

$$xy\,y' = y + x\,y'$$

Derivar otra vez: $y\,y' + x\,y'\,y'' + x\,y\,y'' = y' + y' + x\,y''$

$$y\,y' + x(y')^2 + x\,y\,y'' = 2y' + x\,y''$$

Ordenando: $x\,y\,y'' - x\,y'' + x(y')^2 + y\,y' - 2y' = 0$

$$(xy - x)y'' + x(y')^2 + y\,y' - 2y' = 0$$

CAPÍTULO 5

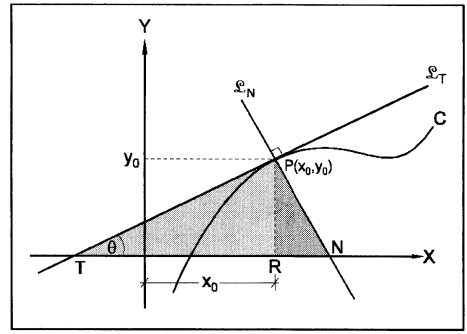
APLICACIONES DE LA DERIVADA

1. APLICACIONES GEOMÉTRICAS DE LA DERIVADA

1.1. ECUACIONES DE LAS RECTAS: Tangente y Normal

- Sea la curva C cuya ecuación es $F(x,y)=0$.
- Sea la recta $\mathcal{L}_T$ que es tangente a la curva C en el punto (x_0,y_0).
- La ecuación de la recta tangente $\mathcal{L}_T$ es: $y-y_0=m(x-x_0)$.
  donde $m=\text{tg}\,\theta$ pendiente de $\mathcal{L}_T$.
- Pero la pendiente "m" desde el punto de vista del cálculo diferencial es la DERIVADA DE y CON RESPECTO A x EN EL PUNTO (x_0,y_0).

  Es decir: $m=\left.\dfrac{dy}{dx}\right]_{(x_0,y_0)}$



- Entonces la ecuación de la RECTA TANGENTE, será:

$$\mathcal{L}_T : y-y_0=\left.\frac{dy}{dx}\right]_{(x_0,y_0)}(x-x_0)$$

$$\text{Si: } \left.\frac{dy}{dx}\right]_{(x_0,y_0)}=\pm\infty \text{, entonces } \mathcal{L}_T:\ x-x_0=0$$

- Como la RECTA NORMAL es perpendicular a la recta TANGENTE en el punto (x_0,y_0), entonces la ecuación de la RECTA NORMAL, será:

$$\mathcal{L}_N : y-y_0=-\frac{1}{\left.\frac{dy}{dx}\right]_{(x_0,y_0)}}(x-x_0)$$

$$\text{Si: } \left.\frac{dy}{dx}\right]_{(x_0,y_0)}=0 \text{, entonces } \mathcal{L}_N : x-x_0=0$$

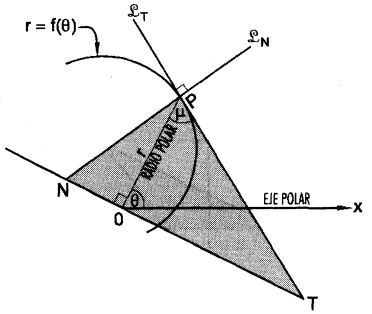
ADEMÁS

Si la ecuación de la curva es $y = f(x)$, entonces $m = \frac{dy}{dx}$

Si la ecuación de la curva es $F(x,y) = 0$, entonces $m = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$

Si las ecuaciones paramétricas de la curva son: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, entonces $m = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

Si la ecuación polar de la curva es $r = f(\theta)$, entonces $\operatorname{tg}\mu = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}$, $\frac{dr}{d\theta} = r'$.



Donde μ es el ángulo OPT ángulo formado por el **RADIO POLAR** $r = OP$ y la recta tangente $\mathcal{L}_T$.

Donde:

PT: Segmento de la tangente polar

PN: Segmento de la normal polar

OT: Subtangente polar

ON: Subnormal polar

1.2. PROBLEMAS

(1) Hallar las ecuaciones de las tangentes y de las normales a las siguientes curvas en los puntos que se indican:

a) $y = \operatorname{tg} 2x$ en el origen de coordenadas.

Solución:

1° $y' = 2\sec^2 2x$

$\Rightarrow \quad y'\big]_{(0,0)} = 2\sec^2 0 = 2(1)^2 = 2$

2° Luego: $L_T : y - 0 = 2(x - 0)$

$y = 2x$

$\mathcal{L}_N : y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 0)$

$y = -\frac{1}{2}x$

b) $y = \operatorname{arcsen}\frac{x-1}{2}$ en el punto de intersección con el eje OX.

Solución:

1° De $y = \operatorname{arcsen}\frac{x-1}{2}$, obtenemos:

$$y' = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2}}$$

2° La intersección de la curva $y = \operatorname{arcsen}\frac{x-1}{2}$ con el eje OX ocurre cuando $y = 0$, entonces:

$0 = \arcsen\frac{x-1}{2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2} = 0 \Leftrightarrow x-1=0$

$\Leftrightarrow x = 1$

Luego: $y'\big]_{(0,0)} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-0^2}} = \frac{1}{2}$

3° Por lo tanto:

$\mathcal{L}_T : \ y-0 = \frac{1}{2}(x-1)$

$x-2y-1=0$

$\mathcal{L}_N : \ y-0 = -\frac{1}{\frac{1}{2}}(x-1)$

$2x+y-2=0$

c) $y = \arccos 3x$ en el punto de intersección con el eje OY.

Solución:

1° El punto de intersección de la curva: $y = \arccos 3x \Leftrightarrow 3x = \cos y$ con el eje OY ocurre cuando $x = 0$, entonces:

$3(0) = \cos y \Leftrightarrow \cos y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2}$

2° Derivando la ecuación $3x = \cos y$. obtenemos: $3 = (-\operatorname{sen} y)y'$

$y' = -\frac{3}{\operatorname{sen} y}$

Luego: $y'\big]_{(0,\pi/2)} = \frac{3}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}} = -3$

3° Por lo tanto:

$\mathcal{L}_T : \ y-\frac{\pi}{2} = -3(x-0)$

$2y-\pi = -6x \Leftrightarrow 6x+2y-\pi = 0$

$\mathcal{L}_N : \ y-\frac{\pi}{2} = \frac{1}{3}(x-0)$

$6y-3\pi = 2x \Leftrightarrow 2x-6y+3\pi = 0$

d) $y = \operatorname{Ln} x$ en el punto de intersección con el eje OX.

Solución:

1° El punto de intersección de la curva $y = \operatorname{Ln} x$ con el eje OX, ocurre cuando $y = 0$, entonces: $0 = \operatorname{Ln} x \Leftrightarrow x = 1$

2° De $y = \operatorname{Ln} x$, obtenemos: $y' = \frac{1}{x}$

Luego: $y'\big]_{(1,0)} = \frac{1}{1} = 1$

3° Por lo tanto:

$\mathcal{L}_T : \ y-0 = 1(x-1)$

$x-y-1=0$

$\mathcal{L}_N : \ y-0 = -1(x-1)$

$x+y-1=0$

e) $y = e^{1-x^2}$ en los puntos de intersección con la recta $y = 1$.

Solución:

1° De $y = e^{1-x^2}$, tenemos:

$y' = -2xe^{1-x^2}$

2° Intersección de $\begin{cases} y = e^{1-x^2} \\ y = 1 \end{cases}$

entonces:

$1 = e^{1-x^2}$

$\operatorname{Ln} 1 = 1-x^2$

$0 = 1-x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Los puntos de tangencia serán: $A(1,1)$ y $B(-1,1)$.

3° $y'\big]_{(1,1)} = -2(1)\,e^{1-1^2} = -2$

$y'\big]_{(-1,1)} = -2(-1)\,e^{1-1} = 2$

Luego:

$\mathcal{L}_{T_1}: \; y-1=-2(x-1) \Leftrightarrow 2x+y-3=0$

$\mathcal{L}_{N}: \; y-1=\frac{1}{2}(x-1) \Leftrightarrow x-2y+1=0$

$\mathcal{L}_{T_2}: \; y-1=2(x+1) \Leftrightarrow 2x-y-3=0$

(2) Escribir las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva: $x^2+y^2+2x-6=0$ en el punto cuya ordenada es $y=3$.

Solución:

1° **PUNTO DE TANGENCIA:** Si $y=3$, reemplazando en la ecuación:

$x^3+y^2+2x-6=0$, se tiene:

$x^3+9+2x-6=0$

$x^3+2x+3=0$

Resolver ésta ecuación por Ruffini:

-1	1	0	2	3
		-1	1	-3
	1	-1	3	0

$x=-1$ *ES UNA SOLUCIÓN ENTERA*

Luego el punto de tangencia será: $P(-1,3)$

2° **PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE:** Derivando: $x^3+y^2+2x-6=0$

se obtiene: $3x^2+2yy'+2=0$

Reemplazar el punto $P(-1,3) \Rightarrow 3(-1)^2+2(3)y'+2=0$

$3+6y'+2=0$

$6y'+5=0 \Rightarrow y'=-\frac{5}{6}$

3° **ENTONCES:** $\mathcal{L}_T: \; y-3=-\frac{5}{6}(x+1) \iff 5x+6y-13=0$

$\mathcal{L}_N: \; y-3=\frac{6}{5}(x+1) \iff 6x+5y+21=0$

(3) Escribir las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva: $y^4 = 4x^4 + 6xy$ en el punto $(1,2)$.

Solución:

1° **PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE**:

Derivar la ecuación: $y^4 = 4x^4 + 6xy$

$$4y^3y' = 16x^3 + 6(xy' + y) \iff 4y^3y' = 16x^3 + 6xy' + 6y$$

Reemplazar el punto $(1,2) \Rightarrow 4(2)^3 y' = 16(1)^3 + 6(1)y' + 6(2)$

$$32y' = 16 + 6y' + 12$$

$$26y' = 28 \iff y' = \frac{14}{13}$$

2° Entonces: $\mathcal{L}_T : y - 2 = \frac{14}{13}(x-1) \iff 14x + 13y + 12 = 0$

$$y - 2 = -\frac{13}{14}(x-1) \iff 13x + 14y - 41 = 0$$

(4) Hallar los puntos en que las tangentes a la curva $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$ sean paralelas al eje de las abscisas.

Solución: Si las tangentes a la curva son paralelas al eje de las abscisas entonces debe cumplirse que $y' = 0$, puesto que $y' = \frac{dy}{dx}$ es la pendiente de las rectas tangentes, "0" es la pendiente del eje X y dos rectas son paralelas cuando sus pendientes son iguales.

Veamos: De $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$

Obtenemos: $y' = 12x^3 + 12x^2 - 24x$

Haciendo: $y' = 0 \Rightarrow 12x^3 + 12x^2 - 24x = 0$

$$\Leftrightarrow 12x(x^2 + x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 12x(x+2)(x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 12x = 0 \vee x + 2 = 0 \vee x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -2 \vee x = 1$$

$$\Leftrightarrow \{0, -2, 1\}$$

Los puntos de tangencia, serán: $A(0,20)$; $B(-2,-12)$ y $C(1,15)$

(5) ¿En qué punto la tangente a la parábola $y = x^2 - 7x + 3$ es paralela a la recta $5x + y - 3 = 0$?

Solución:

1° La recta $5x + y - 3 = 0$ será paralela a una recta tangente a la parábola $y = x^2 - 7x + 3$, si sus pendientes son iguales.

Es decir $y' = -5$, donde: $\begin{cases} y' = \frac{dy}{dx} & \text{: Pendiente de la recta tangente} \\ m = -\frac{5}{1} = -5 & \text{: Pendiente de la recta } 5x + y - 3 = 0 \end{cases}$

2° De: $y = x^2 - 7x + 3$, se obtiene: $y' = 2x - 7$

Entonces: $2x - 7 = -5 \iff \boxed{x = 1}$ ..... (i)

Reemplazando (i) en la ecuación de la parábola $\Rightarrow y = 1^2 - 7(1) + 3 = -3$

Entonces, el punto de tangencia será: $(1,-3)$

(6) Hallar la ecuación de la parábola $y = x^2 + bx + c$, que es tangente a la recta $x = y$ en el punto $(1,1)$.

Solución:

1° Si la recta $y = x$ es tangente a la parábola, entonces se cumple que:

De: $y = x^2 + bx + c$ $\quad \underbrace{y' = 1}$, donde $\begin{cases} m = 1 & \text{es la pendiente de } x = y \\ y' = \frac{dy}{dx} & \text{es la pendiente de toda recta tangente.} \end{cases}$

Se obtiene: $y' = 2x + b \Rightarrow 2x + b = 1$ ..... (I)

2° El punto de tangencia es $P(1,1)$; en consecuencia satisface la ecuación (I) y a la ecuación de la parábola:

Si $(1,1) \in$ Parábola $y^2 = x^2 + bx + c \Rightarrow 1 = 1 + b + c \iff b + c = 0$ ..... (i)

Si $(1,1)$ satisface a la ecuación $2x + b = 1 \Rightarrow 2 + b = 1 \iff b = -1$ ..... (ii)

Reemplazar (ii) en (i): $-1 + c = 0 \iff c = 1$

Por lo tanto, la ecuación de la parábola será: $y = x^2 - x + 1$

(7) ¿En qué punto de la curva $y^2 = 2x^3$ la tangente es perpendicular a la recta $4x - 3y + 2 = 0$?

Solución:

1° Dos rectas de pendientes m_1 y m_2 respectivamente son perpendiculares, sí y sólo sí $m_1 m_2 = -1$ ..... (i)

2° Suponiendo que m_1 es la pendiente de recta tangente $\Rightarrow m_1 = \frac{dy}{dx}$

m_2 es la pendiente de recta $4x - 3y + 2 = 0 \Rightarrow m_2 = -\frac{4}{-3} = \frac{4}{3}$ (ii)

3° De la ecuación $y^2 = 2x^3$, se obtiene: $2yy' = 6x^2$

$$y' = \frac{3x^2}{y} = \frac{3x^2}{\pm\sqrt{2}x^{3/2}} = \pm\frac{3}{2}x^{1/2} \quad \text{..... (iii)}$$

4° Sustituir (ii) y (iii) en (i): $\left(\pm\frac{3}{2}x^{1/2}\right)\left(\frac{4}{3}\right) = -1$

Elevando al cuadrado: $\left(\frac{9}{4}x\right)\left(\frac{16}{9}\right) = 1 \iff x = 1/8$

5° Sustituir $x = 1/8$ en $y^2 = 2x^3 \Rightarrow y^2 = 2\left(\frac{1}{8}\right)^3 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2\left(\frac{1}{8}\right)^3} \iff y = \pm\frac{1}{16}$

6° El punto que satisface, es $\left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}\right)$

(8) Escribir las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva $\begin{cases} x = \frac{1+t}{t^3} \\ y = \frac{3}{2t^2} + \frac{1}{2t} \end{cases}$ en el punto $(2,2)$.

Solución:

1° **LA PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE ES:** $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

Donde: $\begin{cases} \text{Si:} \quad y = \frac{3}{2t^2} + \frac{1}{2t} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{3}{t^3} - \frac{1}{2t^2} \\ \text{Si:} \quad x = \frac{1+t}{t^3} \quad \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{3+2t}{t^4} \end{cases}$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{3}{t^3} - \frac{1}{2t^2}}{-\frac{3+2t}{t^4}} = \frac{6+t}{2(3+2t)}$

2° Como $x = \frac{1+t}{t^3} \wedge x = 2 \Rightarrow 2 = \frac{1+t}{t^3} \iff 2t^3 = 1 + t \iff 2t^3 - t - 1 = 0$

$$\iff \boxed{t = 1}$$

3° Entonces: $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{t=1} = \frac{6+1}{2(3+2)} = \frac{7}{10}$

4° En consecuencia: $\mathcal{L}_T : y-2 = \frac{7}{10}(x-2) \iff 7x-10y+6=0$

$\mathcal{L}_N : y-2 = -\frac{10}{7}(x-2) \iff 10x+7y-34=0$

(9) Escribir ecuación de la tangente a la curva $x = t\cos t$, $y = t\,\text{sen}\,t$ en el origen de coordenadas y en el punto $t = \pi/4$.

Solución:

1° El punto de tangencia en el origen es $(0,0)$.

2° La pendiente será:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{t\cos t + \text{sen}\,t}{-t\,\text{sen}\,t + \cos t}$$

3° El punto de tangencia en $t = \pi/4$ es:

$$\begin{cases} x = \pi/4\cos\pi/4 \\ \quad = \frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \\ y = \frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{8} \end{cases}$$

4° La pendiente en el origen será:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{t=0} = \frac{0\cos 0 + \text{sen}\,0}{0\,\text{sen}\,0 + \cos 0} = \frac{0}{1} = 0$$

5° La pendiente en $t = \pi/4$, es:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{t=\pi/4} = \frac{\pi/4\cos\pi/4 + \text{sen}\,\pi/4}{-\pi/4\,\text{sen}\,\pi/4 + \cos\pi/4}$$

$$= \frac{\pi+4}{4-\pi} = \frac{-(\pi+4)}{\pi-4}$$

6° La ecuación de la tangente en el origen será: $\mathcal{L}_t : y-0 = 0(x-0)$

$$y = 0$$

7° La ecuación de la tangente en t = $\pi/4$ será:

$$\mathcal{L}_T : y - \frac{\pi\sqrt{2}}{8} = -\frac{\pi+4}{\pi-4}\left(x - \frac{\pi\sqrt{2}}{8}\right)$$

$$8(\pi-4)y - \pi\sqrt{2}(\pi-4) = -8(\pi+4)x$$

$$+ \pi\sqrt{2}(\pi+4) = 0$$

$$8(\pi+4)x + 8(\pi-4)y - \pi^2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}\pi$$

$$- \pi^2\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\pi = 0$$

$$8(\pi+4)x + 8(\pi-4)y - 2\pi^2\sqrt{2} = 0$$

$$4(\pi+4)x + 4(\pi-4)y - \pi^2\sqrt{2} = 0$$

(10) Hallar el ángulo que forman entre sí la tangente a la espiral logarítmica $r = ae^{k\varphi}$.

Solución:

1° Fórmula: $\text{tg}\,\mu = \frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}}$

2° Si $r = ae^{k\varphi} \Rightarrow \frac{dr}{d\varphi} = a[e^{k\varphi}]\left[\frac{d}{d\varphi}(k\varphi)\right]$

$$= ae^{K\varphi}K = rk$$

Luego: $\text{tg}\,\mu = \frac{r}{rk} \Leftrightarrow \text{tg}\,\mu = \frac{1}{k} \Leftrightarrow \mu = \text{arctg}\frac{1}{k}$

(11) Hallar el ángulo entre la tangente y el radio polar del punto de contacto para la lemniscata $r^2 = a^2\cos^2 2\theta$.

Solución:

1° Fórmula: $\operatorname{tg}\mu = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}}$

2° Si $r^2 = a^2\cos^2 2\theta$, "derivar con respecto a θ":

$$2r\frac{dr}{d\theta} = a^2[-\operatorname{sen}^2 2\theta]\left[\frac{d}{d\theta}(2\theta)\right]$$

$$= a^2[-\operatorname{sen}2\theta][2]$$

$$2r\frac{dr}{d\theta} = -2a^2\operatorname{sen}2\theta$$

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{a^2}{r}\operatorname{sen}2\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(i)}$$

3° Sustituir (i) en 1°): $\operatorname{tg}\mu = \dfrac{r}{-\frac{a^2}{r}\operatorname{sen}2\theta}$

$$= -\frac{r^2}{a^2\operatorname{sen}2\theta}$$

$$= -\frac{a^2\cos 2\theta}{a^2\operatorname{sen}2\theta}$$

$$= -\operatorname{cotg}2\theta$$

$$= \operatorname{cotg}(-2\theta)$$

$$\operatorname{tg}\mu = \operatorname{tg}(\pi/2 + 2\theta)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mu = \pi/2 + 2\theta$$

12 Demostrar que las normales a la envolvente de la circunferencia:
$x = a(\cos t + t\operatorname{sen}t)$; $y = a(\operatorname{sen}t - t\cos t)$
son tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.

Demostración:

Sean:

1) m_N: pendiente de las normales de

$$E:\begin{cases} x = a(\cos t + t\operatorname{sen}t) \\ y = a(\operatorname{sen}t - t\cos t) \end{cases}$$

2) m_T: pendiente de las tangentes a la

$$C: x^2 + y^2 = a^2 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\operatorname{sen}t \end{cases}$$

3) Para que las normales a E sean tangentes a la C, debe cumplirse que: $m_N = m_T$.

4) PERO: $\begin{cases} m_N = -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}, \text{ donde } \frac{dy}{dx} \text{ se obtiene de } E \\ m_T = \frac{dy}{dx}, \text{ donde } \frac{dy}{dx} \text{ se obtiene de } C \end{cases}$

5) Veamos:
De:

$$E:\begin{cases} x = a(\cos t + t\operatorname{sen}t) \\ y = a(\operatorname{sen}t - t\cos t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{a(\cos t + t\operatorname{sen}t - \cos t)}{a(-\operatorname{sen}t + t\cos t + \operatorname{sen}t)} = \operatorname{tg}t$$

De:

$$C: x^2 + y^2 = a^2 \Longleftrightarrow \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\operatorname{sen}t \end{cases}$$

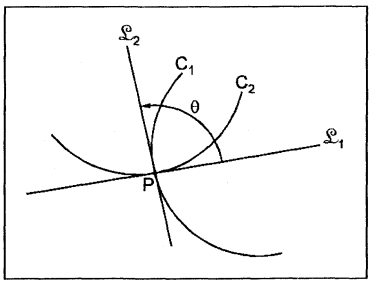
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{a\cos t}{-a\operatorname{sen}t}$$

$$= -\operatorname{cotg}t$$

6) Entonces:

$$\left.\begin{aligned} m_N &= -\frac{1}{\operatorname{tg}t} = -\operatorname{cotg}t \\ m_T &= -\operatorname{cotg}t \end{aligned}\right\} \textbf{SON IGUALES}$$

2. ÁNGULO ENTRE DOS CURVAS



Si las curvas C_1 y C_2 se cortan en el punto P forman un ángulo θ que están definidas por sus rectas tangentes $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ en P.

Es decir, el ángulo formado por las curvas C_1 y C_2 es el mismo que forman las rectas tangentes $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ en P.

¿Como se halla el ángulo θ?

Si se conocen las pendientes de las rectas tangentes de las rectas tangentes $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ entonces el ángulo θ se halla por la fórmula: $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{m_2 - m_1}{1 - m_1 m_2}$

siendo $\begin{cases} m_2 \text{ la pendiente de } \mathcal{L}_1, \text{ y} \\ m_1 \text{ la pendiente de } \mathcal{L}_2 \end{cases}$

Si se conocen las ecuaciones de las curvas C_1 y C_2, entonces:

$m_2 = \dfrac{dy}{dx}$ en el punto de tangencia $P = (x_0, y_0)$

$m_1 = \dfrac{dy}{dx}$ en el punto de tangencia $P = (x_0, y_0)$

Problema 1 Halle el ángulo de intersección de las parábolas cuyas ecuaciones son

$$\begin{cases} y = (x-2)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ y = -4 + 6x - x^2 \ \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

Solución:

1. La intersección de (1) con (2) se obtiene por igualación:

$$(x-2)^2 = -4 + 6x - x^2$$
$$x^2 - 4x + 4 = -4 + 6x - x^2$$
$$2x^2 - 10x + 8 = 0$$
$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x-4)(x-1)=0 \begin{cases} x=4 \Rightarrow \text{En (1):} & y=4 \iff A=(4,4) \\ x=1 \Rightarrow \text{En (2):} & y=1 \iff B=(1,1) \end{cases}$$

Los puntos de intersección son $A(4,4)$ y $B(1,1)$.

2. Derivando en las ecuaciones (1) y (2):

a) De $y=(x-2)^2 \Rightarrow y'=2(x-2)$ $\begin{cases} y'_{(4,4)}=2(4-2)=4 \\ y'_{(1,1)}=2(1-2)=-2 \end{cases}$

b) De $y=-4+6x-x^2 \Rightarrow y'=6-2x$ $\begin{cases} y'_{(4,4)}=6-2(4)=-2 \\ y'_{(1,1)}=6-2(1)=4 \end{cases}$

3. En consecuencia:

a) El ángulo en el punto $A(4,4)$: $\operatorname{tg}\theta=\frac{4-(-2)}{1+(4)(-2)}=-\frac{6}{7}$

$$\theta=\operatorname{arctg}\left(-\tfrac{6}{7}\right)$$

b) El ángulo en el punto $B(1,1)$ es:

Problema 2 Demuestre que las hipérbolas $xy=a^2$ y $x^2-y^2=b^2$ se cortan entre sí formando un ángulo recto.

Demostración:

Debo demostrar que el producto de las pendientes de las rectas tangentes a las curvas $C_1: xy=a^2$ y $C_2: x^2-y^2=b^2$, es igual a -1.

Veamos:

De la ecuación: $xy=a^2$

Obtenemos: $x\frac{dy}{dx}+y=0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}$$

De la ecuación: $x^2-y^2=b^2$

Obtenemos: $2x-2y\frac{dy}{dx}=0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$$

Debe cumplirse que $m_1 m_2=-1$

Siendo: $m_1=-\frac{y}{x}$ y $m_2=\frac{x}{y}$

Luego: $\left(-\frac{y}{x}\right)\left(\frac{x}{y}\right)=-1$

$x\neq 0$

$y\neq 0$

Problema 3 Demuestre que el círculo $x^2+y^2=8ax$ y la cicloide $(2a-x)y^2=x^3$

a) Son perpendiculares en el origen.

b) Se cortan en ángulo de 45° en otros dos puntos.

Solución:

1. Calculo de los puntos de intersección de las curvas $\begin{cases} C_1: x^2+y^2=8ax \\ C_2: (2a-x)y^2=x^3 \end{cases}$

De C_1 obtenemos: $y^2=8ax-x^2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{8ax-x^2}$ ..... (1)

Sustituir en C_2: $(2a-x)(8ax-x^2)=x^3$

$$(2a-x)(8ax-x^2)-x^3=0$$

$$x[(2-x)(8a-x)-x^2]=0$$

(2) $\boxed{x=0}$ $\vee$ $(2a-x)(8a-x)-x^2=0$

$$x^2-10ax+16a^2-x^2=0$$

$$-10ax+16a^2=0$$

(3) $\boxed{x=\frac{8}{5}a}$

Sustituir (2) en (1): $y=\pm\sqrt{0}=0$, así obtenemos el punto $A(0,0)$.

Sustituir (3) en (1): $y=\pm\sqrt{8a\left(\frac{8}{5}a\right)-\left(\frac{8}{5}a\right)^2}=\pm\frac{16}{5}a$

Así obtenemos dos puntos más: $B\left(\frac{8}{5}a,\frac{16}{5}a\right)$ y $C\left(\frac{8}{5}a,-\frac{16}{5}a\right)$

2. Calculo de $\frac{dy}{dx}=y'$ en las curvas C_1 y C_2.

De C_1 $\quad x^2+y^2=8ax$

Obtenemos: $2x+2y\frac{dy}{dx}=8a$

$$x+y\frac{dy}{dx}=4a$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4a-x}{y}$$

En el punto $A(0,0)$ será: $\left.\frac{dy}{dx}\right]_A = \frac{4a-0}{0} = \frac{4a}{0} = \pm\infty$

En el punto $B\left(\frac{8}{5}a, \frac{16}{5}a\right)$ será: $\left.\frac{dy}{dx}\right]_B = \frac{4a-\frac{8}{5}a}{\frac{16}{5}a} = \frac{3}{4}$

En el punto $C\left(\frac{8}{5}a, -\frac{16}{5}a\right)$ será: $\left.\frac{dy}{dx}\right]_C = \frac{4a-\frac{8}{5}a}{-\frac{16}{5}a} = -\frac{3}{4}$

De C_2 $\quad (2a-x)y^2 = x^3$

Obtenemos: $(-1)y^2 + (2a-x)\,2yy' = 3x^2$

$$-y^2 + 2y\,y'(2a-x) = 3x^2$$

$$y' = \frac{3x^2+y^2}{2y(2a-x)}$$

Si: $y>0 \Rightarrow y = x\sqrt{\frac{x}{2a-x}} \Rightarrow y'(0,0) = 0$

En el punto $A(0,0)$ será: $y'\,]_A = \frac{0}{0}$ no existe.

En el punto $B\left(\frac{8}{5}a, \frac{16}{5}a\right)^2$ sera: $y'\,]_B = \frac{3\left(\frac{8}{5}a\right)^2 + \left(\frac{16}{5}a\right)^2}{2\left(\frac{16}{5}a\right)\left(2a-\frac{8}{5}a\right)} = 7$

En el punto $C\left(\frac{8}{5}a, -\frac{16}{5}a\right)$ será: $y'\,]_C = \frac{3\left(\frac{8}{5}a\right)^2 + \left(-\frac{16}{5}a\right)^2}{2\left(-\frac{16}{5}a\right)\left(2-\frac{8}{5}a\right)} = -7$

3. Angulos que forman las rectas tangentes a las curvas C_1 y C_2:

a) La recta tangente a la curva C_1 en el punto A es $x=0$ ⟵ *eje y*

La recta tangente a la curva C_2 en el punto A es $y=0$ ⟵ *eje x*

El eje Y y el X son perpendiculares en el origen.

b) La pendiente de la tangente a C_1 en B es $m_1 = \frac{3}{4}$

La pendiente de la tangente a C_2 en B es $m_2 = 7$

Entonces: $\operatorname{tg}\theta = \frac{m_2 - m_1}{1+m_1 m_2} \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{7-\frac{3}{4}}{1+(7)\,(\frac{3}{4})} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

c) La pendiente de la tangente a C_1 en C, es $m_1 = -\frac{3}{4}$

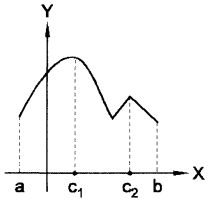
La pendiente de la tangente a C_2 en C, es $m_2 = -7$, entonces:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1+m_1 m_2} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{-7+\frac{3}{4}}{1+(-\frac{3}{4})\,(-7)} = -1 \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4} \vee \alpha = -\frac{\pi}{4}$$

3. MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA FUNCIÓN

(VALORES EXTREMOS DE UNA FUNCIÓN)

3.1. Definición 1

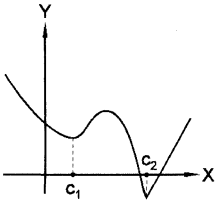


Una función f tiene un ***MÁXIMO RELATIVO*** (o máximo local) en un punto $c \in \text{Dom}(f)$, si existe un entorno $N(c)$ alrededor de "c", tal que:

$$f(c) \geq f(x) \quad , \quad \forall\, x \in N(c) \cap \text{Dom}(f)$$

NOTA: Si $f(c) \geq f(x)$, $\forall\, x \in J$ = intervalo contenido en el dominio de f, entonces el número $f(c)$ recibe el nombre de valor ***MÁXIMO RELATIVO*** de f sobre J.

3.2. Definición 2



Una función f tiene un ***MINIMO RELATIVO*** (o mínimo local), en un punto $c \in \text{Dom}(f)$, si existe un entorno $N(c)$ de c, tal que:

$$f(c) \leq f(x) \quad , \quad \forall\, x \in N(c) \cap \text{Dom}(f)$$

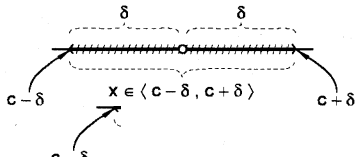
NOTA: Si $f(c) \leq f(x)$, $\forall\, x \in J$ = intervalo contenido en el dominio de f, entonces el número $f(c)$ recibe el nombre de ***VALOR MÍNIMO*** de f sobre J.

3.3. ACLARACIONES EN ESTAS DEFINICIONES

1) Tanto el máximo como el mínimo de una función real de variable real, son números reales que pertenecen al rango de la función.

2) Se llama ***ENTORNO DE "c"*** a cualquier intervalo abierto que contenga a "c". No necesariamente "c" es el punto medio de intervalo.

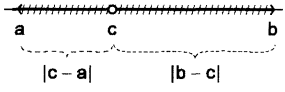
3) **VECINDAD:**



Se llama ***VECINDAD*** de "c" a todo intervalo abierto cuyo centro es "c" y radio un número positivo δ. Se denota por $N_\delta(c) = \langle c-\delta, c+\delta \rangle$.

4) Una vecindad es un entorno de "c".

5) **PROPOSICIÓN:** Todo entorno $N(c)$ de "c" contiene una vecindad de radio $\delta > 0$. Para probar, basta tomar $\delta = \min\{|c-a|, |b-c|\}$.



$V_\delta(c) \subset \langle a,b\rangle$ ⟵ ENTORNO DE C

VECINDAD DE C, $\delta = |c-a|$

3.4. Definición 3 Los valores extremos de una función son los máximos y mínimos relativos de la función.

3.5. Definición 4 El número $f(c)$ será el máximo absoluto de f, si $f(c) \geq f(x)$; $\forall\, x \in \text{Dom}(f)$.

3.6. Definición 5 El número $f(c)$ será el mínimo absoluto de f, si $f(x) \leq f(x)$; $\forall\, x \in \text{Dom}(f)$.

3.7. EJEMPLOS ACLARATORIOS

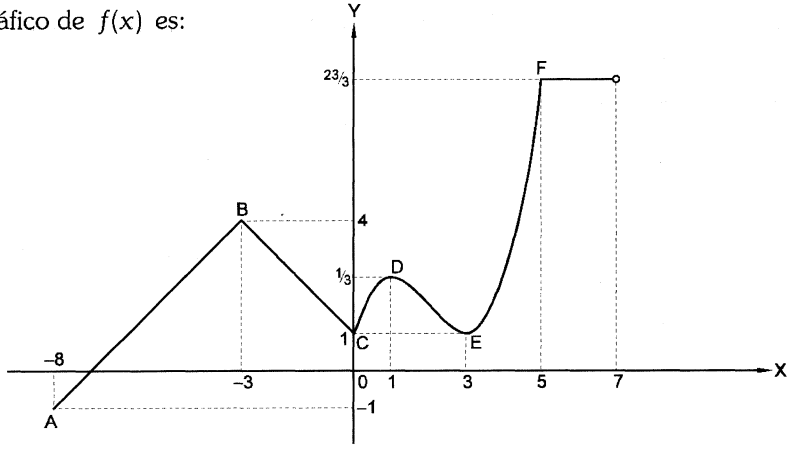
1. Sea la función: $f : [-8,7\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 4 - |x+3| & , \quad -8 \leq x < 0 \\ \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1 & , \quad 0 \leq x \leq 5 \\ \frac{23}{3} & , \quad 5 < x < 7 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 7 + x & , \quad -8 \leq x < -3 \\ 1 - x & , \quad -3 \leq x < 0 \\ \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1 & , \quad 0 \leq x \leq 5 \\ \frac{23}{3} & , \quad 5 < x < 7 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & , \quad -8 \leq x \leq -3 \\ -1 & , \quad -3 \leq x < 0 \\ x^2 - 4x + 3 & , \quad 0 \leq x \leq 5 \\ 0 & , \quad 5 < x < 7 \end{cases}$$

El gráfico de $f(x)$ es:



Podemos apreciar lo siguiente:

- En $A(-8,-1)$, el número $-1 = f(-8)$ es un mínimo relativo de $f(x)$ sobre $x \in [-8,-3\rangle$
  Pues: $-1 \le 7 + x$, $\forall\, x \in [-8,-3\rangle$

- En $B(-3,4)$, el número $4 = f(-3)$ es un máximo relativo de $f(x)$ sobre $x \in [-8,0\rangle$
  Pues: $4 \ge 4 - |x+3|$, $\forall\, x \in [-8,0\rangle$

- En $C(0,1)$, el número $1 = f(0)$ es un mínimo relativo de $f(x)$ sobre $x \in [-3,1\rangle$.
  Pues: $1 \le \begin{cases} 1-x & , \quad x \in \langle -3,0\rangle \\ \frac{x^3}{3} - 2x^2 3x + 1 & , \quad x \in [0,1\rangle \end{cases}$

- En $D(1,7/3)$, el número $7/3 = f(1)$, es un máximo relativo de $f(x)$ sobre $x \in \langle 0,3\rangle$
  Pues: $\frac{7}{3} \ge \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$, $\forall\, x \in \langle 0,3\rangle$

- En $E(3,1)$, el número $1 = f(3)$ es un mínimo relativo de $f(x)$ sobre $x \in \langle 1,7\rangle$
  Pues: $1 \le \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$, $\forall\, x \in \langle 1,7\rangle$

- En $F(5,23/3)$, el número $23/3 = f(5)$ es un máximo relativo de $f(x)$ sobre $x \in \langle 3,7\rangle$

  Pues: $\frac{23}{3} \geq \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$, $\forall\, x \in \langle 3,7\rangle$

- $-1 = f(-8)$ es el mínimo absoluto de $f(x)$, pues $f(-8) \leq f(x)$, $\forall\, x \in [-8,7\rangle$.

  $\frac{23}{3} = f(5)$ es el máximo absoluto de $f(x)$, pues $f(5) \geq f(x)$, $\forall\, x \in [-8,7\rangle$.

4. PUNTOS CRÍTICOS DE UNA FUNCIÓN

4.1. Definición

Los **puntos críticos** de una función $f(x)$ definida sobre un intervalo $J = \text{Dom}(f)$ son de tres clases:

a) Los puntos $x \in J$, tal que, $f'(x) = 0$. Estos puntos se llaman ***PUNTOS SINGULARES.***
b) Los puntos $x \in J$, tal que ***NO EXISTE*** $f'(x)$.
c) Si $J = [a,b]$, entonces a y b también son puntos críticos.

4.2. Ejemplos

Ejemplo 1. Sea $f(x) = \frac{-x^3}{3} + 2x^2 - 3x - 1$, definida sobre $J = \langle 0,5\rangle$

donde $f'(x) = -x^2 + 4x - 3$
$= -(x^2 - 4x + 3)$
$= -(x-3)(x-1)$

De $f'(x) = 0$, obtenemos: $x = 3$, $x = 1$ que son los puntos singulares pertenecientes al intervalo J.

Ejemplo 2. Sea $f(x) = (x-3)^{2/3} + 2$, $x \in \mathbb{R}$

donde: $f'(x) = \frac{2}{3}(x-3)^{-1/3}$

$= \frac{2}{3(x-3)^{1/3}}$

Punto crítico es: $x = 3 \in \mathbb{R}$, pues, ***NO EXISTE*** $f'(3)$.

Decimos $\nexists\, f'(3)$ $\nexists$ f'(3), porque $f'(3^+) = \frac{2}{+0} = +\infty$, $f'(3^-) = \frac{2}{-0} = -\infty$ *NO SON NÚMEROS REALES*

Ejemplo 3. Sea la función: $f:[-5,8] \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por:

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{6x^2-x^3} & , \ -2\le x\le 8 \\ \frac{2\sqrt[3]{2}}{3}x+\frac{10}{3}\sqrt[3]{2} & , \ -5\le x<-2 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{1}{3}(6x^2-x^3)^{-2/3}(12x-3x^2) & , \ -2\le x\le 8 \\ \frac{2\sqrt[3]{2}}{3} & , \ -5\le x<-2 \end{cases}$$

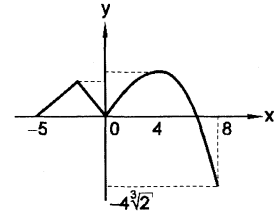
$$f'(x)=\begin{cases} \frac{4-x}{\sqrt[3]{x(6-x)^2}} & , \ -2\le x\le 8 \\ \frac{2\sqrt[3]{2}}{3} & , \ -5\le x<-2 \end{cases}$$

Los puntos críticos son:

a) De $f'(x)=0$, obtenemos $x=4$.

b) Los puntos x, donde ***NO EXISTE LA DERIVADA*** son: $x=0$, $x=6$, $x=-2$.

c) Los extremos: $x=-5$, $x=8$ del intervalo $J=[-5,8]=\text{Dom}(f)$.



Ejemplo 4.

Sea $f(x)=\text{sen}|x|=\begin{cases} \text{sen}\,x & , \ x\ge 0 \\ \text{sen}(-x) & , \ x<0 \end{cases}$

$$f(x)=\begin{cases} \text{sen}\,x & , \ x\ge 0 \\ -\text{sen}\,x & , \ x<0 \end{cases}$$

donde: $f'(x)=\begin{cases} \cos x & , \ x\ge 0 \\ -\cos x & , \ x<0 \end{cases}$

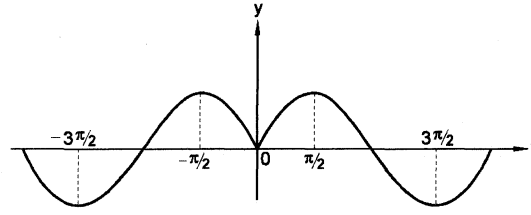
Los puntos críticos son:

a) De $f'(x)=0$ $\begin{cases} \cos x=0 \ \Rightarrow \ x=2k\pi\pm\pi/2 \ , \ k\in Z^+\cup\{0\} \\ -\cos x=0 \ \Rightarrow \ x=2x\pi\pm\pi/2 \ , \ k\in Z^- \end{cases}$

$$x=2k\pi\pm\tfrac{\pi}{2} \ , \ k\in Z$$

b) En $x=0$, ***NO EXISTE*** $f'(0)$

porque $\begin{cases} f'(0^+)=1 \\ f'(0^-)=-1 \end{cases}$



NOTA: Los puntos $x \in \text{Dom}(f)$, donde ***NO*** existe $f'(x)$ se encuentran en:

a) Los denominadores de $f'(x)$, cuando $f'(x)$ es de la forma $f'(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$. Igualando a cero el denominador $(g(x) = 0)$ obtenemos los $x \in \text{Dom}(f)$, tal que, $\nexists\, f'(x)$.

b) Las funciones ***VALOR ABSOLUTO***.
Si $f(x) = h(x) + \mu(x)|g(x)|$, los $x \in D_f$ tal que, $\nexists\, f'(x)$ se hallan igualando a cero el valor absoluto $(g(x) = 0)$.

Ejemplo 5. De: $f(x) = \sqrt[3]{2x-1}$ obtenemos:

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}}$$

$2x - 1 = 0$

$x = \frac{1}{2}$

$\nexists\, f'(1/2)$, pues $x = \frac{1}{2} \in D_f = \mathbb{R}$

$\wedge\ f'(1/2) = \pm\infty$

Ejemplo 6. En $f(x) = |x^3 - 4x|$

$x^3 - 4x = 0$

$x(x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 2,\ x = -2$

$\nexists\, f'(0)$, $\nexists\, f'(2)$, $\nexists\, f'(-2)$.

Prueba:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 4x\ ,\ x^3 - 4x \geq 0 \\ -x^3 + 4x\ ,\ x^3 - 4x < 0 \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x^3 - 4x\ ,\ x \in [-2,0] \cup [2,+\infty\rangle \\ -x^3 + 4x\ ,\ x\langle -\infty,-2\rangle \cup \langle 0,2\rangle \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4\ ,\ x \in [-2,0] \cup [2,\infty\rangle \\ -3x^3 + 4\ ,\ x\langle -\infty,-2\rangle \cup \langle 0,2\rangle \end{cases}$$

En $x = 0$: $f'(0^+) = -(0)^2 + 4 = +4$, $f'(0^-) = 3(0)^2 - 4 = -4$ $\leftarrow\!\!\rightarrow$ $\neq$s $\Rightarrow$ $\nexists\, f'(0)$

En $x = -2$: $f'(2^+) = 3(2)^2 - 4 = 8$, $f'(2^-) = 3(2)^2 + 4 = -8$ $\leftarrow\!\!\rightarrow$ $\neq$s $\Rightarrow$ $\nexists\, f'(2)$

En $x = -2$: $f'(-2^+) = 3(-2)^2 - 4 = 8$, $f'(-2^-) = 3(-2)^2 + 4 = -8$ $\leftarrow\!\!\rightarrow$ $\neq$s $\Rightarrow$ $\nexists\, f'(-2)$

Ejemplo 7. En: $f(x)=\dfrac{2|x-2|}{x^2+4}$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2(x-2)}{x^2+4}, & x\geq 2\\ \dfrac{-2(x-2)}{x^2+4}, & x<2\end{cases}$$

Donde:
$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-2(x^2-4x-4)}{(x^2+4)^2}, & x\geq 2\\ \dfrac{2(x^2-4x-4)}{(x^2+4)^2}, & x<2\end{cases}$$

Los puntos críticos son:

a) De $f'(x)=0$, obtenemos: $-2(x^2-4x-4)=0 \quad \vee \quad 2(x^2-4x-4)=0$

$x=2+2\sqrt{2}\in[2,\infty\rangle \qquad x=2-2\sqrt{2}$

b) En $x=2$, $\nexists\, f'(2)$.

Ejemplo 8.

Sea $f(x)=|x|^a\,|x-1|^b$, donde a y b son números racionales positivos.

Los puntos críticos son:

a) De $f'(x)=0$ se obtiene $x=\frac{a}{a+b}$.

b) Los $x\in \mathrm{Dom}(f)/\nexists\, f'(x)$ son $x=0$

$x=1$

Ejemplo 9. Sea: $f(x)=\sqrt[3]{4x^2-x^3}$, $x\in[-2,6]$

Donde: $f'(x)=\dfrac{8x-3x^2}{3\sqrt[3]{(4x^2-x^3)^2}}$

$f'(x)=\dfrac{-(3x-8)}{3\sqrt[3]{x(4-x)^2}}$

Los puntos críticos son:

a) De $f'(x)=0$, se obtiene $x=8/3$.

b) Los $x\in[-2,6]=\mathrm{Dom}(f)$, donde $\nexists\, f'(x)$, se obtienen del denominador: $x=0$; $x=4$; pues $\nexists\, f'(0)$, $\nexists\, f'(4)$.

c) Los extremos: $x=-2$

$x=6$

Ejemplo 10.

Sea: $f(x)=\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{(x-2)^2}$

$f'(x)=\frac{2}{3}(x+2)^{-1/3}-\frac{2}{3}(x-2)^{-1/3}$

$f'(x)=\frac{2}{3}\dfrac{\left(\sqrt[3]{x-2}-\sqrt[3]{x+2}\right)}{\sqrt[3]{(x+2)(x-2)}}$

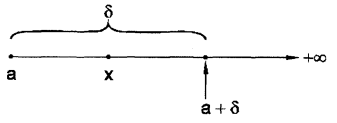
Son puntos críticos:

$x=-2$ porque $\nexists\, f'(-2)$

$x=2$ porque $\nexists\, f'(2)$

5. TEOREMAS RELATIVOS A LA DERIVADA

Teorema 11. Sea la función $f:[a,+\infty\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable a la derecha de a. Si $f'(a^+)>0$, entonces existe $\delta>0$ tal que, $x[a,+\infty\rangle \wedge a<x<a+\delta$, implica $f(a)<f(x)$.



Prueba: Bastará probar: $f(x)-f(a)>0$.

1. La derivada a la derecha de a, se define por:

$$f'(a^+)=\lim_{\substack{x\to a\\ x>a\\ x-a>0}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

2. Por definición de derivada por la derecha de a, se tiene:
existe $\delta>0$, tal que, si $0<x-a<\delta \quad \wedge \quad x\in[a,+\infty\rangle$, implica

$$f'(a^+)-\varepsilon<\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<f'(a^+)+\varepsilon \quad \text{para todo } \varepsilon>0.$$

3. Por hipótesis: $f'(a^+)>0$ y la relación en 2) se cumple $\forall\,\varepsilon>0$.

En particular dicha relación se cumple para $\varepsilon=\frac{1}{2}f'(a^+)$.

Así tendremos: $f'(a^+)-\frac{1}{2}f'(a^+) < \frac{f(x)-f(a)}{x-a} < f'(a^+)+\frac{1}{2}f'(a^+)$

$$0<\frac{1}{2}f'(a^+) < \frac{f(x)-f(a)}{x-a} < \frac{3}{2}f'(a^+)$$

Entonces: $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$, como $x-a>0 \Rightarrow f(x)-f(a)>0$

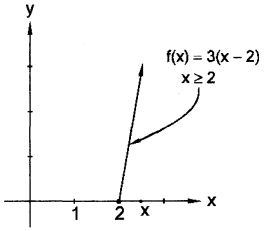
$$\Rightarrow f(x)>f(a)$$

Ejemplo 1. Sea la función $f:[2,+\infty\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x)=3|x-2|$.

Analicemos la derivada de f a la derecha de $x=2$.

$$f'(2^+)=\lim_{\substack{x\to 2^+\\ x>2\\ x-2>0}} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)-0}{x-2}=3$$

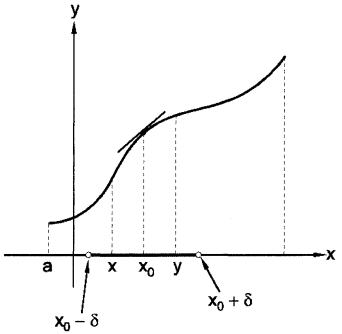
Como vemos, la derivada a la derecha de "2" es positivo.



Por lo tanto, para $2 < x < 2 + \delta$ siempre será posible que $f(x) > f(2)$.

NOTA: En esta función, sólo podemos hablar de la derivada a la derecha de 2. Por la izquierda de 2, la función no está definida. Pero si alargamos el dominio un poco a la izquierda, digamos $\langle 1.5, +\infty \rangle$, entonces ya podemos hablar de la derivada de $f(x) = 3|x-2|$ por la derecha y por la izquierda de 2 y notaremos que $f'(2^+) = 3$ y $f'(2^-) = -3$. Como vemos, existen las derivadas laterales en 2, pero son diferentes; lo cual nos afirma que no existe la derivada de la función en 2.

Corolario 11.1 Sea la función $f : \langle a,b \rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in \langle a,b \rangle$. Si f es derivable en x_0 y $f'(x_0) > 0$, entonces existe $\delta > 0$, tal que, si x, $y \in \langle a,b \rangle \wedge x_0 - \delta < x < x_0 < y < x_0 + \delta$ implican: $f(x) < f(a) < f(y)$.



Este corolario nos dice: Si x_0 es un punto interior del intervalo $\langle a,b \rangle$ y $f'(x_0) > 0$; además, si en una vecindad de x_0: $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle \subset \langle a,b \rangle$ elegimos dos números reales x, y tal que: $x_0 - \delta < x < x_0 < y < x_0 + \delta$, entonces se cumplen que $f(x) < f(x_0) < f(y)$.

Prueba:

1. Si $f(x)$ es derivable en x_0, entonces existen las derivadas por la derecha e izquierda de x_0 y son iguales.

Es decir: $f'(x_0^+) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0^+ \\ x > x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{\substack{x \to x_0^- \\ x < x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0^-)$

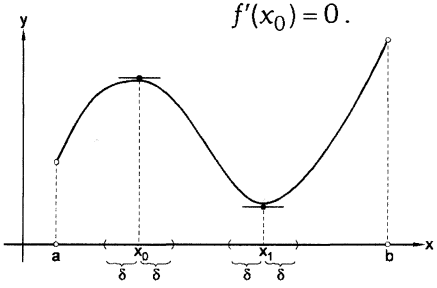
2. Como $f'(x_0) > 0$, entonces a) $f'(x_0^+) > 0$ y b) $f'(x_0^-) > 0$.

En: a) Si $f'(x_0^+) > 0$, entonces (por Teo. 12) existe $\delta > 0$ tal que, $y \in \langle a,b\rangle \wedge x_0 < y < x_0 + \delta$, implica $f(x_0) < f(y)$.

En: b) Si $f'(x_0^-) > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $x \in \langle a,b\rangle \wedge x_0 - \delta < x < x_0$ implica $f(x) < f(x_0)$. [La prueba de b) es similar al Teo. 12]

3. Por a) y b) se concluye la demostración.

Corolario 11.2 Sea la función $f: \langle a,b\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in \langle a,b\rangle$. Si f es derivable en x_0 y posee un máximo o un mínimo local en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$.



En el gráfico, se tiene:

a) $f(x_0)$ es máximo local.

b) $f(x_1)$ es mínimo local.

NOTA:

a) Cuando decimos que $f(x)$ posee máximo local en x_0, nos referimos que en una vecindad $V_\delta(x_0) = \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$ de x_0, se cumple que $f(x_0) \geq f(x)$, $\forall\, x \in V_\delta(x_0)$.
MÁXIMO LOCAL

b) Cuando decimos que $f(x)$ posee mínimo local en x_1, nos referimos que en una vecindad $V_\delta(x_1) = \langle x_1 - \delta, x_1 + \delta\rangle$ de x_1, se cumple que $f(x_1) \leq f(x)$, $\forall\, x \in V_\delta(x_1)$.
MÍNIMO LOCAL

Prueba:

Hipótesis: $\begin{cases} P_1 : f \text{ es derivable en } x_0 \\ P_2 : f \text{ posee máximo o mínimo local en } x_0 \end{cases}$

Tesis: $\{ q : f'(x_0) = 0$

Si se prueba que $f'(x_0) \geq 0 \wedge f'(x_0) \leq 0$ en $\langle x_0 - \delta, x_0 - \delta \rangle$, entonces $f'(x_0) = 0$ en $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$.

Veamos:

1. Supongamos que f posee máximo local en x_0. Es decir $f(x_0) \geq f(x)$, para todo $x \in \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$.

2. Ahora, analizar la derivada a la derecha e izquierda de x_0.

a) A la derecha de $x_0 : 0 < x - x_0 < \delta$ tenemos:

i) $f(x) \leq f(x_0)$, $x_0 < x < x_0 + \delta$

$$f(x) - f(x_0) \leq 0$$

$$\frac{[f(x) - f(x_0)]}{x - x_0} \leq 0 \text{, pues } x - x_0 > 0$$

$$\underbrace{\lim_{x \to x_{0^+}} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right]}_{f'(x_0^+)} \leq 0$$

b) A la izquierda de $x_0 : 0 < x_0 - x < \delta \iff 0 > x - x_0 > -\delta$ se prueba de manera similar, que: $f'(x_0^-) \geq 0$.

3. Como $f(x)$ es derivable en x_0, se cumple que: $f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = f(x_0)$.

Por a), b) y 3) concluimos que: $f'(x_0) \geq 0 \wedge f'(x_0) \leq 0$ implica $f'(x_0) = 0$

NOTA:

Para el caso que f posee mínimo local en x_0, la demostración es similar.

---

6. FUNCIONES DERIVABLES EN UN INTERVALO

Surge la siguiente interrogante:

Si una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es contínua en el intervalo I, su derivada $f'(x)$ ¿es continua en I?

Respuesta.- Unas veces $f'(x)$ sigue siendo continua en I, en otros casos no es continua en I.

Ejemplos:

1. Sea la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(x) = |x|$. En este caso, se tiene:

a) $f(x) = |x|$ es continua en $\mathbb{R}$.

b) $f'(x) = \begin{cases} 1 \ , & x \geq 0 \\ -1 \ , & x < 0 \end{cases}$ Es discontinua en "0". Por lo tanto no es continua en $\mathbb{R}$.

2. La función $f(x) = e^x$ es continua en $I = \langle -\infty, +\infty \rangle$. Su derivada $f'(x) = e^x$ es también continua en $I = \langle -\infty, +\infty \rangle$.

3. El polinomio $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$ es continua en todo $\mathbb{R}$. Su derivada $P'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

Definición. Si una función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ posee derivada en todos los puntos del intervalo I, consideramos la función derivada $f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$ que asocia a cada $x \in I$ la derivada $f'(x)$.

a) Si f es continua en I y su derivada f' es continua en I, diremos que la función $f(x)$ es de clase C^1.

b) Si f y las derivadas de todo orden: f', f'', f''', ..., $f^{(n)}$, $f^{(n+1)}$, ... son continuas en I, se dice que f es una función de clase C^∞.

Teorema 12. (VALOR INTERMEDIO PARA LA DERIVADA)

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en todos los puntos $x \in [a,b]$.

Si $f'(a) < d < f'(b)$ entonces existe $c \in \langle a,b \rangle$ tal que $f'(c) = d$.

Demostración:

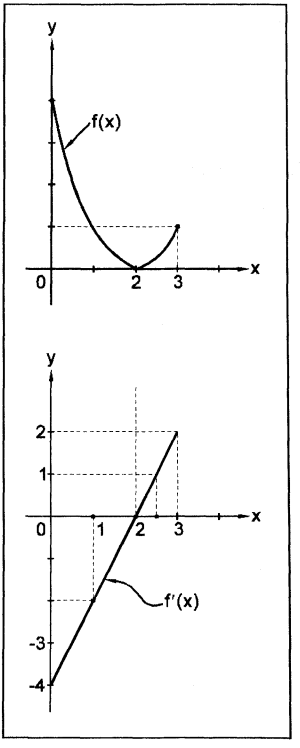
Antes de probar el Teorema, analizar la función $f : [0,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = (x-2)^2$.

Su derivada es $f' : [0,3] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longrightarrow f'(x) = 2(x-2)$$

donde $f'(0) = -4$, $f'(3) = 2$

La función f cumple las hipótesis del teorema. Se cumplen tres casos:



a) En $c = 2 \in \langle 0,3 \rangle$ se tiene:

$$\underbrace{f'(0)}_{-4} < \underbrace{f'(c)}_{0} < \underbrace{f'(3)}_{2}$$

b) En $c_1 = 1 \in \langle 0,3 \rangle$ se tiene:

$$f'(0) < \underbrace{f'(c_1)}_{-2} < f'(3)$$

c) En $c_2 = 2{,}5 \in \langle 0,3 \rangle$ se tiene:

$$f'(0) < \underbrace{f'(c_2)}_{1} < f'(3)$$

Prueba del Teorema:

1. Caso I Considerar $d = 0$, esto es, si $f'(a) < 0 < f'(b)$ entonces existe $c \in \langle a,b \rangle$ tal que $f'(c) = 0$. Aplicar el teorema 10 y el corolario 10.2.

2. Caso II Considerar $d \neq 0$.

En este caso construir la función auxiliar $g(x) = f(x) - dx$

Al derivar obtenemos: $g'(x) = f'(x) - d$

donde: $g'(c) = f'(c) - d$

Evidentemente $g'(c) = 0 \iff f'(c) - d = 0$

$\iff f'(c) = d$

Además $g'(a) = f'(a) - d$ y $g'(b) = f'(b) - d$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$g'(a) < 0 \iff f'(a) < d \qquad g'(b) > 0 \iff f'(b) > d$$

En consecuencia: $f'(a) < d < f'(b)$

Definición. Sea la función $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$

a) Diremos que f tiene discontinuidad de **PRIMERA ESPECIE** en el punto $a \in I$, si existen los límites laterales $\lim_{x \to a^+}$, $\lim_{x \to a^-}$ y son diferentes.

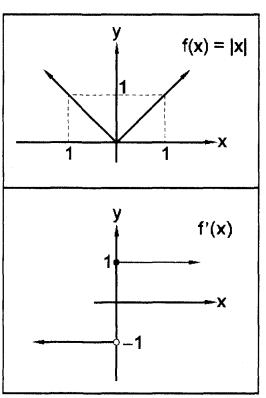
b) Diremos que f tiene discontinuidad de **SEGUNDA ESPECIE** en el punto $a \in I$, si no existe alguno de los límites laterales.

Corolario 12.1 Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en el intervalo I, entonces f no puede tener discontinuidad de primera especie en I.

Antes de probar, ver un contra ejemplo de este corolario:

Sea la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(x) = |x|$

Su derivada es $f'(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \geq 0 \\ -1 & , \quad x < 0 \end{cases}$



Podemos apreciar que:

a) f no es derivable en "0".

b) f' tiene discontinuidad de primera especie en "0".

Demostración del Corolario:

Según el corolario: Si elegimos un punto $c \in I$ que no sea extremo derecho ni extremo izquierdo del intervalo I, se debe probar dos cosas:

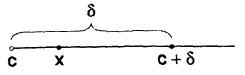
a) Si existe $\lim_{x \to c^+} f'(x) = L \quad \Rightarrow \quad L = f'(c)$

b) Si existe $\lim_{x \to c^-} f'(x) = M \quad \Rightarrow \quad M = f'(c)$

Por lo tanto, $L = M$ lo cual implica que $f'(x)$ es continua en c.

Prueba de a) Por el método de reducción al absurdo.

1. Si fuese $L > f'(c)$, tomamos d que satisface $f'(c) < d < L$. Existiría $\delta > 0$ tal que:



$$c < x < c + \delta \quad \Rightarrow \quad \boxed{d < f'(x)} \qquad (*)$$
para todo $x \in \langle c, c+\delta \rangle$

2. En particular, para $x = c + \frac{\delta}{2}$, tendremos: $f'(c) < d < f'\left(c + \frac{\delta}{2}\right)$.

Por el Teo. 11, existe un número $x \in \left\langle c, c + \frac{\delta}{2} \right\rangle$ tal que $\boxed{d = f'(x)}$ (**)

Como vemos, hay contradicción (*) con (**).

Conclusión: No existe $x \in \langle c, c+\delta \rangle$ con $f'(x) = d$.
En consecuencia debe ser $L = f'(c)$.

Prueba de b) Es similar la demostración.

3. Por a) y b) queda probado el corolario.

Teorema 13 (De ROLLE) Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

HIPOTESIS
- h_1 : f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$.
- h_2 : f es derivable sobre el intervalo abierto $\langle a,b \rangle$.
- h_3 : y $f(a) = f(b)$ ← un caso particular es cuando $f(a) = 0 = f(b)$.

TESIS Entonces existe un punto $c \in \langle a,b \rangle$, tal que, $f'(c) = 0$.

Demostración:

Caso I

1) Supongamos que los valores máximo y mínimo se presentan en los extremos: a y b, respectivamente.

$$\begin{cases} \text{si } f(a) = \text{MAXÍMO} \Rightarrow f(a) \geq f(x) & , \ \forall\, x \in \langle a,b \rangle \\ \text{si } f(b) = \text{MÍNIMO} \Rightarrow f(b) \leq f(x) & , \ \forall\, x \in \langle a,b \rangle \end{cases}$$

2) Pero $f(a) = f(b)$ ⟵ el **MAXIMO Y MINIMO COINCIDEN**, entonces por (1) tendremos:

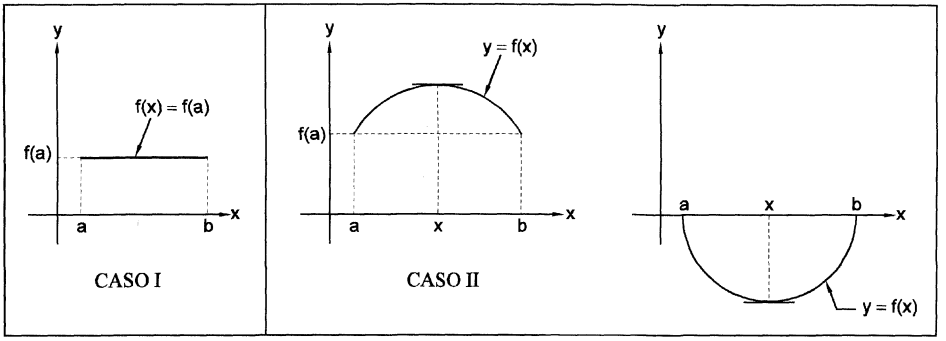
$$\underbrace{\left[\, f(a) = f(b) \geq f(x) \,\right]}_{\text{DEF.DE MAX}} \wedge \underbrace{\left[\, f(b) = f(a) \leq f(x) \,\right]}_{\text{DEF. DE MIN}} \text{ esto Implica que: } \overset{(*)}{\boxed{f(x) = f(a)}} \quad \forall \in \langle a, b \rangle$$

3) Por hipótesis (h_2) se tiene que f es derivable sobre $\langle a, b \rangle$, por lo tanto al derivar en $(*)$ se tiene $f'(x) = 0$ ⟵ **PUES LA DERIVADA DE UNA CONSTANTE ES CERO.**

4) En consecuencia puedo elegir cualquier $x \in \langle a, b \rangle$ y siempre cumplirá la ecuación $f'(x) = 0$.

(lqqd)

ILUSTRACIÓN GRÁFICA DEL TEOREMA DE ROLLE:



Caso II

1) Por hipótesis se tiene que $f(x)$ es continua en $x \in [a, b]$.

2) Además $f(a) = f(b)$.

3) Pero $f(x)$ es derivable en todo $x \in \langle a, b \rangle$.

4) Supongamos que existe máximo en $x = c$, entonces por el teorema anterior se cumple que $f'(c) = 0$ donde $f(c) =$ Máximo y $f(c) > f(a) = f(b)$, con $a < c < b$.

5) Supongamos que existe Mínimo en $x = c$, entonces por el teorema anterior se cumple que $f'(c) = 0$, donde: $f'(c) =$ Mínimo y $f(c) < f(a) = f(b)$, con $a < c < b$.

(lqqd)

Ejemplo. Sea la función $f(x)=x^3-4x$, definido en $x\in[-2,2]$ ¿Cumple el **TEOREMA DE ROLLE**?

Solución: 1) En primer lugar tenemos que todo polinomio es continua sobre su dominio, en consecuencia $f(x)=x^3-4x$ será continua en $x\in[-2,2]$.

2) Además $f(x)=x^3-4x$ es derivable sobre todo $x\in\langle-2,2\rangle$ y $f(-2)=(-2)^3-4(-2)=0$, $f(2)=(2)^3-4(-2)=0$. Esto es: $f(-2)=f(2)=0$.

3) En consecuencia existe por lo menos un número $x=c$, tal que $f'(c)=0$ con $x\in\langle-2,2\rangle$.

Veamos:

De: $f(x)=x^3-4x$

Se obtiene: $f'(x)=3x^2-4$

Haciendo: $f'(x)=0 \iff 3x^2-4=0$

$$\iff x^2=\tfrac{4}{3} \Leftrightarrow x=\tfrac{4}{\sqrt{3}}\in\langle-2,2\rangle \ \vee\ x=-\tfrac{2}{\sqrt{3}}\in\langle-2,2\rangle$$

Teorema 14 (TEOREMA DEL VALOR MEDIO, DE LAGRANGE)

HIPOTESIS

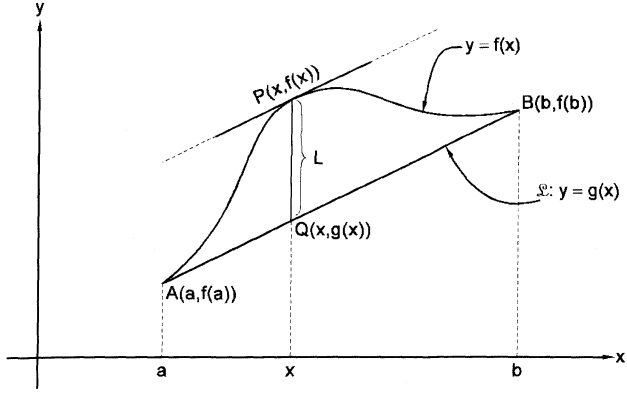
h_1 : Si f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, $a<b$.

h_2 : Si f es derivable en el intervalo abierto $\langle a,b\rangle$.

TESIS

Entonces **EXISTE** un punto $x\in\langle a,b\rangle$, tal que:

$$\boxed{f'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$



Demostración:

1) En el segmento de recta AB conocemos dos puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$; luego la ecuación de la recta $\mathcal{L}: y = g(x)$ será:

$$g(x) - f(a) = \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](x-a) \text{ , donde } \begin{cases} f(a) = g(a) \\ f(b) = g(b) \end{cases}$$

2) $\Longleftrightarrow \quad g(x) = \underbrace{\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right]}_{\text{pendiente de } \mathcal{L}.}(x-a) + f(a)$

La longitud "L" del segmento vertical $\overline{QP}$ es: $L = |\overline{QP}| = |P - Q|$

3) Donde: $\boxed{L = f(x) - g(x)}$

4) Reemplazando (2) en (3): $L = f(x) - \left\{\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](x-a) + f(a)\right\}$

5) $\Longleftrightarrow \quad \boxed{L(x) = f(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](x-a) - f(a)}$

6) **LA MAXIMA LONGITUD** de "L" se obtiene cuando ocurre que:

$$L'(x) = 0 \text{, donde } L'(x) = \frac{dL}{dx}$$

Además, por hipótesis se sabe que, $f(x)$ es derivable en $x \in \langle a, b\rangle$.

7) De (5), obtenemos: $L'(x) = f'(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](1-0) - 0$

$$\Longleftrightarrow \quad L'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

8) Por (6) se cumple que $L'(x) = 0$, entonces:

$$f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}} \text{ donde } x \in \langle a, b\rangle .$$

Está conclusión significa que existe una **RECTA TANGENTE** a la gráfica de la función $y = f(x)$ en $x \in \langle a,b \rangle$ que es **PARALELA** al segmento $\overline{AB}$.

Se sabe por la Geometría Analítica que dos rectas son paralelas, sí y sólo sí, sus pendientes son iguales.

Además por el cálculo diferencial sabemos que la **PENDIENTE DE UNA RECTA TANGENTE** a una curva, en un punto x perteneciente a dicha curva, es la **DERIVADA** de la ecuación de la curva en el punto x.

Según esto, tenemos que:

$$\underbrace{\text{PENDIENTE DEL SEGMENTO } AB}_{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}} = \underbrace{\text{PENDIENTE DE LA RECTA TANGENTE QUE PASA POR } P.}_{f'(x)}$$

Donde:

$f'(x) =$ "**LA TASA INSTANTANEA DE VARIACION DE f SOBRE x**"

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} =$ "**LA VARIACION MEDIA DE f SOBRE $[a,b]$**"

El **TEOREMA DEL VALOR MEDIO** se demuestra, también, aplicando el Teorema de Rolle a una función que se obtiene del paso (5) excluyendo la constante $-f(a)$.

En (5), se tenía que, $L(x) = f(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](x-a) - f(a)$

Si excluimos el término $-f(a)$, se obtiene: $f(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right](x-a) = h(x)$

Aplicando las hipótesis del Teorema de Rolle a la función $h(x)$, obtenemos la demostración del Teorema del Valor Medio.

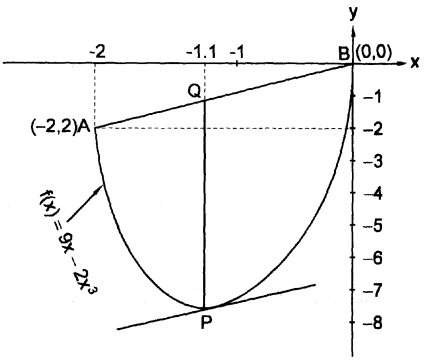
Ejemplo 1. Sea la función $f(x) = 9x - 2x^3$, $x \in [-2,0]$. ¿Existe algún $x \in \langle -2,0 \rangle$, tal que, cumple el Teorema del Valor Medio?

Solución:

1) $f(x)=9x-2x^3$ continua en $[-2,0]$.

2) $f(x)=9x-2x^3$ es derivable en $\langle -2,0\rangle$, entonces: $f'(x)=9-6x^2$, $\forall\, x\in\langle -2,0\rangle$.

3) Por el Teorema del Valor Medio debo resolver la ecuación: $f'(x)=\frac{f(0)-f(-2)}{0-(-2)}$ y ver si existe algún valor x, tal que, $x\in\langle -2,0\rangle$.



Veamos:

$$9-6x^2=\frac{[9(0)-2(0)^3]-[9(-2)-2(-2)^3]}{2}$$

$$9-6x^2=1$$

$$x^2=\frac{8}{6}$$

$$x^2=\frac{4}{3} \iff x=2=\frac{2}{\sqrt{3}} \vee x=-\frac{2}{\sqrt{3}}$$

como vemos: $-\frac{2}{\sqrt{3}} \approx -1.1\in\langle -2,0\rangle$

7. APLICACIONES DEL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

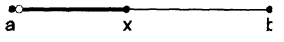
Corolario 14.1 Si una función $f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}$ posee derivada nula en todos los puntos $x\in\langle a,b\rangle$, entonces f es constante.

Demostración:

Si $f'(x)=0$, $\forall\, x\in\langle a,b\rangle$, debo probar que $f(x)=$ cosntante.

Veamos:

1. Vamos elegir cualquier $x\in\langle a,b]$ y en el intervalo $[a,x]$ aplicar el Teorema del valor medio: existe $c\in\langle a,x\rangle$ tal que $f(x)-f(a)=f'(c)(x-a)$.



2. Por hipótesis $f'(x)=0$ para todo $x\in\langle a,b\rangle$. Como $c\in\langle a,x\rangle\subset\langle a,b\rangle$, entonces $f'(c)=0$.

3. Sustituir en 1: $f(x)-f(a)=0 \Rightarrow f(x)=f(a)$, $\forall\, x \in \langle a,b]$

4. Por lo tanto, $f(x)=$ **constante**, sobre $\langle a,b\rangle$.

Corolario 14.2 Si $f,g:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ son continuas, derivables en $\langle a,b\rangle$ y $f'(x)=g'(x)$ para todo $x \in \langle a,b\rangle$ entonces existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $g(x)=f(x)+c$ para todo $x \in [a,b]$.

Demostración:

Aplicar el corolario anterior a la función diferencia $g-f$.

Así:

1. Como $g(x)-f(x)=(g-f)(x)$, $\forall\, x \in [a,b]$

2. Además $g'(x)=f'(x)$, $\forall\, x \in \langle a,b\rangle$

$g'(x)-f'(x)=0$

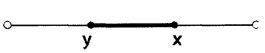
$(g-f)'(x)=0$, $\forall\, x \in \langle a,b\rangle$

Entonces $g-f=c$, $c=$ constante

$g=f+c$, $\forall\, x \in [a,b]$

Corolario 14.3 Sea $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en el intervalo abierto I. Si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $|f'(x)| \le k$ para todo $x \in I$ entonces, para cualquiera que sean $x,y \in I$ se tiene $|f(x)-f(y)| \le k|x-y|$.

Demostración:



1. En el intervalo abierto I elegir $x,y \in I$ con $y<x$. Luego aplicar el Teorema del valor medio en el intervalo cerrado $[y,x] \subset I$.

Así: f es continua en $[y,x]$ y derivable en $\langle a,b\rangle$.

Entonces existe $z \in \langle x,y\rangle$ tal que: $f(x)-f(y)=f'(z)(x-y)$.

2. Como $|f'(z)| \le k$ y $|f(x)-f(y)| = |f'(z)|\,|x-y|$

$\Rightarrow |f(x)-f(y)| \le k|x-y|$, pues $|f'(z)|=k$

8. FUNCIÓN LIPSCHITZIANA

Definición: Sea la función $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$. Diremos que la función f es ***LIPSCHITZIANA***, si existe una constante $c > 0$, tal que: $x, y \in A$ implica: $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$.

Ejemplo. Sea la función $f: [-A, A] \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(x) = x^2$, $A > 0$. Probar que f es una función Lipchitziana.

Demostración:

Para cualquier $x, y \in A$ tenemos:

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x + y||x - y| \leq 2A|x - y| = c|x - y| \quad , \quad c > 0$$

Como: $x \in [-A, A] \ \wedge \ y \in [-A, A]$

$$\underbrace{-A \leq x \leq A \ \wedge \ -A \leq y \leq A}$$

SUMAR: $-2A \leq x + y \leq 2A$

$$\Downarrow$$

$$|x + y| \leq 2A$$

donde: $2A = c$, $c > 0$

9. PROBLEMAS RESUELTOS SOBRE EL T.V.M.

En los ejercicios de 1 al 6, hallar los valores x que satisface el Teorema del valor medio.

(1) $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$, $x \in [1, 3]$.

Solución:

1. Como $f(x)$ es un polinomio, entonces es continua en $[1, 3]$ y derivable en $\langle 1, 3 \rangle$.

2. $f'(x) = 3x^2 - 10x - 3$

$f'(c) = 3c^2 - 10c - 3$

3. El T.V.M. $f'(c)=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}$

$$=\frac{(3)^3-5(3)^2-3(3)-[(1)^3-5(1)^2-3(1)]}{3-1}$$

$$3c^2-10c-3=\frac{-27-(-7)}{2}$$

$$3c^2-10c-3=-10 \iff 3c^2-10c+7=0$$

$$\iff (3c-7)(c-1)=0$$

$$\iff c=\frac{7}{3} \vee c=1$$

4. $c=\frac{7}{3}\in\langle 1,3\rangle$.

(2) $g(x)=\frac{x^2+6x+5}{x-6}$, $x\in[1,5]$

Solución:

1. $g(x)$ es continua en $[1,5]$.

$g(x)$ es derivable en $\langle 1,5\rangle$.

2. $g'(x)=\frac{(x-6)(2x+6)-(x^2+6x+5)(1)}{(x-6)^2}$

$$g'(x)=\frac{x^2-12x-41}{(x-6)^2}$$

3. De $g(x)=\frac{x^2+6x-5}{x-6}$

$g(5)=\frac{25+30+5}{5-6}=-60$

$g(1)=\frac{1+6+5}{1-6}=-\frac{12}{5}$

4. El T.V.M. es:

$$g'(c)=\frac{g(5)-g(1)}{5-1}$$

$$\frac{c^2-12c-41}{(c-6)^2}=\frac{-60-\left(-\frac{12}{3}\right)}{4}$$

$$\Rightarrow 77c^2-924x+2387=0$$

5. Al resolver, una de sus raíces es $c=3.7\in\langle 1,5\rangle$.

(3) $h(x)=9x-2x^3$, $x\in[-2,0]$

Solución:

1. $h(x)$ es continua en $\forall\, x\in[-2,0]$.

$h(x)$ es derivable en $\langle -2,0]$.

2. De:

$h(0)=9(0)-2(0)^3=0$

$h(x)=9-2x^3$

$h(-2)=9(-2)-2(-2)^3=-2$

$$\Rightarrow h'(x)=9-6x^2$$

$$\Rightarrow h'(x)=9-6c^2$$

3. El T.V.M. es:

$$h'(c)=\frac{h(0)-h(-2)}{0-(-2)}$$

$$9-6c^2=\frac{0-(-2)}{0-(-2)}$$

$$9-6c^2=1 \iff 6c^2=8 \iff c^2=\frac{4}{3}$$

$$\iff c=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

4. De estos valores: $c=-\frac{2}{\sqrt{3}}\in\langle -2,0\rangle$

4 Dada la función $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$, $x\in[-1,2]$; ¿existe $x_0\in\langle -1,2\rangle$, tal que verifique el Teorema del valor medio?

Solución:

1. La 1ra. hipótesis del T.V.M. es que $f(x)$ sea continua en $[-1,2]$.
2. Pero $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ es discontinua en $x=1\in\langle -1,2\rangle$; por tanto, no se podría seguir desarrollando los siguientes pasos.
3. Luego, $f(x)$ no cumple el T.V.M. y no existe $x_0\in\langle -1,2\rangle$.

5 $g(x)=x^3+3x^2+x+1$, $x\in[-4,5]$

Solución:

1. $g(x)$, por ser polinomio, es continua en $x\in[-4,5]$; además que es continua en $x\langle -4,5\rangle$.
2. $g(5)$ y $g(-4)$ se hallan fácilmente por el Teorema del residuo: ***DIVISIÓN SINTÉTICA***.

5	1	3	1	1
		5	40	205
	1	8	41	206

$g(5)$

−4	1	3	1	1
		−4	4	−20
	1	−1	5	−19

$g(-4)$

3. De $g(x)=x^3+3x^2+x+1$
$g'(x)=3x^2+6x+1$
$g'(c)=3c^2+6c+1$
4. El T.V.M. es:
$$g'(c)=\frac{g(5)-g(-4)}{5-(-4)}$$
$$3c^2+6c+1=\frac{206-(-19)}{9}$$
$$3c^2+6c+1=25 \iff 3c^2+6c-24=0$$
$$c^2+2c-8=0$$
$$(c+4)(c-2)=0$$
$$c=-4 \ \vee \ c=2$$
5. Sólo: $c=2\in\langle -4,5\rangle$.

6
$$f(x)=\begin{cases} x^3-x^2+x, & 0\le x\le 1 \\ \frac{x}{2-x}, & 1<x\le\frac{3}{2}\end{cases},\quad x\in\left[0,\tfrac{3}{2}\right]$$

Solución:

1. $f(x)$ es continua en $x=1$, porque:
$$1=f(1)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^-}f(x)$$
2. $$f'(x)=\begin{cases} 3x^2-2x+1, & 0\le x\le 1 \\ \frac{2}{(2-x)^2}, & 1<x\le\frac{3}{2}\end{cases}$$
$$f'_+(1)=\frac{2}{(2-x)^2}=2=f'_-(1)=3-2+1$$
$x>1$ $x<1$
Luego, $f(x)$ es derivable en $x=1$.
3. En los puntos $x\in\left[0,\frac{3}{2}\right]$, $f(x)$ es continua y derivable en $\left\langle 0,\frac{3}{2}\right\rangle$.
4. El T.V.M. es:
$$f'(c)=\frac{f(\frac{3}{2})-f(0)}{\frac{3}{2}-0}$$
$$f\left(\tfrac{3}{2}\right)=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{2-\frac{3}{2}}=3$$
$$f(0)=(0)^3-(0)^2+0=0$$

$$f'(c)=\frac{3-0}{\frac{3}{2}}$$

$$f'(c)=2$$

$$3c^2-2c+1=2 \quad \vee \quad \frac{2}{(2-c)^2}=2$$

$$3c^2-2c-1=0$$

$$(3c+1)(c-1)=0$$

$$(3c+1)(c-1)=0 \Rightarrow c=-\frac{1}{3},\ c=1 \qquad (2-c)^2=1 \Rightarrow c=3,\ c=1$$

5. $c=1\in\left\langle 0,\frac{3}{2}\right\rangle$

Problemas Propuestos: Grupo 1

En los ejercicios del 1 al 8, hallar el valor de x que cumpla el T.V.M.

1. $f(x)=1-x^2$, $x\in[0,2]$

Rpta.: 1

2. $f(x)=x^3-3x^2$, $x\in[1,4]$

Rpta.: $1+\sqrt{2}$

3. $f(x)=x^3$, $x\in[1,2]$

Rpta.: $\frac{1}{6}[\sqrt{39}-3]$

4. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $x\in[0,1]$

Rpta.: $\frac{1}{\sqrt{2}}$

5. $f(x)=\frac{2x+3}{3x-2}$, $x\in[1,4]$

6. $f(x)=x^{1/3}$, $x\in[-1,1]$

7. $f(x)=1-x^{2/3}$, $x\in[-1,1]$

8. $f(x)=cx^2+dx+e$, $x\in[a,b]$

Rpta.: $x_0=\frac{a+b}{2}$

9. Sea la función $f(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2}$ definida en $x\in[0,4]$ ¿es válida para ésta función el Teorema de Rolle en el segmento $[0,4]$?

10. ¿Verifica $f(x)=x-x^3$ el Teorema de Rolle para los intervalos $[-1,0]$ y $[0,1]$?

Rpta.: $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}\in\langle -1,0\rangle$

$x=\frac{1}{\sqrt{3}}\in\langle 0,1\rangle$

Verificar la validez del Teorema de Rolle para las siguientes funciones del 17-20.

11. $f(x)=x^3+4x^2-7x-10$, $x\in[-1,2]$

12. $f(x)=\operatorname{Ln}\operatorname{sen}x$, $x\in[\pi/6,5\pi/6]$

13. $f(x)=4^{\operatorname{sen}x}$, $x\in[0,\pi]$

14. $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$, $x\in[1,2]$

15. Comprobar que se verifica el Teorema de Rolle para la función:

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$

16. Sea $f(x)$ derivable en el intervalo $[a,b]$, $ab>0$. Demostrar que:

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=f(c)-cf'(c)$$

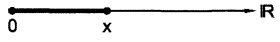
donde $a<c<b$

9.1. OTROS PROBLEMAS RESPECTO AL T. V. M.

Problema 1 Probar que $e^x > 1 + x$ para todo $x > 0$.

Prueba:

1. Partiremos de la función $f(x) = e^x$ que es continua y derivable en todo $x \in \mathbb{R}$.



2. Aplicar el teorema del valor medio en el intervalo cerrado $[0, x]$.

3. $f(x) = e^x$ es continua en $[0, x]$ y derivable en $\langle 0, x\rangle$, entonces por el T.V.M. existe un número $c \in \langle 0, x\rangle$ tal que:

$$f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0), \text{ donde } f'(x) = e^x$$

$$e^x - e^0 = e^c x$$

$$e^x - 1 = e^c x \quad \text{Como } c \in \langle 0, x\rangle \Rightarrow c > 0$$

$$\Rightarrow e^c > e^0$$

$$e^c > 1$$

si $e^c > 1$ y $x > 0 \Rightarrow xe^c > x$.

Por transitividad: $e^x - 1 > x \Rightarrow e^x > 1 + x$, $\forall\, x > 0$.

Problema 2 Probar que: $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \le |x - y|$

Prueba:

1. Aplicar el T.V.M. a la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ sobre el intervalo cerrado $[x, y]$, porque $f(x)$ cumple todas las hipótesis del caso.



2. Existe $c \in \langle x, y\rangle \iff x < c < y$ tal que:

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y) \quad , \quad \text{donde } \begin{cases} f(x) = \operatorname{sen} x \\ f(y) = \operatorname{sen} y \\ f'(x) = \cos x \\ f'(c) = \cos c \end{cases}$$

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = \cos c(x - y)$$

Aplicar $|.|$: $\quad |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| = |\cos c|\,|x - y|$

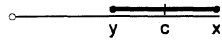
Pero: $|\cos c| \le 1 \Rightarrow |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \le |x - y|$

Problema 3 Probar: $ny^{n-1}(x-y) \le x^n - y^n \le nx^{n-1}(x-y)$

Si $0 < y \le x$, $n = 1,2,3,...$

Prueba:

1. Aplicar el T.V.M. a la función $f(x) = x^n$ sobre el intervalo cerrado $[y,x]$.



2. Existe $c \in \langle y,x \rangle \iff y < c < x$ tal que:

$f(x) - f(y) = f'(c)(x-y)$, donde $f'(x) = nx^{n-1}$

$x^n - y^n = nc^{n-1}(x-y)$ ..... (2*)

3. Pero: $0 < y \le x \Rightarrow 0 < y^{n-1} \le x^{n-1}$, $n = 1, 2, 3, ...$

Multiplicar por n: $ny^{n-1} \le nx^{n-1}$

Como: $0 < y \le x \Rightarrow x - y \ge 0 \Rightarrow ny^{n-1}(x-y) \le nx^{n-1}(x-y)$ ..... (3*)

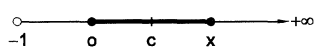
4. Ahora, operemos (2*) con (3*):

a) En (2*) hacemos $c = x$: $x^n - y^n = nx^{n-1}(x-y) \ge ny^{n-1}(x-y)$ ... (a*)

b) En (2*) hacemos $c = y$: $x^n - y^n = ny^{n-1}(x-y) \le nx^{n-1}(x-y)$ ... (b*)

5. (a*) y (b*) prueban el problema.

Problema 4 Si $\alpha > 1$, entonces $(1+x)^\alpha \ge 1 + \alpha x$ para todo $\alpha > -1$.



Demostración:

1. Si $x = 0$, se cumple $1 = 1$.

2. Aplicar el T.V.M. a la función $f(x) = (1+x)^\alpha$ en el intervalo cerrado $[0,x]$.

3. Existe $c \in \langle 0,x \rangle$ tal que:

$f(x) - f(0) = f'(c)(x-0)$, donde: $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$

$(1+x)^\alpha - 1 = \alpha(1+c)^{\alpha-1}x$ ..... (3*) $f'(c) = \alpha(1+c)^{\alpha-1}$

4. Si se prueba que: $\alpha(1+c)^{\alpha-1} > 1$, el problema estará probado.

Veamos:

Como: $\alpha > 1 \ \wedge \ [c > 0 \Rightarrow 1 + c > 1]$

$\alpha - 1 > 0 \qquad \Downarrow$

$(1+c)^{\alpha-1} > 1$

$\Downarrow$

$\alpha(1+c)^{\alpha-1} > \alpha$

Como: $\alpha > 1 \Rightarrow \alpha(1+c)^{\alpha-1} > 1$

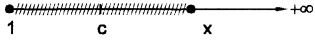
Como $x > 0$, por x: $\Rightarrow \alpha(1+c)^{\alpha-1} x > x$ ..... (4*)

5. Por (4*) y (3*): $(1+x)^{\alpha} - 1 > x \Rightarrow (1+x)^{\alpha} > 1 + x$

Problema 5 Probar que: $1 - \frac{1}{x} < \operatorname{Ln} x < x - 1$, para $x > 1$.

Prueba:

1.



Aplicar el T.V.M. de $f(x) = \operatorname{Ln} x$ sobre $[1, x]$:

Existe $c \in \langle 1, x \rangle$ tal que $f(x) - f(1) = f'(c)(x-1)$ ..... (1*)

Como $f(x) = \operatorname{Ln} x \begin{cases} f(1) = \operatorname{Ln} 1 = 0 \\ f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(c) = \frac{1}{c} \end{cases}$

2. Sustituir en (1*):

$\operatorname{Ln} x - 0 = \frac{1}{c}(x-1)$

(2*) $\operatorname{Ln} x = \frac{1}{c}(x-1)$

Como: $c > 1 \Rightarrow \frac{1}{c} < 1$

y $x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0$

$\Downarrow$

$\frac{1}{c}(x-1) < (x-1)$

$\Rightarrow \operatorname{Ln} x < x - 1$ ..... (2**)

3. Por otro lado, si $1 < c < x$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{c} > \frac{1}{x}$$

por $x-1>0$: $\Rightarrow \frac{1}{c}(x-1) > \frac{1}{x}(x-1)$

4. Volver a (2*): $\text{Ln}\, x > \frac{1}{x}(x-1)$

5. Por (4) y (2**): $\frac{x-1}{x} < \text{Ln}\, x < x-1$

Problema 6 Probar que $x > \text{Ln}(1+x)$, $x > 0$.

Prueba:



El dominio de $f(x) = \text{Ln}(1+x)$ es $x > -1$.

1. Aplicar el T.V.M. a la función $f(x) = \text{Ln}(1+x)$ sobre el intervalo $[0, x]$:

$\exists\, c \in \langle 0, x\rangle$ t.q. $f(x) - f(0) = f'(c)(x-0)$ ..... (1*)

2. Si $f(x) = \text{Ln}(1+x)$, entonces $\begin{cases} f(0) = \text{Ln}(1) = 0 \\ f'(x) = \frac{1}{1+x} \\ f'(c) = \frac{1}{1+c} \end{cases}$

3. Sustituir en (1*):

$$\text{Ln}(1+x) = \frac{1}{1+c}x$$

4. Luego:

$$\frac{1}{1+c}x < x$$

$$\Rightarrow \text{Ln}(1+x) < x$$

Como: $x > 0$

$\Rightarrow c > 0$

$\Rightarrow 1+c > 1$

$\Rightarrow \frac{1}{1+c} < 1$

$\Rightarrow \frac{x}{1+c} < x$, pues $x > 0$

Problema 7 Probar que: $\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x > 2x$, $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$

Prueba:

1. Aplicar el T.V.M. a la función $f(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x$ sobre $[0, x]$:

$\exists\, c \in \langle 0, x\rangle$ t.q. $f(x) - f(0) = f'(c)(x - 0)$ .....(1*)

2. Como: $f(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x \Rightarrow \begin{cases} f(0) = \operatorname{sen} 0 + \operatorname{tg} 0 = 0 \\ f'(x) = \cos x + \sec^2 x \\ f'(c) = \cos c + \sec^2 c \end{cases}$

3. Sustituir en (1*): $\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x = (\cos c + \sec^2 c)x$

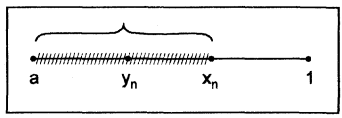
4. En $0 < x < \frac{\pi}{2}$ se cumple que: $\cos c + \sec^2 c > 2$

por $x > 0 \Rightarrow (\cos c + \sec^2 c)x > 2x$

5. Volver a 3: $\operatorname{sen} x + \operatorname{tg} x > 2x$

Corolario 14.4 Sea f continua en $[a,b]$ y derivable en $\langle a,b\rangle$ Si existe $\lim_{n\to a^+} f'(x) = L$ entonces existe $f'(a^+)$ y es $f'(a^+) = L$.

Demostración: Basta probar que $y_n \to a$ y $\lim_{n\to\infty} f'(y_n) = L$. Se trata de analizar el límite de la derivada a la derecha de "a".



Veamos:

1. Elegimos arbitrariamente una sucesión de números reales $x_n > a$ con $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.
2. Como f es continua en $[a,b]$, entonces existe el siguiente límite $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(a)}{x_n - a} = 1$.
3. Aplicar el T.V.M. a la función $f(x)$ sobre $[a,x_n]$: para cada $n \in \mathbb{N}$ existe y_n con $a < y_n < x_n$ tal que $\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n - a} = f'(y_n)$ ..... (3*)

4. Es evidente que $y_n \to a$ (porque $a < y_n < x_n$ y $x_n \to a$). Luego, en (3*) obtenemos: $L = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(a)}{x_n - a} = \lim_{n\to\infty} f'(y_n)$

Corolario 14.5 Sea $f : \langle a,b\rangle \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que es derivable, excepto, posiblemente en un punto $c \in \langle a,b\rangle$, donde f es continua. Si existe $\lim_{x\to c} f'(x) = L$, entonces existirá $f'(c)$ y además de eso $f'(c) = L$.

Teorema 15 (TEOREMA GENERALIZADO DEL VALOR MEDIO O DE CAUCHY)

HIPÓTESIS { Si dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $[a,b]$ y son derivables en $\langle a,b\rangle$, además $g'(x) = 0$, $\forall\, x \in \langle a,b\rangle$

TESIS { Entonces existe un número real $c \in \langle a,b\rangle$, tal que:

$\frac{f(b)-f'(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$, $g(b) \neq g(a)$, $g'(c) \neq 0$.

Prueba:

1. Construir una función que cumpla las hipótesis del Teorema de Rolle. Sea la función $h(x) = [f(b) - f(a)] \cdot [g(x) - g(a)] - [g(b) - g(a)] \cdot [f(x) - f(a)]$
2. $h(x)$ cumple: $h(a) = h(b) = 0$.
3. Como $f(x)$ y $g(x)$ son contínuas en $[a,b]$ y derivables en $\langle a,b\rangle$, también $h(x)$ es continua en $[a,b]$ y derivable en $\langle a,b\rangle$, entonces existe un número $c \in \langle a,b\rangle$ tal que $h'(c) = 0$.
4. Pero: $h'(x) = [f(b) - f(a)] \cdot g'(x) - [g(b) - g(a)] \cdot f'(x)$

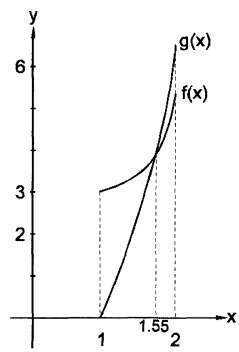
   $\Rightarrow \quad h'(c) = [f(b) - f(a)] \cdot g'(c) - [g(b) - g(a)] \cdot f'(c) = 0$

De donde: $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

Ejemplo: Comprobar si se cumplen las condiciones del teorema de Cauchy para las funciones $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = x^3 - 1$ en el intervalo $[1,2]$ y hallar c.

Solucion:

1. $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = x^3 - 1$ son polinomios y por tanto son continuas en $[1,2]$ y derivables en $\langle 1,2\rangle$.



2. Para hallar c, deberá resolverse la ecuación: $\frac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

3. De $f(x) = x^2 + 2$ $\qquad f(2) = 6$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad f(1) = 3$

$f'(x) = 2x \longrightarrow f'(c) = 2c$

4. De $g(x) = x^3 - 1 \begin{cases} \nearrow g(2) = 7 \\ \searrow g(1) = 0 \end{cases}$

$g'(x) = 3x^2 \longrightarrow g'(c) = 3c^2$

5. Reemplazar en 2: $\frac{6-3}{7-0} = \frac{2c}{3c^2}$

$\Rightarrow \quad \frac{3}{7} = \frac{2}{3c}$

$\Rightarrow \quad c = \frac{14}{9}$

$c \approx 1.55$

10. REGLA DE L'HOPITAL PARA EL CÁLCULO DE LÍMITES INDETERMINADOS DE LA FORMA $\frac{0}{0}$ Y $\frac{\infty}{\infty}$

Teorema 16 (REGLA DE L'HOPITAL)

Supongamos que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$.

Si existe $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces existe $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g'(x)}$ y $\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$

Ejemplo 1. Calcular: $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

Solución:

Como $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{0}{0}$, Aplicamos L'Hopital (derivar numerador y denominador)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \frac{0}{0} \qquad \text{(otra vez derivamos)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

La regla de L'Hopital se puede aplicar, también, para las siguientes formas indeterminadas:

I. Si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$, entonces $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

II. Si $\lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$, entonces $\lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

III. La indeterminación $0 \cdot \infty$ se debe convertir a una de las siguientes formas

a) $0 \cdot \infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$ ←

b) $0 \cdot \infty = \frac{\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty}$ ←

Se le aplica L'Hopital

La proposición es:

Si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$, entonces $\lim_{x \to a} f(x)\, g(x) = 0 \cdot \infty$

$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{0}{0}$$

$$\vee \quad = \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{\infty}{\infty}$$

IV. La indeterminada $\infty - \infty$ se debe convertir a la indeterminado $\frac{0}{0}$, para poder aplicar L'Hopital.

Proposición:

Si: $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \infty$, además, $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \infty - \infty$; entonces la indeterminación $\infty - \infty$ se evita haciendo la siguiente transformación:

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \left[1 - \frac{g(x)}{f(x)} \right]. \text{ Si } \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{f(x)} = 1, \text{ entonces se hace}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{1 - \frac{g(x)}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{0}{0}.$$

V. Los limites indeterminados 1^{∞}, 0^0, ∞^0 se evitan aplicando logaritmo natural y algunos de los casos anteriores.

NOTA: *Hay casos en que deben combinarse la regla de L'HOPITAL y los medios elementales.*

10.1. PROBLEMAS

1. $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\operatorname{sen}x}{x^3}=\frac{0}{0}\cdot$ Entonces:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\operatorname{sen}x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(x\cos x-\operatorname{sen}x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\operatorname{sen}x-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}x}{3x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(-\operatorname{sen}x)'}{(3x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{3}=-\frac{1}{3}$$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\pi}{x}}{\operatorname{cotg}\frac{\pi x}{2}}=\frac{\infty}{\infty}\cdot$ Entonces:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\pi}{x\operatorname{cotg}\frac{\pi x}{2}}=\frac{\pi}{0.\infty}=\frac{\pi}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}}=\frac{\pi}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\pi}{2}\sec^2\frac{\pi x}{2}}}=\frac{\pi}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}}}=\frac{\pi^2}{2}$$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{sen}x}{x-\operatorname{sen}x}=\frac{0}{0}\cdot$ Entonces: $=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-\cos x}{1-\cos x}=\frac{0}{0}$, luego:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sec x\operatorname{sectg}x+\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\operatorname{tg}x+\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x}=\frac{0}{0}\cdot \text{ derivar otra vez:}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\left[2\sec x\sec x\operatorname{tg}x+\sec^2 x\sec^2 x\right]+\cos x}{\cos x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\left[2\sec^2 x\operatorname{tg}x+\sec^4 x\right]+\cos x}{\cos x}=\frac{2[0+1]+1}{1}=3$$

4. $\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x=0.\infty$, entonces: $\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}x}=\frac{0}{0}$

Aplicar L'Hopital: $=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{-\frac{\pi}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{2}x}=\frac{-1}{-\frac{\pi}{2}}$

$$=\frac{2}{\pi}$$

5. $\lim_{x\to 0}(1-\cos x)\operatorname{cotg}x=0.\infty$

Luego: $\lim_{x\to 0}(1-\cos x)\operatorname{cotg}x=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\operatorname{tg}x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{+\operatorname{sen}x}{\sec^2 x}=\frac{+0}{1}=0$$

6. $\lim_{x\to 0} x^x = 0^\circ$, Si: $x > 0$

Hagamos: $y = x^x$

Tomar Ln $\quad \operatorname{Ln} y = x \cdot \operatorname{Ln} x$

Tomar límites $\quad \lim_{x\to 0} [\operatorname{Ln} y] = \lim_{x\to 0} [x \cdot \operatorname{Ln} x]$

Pero: $\quad \operatorname{Ln}\left[\lim_{x\to 0}\right] = 0 \cdot \infty$

Hagamos: $\quad = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{Ln} x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$

por L' Hopital: $\quad = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$

o sea: $\quad \operatorname{Ln}\left[\lim_{x\to 0}\right] = 0$

$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} y = 1$

$\lim_{x\to 0} x^x = 1$

7. $\lim_{x\to 1} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}} = 1^\infty$

Hagamos: $\quad y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$

Tomar Ln $\quad \operatorname{Ln} y = \left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right) \operatorname{Ln}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\right)$

Tomar: $\quad \lim_{x\to 1} \operatorname{Ln} y = \lim_{x\to 1} \left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right) \operatorname{Ln}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\right) = \infty \cdot 0$

Pero: $\quad \operatorname{Ln}\left[\lim_{x\to 1} y\right] = \lim_{x\to 1} \left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right) \operatorname{Ln}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{Ln}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}\right)}{\operatorname{cotg}\frac{\pi x}{2}}$

Por L' Hopital: $\quad = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{\pi}{4}\frac{\sec^2\frac{\pi x}{4}}{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}}}{-\frac{\pi}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{\pi x}{2}}$

$$\text{Ln}\left[\lim_{x\to 1} y\right] = \frac{\frac{\pi}{4}\frac{2}{1}}{-\frac{\pi}{2}\cdot 1} = -1$$

$$\text{Ln}\left[\lim_{x\to 1} y\right] = -1 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to 1} y = e^{-1}$$

8. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\text{tg}\,x} = \infty^{\circ}$

Hacer: $y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\text{tg}\,x} = \infty^{\circ}$

$$\text{Ln}\,y = \text{tg}\,x\,\text{Ln}\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}(\text{Ln}\,y) = \lim_{x\to 0}\text{tg}\,x\,(\text{Ln}\,1 - \text{Ln}\,x)$$

$$= -\lim_{x\to 0}\text{tg}\,x\,\text{Ln}\,x = 0\cdot\infty = -\lim_{x\to 0}\frac{\text{Ln}\,x}{\text{cotg}\,x}$$

Por L' Hopital $= -\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\text{cos}\,ec^2\,x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x\,\text{cos}\,ec^2\,x} = \frac{1}{0.\infty}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}^2 x}{x}$$

Por L' Hopital: $= \lim_{x\to 0}\frac{2\,\text{sen}\,x\,\cos x}{1}$

$$\lim_{x\to 0}(\text{Ln}\,y) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \text{Ln}\left(\lim_{x\to 0} y\right) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to 0} y = 1$$

9. $\lim_{x\to 0}(\text{cot}\,g\,x)^{\text{sen}\,x} = \infty^{\circ}$

Hacer: $y = (\text{cotg}\,x)^{\text{sen}\,x}$

$$\text{Ln}\,y = \text{sen}\,x\cdot\text{Ln}(\text{cotg}\,x)$$

$$\lim_{x\to 0}(\text{Ln}\,y) = \lim_{x\to 0}[\text{sen}\,x(\text{Ln}\,\text{cotg}\,x)] = 0\cdot\infty$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\text{Ln}\,\text{cotg}\,x}{\text{cosec}\,x}$$

Por L' Hopital: $= \lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{-\cos ec^2 x}{\cot g\, x}}{-\cos ec\, x \,.\, \cot g\, x}$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{\cos ec^2 x}{\cos ec\, x \cot g^2 x}$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{\cos ec\, x}{\cot g^2 x}$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{tg^2 x}{\operatorname{sen} x}$

Por L' Hopital $= \lim_{x\to 0} \dfrac{2\, tg\, x \sec^2 x}{\cos x}$

$$\lim_{x\to 0} (\operatorname{Ln} y) = \frac{2(0)(1)}{1}$$

$$\ln\left(\lim_{x\to 0} y\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{x\to 0} y = 1$$

10. $\lim_{x\to 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x}} = 1^{\infty}$

Hacer: $y = (1+x^2)^{\frac{1}{x}}$

$$\ln y = \tfrac{1}{x} \operatorname{Ln}(1+x^2)$$

$$\lim_{x\to 0} (\ln y) = \lim_{x\to 0} \tfrac{1}{x} \ln(1+x^2) = \infty \cdot 0$$

Pero: $= \lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$

Por L' Hopital $= \lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{2x}{1+x^2}}{1}$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{0}{1}$

$$\lim_{x\to 0} (\ln y) = 0$$

$$\ln\left(\lim_{x\to 0} y\right) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} y = 1$$

11. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \operatorname{sen} x} = \frac{0}{0}$

Por L' Hopital: $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x} = \frac{0}{0}$

otra vez por L'Hopital: $\lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2 \sec x \sec x . \operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2 \sec^2 x \operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0} 2\sec^2 x \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x}$$

$$= [2]\left[\lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x}{\cos x}\right]$$

$$= [2][1] = 2$$

12. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$

Por L' Hopital: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{e^x}$

" $= \lim_{x\to\infty} \frac{6x}{e^x}$

" $= \lim_{x\to\infty} \frac{6}{e^x}$

$= \frac{6}{\infty} = 0$

13. $\lim_{x\to\infty} \frac{x + \operatorname{Ln} x}{x \operatorname{Ln} x} = \frac{\infty}{\infty}$

Por L' Hopital: $\lim_{x\to\infty} \frac{x + \operatorname{Ln} x}{x \operatorname{Ln} x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\operatorname{Ln} x + x\frac{1}{x}}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\ln x + 1} = \frac{1 + 0}{\infty + 1} = \frac{1}{\infty} = 0$$

14. $\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right]=\infty-\infty$

Pero $\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\ln x}$

Por L' Hopital : $=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{\frac{1}{x}}$

$=\lim_{x\to 1}(-x)=-1$

15. $\lim_{y-1}\left[\frac{y}{y-1}-\frac{1}{\ln y}\right]=\infty-\infty$

Pero: $=\lim_{y\to 1}\frac{y\ln y-y+1}{(y-1)\ln y}=\frac{0}{0}$

Por L' Hopital: $=\lim_{y\to 1}\frac{\ln y+y\frac{1}{y}-1+0}{\ln y+(y-1)\frac{1}{y}}$

$=\lim_{y\to 1}\frac{\ln y+1-1}{\ln y+1-\frac{1}{y}}$

$=\lim_{y\to 1}\frac{\ln y}{\frac{y\ln y+y-1}{y}}$

$=\lim_{y\to 1}\frac{y\ln y}{y\ln y+y-1}=\frac{0}{0}$

Por L' Hopital: $=\lim_{y\to 1}\frac{\ln y+y\frac{1}{y}}{\ln y+y\frac{1}{y}+1-0}$

$=\lim_{y\to 1}\frac{\ln y+1}{\ln y+2}=\frac{1}{2}$

16. $\lim_{x\to 1}\left[\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right]=\infty-\infty$

Pero : $=\lim_{x\to 1}\frac{2-(x+1)}{(x^2-1)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{x^2-1}$

por L'Hopital: $=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{2x}=-\frac{1}{2}$

17. $\lim_{\varphi \to 0} \left[\frac{2}{\operatorname{sen}^2 \varphi} - \frac{1}{1-\cos\varphi} \right] = \infty - \infty$

Pero: $= \lim_{\varphi \to 0} \left[\frac{2}{1-\cos^2 \varphi} - \frac{1}{1-\cos\varphi} \right]$

$= \lim_{\varphi \to 0} \frac{2-(1+\cos\varphi)}{1-\cos^2\varphi}$

$= \lim_{\varphi \to 0} \frac{1-\cos\varphi}{1-\cos^2\varphi}$

$= \lim_{\varphi \to 0} \frac{1-\cos\varphi}{(1-\cos\varphi)(1+\cos\varphi)}$

$= \lim_{\varphi \to 0} \frac{1}{1+\cos\varphi} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

18. $\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2} \right] = \infty - \infty$

Pero: $= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}{x^2 \operatorname{sen}^2 x} = \frac{0}{0}$

Por L'Hopital $= \lim_{x \to 0} \frac{2x - 2\operatorname{sen} x \cos x}{2x \operatorname{sen}^2 x + 2x^2 \operatorname{sen} x \cos x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{2x - \operatorname{sen} 2x}{2x \operatorname{sen}^2 x + x^2 \operatorname{sen} 2x}$

Por L'Hopital $= \lim_{x \to 0} \frac{2 - 2\cos 2x}{2\left[\operatorname{sen}^2 x + 2x \operatorname{sen} x \cos x \right] + 2x \operatorname{sen} 2x + 2x^2 \cos 2x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{2 - 2\cos 2x}{2\operatorname{sen}^2 x + 2x \operatorname{sen} 2x + 2x \operatorname{sen} 2x + 2x^2 \cos 2x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{2 - 2\cos 2x}{2\operatorname{sen}^2 x + 4x \operatorname{sen} 2x + 2x^2 \cos 2x}$

Por L'Hopital $= \lim_{x \to 0} \frac{4 \operatorname{sen} 2x}{4\operatorname{sen} x \cos x + 4\operatorname{sen} 2x + 8x \cos 2x + 4x \cos 2x - 4x^2 \operatorname{sen} 2x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{4 \operatorname{sen} 2x}{6 \operatorname{sen} 2x + 12x \cos 2x - 4x^2 \operatorname{sen} 2x}$

Por L'Hopital $= \lim_{x \to 0} \frac{8 \cos 2x}{12 \cos 2x + 12 \cos 2x - 24x \operatorname{sen} 2x - 8x \operatorname{sen} 2x - 8x^2 \cos 2x}$

$= \frac{8}{12 + 12 - 0 - 0 - 0} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$

11. FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

Definición 1 Una función $f(x)$ es creciente sobre un intervalo I, cuando se cumple que: $\boxed{\text{Si } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \ ; \ \forall\, x_1, x_2 \in I}$

Definición 2 Una función $f(x)$ es ***DECRECIENTE*** sobre un intervalo I, cuando se cumple que: $\boxed{\text{Si } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \ ; \ \forall\, x_1, x_2 \in I}$

Teorema 17. Si $f'(x) > 0$, para todo x perteneciente a un intervalo abierto I, entonces $f(x)$ es ***CRECIENTE*** sobre I.

Teorema 18. Si $f'(x) < 0$, para todo x perteneciente a un intervalo abierto entonces $f(x)$ es ***DECRECIENTE*** sobre I.

Demostración del Teo. 17.

1) Consideremos dos puntos x_1 y x_2 perteneciente a I, tal que $\boxed{x_1 < x_2}$

2) Por el Teo. del V. Medio, existe algún $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$, tal que: $f'(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

3) Por hipótesis, tenemos que:

$$\underbrace{f'(x)}_{} > 0 \ ; \ \forall\, x \in I$$

$$\Rightarrow \ \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$

$$\Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \text{, pues } \underbrace{x_2 - x_1}_{x_2 > x_1} > 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{f(x_2) > f(x_1)}$$

4) Por (1) y (3) tenemos que:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \ , \ \forall\, x_1, x_2 \in I$

Por lo tanto: $f(x)$ es ***CRECIENTE*** sobre I.

Demostración del Teo. 18.

1) Consideremos dos puntos x_1 y x_2 perteneciente a I, tal que $\boxed{x_1 < x_2}$

2) Por el Teo. del V. Medio, existe algún $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$, tal que: $f'(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

3) Por hipótisis, tenemos que:

$$f'(x) \ < 0 \ , \ \forall\, x \in I$$

$$\Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$$

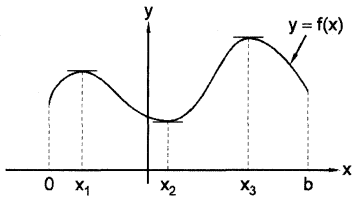
$$\Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) < 0 \text{, pues } x_2 - x_1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{f(x_2) < f(x_1)}$$

4) Por (1) y (3) tenemos que:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \ , \ \forall\, x_1, x_2 \in I$

Por lo tanto: $f(x)$ es ***DECRECIENTE*** sobre I.



1) $f(x)$ es CRECIENTE en $x \in \langle a, x_1 \rangle$
2) $f'(x_1) = 0$
3) $f(x)$ es DECRECIENTE en $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$
4) $f'(x_2) = 0$
5) $f(x)$ es CRECIENTE en $x \in \langle x_2, x_3 \rangle$
6) $f'(x_3) = 0$
7) $f(x)$ es DECRECIENTE EN $x \in \langle x_3, a \rangle$

Definición 3 Una función f se llama ***NO-DECRECIENTE*** sobre un conjunto I, si para todo $x_1, x_2 \in I$, se cumple que: si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

NOTA: $f(x_1) < f(x_2) \iff f(x_1) = f(x_2) \vee f(x_1) < f(x_2)$

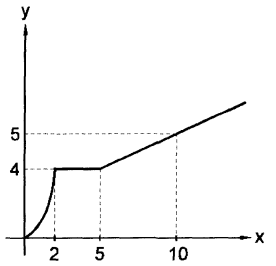
↑ Ésta igualdad indica que en algún tramo de I (subconjunto de I) la función $f(x)$ es constante (recta horizontal).

Definición 4 Una función f se llama ***NO-CRECIENTE*** sobre un conjunto I, si para todo $x_1, x_2 \in I$, se cumple que: si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

NOTA: $f(x_1) \geq f(x_2) \iff f(x_1) = f(x_2) \vee f(x_1) > f(x_2)$

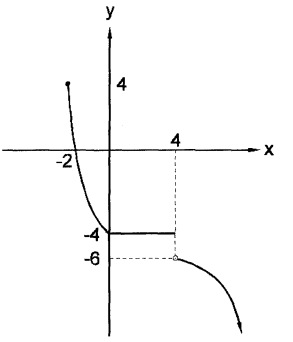
EJEMPLOS

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , 0 \leq x < 2 \\ 4 & , 2 \leq x < 5 \\ \frac{x}{5} + 3 & , x \geq 5 \end{cases}$$



$f(x)$ es ***NO DECRECIENTE***. En el intervalo $2 < x < 5$ se cumple: $f(x_1) = f(x_2)$; $\forall\, x_1, x_2 \in \langle 2,5 \rangle$.

$$g(x) = \begin{cases} (x-1)^2 - 5 & , -2 \leq x < 0 \\ -4 & , 0 \leq x \leq 4 \\ -6 - \frac{1}{4}(x-4)^2 & , x > 4 \end{cases}$$



$g(x)$ es ***NO CRECIENTE*** en el tramo $0 < x < 4$ se cumple: $g(x_1) = g(x_2)$, $\forall\, x_1, x_2 \in \langle 0,4 \rangle$

Definición 5 Una función f se llama ***MONOTONA*** sobre el conjunto I, si sobre I, f es creciente o decreciente o no-creciente o no-decreciente.

NOTA: Según las definiciones 1 y 2 deducimos que:
- Una función creciente es no-decreciente.
- Una función decreciente es no-creciente.

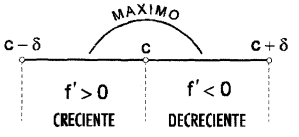
12. CRITERIOS PARA EXTREMOS RELATIVOS

Teorema 19. (CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA)

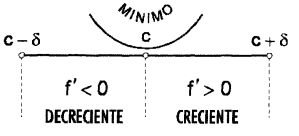
Sea c un punto crítico de $f(x)$, donde $f'(c)=0 \vee f'(c)$ no existe.

Si $v_\delta(c)=\langle c-\delta, c+\delta\rangle$ es una vecindad de c tal que f es continua en $v_\delta(c)$ y f es derivable en $v_\delta(c)$, excepto, tal vez, en c; entonces se cumple una de las siguientes proposiciones:

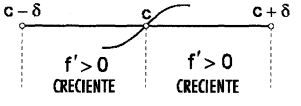
1. Si $[f'(x)>0\ ,\ \forall x\in\langle c-\delta,c\rangle \wedge f'(x)<0\ ,\ \forall x\in\langle c,c+\delta\rangle] \Rightarrow$ *f(c) es un MÁXIMO relativo de f.*

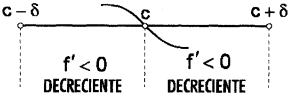


2. Si $[f'(x)<0\ ,\ \forall x\in\langle c-\delta,c\rangle \wedge f'(x)>0\ ,\ \forall x\in\langle c,c+\delta\rangle] \Rightarrow$ *f(c) es un MÍNIMO relativo de f.*



3. Si $\{[f'>0\ ,\ \forall x\in\langle c-\delta,c\rangle \wedge f'>0\ ,\ \forall x\in\langle c,c+\delta\rangle] \vee [f'<0\ ,\ \forall x\in\langle c-d,c\rangle \wedge f'<0\ ,\ \forall x\in\langle c,c+b\rangle]\} \Rightarrow$ *f(c) no es MÁXIMO ni MÍNIMO relativo de f.*





Ejemplo: Sea la función:

$$f(x)=\begin{cases} -3x^5+5x^3+54 \ , & x<2 \\ -2|x-4|+2 \ , & 2\le x\le 5 \\ (5-x)e^{5-x} \ , & x\ge 5 \end{cases}$$

Tenemos:

1. $\text{Dom}(f)=x\in\mathbb{R}$.

2. $f(x)$ es continua en $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

3. Definir el valor absoluto en f.

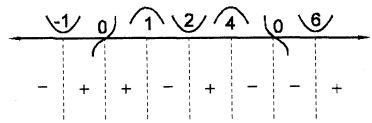
$$f(x)=\begin{cases} -3x^5+5x^3+54 \ , & x<2 \\ 2(x-4)+2 \ , & 2\le x<4 \\ -2(x-4)+2 \ , & 4\le x<5 \\ (5-x)e^{5-x} \ , & x\ge 5 \end{cases}$$

4. Derivar y factorizar:

$$f'(x)=\begin{cases} -15x^2(x-1)(x+1) \ , & x<2 \\ 2 \ , & 2\le x<4 \\ -2 \ , & 4\le x\le 5 \\ (x-6)e^{5-x} \ , & x\ge 5 \end{cases}$$

5. PUNTOS CRITICOS: $\{0, -1, 1, 2, 4, 5, 6\}$

6. Intervalos donde f crece y decrece.



7.

$f(-1)=52$ es mínimo relativo de f.

$f(0)=54$ no es máx. ni mínimo de $f(x)$

$f(1)=56$ es un máximo relativo de f.

$f(2)=-2$ es un mínimo relativo de f.

$f(4)=2$ es un máximo relativo de f.

$f(5)=0$ no es máx. ni mínimo relativo de f.

$f(6)=-\frac{1}{e}$ es un mínimo relativo de f.

Teorema 20. (CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA)

Sea f una función derivable en un entorno de c. Si $f'(c)=0 \wedge f''(c)$ existe, entonces:

1) Si $f''(c)<0 \Rightarrow f(c)$ es un **MÁXIMO** relativo de f.

2) Si $f''(c)>0 \Rightarrow f(c)$ es un **MÍNIMO** relativo de f.

Prueba de 1) Para afirmar que $f(c)$ es un máximo relativo de f, debo probar que:

$$f'>0\,,\ \forall\, x\in\langle c-\delta,c\rangle \ \wedge\ f'<0\,,\ \forall\, x\in\langle c,c+\delta\rangle$$

Veamos:

1. Por hipótisis se tiene: $f''(c) < 0$, además que f es derivable en $N(c) =$ entorno de c, entonces f es continua en $N(c)$.

2. Como $f''(c)$ existe, entonces: $f''(c) = \lim\limits_{\substack{x \to c^- \\ x<c}} \frac{f'(x)-f'(c)}{x-c} = \lim\limits_{\substack{x \to c^+ \\ x>c}} \frac{f'(x)-f'(c)}{x-c} < 0$

3. Existe una vecindad $V_\delta(c) = \langle c-\delta, c+\delta\rangle \subseteq N(c)$, tal que:

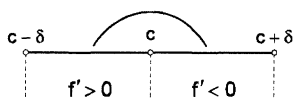
a) Si $x < c$, $x - c < 0$, $\forall\, x \in \langle c-\delta, c\rangle$, entonces $\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c} < 0$

pero $f'(c) = 0 \Rightarrow \frac{f'(x)}{x-c} < 0 \Rightarrow f'(x) > 0$

b) Si $x > c$, $x - c > 0$, $\forall\, x \in \langle c, c+\delta\rangle$, entonces $\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c} < 0$

pero $f'(c) = 0 \Rightarrow \frac{f'(x)}{x-c} < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$

4. Por 3 a) y b) hemos llegado a la conclusión siguiente:



$V'_\delta(c) = \langle c-\delta, c\rangle \cup \langle c, c+\delta\rangle$ = *vencidad reducida de c. Se llama así por que excluye al centro c.*

Por lo tanto $f(c)$ es un **MAXIMO RELATIVO** de f. (por 6.1).

Prueba de 2) Queda como ejercicio.

Ejemplo:

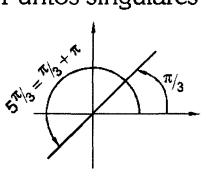
Sea $f(x) = 2\cos x - \cos 2x$, $x \in \mathbb{R}$. Obtenemos:

1. $f'(x) = -2\operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen} 2x$

$= -2\operatorname{sen} x + 2(2\operatorname{sen} x \cdot \cos x)$

$= -2\operatorname{sen} x + (1 - 2\cos x)$

2. Puntos singulares (críticos):



De $f'(x) = 0$:

$\operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = n\pi + (-1)^n 0°$

$x = n\pi$

$1 - 2\cos x = 0 \Rightarrow x = \arccos\left(\frac{1}{2}\right)$

$x = 2n\pi + \pi/3$

$\vee \quad x = 2n\pi + 5\pi/3$

3. Puntos criticos $\left\{ n\pi\ ,\ \frac{\pi}{3}+2n\pi\ ,\ \frac{5\pi}{3}+2n\pi \right\}$

4. La segunda derivada es: De $f'(x)=-2\operatorname{sen}x+2\operatorname{sen}2x$

$$\Rightarrow\quad f''(x)=-2\cos x+4\cos 2x$$
$$=2[4\cos^2 x-\cos x-2]$$

5. Se cumplen:

a) $f''(n\pi)>0 \Rightarrow f$ tiene mínimos relativos en $x=n\pi$

b) $f''(\pi/3+2n\pi)<0 \Rightarrow f$ tiene máx. relativos en $x=\frac{\pi}{3}+2n\pi$

c) $f''(5\pi/3+2n\pi)<0 \Rightarrow f$ tiene máx. relativos en $x=\frac{5\pi}{3}+2n\pi$

13. PROBLEMAS RELATIVOS A MÁXIMOS Y MÍNIMOS

13.1. FUNCIONES POLINÓMICAS

(1) Encuentre los valores máximos y mínimos relativos de $f(x)=3x^5-20x^3+16$

Solución:

1º El Dominio de $f(x)$, es $x\in\mathbb{R}$, por ser un polinomio.

2º **Son puntos críticos:**

Los puntos singulares, es decir, los $x\in \text{Dom}(f)$, tal que, $f'(x)=0$

Veamos: De $f(x)=3x^5-20\pi^3+16$

Obtenemos: $f'(x)=15x^4-60x^2$ ..... (α)

$$=15x^2(x^2-4)$$
$$f'(x)=15x^2(x-2)(x+2)$$

Luego: x es punto singular $\iff f'(x)=0$, con $x\in \text{Dom}(f)=\mathbb{R}$

$$\iff 15x^2(x-2)(x+2)=0$$
$$\iff x=0\ \vee\ x=2\ \vee\ x=-2$$

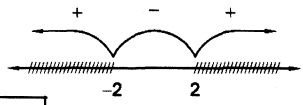
Total de puntos críticos $=\{0,2,-2\}$

3° Intervalos donde la funcion es crciente y decreciente.

a) $f(x)$ es **CRECIENTE:** $\iff f'(x) > 0$

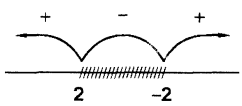
$\iff 15x^2(x-2)(x+2) > 0$

Simplificando los términos $15x^2$, por ser positivos $\iff (x-2)(x+2) > 0$



$\iff \boxed{x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle}$

b) $f(x)$ es **DECRECIENTE:** $\iff f'(x) < 0$

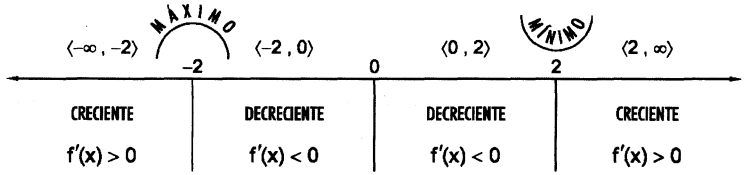


$\iff 15x^2(x-2)(x+2) < 0$

$\iff (x-2)(x+2) < 0$

$\iff \boxed{x \in \langle -2, 2\rangle}$

4° Dibujar en la recta real el dominio de f y los puntos críticos. Luego, analizar en qué intervalos $f(x)$ es creciente o decreciente.



Por lo tanto:

i) Existe máximo en $x = -2$, donde $\text{Máx}(f) = f(-2) = 80$

ii) Existe mínimo en $x = 2$, donde $\text{Mín}(f) = f(2) = -48$

5° Cálculo de los puntos de inflexión:

Puntos de Inflexión $= \{x \in \text{Dom}(f) / f''(x) = 0\}$

Veamos:

Del paso 2° (α) obtenemos: $f''(x) = 15(4x^3) - 60(2x)$

$= 60x^3 - 120x$

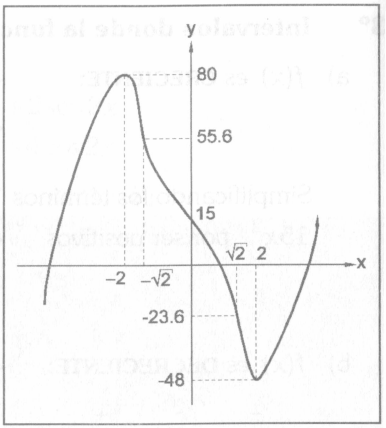
$= 60x(x^2 - 2)$

Haciendo $f''(x)=0$, tenemos: $60x(x^2-2)=0$

$$\boxed{x=0} \quad \vee \quad \boxed{x=\sqrt{2}} \quad \vee \quad \boxed{x=-\sqrt{2}}$$

Donde:

$$f(0)=16 \iff (0,16)$$
$$f(\sqrt{2})=16-28\sqrt{2}\approx 23.60$$
$$f(-\sqrt{2})=16+28\sqrt{2}\approx 55.60$$



(2) Hallar los máximos y mínimos de la función: $f(x)=x^4-4x^3+16x$.

Solución:

1° $\text{Dom}(f)=x\in\mathbb{R}$, por ser $f(x)$ un polinomio.

2° CÁCULO DE LOS PUNTOS CRÍTICOS:

i) Son puntos críticos los $x\in\text{Dom}(f)$, tal que, $f'(x)=0$.

Veamos:

De: $f(x)=x^4-4x^3+16x$, obtenemos:

$$f'(x)=4x^3-12x^2+16 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (0)$$
$$f'(x)=4(x-2)^2(x+1)$$

Haciendo $f'(x)=0$, tenemos:

$$4(x-2)^2(x+1)=0 \iff \boxed{x=2} \vee \boxed{x=-1}$$

FACTORIZANDO POR RUFFINI

2	4	−12	0	12
		8	−8	−16
2	4	−4	−8	0
		8	8	
−1	4	4	0	
		−4		
		4	0	

3° INTERVALOS DONDE LA FUNCIÓN ES CRECIENTE Y DECRECIENTE:

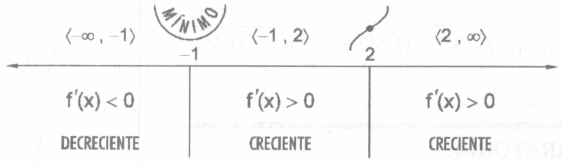
a) $f(x)$ es creciente $\iff \underbrace{f'(x)>0}$, simplificando $4(x-2)^2$ por ser positivo $\forall\, x\in\mathbb{R}$, $x\neq 2$.

$$4(x-2)^2(x+1)>0$$
$$x+1>0$$
$$x>-1 \iff x\in\langle -1,+8\rangle$$

b) $f(x)$ es decreciente $\Longleftrightarrow f'(x) < 0$

$4(x-2)^2(x+1) < 0$ ....., simplificar $4(x-2)^2$ por ser positivos $\forall\, x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 2$.

$x < -1 \Longleftrightarrow x \in \langle -\infty, -1\rangle$



Por lo tanto, existe un mínimo en $x = -1$, donde:

$$\text{Mín}(f) = f(-1) = (-1)^4 - 4(-1)^3 + 16(-1) = -11$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{(-1,-11)} \in \text{Gr}(f)$$

4º CÁLCULO DE LOS PUNTOS DE INFLEXIÓN:

Los puntos de inflexión son los $x \in \text{Dom}(f)$, tales que, $f''(x) = 0$.

Veamos: En el paso 2º (α) teníamos: $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 16$

Del cuál obtenemos: $f''(x) = 12x^2 - 24x$

$f''(x) = 12x(x-2)$

Haciendo: $f''(x) = 0 \Longleftrightarrow 12x(x-2) = 0 \Longleftrightarrow \boxed{x = 0} \vee \boxed{x = 2}$

i) Para $x = 0$, obtenemos $f(0) = (0)^4 - 4(0)^3 + 16(0) = 0 \Longleftrightarrow \boxed{(0,0)} \in \text{Gr}(f)$

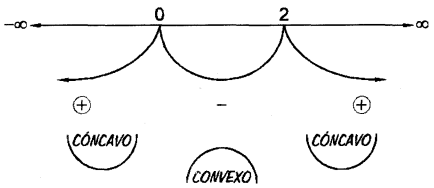
ii) Para $x = 2$, obtenemos $f(2) = (2)^4 - 4(2)^3 + 16(2) = 16 \Longleftrightarrow \boxed{(2,16)} \in \text{Gr}(f)$

5º INTERVALOS DE CONVEXIDAD Y CONCAVIDAD DE LA FUNCIÓN

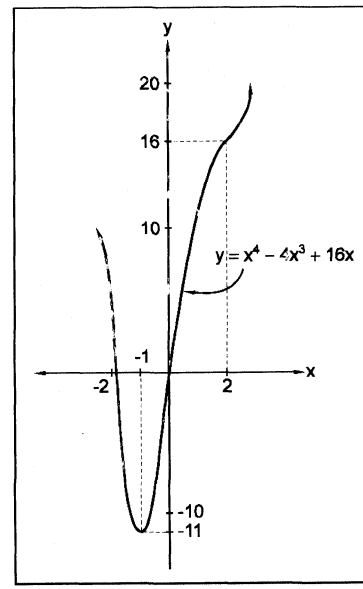
Visto la función de arriba hacia abajo:

i) f es cóncava, sí: $\underbrace{f''(x)}_{\text{`}} > 0$

$12x(x-2) > 0 \Longleftrightarrow \boxed{x \in \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle}$



ii) f es convexo, si: $f''(x) < 0 \iff \boxed{x \in \langle 0,2 \rangle}$



NOTA ACLARATORIA:

a) para el caso *i*, también se dice:
CONCAVO HACIA ABAJO ∪

b) Para el caso *ii*, también se dice:
CONCAVO HACIA ARRIBA ∩

3 Hallar los máximos relativos y los mínimos relativos de la función:
$f(x) = (x-4)^4 (x+3)^3$.

Solución:

1° $\text{Dom}(f) = x \in \mathbb{R}$, por ser $f(x)$ un polinomio.

2° CÁLCULO DE LOS PUNTOS CRÍTICOS:

Son puntos críticas los $x \in \text{Dom}(f)$, tal que, $f'(x) = 0$

Veamos: De $f(x) = (x-4)^4 (x+3)^3$

Obtenemos: $f'(x) = (x-4)^4 [(x+3)^3]' + (x+3)^3 [(x-4)^4]'$

$= (x-4)^4 [3(x+3)^2] + (x+3)^3 [4(x-4)^3]$

$= (x-4)^3 (x+3)^2 [3(x-4) + 4(x+3)]$

$= (x-4)^3 (x+3)^2 [7x]$

$$\boxed{f'(x) = 7x(x-4)^3 (x+3)^2}$$

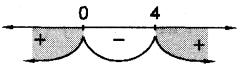
Haciendo $f'(x) = 0$, obtenemos: $7x(x-4)^3 (x+3)^2 = 0$

$$\iff \boxed{x = 0} \vee \boxed{x = 4} \vee \boxed{x = -3}$$

3º INTERVALOS DONDE LA FUNCIÓN ES CRECIENTE Y DECRECIENTE:

a) $f(x)$ es **CRECIENTE** $\iff \underbrace{f'(x) > 0}$

$$7x(x-4)^3(x+3)^2 > 0$$



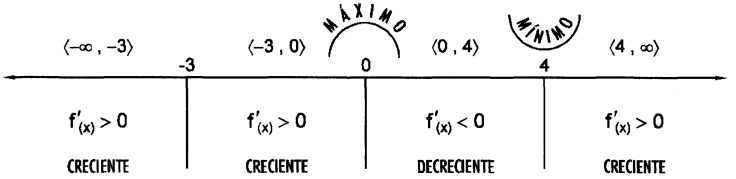
Podemos simplificar los términos: $7(x-4)^2(x+3)^2$ por ser positivos para $x \neq 4$ y $x \neq -3$

$$\iff x(x-4) > 0$$

$$\iff \boxed{x \in \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 4, \infty\rangle}$$

b) $f(x)$ es **DECRECIENTE** $\iff \underbrace{f'(x) < 0}$

$$7x(x-4)(x+3) < 0 \iff \boxed{x \in \langle 0, 4\rangle}$$



Por lo tanto:

i) Existe un máximo relativo en $x = 0$, donde:
$\text{Máx}(f) = f(0) = 6912 \iff (0, 6912) \in \text{Gr}(f)$

ii) Existe un mínimo relativo en $x = 4$, donde:
$\text{Mín}(f) = f(4) = 0 \iff (4, 0) \in \text{Gr}(f)$

4 Hallar los máximos y mínimos relativos de la función:
$f(x) = x^5 + x + 1$, $x \in [-1, 1]$.

Solución:

1º $\text{Dom}(f) = x \in [-1, 1]$

2º SON PUNTOS CRÍTICOS:

i) Los extremos: $x = -1 \ \wedge \ x = 1$

Donde:
$$\begin{cases} f(-1) = (-1)^5 + (-1) + 1 = -1 & \iff (-1, -1) \in \text{Gr}(f) \\ f(1) = (1)^5 + (1) + 1 = 3 & \iff (1, 3) \in \text{Gr}(f) \end{cases}$$

ii) Los valores que resultan de resolver la ecuación $f'(x) = 0$ ***(VALORES SINGULARES)***.

Veamos: $f'(x) = 5x^4 + 1$

Haciendo $f'(x) = 0$ tenemos: $5x^4 + 1 = 0$

$$\iff x^4 = -\frac{1}{5} \iff x^2 = \pm\sqrt{-\frac{1}{5}} \longleftarrow \text{IMAGINARIO.}$$

Luego: $\nexists\ x \in [-1,1] / f'(x) = 0$

3º INTERVALOS DONDE LA FUNCIÓN $f(x)$ ES CRECIENTE Y DECRECIENTE:

i) $f(x)$ es creciente $\iff f'(x) > 0$, con $x \in [-1,1]$

$\iff 5x^4 + 1 > 0$

$\iff x \in \mathbb{R} \ \wedge \ x \in [-1,1]$

$\iff \boxed{x \in [-1,1]}$

ii) $f(x)$ es decreciente $\iff f'(x) < 0$

$\iff 5x^4 + 1 < 0 \ \wedge \ x \in [-1,1]$

$\iff \phi \ \wedge \ x \in [-1,1]$

$\iff \boxed{\phi}$

Es decir $f(x)$ es sólo creciente sobre todo $x \in [-1,1]$.

4º CÁLCULO DE LOS PUNTOS DE INFLEXIÓN:

Los puntos de inflexión son los $x \in \text{Dom}(f) = [-1,1]$, tales que $f''(x) = 0$.

De: $f'(x) = 5x^4 + 1$, obtenemos $f''(x) = 20x^3$

Haciendo $f''(x) = 0$, tenemos: $20x^3 = 0 \iff x^3 = 0 \iff x = 0$

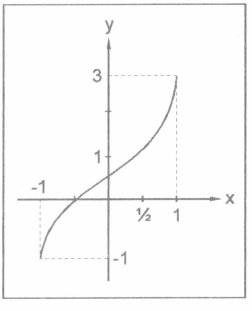
Si $x = 0 \Rightarrow f(0) = (0)^5 + (0) + 1 \iff (0,1) \longleftarrow$ **PUNTO DE INFLEXIÓN**

5º EL GRAFICO SERÁ:

x	$y = x^5 + x + 1$
–1	–1
–1/2	0.46
0	1
1/2	1.53
1	3

Máximo$(f) = 3 \Leftrightarrow (1,3) \in \text{Gr}(f)$

Mínimo$(f) = f(-1) = -1 \Leftrightarrow (-1,-1) \in \text{Gr}(f)$



(5) Hallar los máximos y mínimos relativos de la función:
$f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x$ sobre $[-½, ½]$.

Solución:

1º $\text{Dom}(f) = x \in [-½, ½]$

2º **SUS PUNTOS CRÍTICOS SON:**

i) Los extremos $x = -½ \ \wedge \ x = ½$

ii) Los valores singulares (ó sea los valores que resultan de resolver $f'(x) = 0$.

Veamos: De $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$

Tenemos: $f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x = 12x(x^2 - 2x + 1)$

$f'(x) = 12x(x-1)^2$

Haciendo $f'(x) = 0$, tenemos: $12x(x-1) = 0 \iff \begin{cases} \boxed{x = 0} \in [-½, ½] \\ x = 1 \notin [-½, ½] \end{cases}$

TOTAL DE PUNTOS CRÍTICOS $= \{-½, 0, ½\}$ **SOBRE** $[-½, ½]$.

3º **INTERVALOS DONDE LA FUNCIÓN ES CRECIENTE Y DECRECIENTE:**

i) $f(x)$ es creciente $\iff f'(x) > 0$

$\iff 12x(x-1)^2 > 0 \quad \wedge \quad x \in [-½, ½]$

$\iff x > 0 \quad \wedge \quad$ " ..... hemos simplificado $12(x-1)^2$ por ser positivo $\forall\, x \in \mathbb{R}$, con $x \neq 1$.

$\iff \underbrace{x \in \langle 0, +\infty \rangle \quad \wedge \quad x \in [-½, ½]}$

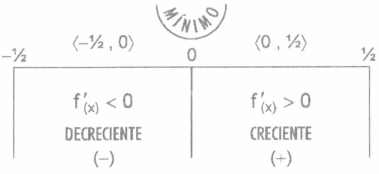
$\iff \boxed{x \in \langle 0, ½ \rangle}$

ii) $f(x)$ es **DECRECIENTE** $\iff f'(x) < 0 \quad \wedge \quad x \in [-½, ½]$

$\iff 12(x-1)^2 \quad \wedge \quad$ "

$\iff x < 0 \quad \wedge \quad x \in [-½, ½]$

$\Leftarrow \quad \boxed{x \in \langle -½, 0 \rangle}$



Por lo tanto, existe un mínimo relativo en $x = 0$, donde:

$$\text{Min}(f) = f(0) = 3(0)^4 - 8(0)^3 + 6(0)^2 = 0 \iff \boxed{(0,0)} \in \text{Gr}(f)$$

Además: a) $f(-½) = 3(-½)^4 - 8(-½)^3 + 6(-½)^2 = 43/16$ es un máximo relativo sobre el intervalo $\langle -½, 0\rangle$, por que se cumple que:

$$f(-½) = 43/16 \geq f(x),\ \forall\ x \in \langle -½, 0\rangle$$

b) $f(½) = 3(½)^4 - 8(½)^3 + 6(½)^2 = 11/12$ es un máximo relativo sobre el intervalo $\langle 0, ½\rangle$ por que se cumple que:

$$f(½) = 11/12 \geq f(x),\ \forall\ x \in \langle 0, ½\rangle$$

4º CÁLCULO DE LOS PUNTOS DE INFLEXIÓN:

Los puntos de inflexión son los $x \in \langle -½, ½\rangle$, tales que, $f''(x) = 0$.

De: $f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x$, se obtiene:

$$f''(x) = 36x^2 - 48x + 12$$

$$f''(x) = 12(3x^2 - 4x + 1)$$

$$f''(x) = 12(3x - 1)(x - 1)$$

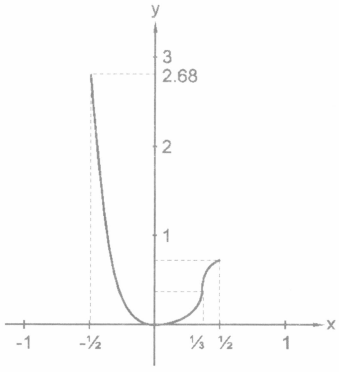
Haciendo: $f''(x) = 0$, tenemos:

$$12(3x - 1)(x - 1) = 0$$

$$\iff \boxed{x = 1/3} \in \langle -½, ½\rangle \ \vee\ x = 1 \notin \langle -½, ½\rangle$$

5º EL GRÁFICO:

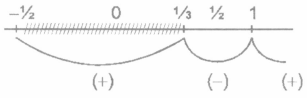
x	$y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$
$-1/2$	2.68
0	0
1/3	11 / 27
1/2	0.68



6º INTERVALOS DE CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD:

i) f es **CONCAVO**, si $f''(x) > 0$
(CONCAVO HACIA ABAJO)

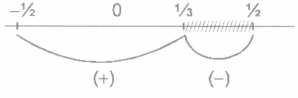
$12(3x-1)(x-1) > 0 \ \wedge \ x \in [-½, ½]$



$x \in [-1/2, 1/3\rangle$

ii) f es **CONVEXO**, si $f''(x) < 0$
(CONCAVO HACIA ARRIBA)

$12(3x-1)(x-1) \ \wedge \ x \in [-½, ½]$



$x \in \langle 1/3 \, , 1/2]$

6 Determinar condiciones sobre a, b, c, y d para que la función definida por: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un mínimo en $x = 0$ y un máximo en $x = 1$.

Solución:

1º $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

2º $f''(x) = 6ax + 2b$

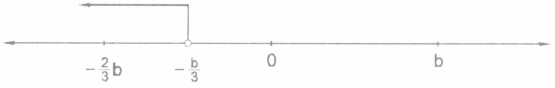
3º Para que $f(x)$ tenga un mínimo en $x = 0$, debe cumplirse que:

$$\underbrace{f'(0) = 0}_{3a(0) + 2b(0) + c = 0} \quad \wedge \quad \underbrace{f''(0) > 0}_{6a(0) + 2b > 0}$$

resolviendo ambas relaciones, obtenemos: $\boxed{c = 0}$ $\wedge$ $\boxed{b > 0}$

4º Para que $f(x)$ tenga un máximo en $x = 1$, debe cumplirse que:

$$\begin{array}{rcr} f'(1) = 0 & \wedge & f''(1) < 0 \\ 3a(1)^2 + 2b(1) + c = 0 & & 6a(1) + 2b < 0 \\ 3a + 2b + c = 0 & & 6a + 2b < 0 \\ \boxed{3a + 2b = 0} & \wedge & \boxed{a < \frac{-b}{3}} \\ 3a = -2b & \wedge & a < -\frac{b}{3} \\ a = -\frac{2}{3}b & \wedge & a < -\frac{b}{3} \end{array}$$



Luego: $\boxed{a = -\frac{2}{3}b}$, $b > 0$, c, d son cualquier número real.

(7) Determinar los coeficientes p y q del trinomio cuadrado $y = x^2 + px + q$, de modo que $y = 3$ sea un mínimo de este trinomio cuando $x = 1$.

Solución:

1º Se sabe que $y = f(x)$

Además si $f(x) = x^2 + px + q$

Se tiene que $f'(x) = 2x + p$, $f''(x) = 2$

2º Para que $f(x)$ tenga un mínimo en $x = 1$, debe cumplirse que:

$$\begin{array}{rcr} \underbrace{f'(1) = 0} & \wedge & f''(1) > 0 \\ 2(1) + p = 0 & & 2 > 0 \\ \boxed{p = -2} & & \end{array}$$

3º Además: $f(1) = 3 \iff 1 + (-2)(1) + q = 3 \iff \boxed{q = 4}$

13.2. FUNCIONES RACIONALES

(8) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$

Solución:

1º El dominio de $f(x)$ es: $\mathbb{R}-\{x=1\}$, donde $x=1$ es **ASINTOTA VERTICAL.**

2º PUNTOS CRÍTICOS:

Son puntos críticos los números $x \in \text{Dominio}(f)$, tal que $f'(x)=0$.

Veamos: $$f'(x)=\frac{(x-1)(2x-2)-(x^2-2x+2)(1)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^2-2x-2x+2-x^2+2x-2}{(x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}}$$

haciendo $f'(x)=0$, obtenemos: $x(x-2)=0 \iff \boxed{x=0} \quad \vee \quad \boxed{x=2}$

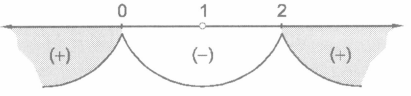
3º INTERVALOS DONDE LA FUNCIÓN ES CRECIENTE Y DECRECIENTE:

a) $f(x)$ es creciente $\iff f'(x)>0$

$$\iff \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}>0$$

simplifico $(x-1)^2$ por ser positivo $\forall\, x \in \mathbb{R}$, con $x \neq 1$.

$$\iff x(x-2)>0$$

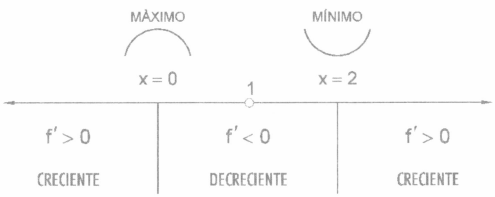


$$\iff x \in \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle$$

b) $f(x)$ es decreciente $\iff$ $f'(x) < 0$

$\iff$ $x \in \langle 0, 2\rangle$, con $x \neq 1$.

4º



Luego:

i) Existe máximo relativo en $x = 0$ sobre el intervalo $\langle -\infty, 1\rangle$

donde $\text{Máx}(f) = f(0) = \dfrac{0^2 - 2(0) + 2}{0 - 1}$

$= -2 \iff (0, -2) \in \text{Gr}(f)$

ii) Existe mínimo relativo en $x = 2$ sobre el intervalo $\langle 1, +\infty\rangle$ donde $\text{Mín}(f) = f(2) = 2 \iff (2, 2) \in \text{Gr}(f)$.

5º PUNTOS DE INFLEXIÓN:

Son puntos de inflexión, los $x \in \text{Dominio}(f)$, tal que $f''(x) = 0$.

Veamos:

De : $f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

Obtenemos : $f''(x) = \dfrac{2[-x^2 + 2x + 1]}{(x-1)^3}$

Haciendo : $f''(x) = 0 \iff -x^2 + 2x + 1 = 0$

$\iff x = 1 \pm \sqrt{2} \lessdot \begin{matrix} x = 2.4 \\ x = -0.4 \end{matrix}$

6º DIRECCIÓN DE CONCAVIDAD:

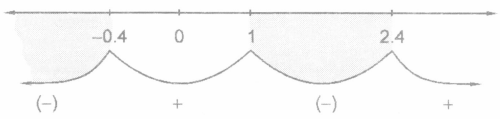
a) $y = f(x)$ $\underbrace{\text{es convexo}}_{\text{CONCAVO HACIA ARRIBA}}$ (visto de abajo hacia arriba)

$\iff f''(x) > 0$, simplificar "2" y $(x-1)^2$, $x \neq 1$ por ser positivos.

$\iff \dfrac{2(-x^2 + 2x + 1)}{(x-1)^3} > 0$

$\iff \dfrac{-x^2 + 2x - 1}{x - 1} > 0$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{x^2-2x-1}{x-1}<0 \quad , \quad \text{puntos críticos} = \{1+\sqrt{2}\,,1-\sqrt{2}\}$$



$1+\sqrt{2} \approx 2.4$

$1-\sqrt{2} \approx -0.4$

$$\Longleftrightarrow \quad x \in \langle -\infty, -0.4\rangle \cup \langle 1, 2.4\rangle$$

b) $y = f(x)$ es cóncavo (visto de abajo hacia arriba).

CONCAVO HACIA ABAJO

$$\Longleftrightarrow \quad f''(x) < 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad x \in \langle -0.4, 1\rangle \cup \langle 2.4, +\infty\rangle$$

7º ASÍNTOTAS OBLICUAS:

La recta $y = kx + b$ será **ASÍNTOTA OBLICUA** si existen los límites:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \qquad \wedge \qquad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = b$$

Veamos: Como $f(x) = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$

Tenemos:

a) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2-2x+2}{x-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x+2}{x^2-x}$$

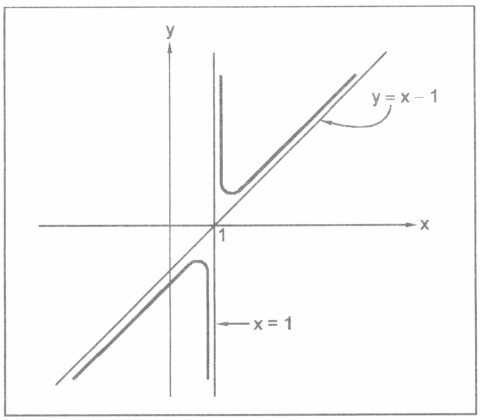
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} = 1 = k$$

b) $$\lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^2-2x+2}{x-1} - x\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x+2-x^2+x}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-x+2}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}} = -1 = b$$

Por lo tanto la asíntota oblicua será: $\boxed{y = x - 1}$



9 $f(x) = \dfrac{16}{x(4-x^2)}$

Solución:

1º El Dominio de $f(x)$ es: $\mathbb{R} - \{0, 2, -2\}$ con asíntotas verticales: $x = 0$, $x = 2$, $x = -2$.

2º **PUNTOS CRÍTICOS:** De $f(x)$, obtenemos:

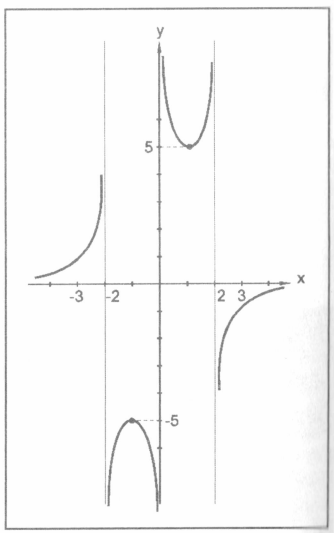
$$f'(x) = \frac{x(4-x^2)(0) - 16[x(-2x) + (4-x^2)(1)]}{x^2(4-x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{16(3x^2-4)}{x^2(4-x^2)^2}$$

Haciendo $f'(x) = 0$, obtenemos:

$$16(3x^2 - 4) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad 3x^2 - 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$



3º **INTERVALOS DONDE $f(x)$ ES CRECIENTE Y DECRECIENTE:**

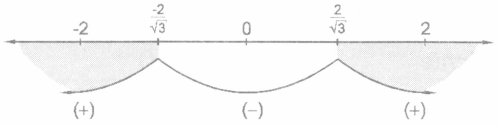
a) $f(x)$ es creciente $\Longleftrightarrow$ $f'(x) = 0$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{16(3x^2-4)}{x^2(4-x^2)^2} > 0$$

Simplificar "16", "x^2" y $(4-x^2)^2$, con $x \neq 0$, $x \neq \pm 2$, por ser positivos:

$$\iff 3x^2 - 4 > 0$$

$$\iff (\sqrt{3}x - 2)(\sqrt{3}x + 2) > 0$$

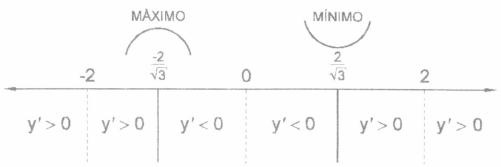


$$x \in \left\langle -\infty, -2/\sqrt{3} \right\rangle \cup \left\langle 2/\sqrt{3}, +\infty \right\rangle, \text{ con } x \neq \pm 2$$

b) $f(x)$ es decreciente $\iff f'(x) < 0$

$$\iff x \in \langle -2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3} \rangle, \text{ con } x \neq 0$$

Hagamos el diagrama:



a) Existe máximo en $x = -2/\sqrt{3}$, donde:

$$\text{Máx}(f) = f(-2/\sqrt{3}) = \frac{16}{-2/\sqrt{3}\,(4 - \frac{4}{3})} = -3\sqrt{3}$$

b) Existe mínimo en $x = 2/\sqrt{3}$, donde $\text{mín}(f) = f(2/\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$.

10 $y = \dfrac{4x}{4 + x^2}$

Solución:

1º Dominio: $x \in \mathbb{R}$.

2º PUNTOS CRITICOS: De $y = \dfrac{4x}{4 + x^2}$

obtenemos: $y' = \dfrac{(4 + x^2)(4) - 4x(2x)}{(4 + x^2)^2} = \dfrac{16 + 4x^2 - 8x^2}{(4 + x^2)^2}$

$$y' = \frac{-4x^2 + 16}{(4 + x^2)^2}$$

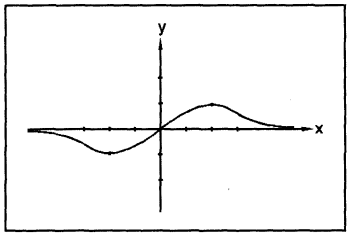
Haciendo $y' = 0$, obtenemos: $-4x^2 + 16 = 0$

$$\iff 4x^2 - 16 = 0$$

$$\iff x = \pm 2$$

3º INTERVALOS DONDE LA FUNCIÓN ES CRECIENTE Y DECRECIENTE:

a) $y = f(x)$ es creciente $\iff y' > 0$



$$\iff \frac{-4x^2 + 16}{(4 + x^2)^2} > 0 \text{ , simplificar } (4 + x^2)^2$$

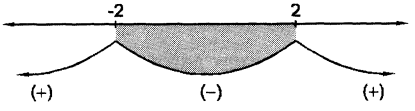
$$\iff -4x^2 + 16 > 0$$

$$\iff 4x^2 - 16 < 0$$

$$\iff 4(x^2 - 4) < 0$$

$$\iff (x^2 - 4) < 0$$

$$\iff (x - 2)(x + 2) < 0$$

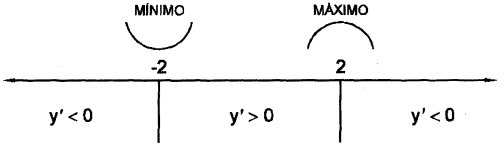


$$\iff x \langle -2, 2 \rangle$$

b) $y = f(x)$ es decreciente: $\iff y' < 0$

$$\iff x \in \langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle$$

Hacer el diagrama:



i) Existe mínimo en $x = -2$, donde $\text{mín}(f) = f(-2) = \frac{4(-2)}{4+4} = -1$

ii) Existe máximo en $x = 2$, donde $\text{máx}(f) = f(2) = \frac{4(2)}{4+4} = 1$

13.3. FUNCIONES IRRACIONALES

11 $G(x)=\frac{3}{8}(x-9)(x-1)^{5/3}$

Solución:

1° $\text{Dom}(G)=x\in\mathbb{R}$

2° PUNTOS CRÍTICOS: De $G(x)$, obtenemos:

$$\begin{aligned}G'(x)&=\tfrac{3}{8}\Big[(x-9)\tfrac{5}{3}(x-1)^{2/3}+(x+1)^{5/3}\Big]\\&=\tfrac{3}{8}(x-1)^{2/3}\Big[\tfrac{5}{3}(x-9)+(x-1)\Big]\\&=\tfrac{3}{8}(x-1)^{2/3}\Big[\tfrac{5x-45+3x-3}{3}\Big]\\&=\tfrac{3}{8}(x-1)^{2/3}\Big[\tfrac{8x-48}{3}\Big]\\&=\tfrac{3}{8}(x-1)^{2/3}\Big[\tfrac{8(x-6)}{3}\Big]\end{aligned}$$

$$\boxed{G'(x)=(x-1)^{2/3}(x-6)}$$

Haciendo $G'(x)=0 \iff (x-1)^{2/3}(x-6)=0 \iff \boxed{x=1} \vee \boxed{x=6}$

3° INTERVALOS DONDE $G(x)$ ES CRECIENTE Y DECRECIENTE:

a) $G(x)$ es creciente $\iff G'(x)>0$

$$\iff (x-1)^{2/3}(x-6)>0 \iff [(x-1)^{1/3}]^2(x-6)>0$$

simplificar $[(x-1)^{1/3}]^2$ por ser positiva $\forall\, x\in\mathbb{R}$, con $x\neq 1$

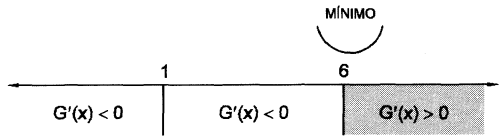
$$\iff x-6>0$$
$$\iff x>6$$
$$\iff x\in\langle 6,+\infty\rangle$$

b) $G(x)$ es decreciente $\iff G'(x)<0$

$$\iff x\in\langle -\infty,6\rangle \text{ , pues la solución es lo contrario de la anterior con } x\neq 1$$

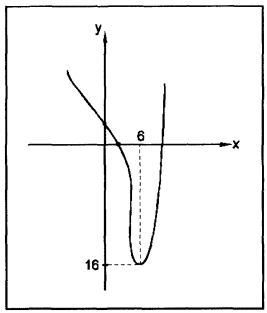
$$\iff x\in\langle -\infty,1\rangle\cup\langle 1,6\rangle$$

Hacer el siguiente diagrama para analizar:



Existe mínimo en $x=6$, donde $\text{Mín}(G)=\frac{3}{8}(6-9)(6-1)^{5/3}=-\frac{45}{8}\sqrt[3]{25}$.

4º PUNTOS DE INFLEXIÓN: De $G'(x)$ obtenemos:



$$G''(x)=(x-1)^{2/3}+(x-6)\tfrac{2}{3}(x-1)^{-1/3}$$
$$=(x-1)^{-1/3}\left[(x-1)+\tfrac{2}{3}(x-6)\right]$$
$$=(x-1)^{-1/3}\left[\frac{3x-3+2x-12}{3}\right]$$
$$=(x-1)^{-1/3}\left[\frac{5x-15}{3}\right]$$
$$G''(x)=\tfrac{5}{3}(x-1)^{-1/3}(x-5)=\tfrac{5}{3}\frac{x-5}{\sqrt[3]{x-1}}$$

SON PUNTOS DE INFLEXIÓN:

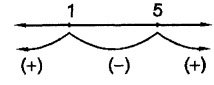
i) Los puntos donde $G''(x)=0 \iff \frac{5}{3}\frac{(x-5)}{\sqrt[3]{x-1}}=0 \Rightarrow x=5$

ii) Los puntos donde no existe $G''(x)$: Que se obtiene igualando a cero el denominador y resulta $x-1=0 \iff x=1$.

5º INTERVALOS DE CONVEXIDAD Y CONCAVIDAD: (Vista la función de arriba hacia abajo)

i) $G(x)$ es cóncavo $\iff G''(x)>0$

$$\frac{5}{3}\frac{(x-5)}{\sqrt[3]{x-1}}>0$$
$$\frac{x-5}{\sqrt[3]{x-1}}>0$$



$\iff x\in\langle-\infty,1\rangle\cup\langle 5,+\infty\rangle$

ii) $G(x)$ es convexo $\iff G''(x)<0$

$\iff x\in\langle 1,5\rangle$

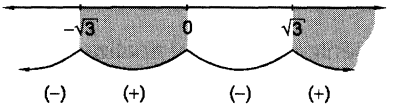
12 $g(x)=\sqrt{x^3-3x}$

Solución:

1° Dominio de $g(x)$: $x\in \text{Dom}(g) \iff x^3-3x\geq 0$

$$x(x^3-3)\geq 0$$

$$x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})\geq 0 \iff x\in[-\sqrt{3},0]\cup[\sqrt{3},+\infty\rangle$$



2° PUNTOS CRÍTICOS: De $g(x)$, obtenemos: $g'(x)=\dfrac{3x^2-3}{2\sqrt{x^3-3x}} \iff \boxed{g'(x)=\dfrac{3}{2}\dfrac{(x^2-1)}{\sqrt{x^3-3x}}}$

Son puntos críticos:

a) Los extremos de los intervalos cerrados del dominio, es decir: $x=-\sqrt{3}$, $x=0$, $x=\sqrt{3}$.

b) Los puntos que resultan de $g'(x)=0$:

$$\frac{3}{2}\frac{(x^2-1)}{\sqrt{x^3-3x}}=0 \Rightarrow x^2-1=0 \iff (x-1)(x+1)=0 \iff \boxed{x=1} \vee \boxed{x=-1}$$

$\boxed{x=1}$ ↑ NO PERTENECE AL DOMINIO

c) Los puntos donde no existe $g'(x)$, que proviene de igualar a cero el denominador: $x^3-3x=0 \iff x(x^2-3)=0 \iff x=0, x=\sqrt{3}, x=-\sqrt{3}$

Total de puntos críticos $=\{-\sqrt{3},-1,0,\sqrt{3}\}$.

3° INTERVALOS DONDE $g(x)$ ES CRECIENTE Y DECRECIENTE:

i) $g(x)$ es creciente $\iff g'(x)>0 \ \wedge \ x\in\langle-\sqrt{3},0\rangle\cup\langle\sqrt{3},+\infty\rangle$

$$\frac{3}{2}\frac{(x^2-1)}{\sqrt{x^3-3x}}>0$$

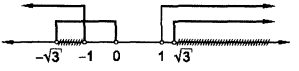
$$x^2>0$$

$$x^2>1$$

$$x>1 \ \vee \ x<-1$$

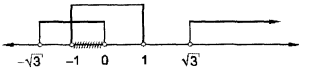
$$x\in\langle-\sqrt{3},-1\rangle\cup\langle\sqrt{3},+\infty\rangle$$

simplificar $\sqrt{x^3-3x}$, simplificar $\sqrt{x^3-3x}$, por ser positiva $\forall\, x\in\langle-\sqrt{3},0\rangle\cup\langle\sqrt{3},\infty\rangle$.

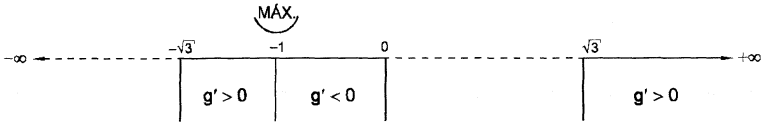


ii) $g(x)$ es decreciente:

$$\iff g'(x) < 0$$
$$\iff x^2 - 1 < 0$$
$$\iff x^2 < 1$$
$$\iff -1 < x < 1 \ \wedge \ x \in \langle -\sqrt{3}, 0 \rangle \cup \langle \sqrt{3}, \infty \rangle$$
$$\iff x \in \langle -1, 0 \rangle$$



Hacer el siguiente diagrama y analizar:



i) Existe máximo en $x = -1$, donde:

$$\text{máx}(g) = g(-1) = \sqrt{-1+3} = \sqrt{2} \iff (-1, \sqrt{2}) \in Gr(f)$$

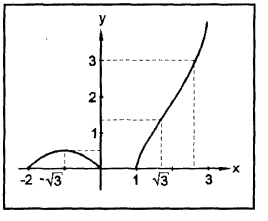
Es decir, $\sqrt{2}$ es un máximo sobre el intervalo $\langle -\sqrt{3}, 0 \rangle$

ii) Los otros extremos de la función, son:

a) $g(-\sqrt{3}) = \sqrt{-3\sqrt{3} + 3\sqrt{3}} = 0 \iff (-\sqrt{3}, 0) \in \text{Gr}(f)$

b) $g(0) = \sqrt{0} = 0 \iff (0,0) \in \text{Gr}(f)$

c) $g(\sqrt{3}) = \sqrt{3\sqrt{3} - 3\sqrt{3}} = 0 \iff (\sqrt{3}, 0) \in \text{Gr}(f)$



4º PUNTOS DE INFLEXIÓN: De $g'(x) = \frac{3}{2} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^3 - 3x}}$, obtenemos:

$$g''(x) = \frac{3}{2}\left[\frac{\sqrt{x^3 - 3x}\,(2x) - \frac{(3x^2 - 3)(x^2 - 1)}{2\sqrt{x^3 - 3x}}}{x^3 - 3x} \right] = \frac{3}{2}\left[\frac{2x\sqrt{x^3 - 3x} - \frac{3(x^2 - 1)^2}{2\sqrt{x^3 - 3x}}}{x^3 - 3x} \right]$$

$$g''(x) = \frac{3}{2}\left[\frac{4x(x^3 - 3x) - 3(x^2 - 1)^2}{2\sqrt{x^3 - 3x}\,(x^3 - 3x)} \right] = \frac{3}{2}\left[\frac{4x^4 - 12x^2 - 3x^4 + 6x^2 - 3}{2(x^3 - 3x)^{3/2}} \right] \iff$$

$$g''(x) = \frac{3}{2}\left[\frac{x^4 - 6x^2 - 3}{2(x^3 - 3x)^{3/2}} \right]$$

Haciendo $g''(x)=0 \iff x^4-6x^2-3=0 \iff x^2=\frac{6\pm\sqrt{48}}{2}=\frac{6\pm4\sqrt{3}}{2}=3\pm2\sqrt{3}$

$\iff x^2=3+2\sqrt{3} \Rightarrow x=\sqrt{3+2\sqrt{3}}$

Entonces, el punto de inflexión será: $\left(\sqrt{3+2\sqrt{3}}\,,\sqrt{6\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}}\right)\approx(2.5,2.96)$

13 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

1º DOMINIO: $x\in \text{Dom}(f) \iff x\in\mathbb{R}-\{x^2-1=0\}$

$\iff x\in\mathbb{R}-\{1,-1\}$, donde $x=\pm1$ son asíntotas verticales.

2º PUNTOS CRÍTICOS: De $f(x)$ obtenemos $f'(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}-x\frac{1}{3}(x^2-1)^{-2/3}(2x)}{\left(\sqrt[3]{x^2-1}\right)^2}$

$$f'(x)=\frac{\sqrt[3]{x^2-1}-\frac{2}{3}\frac{x^2}{\sqrt[3]{x^2-1}}}{\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)^2}=\frac{3(x^2-1)-2x^2}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)^2} \iff \boxed{f'(x)=\frac{x^2-3}{3(x^2-1)^{4/3}}}$$

Son puntos críticos:

i) Los puntos que resultan de $f'(x)=0 \iff x^2-3=0$ $\boxed{x=\sqrt{3}}$ $\vee$ $\boxed{x=-\sqrt{3}}$

3º INTERVALOS DONDE LA FUNCIÓN ES CRECIENTE Y DECRECIENTE:

a) $f(x)$ es creciente $\iff f'(x)>0$

$\iff \dfrac{x^2-3}{3(x^2-1)^{4/3}}>0$, Simplificar $[(x^2-1)^{1/3}]^4$ por ser positiva $\forall\, x\in\mathbb{R}$ con $x\pm1$.

$\iff x^2-3>0$

$\iff x^2>3$

$\iff x>\sqrt{3} \quad \vee \quad x<-\sqrt{3}$

$\iff x\in\langle-\infty,-\sqrt{3}\rangle\cup\langle\sqrt{3},+\infty\rangle$

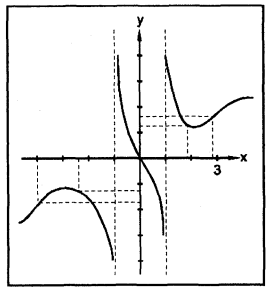
b) $f(x)$ es decreciente $\iff f'(x) > 0$

$\iff x^2 - 3 < 0$

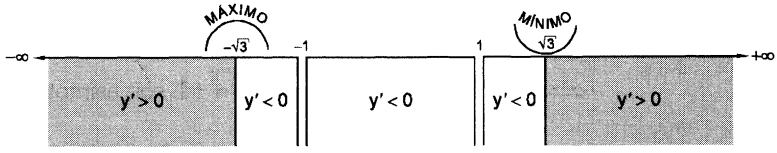
$\iff x^2 < 3$

$\iff -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$

$\iff x \in \langle -\sqrt{3}, \sqrt{3} \rangle$, con $x \neq \pm 1$



Ilustrando en un diagrama, tenemos: si $f'(x) = y'$



Entonces:

i) $f(x)$ tiene máximo en $x = -\sqrt{3}$, donde $\text{Máx}(f) = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3-1}} = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} \Leftrightarrow \left(-\sqrt{3}, \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\right) \in \text{Gr}(f)$

ii) $f(x)$ tiene mínimo en $x = \sqrt{3}$, donde $\text{Mín}(f) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\right)$

4º PUNTOS DE INFLEXION: De $f'(x) = \frac{x^2 - 3}{3(x^2-1)^{4/3}}$, obtenemos:

$$f''(x) = \frac{1}{3}\left[\frac{(x^2-1)^{4/3}(2x) - (x^2-3)\frac{4}{3}(x^2-1)^{1/3}(2x)}{(x^2-1)^{8/3}}\right] = \frac{1}{3}\frac{2x(x^2-1)^{1/3}}{(x^2-1)^{8/3}}\left[(x^2-1) - \frac{4}{3}(x^2-3)\right]$$

$$f''(x) = \frac{2x}{3}\frac{1}{(x^2-1)^{7/3}}\left[\frac{3(x^2-1) - 4(x^2-3)}{3}\right] = \frac{2x}{9}\frac{1}{(x^2-1)^{7/3}}[-x^2 + 9]$$

$$\Rightarrow \boxed{f''(x) = -\frac{2x}{9}\frac{1}{(x^2-1)^{7/3}}(x^2-9)}$$

Haciendo $f''(x) = 0 \iff x = 0 \vee x = 3 \vee x = -3$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$

$(0,0)$ $\left(3, \frac{3}{2}\right)$ $\left(-3, -\frac{3}{2}\right)$

14 $f(x)=2x+2-3\sqrt[3]{(x+1)^2}$

Solución:

1° DOMINIO: $x \in \text{Dom}(f) \iff x \in \mathbb{R}$

2° Derivar $f(x)$. De $f(x)$ obtenemos $f'(x)=2+0-3\frac{2}{3}(x+1)^{-1/3}$

$$f'(x)=2-\frac{2}{\sqrt[3]{x+1}}=\frac{2\sqrt[3]{x+1}-2}{\sqrt[3]{x+1}} \iff \boxed{f'(x)=\frac{2\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)}{\sqrt[3]{x+1}}}$$

Son puntos críticos:

i) Los puntos que resultan de $f'(x)=0 \iff \sqrt[3]{x+1}-1=0$

$\iff \sqrt[3]{x+1}=1$, elevado al cubo.

$\iff x+1=1 \iff \boxed{x=0}$

ii) Los puntos donde no existe $f'(x)$. Esto se logra "igualando a cero el denominador".

Así: $\sqrt[3]{x+1}=0$, elevando al cubo.

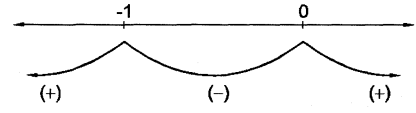
$x+1=0 \iff \boxed{x=-1}$

3° INTERVALOS DONDE LA FUNCIÓN ES CRECIENTE Y DECRECIENTE:

a) $f(x)$ es creciente $\iff f'(x)>0$

$\iff \frac{2\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)}{\sqrt[3]{x+1}}>0$, *simplificando el "2" y racionalizando tanto el numerador como el denominador, obtenemos. Tambien se puede resolver por regla de los signos.*

$\iff \frac{x}{x+1}>0$

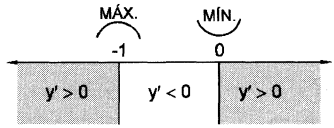


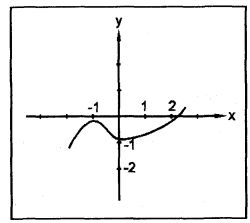
$\iff x \in \langle -\infty,-1\rangle \cup \langle 0,+\infty\rangle$

b) $f(x)$ es decreciente $\iff f'(x)<0$, el razonamiento es similar al anterior.

$\iff x \in \langle -1,0\rangle$

Ilustrado en un diágrama, tenemos, si $f'(x) = y'$





Entonces:

i) Existe máximo en $x = -1$, donde $\text{Máx}(f) = f(-1) = 2(-1) + 2 - 3\sqrt[3]{0}$

$= 0 \iff (-1,0) \in \text{Gr}(f)$

ii) Existe mínimo en $x = 0$, donde $\text{Mín}(f) = f(0) = 2(0) + 2 - 3\sqrt[3]{(0+1)^2}$

$= -1 \iff (0,-1) \in \text{Gr}(f)$

15 $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{(x+4)^2} = (x-2)^{2/3} + (x-4)^{2/3}$

Solución:

1º DOMINIO: $x \in \text{Dom}(f) \iff x \in \mathbb{R}$

2º PUNTOS CRÍTICOS: De $f(x)$ obtenemos:

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x-2)^{-1/3} + \frac{2}{3}(x-4)^{-1/3} = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} + \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x-4}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{2}{3}\left[\frac{\sqrt[3]{x-4} + \sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[3]{(x-2)(x-4)}}\right]$$

Son puntos críticos:

i) Los puntos $x \in \text{Dom}(f)$, tal que, $f'(x) = 0$

sólo se iguala a cero el numerador pues $\frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

$\sqrt[3]{x-4} + \sqrt[3]{x-2} = 0$

$\sqrt[3]{x-4} = -\sqrt[3]{x-2}$, elevando al cubo:

$x - 4 = -(x-2) \iff 2x = 6 \iff \boxed{x = 3}$

ii) Los puntos $x \in \text{Dom}(f)$, tal que, no existe $f'(x)$. Esto se consigue igualando a cero el denominador:

NOTA: Cuando el denominador es cero la División $\frac{a}{0}$ No existe pues: $\frac{a}{0} = \pm\infty$ y $\pm\infty$ no es número real.

$\sqrt[3]{(x-2)(x-4)} = 0$, elevando al cubo:

$(x-2)(x-4) = 0 \iff \boxed{x = 2} \vee \boxed{x = 4}$

3º Intervalos **DONDE** $f(x)$ es creciente y decreciente:

a) $f(x)$ es creciente $\iff f'(x) > 0$

$$\iff \frac{2}{3}\left[\frac{\sqrt[3]{x-4}+\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt[3]{(x-2)(x-4)}}\right] > 0$$

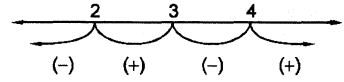
, racionalizando el numerador y denominador con $x \neq 2$, $x \neq 4$ y simplificando $\frac{2}{3}$ obtenemos:

$$\iff \frac{x-4+x-2}{(x-2)(x-4)} > 0$$

$$\iff \frac{2x-6}{(x-2)(x-4)} > 0$$

$$\iff \frac{2(x-3)}{(x-2)(x-4)} > 0 \quad , \text{ simplificar } 2$$

$$\iff \frac{x-3}{(x-2)(x-4)} > 0$$

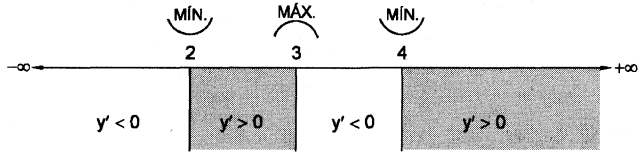


$$\iff x \in \langle 2,3\rangle \cup \langle 4,+\infty\rangle$$

b) $f(x)$ es decreciente $\iff f'(x) < 0$, con un análisis similar, se obtiene:

$$\iff x \in \langle -\infty,2\rangle \cup \langle 3,4\rangle$$

Ilustrando en el siguiente diagrama: si $f'(x) = y'$



Luego:

i) Existe mínimo en $x = 2$, donde:

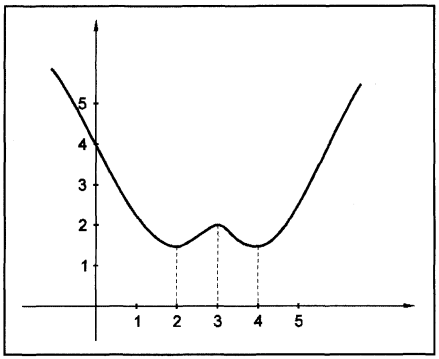
$$\text{Mín}(f) = f(2) = \sqrt[3]{0} + \sqrt[3]{(-2)^2} = \sqrt[3]{4} \iff (2, \sqrt[3]{4}) \in \text{Gr}(f)$$

ii) Existe máximo en $x = 3$, donde:

$$\text{Máx}\, f(3) = \sqrt[3]{(3-2)^2} + \sqrt[3]{(3-4)^2} = 2 \iff (3,2) \in \text{Gr}(f)$$

iii) Existe Mínimo en $x = 4$, donde:

$$\text{Mín}(f) = f(4) = \sqrt[3]{(4-2)^2} + \sqrt[3]{(4-4)^2} = \sqrt[3]{4} \iff (4, \sqrt[3]{4}) \in \text{Gr}(f)$$



13.4. FUNCIONES EXPONENCIALES

16 $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$

1° DOMINIO: $\text{Dom}(f) = x \in \mathbb{R}$

2° PUNTOS CRÍTICOS:

Son puntos críticos, los $x \in \text{Dom}(f)$, tal que $f'(x) = 0$

Veamos: De $f(x)$ obtenemos $f'(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x + e^x(2x - 2)$

$$= e^x(x^2 - 2x + 2 + 2x - 2)$$

$$\boxed{f'(x) = x^2 e^x}$$

Haciendo $f'(x) = 0$, tenemos: $x^2 e^x = 0$, $e^x \neq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \quad x^2 = 0 \iff x = 0$$

3° INTERVALOS DONDE LA FUNCIÓN CRECE Y DECRECE:

a) $f(x)$ es creciente $\iff$ $f'(x) > 0$

$\iff$ $\underbrace{x^2 e^x > 0}$

ésta proposición es verdadera $\forall\, x \in \mathbb{R}$, con $x \neq 0$

luego $f(x)$ es CRECIENTE $\forall\, x \in \mathbb{R}$ excepto para $x = 0$.

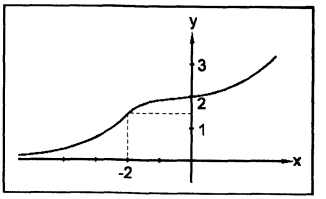
b) $f(x)$ es decreciente $\iff$ $f'(x) < 0$

$\iff$ $\underbrace{x^2 e^x < 0}$

ésta proposición es falso $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Luego,

$f(x)$ NO ES DECRECIENTE en ningún intervalo.

En consecuencia, $f(x)$ no tiene máximo ni mínimo.



4° PUNTOS DE INFLEXIÓN:

De $f'(x)$ obtenemos: $f''(x) = x^2e^x + e^x(2x)$

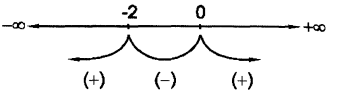
$$\boxed{f''(x) = xe^x(x+2)}$$

a) $f(x)$ **ES CÓNCAVO** hacía arriba $\iff f''(x) > 0$

$\iff xe^x(x+2) > 0$

Simplificar e^x por ser positivo.

$\iff x(x+2) > 0$



$\iff x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 0, +\infty\rangle$

b) $f(x)$ **ES CÓNCAVO** hacia abajo $\iff f''(x) < 0$

$\iff x \in \langle -2, 0\rangle$

Por lo tanto, son puntos de inflexión: *i)* $(-2, f(-2)) = (-2, 10e^{-2}) \approx (-2, 1.35)$

ii) $(0, f(0)) = (0, 2)$

17 $g(x) = x^2e^{-x}$

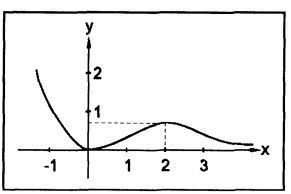
1° DOMINIO: $\text{Dom}(g) = x \in \langle -\infty, +\infty\rangle$

2° PUNTOS CRÍTICOS:

De $g(x)$, obtenemos: $g'(x) = x^2[e^x(-1)] + e^{-x}[2x]$

$$\boxed{g'(x) = xe^x(-x+2)}$$

Son puntos críticos, los $x \in \text{Dom}(g)$, tal que $g'(x) = 0$



$\iff xe^x(-x+2) = 0$, $e^{-x} > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$

$\iff x(-x+2) = 0$

$\iff \boxed{x = 0} \ \vee \ \boxed{x = 2}$

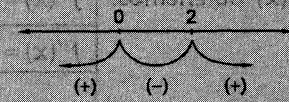
3° INTERVALOS DONDE LA FUNCIÓN CRECE Y DECRECE:

a) $g(x)$ es creciente $\iff g'(x) > 0$

$\iff xe^{-x}(-x+2) > 0 \ , \ e^{-x} > 0 \ , \ \forall \ x \in \mathbb{R}$

$\iff x(x-2) < 0$

$\iff x \in \langle 0,2 \rangle$

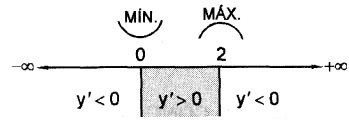


b) $g(x)$ es decreciente $\iff g'(x) < 0$

$\iff xe^{x}(-x+2) < 0$, la solución de ésta desigualdad es similar a la anterior.

$\iff x \in \langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle$

Visto en un diagrama, tendremos: si $y = g'(x)$



Por tanto:

i) **EXISTE** mínimo en $x = 0$, $\text{Mín}(g) = g(0)$

$= 0^2 e^0 = 0 \iff (0,0)$

ii) **EXISTE** máximo en $x = 2$, $\text{Máx}(g) = g(2)$

$= 2^2 e^{-2} \iff (2, 4e^{-2}) \approx (2, 0.54)$

18 Hallar los puntos de inflexión de la función $f(x) = \left(a + \frac{x^2}{a}\right) e^{-\frac{x}{a}}$.

Solución:

De $f(x)$ obtenemos: $f'(x) = \left(a + \frac{x^2}{a}\right)\left[e^{-\frac{x}{a}} \left(-\frac{1}{a}\right) \right] + e^{-\frac{x}{a}} \left[0 + \frac{1}{a} \cdot 2x \right]$

$$= -\frac{1}{a} e^{-\frac{x}{a}} \left[a + \frac{x^2}{a} - 2x \right]$$

$$= -\frac{1}{a} e^{-\frac{x}{a}} \left[\frac{a^2 + x^2 - 2ax}{a} \right]$$

$$f'(x) = -\frac{1}{a^2} (x-a)^2 e^{-\frac{x}{a}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{a^2} \left[(x-a)^2 e^{-\frac{x}{a}} \left(-\frac{1}{a}\right) + e^{-\frac{x}{a}} \cdot 2(x-a) \right]$$

$$= -\frac{1}{a^2} (x-a) e^{-\frac{x}{a}} \left[-\frac{1}{a}(x-a) + 2 \right]$$

$$= -\frac{1}{a^2} (x-a) e^{-\frac{x}{a}} \left[\frac{-x + a + 2a}{a} \right]$$

$$f'' = -\frac{1}{a^3} (x-a)(-x+3a) e^{-\frac{x}{a}}$$

Haciendo: $f''(x)=0 \iff x-a=0 \vee -x+3a=0$

$x=a \vee x=3a$

Si: $x=a \Rightarrow f(a)=\left(a+\frac{a^2}{a}\right)e^{-\frac{a}{a}}=2ae^{-1} \iff (a, 2ae^{-1}) \in Gr(f)$

Si: $f(a)=\left(a+\frac{9a^2}{a}\right)e^{-\frac{3a}{a}}=10ae^{-3} \iff (3a, 10ae^{-3}) \in Gr(f)$

19 La **VARIABLE ALEATORIA X**, tiene distribución **NORMAL** (ó **GAUSSIANA**) si su función de densidad es:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

donde los parámetros μ y σ deben cumplir que:

$$-\infty<\mu<+\infty$$

$$\sigma>0$$

$$\text{Dom}(f)=x\in\langle -\infty,+\infty\rangle$$

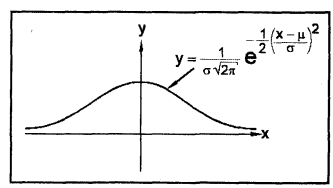
PUNTOS CRÍTICOS:

Son puntos críticos los $x \in \text{Dom}(f)$, tales que, $f'(x)=0$, $f'(x)=\frac{df}{dx}$.

Veamos: De: $f(x)$ obtenemos:

$$f'(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\left[-\frac{1}{2}\cdot 2\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\cdot\frac{1}{\sigma}\right]$$

$$f'(x)=-\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}(x-\mu)\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$



Haciendo: $f'(x)=0 \Rightarrow x-\mu=0 \iff \boxed{x=\mu}$

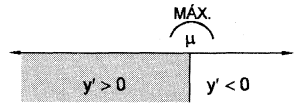
INTERVALOS DONDE LA FUNCIÓN ES CRECIENTE Y DECRECIENTE:

a) $f(x)$ es creciente $\iff f'(x)>0$

$$\iff -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}(x-\mu)\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}>0$$

$$\iff -(x-\mu)>0 \iff x-\mu<0 \iff x<\mu \iff x\in\langle -\infty,\mu\rangle$$

b) $f(x)$ es decreciente $\iff f'(x)<0 \iff x\in\langle \mu,+\infty\rangle$



Luego, existe máximo en $x = \mu$, donde:

$$\text{Máx}\,(f) = f(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{0} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \iff \left(\mu, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$$

PUNTOS DE INFLEXIÓN: De $f'(x)$ obtenemos:

$$f''(x) = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\left[(x-\mu)\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\left(-\frac{1}{2}\cdot 2\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\left(\frac{1}{\sigma}\right) + e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\right]\right.$$

$$f''(x) = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\left[-\frac{1}{\sigma^2}(x-\mu)^2 + 1\right]$$

Haciendo: $f''(x) = 0$

$$-\frac{1}{\sigma^2}(x-\mu)^2 + 1 = 0 \iff (x-\mu)^2 = \sigma^2 \iff x - \mu = \pm\sigma \begin{cases} x = \mu + \sigma \\ x = \mu - \sigma \end{cases}$$

Los puntos de inflexión serán: $\left(\mu+\sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-1/2}\right)$ y $\left(\mu-\sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-1/2}\right)$

13.5. FUNCIONES LOGARÍTMICAS

20 $f(x) = x - \text{Ln}(1-x)$

1° DOMINIO: $x \in \text{Dom}(x) \iff 1 - x > 0 \iff 1 > x \iff x < 1 \iff \boxed{x \in \langle -\infty, 1\rangle}$

ASINTOTA VERTICAL: $x = 1$

2° PUNTOS CRÍTICOS:

De $f(x)$ obtenemos: $f'(x) = 1 - \frac{-1}{1-x}$

$$f'(x) = \frac{1-x+1}{1-x} \iff f'(x) = \frac{2-x}{1-x}$$

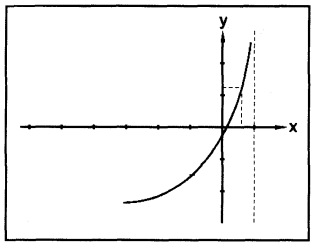
Haciendo: $f'(x) = 0 \iff \frac{2-x}{1-x} = 0 \iff 2 - x = 0 \iff x = 2 \notin \text{Dom}(f)$

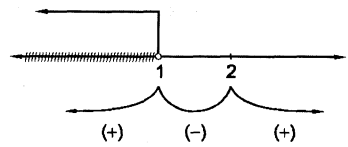
3° INTERVALOS DONDE LA FUNCIÓN ES CRECIENTE Y DECRECIENTE

a) $f(x)$ es **CRECIENTE** $\iff f'(x) > 0 \;\wedge\; x \in \text{Dom}(f)$

$$\iff \frac{2-x}{1-x} > 0 \;\wedge$$

$$\iff \frac{x-2}{x-1} > 0 \;\wedge\; x \in \langle -\infty, 1\rangle$$





$\iff \quad x \in \langle -\infty, 1 \rangle$

b) $f(x)$ es decreciente $\iff f'(x) < 0 \ \wedge \ x \in \langle -\infty, 1 \rangle$

$\iff x \in \langle 1, 2 \rangle \ \wedge \ x \in \langle -\infty, 1 \rangle$

$\iff \phi$

Esto quiere decir que la función es sólo creciente en $x \in \langle -1, +\infty \rangle$.

21 $f(x) = (x+1)\,\mathrm{Ln}^2(x+1)$

1° DOMINIO: $x \in \mathrm{Dom}(f) \iff x+1 > 0 \iff x > -1 \iff \boxed{x \in \langle -1, +\infty \rangle}$

ASÍNTOTA VERTICAL: $x = -1$

2° PUNTOS CRÍTICOS:

De $f(x)$ obtenemos: $f'(x) = (x+1)\left[(2\,\mathrm{Ln}\,(x+1))\left(\frac{1}{x+1}\right) \right] + L^2n\,(x+1)$

$= 2\mathrm{Ln}(x+1) + L^2n(x+1)$

$$\boxed{f'(x) = \left[2 + \mathrm{Ln}(x+1) \right] \mathrm{Ln}\,(x+1)}$$

Son puntos críticos los $x \in \mathrm{Dom}(f)$, tales que $f'(x) = 0$

$\iff [2 + \mathrm{Ln}(x+1)]\,\mathrm{Ln}(x+1) = 0$

$2 + \mathrm{Ln}(x+1) = 0 \quad \vee \quad \mathrm{Ln}(x+1) = 0$

$e \approx 2.7182 \qquad \mathrm{Ln}(x+1) = -2 \qquad x+1 = 1$

$e^2 \approx 7.388 \qquad x+1 = e^{-2}$

$\frac{1}{e^2} \approx 0.1354 \qquad x = \boxed{e^{-2} - 1} \in D_f \quad \vee \quad \boxed{x = 0} \in D_f$

$\frac{1}{e^2} - 1 \approx -0.86 \qquad \approx -086$

3° INTERVALOS DONDE LA FUNCIÓN ES CRECIENTE Y DECRECIENTE

a) f es creciente:

$\iff f'(x) > 0$

$\iff [2 + \text{Ln}(x+1)]\,\text{Ln}(x+1) > 0$

$\iff [2 + \text{Ln}(x+1) > 0 \ \wedge \ \text{Ln}(x+1) > 0] \ \vee \ [2 + \text{Ln}(x+1) < 0 \ \wedge \ \text{Ln}(x+1) < 0]$

$\text{Ln}(x+1) > -2 \ \wedge \ x+1 > 1$

$x+1 > e^{-2}$

$\iff [\ x > e^{-2} - 1 \ \wedge \ x > 0\ ] \ \vee \ [\ x < e^{-2} - 1 \ \wedge \ x < 0\ ]$

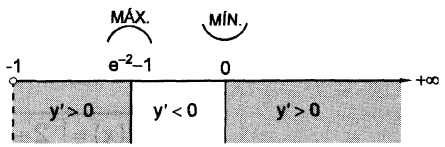


$\iff \boxed{x \in \langle -1, e^{-2} - 1\rangle \cup \langle 0, +\infty\rangle}$

b) f es decreciente $\iff f'(x) < 0$

$\iff \boxed{x \in \langle e^{-2} - 1, 0\rangle}$

En un diagrama, podemos apreciar lo siguiente:



Por lo tanto:

i) Existe máximo en: $x = e^{-2} - 1$, donde:

$Máx(f) = f(e^{-2} - 1) = (e^{-2} - 1 + 1)\,L^2n(e^{-2} - 1 + 1) = 4e^{-2} \iff (e^{-2} - 1, 4e^{-2})$

ii) Existe mínimo en: $x = 0$, donde:

$\text{Mín}(f) = f(0) = (0+1)L^2n(0+1) = 0 \iff (0, 0) \in Gr(f)$

4° PUNTOS DE INFLEXIÓN: De: $f'(x) = [2 + \text{Ln}(x+1)]\,\text{Ln}(x+1)$

obtenemos: $f''(x) = [2 + \text{Ln}\,(x+1)]\,(\frac{1}{x+1}) + (\text{Ln}(x+1)\,[0 + \frac{1}{x+1}]$

$= \frac{1}{x+1}[2 + 2\,\text{Ln}(x+1)]$

$f''(x) = \frac{2}{x+1}[1 + \text{Ln}(x+1)]$

Haciendo: $f''(x)=0 \iff 1+\text{Ln}(x+1)=0 \iff \text{Ln}(x+1)=-1$

$$\iff x+1=e^{-1} \iff \boxed{x=e^{-1}-1}$$

Si: $x=e^{-1}-1 \Rightarrow$

$$f(e^{-1}-1)=(e^{-1}-1+1)L^2n(e^{-1}-1+1)=e^{-1} \iff \boxed{(e^{-1}-1,e^{-1})}$$

$e^{-1}-1=0.63$

$e^{-1}\approx 0.37$

22 $f(x)=\text{Ln}(x^2-1)+\frac{1}{x^2-1}$

1° CAMPO DE DEFINICIÓN:

$$x\in \text{Dom}(x) \iff x^2-1>0 \ \wedge \ x^2-1\neq 0$$

$$\iff x^2>1$$

$$\iff (x>1 \ \vee \ x<-1) \ \wedge \ x\neq \pm 1$$

$\iff x\in\langle -\infty,-1\rangle\cup\langle 1,+\infty\rangle$, asíntotas verticales: $x\pm 1$

2° PUNTOS CRÍTICOS:

De $f(x)$ obtenemos:

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2-1}+\frac{(x^2-1)\ (0)-1(2x)}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{2x}{x^2-1}-\frac{2x}{(x^2-1)^2}$$

$$=\frac{2x(x^2-1)-2x}{(x^2-1)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{2x(x^2-2)}{(x^2-1)}}$$

Haciendo: $f'(x)=0 \iff 2x(x^2-2)=0$

$\iff x=0\notin D_f \ \vee \ x=\sqrt{2} \ \vee \ x=-\sqrt{2}$

Entonces los puntos críticos son: $\{-\sqrt{2}\,,\sqrt{2}\}$

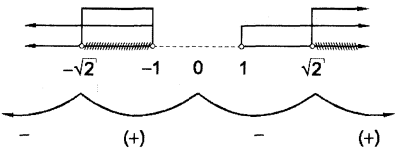
3° INTERVALOS DONDE f CRECE Y DECRECE:

a) f es creciente: $\iff f'>0$

$$\iff \frac{2x(x^2-2)}{(x^2-1)^2}>0 \quad \wedge \quad x\in D_f$$

$(x^2-1)^2>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ $\iff x(x^2-2)>0$

$x\neq\pm 1$ $\iff x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})>0 \quad \wedge \quad x\in D_f$



$$\Longleftrightarrow \quad x \in \left\langle -\sqrt{2}\ ,\ -1 \right\rangle \cup \left\langle \sqrt{2}\ ,\ +\infty \right\rangle$$

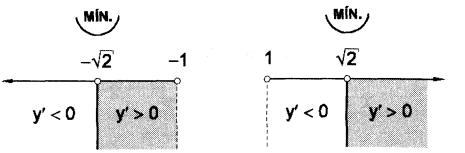
b) f es decreciente

$$\Longleftrightarrow \quad f' < 0$$

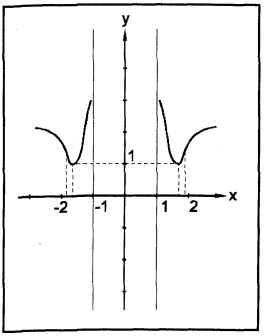
$$\Longleftrightarrow \quad \frac{2x(x^2-2)}{(x^2-1)^2} < 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad x \in \left\langle -\infty\ ,\ -\sqrt{2} \right\rangle \cup \left\langle 1\ ,\ \sqrt{2} \right\rangle$$

En un diagrama, tendremos:



Por lo tanto:



i) Existe mínimo en $x = -\sqrt{2}$, donde:

$$\min(f) = f(-\sqrt{2}) = \text{Ln}(2-1) + \frac{1}{2-1} = 1 \Longleftrightarrow (-\sqrt{2}\ ,\ 1)$$

ii) Existe mínimo en $x = \sqrt{2}$, donde:

$$\min(f) = f(\sqrt{2}) = \text{Ln}(2-1) + \frac{1}{2-1} = 1 \Longleftrightarrow (\sqrt{2}\ ,\ 1)$$

4° PUNTOS DE INFLEXIÓN:

De: $f'(x) = \dfrac{2x(x^2-2)}{(x^2-1)^2}$, obtenemos:

$$f''(x) = \frac{(x^2-1)^2[2(2x)+(x^2-2)(2)] - 2x(x^2-2)[2(x^2-1)(2x)]}{(x^2-1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-2(x^4-3x^2-2)}{(x^2-1)^3}$$

Haciendo: $f''(x) = 0 \Longleftrightarrow x^4 - 3x^2 - 2 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = x^2 = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-4(1)(-2)}}{2}$

$$\Longleftrightarrow x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \begin{cases} \nearrow\ x \approx 1.89 \\ \searrow\ x \approx -1.89 \end{cases}$$

Si: $x \approx 1.89$

$\Rightarrow f(1.89) = \text{Ln}((1.89)^2 - 1) + \frac{1}{(1.89)^2 - 1} \approx 1.33 \iff (1.89, 1.33) \in Gr(f)$

Si: $x \approx -1.89$

$\Rightarrow f(-1.89) = \text{Ln}((-1.89)^2 - 1) + \frac{1}{(-1.89)^2 - 1} \approx 1.33 \iff (-189, 1.33) \in Gr(f)$

23 $f(x) = \frac{x^2}{2}\text{Ln}\frac{x}{a}$, $a > 0$

1° DOMINIO:

$x \in \text{Dom}(f) \iff \frac{x}{a} > 0$

$\iff x > 0 \iff x \in \langle 0, +\infty \rangle$

2° PUNTOS CRÍTICOS:

De: $f(x) = \frac{x^2}{2}\text{Ln}\frac{x}{a}$, obtenemos:

$$f'(x) = \frac{x^2}{2}\left[\frac{\frac{1}{a}}{\frac{x}{a}}\right] + \text{Ln}\frac{x}{a}\left[\frac{1}{2}.2x\right]$$

$$= \frac{x}{2} + x\,\text{Ln}\frac{x}{a}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x\left(1 + 2\text{Ln}\frac{x}{a}\right)}{2}}$$

Haciendo: $f'(x) = 0$

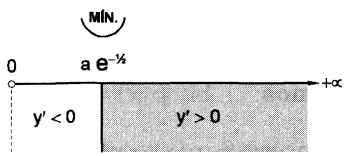
$x\left(1 + 2\text{Ln}\frac{x}{a}\right) = 0 \iff$

$x = 0 \notin D_f \quad \vee \quad 1 + 2\,\text{Ln}\frac{x}{a} = 0$

$$\text{Ln}\frac{x}{a} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{a} = e^{-\frac{1}{2}}$$

$$x = a\,e^{-\frac{1}{2}}$$



Por lo tanto:

Existe mínimo en $x = ae^{-1/2}$, donde:

$$\text{Mín}(f) = f(ae^{-1/2}) = \frac{(ae^{-1/2})^2}{2}\text{Ln}\frac{ae^{-1/2}}{a}$$

$$= \frac{a^2e^{-1}}{2}\text{Ln}\,e^{-1/2}$$

$$= \frac{a^2e^{-1}}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{a^2}{-e}$$

14. PROBLEMAS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS

1 Hallar dos números cuya suma sea k y cuyo producto sea máximo.

DATOS: Si la suma de dos números es k, entonces sean:

1° número: x

2° número: $k-x$

El producto será: $p(x)=x(k-x)$

Para que el producto sea máximo debe cumplirse que: $\frac{d}{dx}p(x)=0$

Veamos: Si: $p(x)=x(k-x)$

Entonces: $\frac{d}{dx}p(x)=x(-1)+(k-x)(1)=0$

$$-x+k-x=0$$

$$-2x+k=0 \quad \Rightarrow \quad x=k/2$$

Por lo tanto 1er número: $k/2$

2° número: $k-\frac{k}{2}=k/2$

2 Descomponer m en dos factores tal que la suma de ellos sea máximo.

DATOS: Si el producto de dos números es m, entonces sean $\begin{cases} 1^{er} \text{ número: } x \\ 2^{o} \text{ número: } \frac{m}{x} \end{cases}$

La suma será: $S(x)=x+\frac{m}{x}$, $x\neq 0$

Para que la suma $S(x)$ sea máximo, debe cumplirse que: $\frac{ds}{dx}=0$

Veamos:

Si: $S(x)=x+\frac{m}{x}$, $x\neq 0$

$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}S(x)=1-\frac{m}{x^2}$

$1-\frac{m}{x^2}=0 \iff x^2-m=0$

$\iff x^2=m$

$\iff x=\pm\sqrt{m}$

Tomemos: $x=\sqrt{m}$

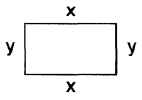
Entonces la solución será:

1er número: $\sqrt{m}$

2° número: $\frac{m}{\sqrt{m}}=\sqrt{m}$

3 Un rectángulo tiene perímetro igual a P. Hallar sus dimensiones para que su área sea máxima.

Datos: Sea P el perímetro, entonces: $p = 2x + 2y \iff y = \frac{1}{2}(p - 2x)$ ..... (1)



Su área será: $A = xy$ ..... (2)

Reemplazar (1) en (2): $A = x\left[\frac{1}{2}(p - 2x)\right]$

$$A = \frac{1}{2}x(p - 2x)$$

Luego, para que el área sea máxima, debe cumplirse que: $\frac{d}{dx}A = 0$

Veamos:

Si: $A = \frac{1}{2}x(p - 2x)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}A = \frac{1}{2}[x(-2) + (p - 2x)(1)]$$

$$= \frac{1}{2}[-2x + p - 2x]$$

$$= \frac{1}{2}[-4x + p]$$

Haciendo: $\frac{1}{2}[-4x + p] = 0$

$$-4x + p = 0 \Rightarrow x = \frac{p}{4}$$

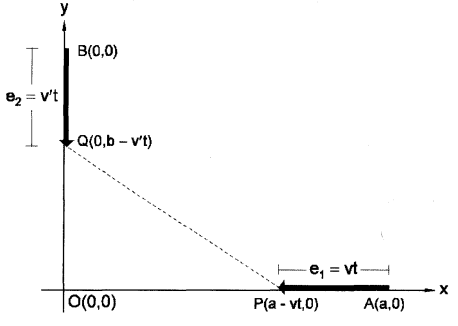
Como sus lados son x e y, entonces:

$$x = \frac{p}{4}$$

$$y = \frac{1}{2}\left[p - 2\left(\frac{p}{4}\right)\right] = \frac{p}{4}$$

4 Dos puntos móviles salen de los puntos $A(a,0)$ y $B(0,b)$ con $a > 0$, $b > 0$ y van hacia el origen con velocidades V y V'; ¿en qué momento su distancia es mínima?

Datos:



Teniendo en cuenta que la distancia del punto P al Punto Q es función del tiempo, entonces la fórmula que expresa ésta distancia es:

$$d(t) = |\overline{PQ}| = \sqrt{[0 - (-vt)]^2 + [(-v't) - 0]^2}$$

$$d(t) = \sqrt{(a - vt)^2 + (b - v't)^2}$$

Luego, para que la distancia de P a Q sea mínimo debe cumplirse que $\frac{d}{dt}d(t) = 0$

Veamos: Si $d(t)=\sqrt{(a-vt)^2+(b-v't)^2}$

Entonces: $\frac{d}{dt}d(t)=\frac{2(a-vt)(-v)+2(b-v't)(-v')}{2\sqrt{(a-vt)^2+(b-v't)^2}}=0$

$$\Longleftrightarrow \quad -2(a-vt)(-v)+2(b-v't)(v')=0$$

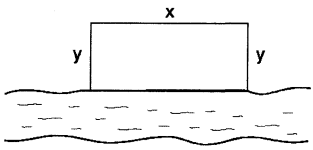
$$-av+v^2t-bv'+v'^2t=0$$

$$t(v^2+v'^2)=av+bv' \quad \Rightarrow \quad t=\frac{av+bv'}{v^2+v'^2}$$

RESPUESTA: La distancia de P a Q es mínima cuando el tiempo es $t=\frac{av+bv'}{v^2+v'^2}$

5 Se desea cercar un lote rectangular que tenga $4{,}000\,m^2$ de superficie, con uno de sus lados a lo largo de un río recto. Si no se necesita cercar para el lado que da al río, ¿ que dimensiones requieren la menor cantidad de cerca?

Datos:



El área del lote rectangular es:

$xy=4{,}000 \qquad y=\frac{4000}{x}$ ..... (1)

Si uno de sus lados del lote da al río, entonces no debe tener cerca y por lo tanto el perímetro es:

$$P=2y+x \text{ ..... (2)}$$

Reemplazando (1) en (2), se tiene:

$$P=2\left(\frac{4000}{x}\right)+x$$

Luego, para que la cantidad de cerca sea menor (mínima), debe cumplirse que:

$$\frac{d}{dx}P=0$$

Veamos: $\frac{d}{dx}P=-\frac{2(4000)}{x^2}+1$

$$-\frac{2(4000)}{x^2}+1=0$$

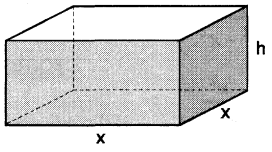
$$-2(4000)+x^2=0$$

$$x^2=2(4000)) \quad \Rightarrow \quad x=40\sqrt{5}$$

RESPUESTA: Las dimensiones de la cerca serán $\begin{cases} x=40\sqrt{5} \\ y=\frac{4000}{40\sqrt{5}}=20\sqrt{5} \end{cases}$

6 Se desea construir una caja sin tapa y de base cuadrada disponiendo de 300 dm^2 de material. Halle las dimensiones para que el volumen sea máximo.

DATOS:



Supongamos que:

x: lado de la base cuadrado

h: altura de la caja

A: Area total de la caja.

V: Volumen de la caja

AL: área lateral de la caja, donde: $AL = p \cdot h$; P: perímetro.

B: área de la base.

Como: $A = B + AL$

Entonces: $300 = x^2 + 4xh \iff h = \frac{300 - x^2}{4x}$ ..... (1)

Además: $V = x^2 h$ ..... (2)

Reemplazar (1) en (2):

$$V = x^2 \left[\frac{300 - x^2}{4x} \right]$$

$$V = \frac{1}{4} x (300 - x^2)$$

Para que el volumen sea máximo debe cumplirse que: $\frac{d}{dx} V = 0$

Veamos:

$$\frac{d}{dx} V = \frac{1}{4} [x(-2x) + (300 - x^2)(1)]$$

$$= \frac{1}{4} [-3x^2 + 300]$$

Haciendo: $\frac{d}{dx} V = 0$, tenemos

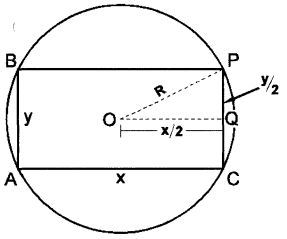
$$-3x^2 + 300 = 0 \iff x^2 = 100 \iff x = 10$$

RESPUESTA: Longitud de la base es: $x = 10\,dm$

La altura es: $h = \frac{300 - (10)^2}{4(10)} = 5\,dm$

7 Hallar las dimensiones del rectángulo de mayor área que se puede inscribir en un circulo de radio R.

DATOS:



Sea: $A = xy$ ..... (1)

el área del rectángulo $ABPC$

En el triángulo rectángulo OQP se tiene:

$$|PQ|^2 = |OP|^2 - |OQ|^2$$

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2 = R^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$\frac{y^2}{4} = R^2 - \frac{x^2}{4}$$

$$y^2 = 4R^2 - x^2$$

$$y = \sqrt{4R^2 - x^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Reemplazar (2) en (1):

$$A = x\sqrt{4R^2 - x^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Luego, para que el área A del rectángulo inscrito sea máximo debe cumplirse que $\frac{d}{dx}A = 0$

Veamos: De (3) 0btenemos:

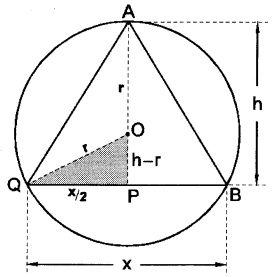
$$\frac{d}{dx}A = x\left(\frac{-2x}{2\sqrt{4R^2 - x^2}}\right) + \sqrt{4R^2 - x^2}$$

$$= \frac{-x^2 + 4R^2 - x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}}$$

Haciendo: $\frac{d}{dx}A = 0 \iff -x^2 + 4R^2 - x^2 = 0 \Rightarrow x = R\sqrt{2}$

RESPUESTA: Los lados del rectángulo serán: $\begin{cases} x = R\sqrt{2} \\ y = \sqrt{4R^2 - (R\sqrt{2})} = R\sqrt{2} \end{cases}$

8 Se inscribe un triángulo en un circulo de radio r. Determinar este triángulo para que su superficie sea máxima.



Supongamos que el área del triángulo QAB

Sea: $A(b,h) = \frac{bh}{2}$, $b = |QB| = x \quad \ldots\ldots \quad (1)$

Fijémonos que el área A depende de dos variables "b" y "h".

Ahora, lo que debemos hacer es expresar el área A en función de una sola variable.

En el triángulo rectángulo QPO, se tiene:

$$(h-r)^2 = r^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$= r^2 - \frac{x^2}{4}$$

$$(r-r)^2 = \frac{4r^2 - x^2}{4}$$

$$h - r = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - x^2}$$

$$h = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - x^2} + r \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Reemplazar (2) en (1): $A(x)=\dfrac{x\left(\frac{1}{2}\sqrt{4r^2-x^2}+r\right)}{2}$ ..... (3)

Para que el área sea máximo, debe cumplirse que: $\frac{d}{dx}A=0$

Veamos:

$$\frac{d}{dx}A=\frac{1}{2}\left[x\left(\frac{1}{2}\frac{-2x}{2\sqrt{4r^2-x^2}}+0\right)+\left(\frac{1}{2}\sqrt{4r^2-x^2}+r\right)(1)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-x^2}{2\sqrt{4r^2-x^2}}+\frac{1}{2}\sqrt{4r^2-x^2}+r=0$$

$$-x^2+4r^2-x^2+2r\sqrt{4r^2-x^2}=0$$

$$-2x^2+4r^2+2r\sqrt{4r^2-x^2}=0$$

Dividir por dos y transponer términos:

$$r\sqrt{4r^2-x^2}=x^2-2r^2$$

Elevando al cuadrado:

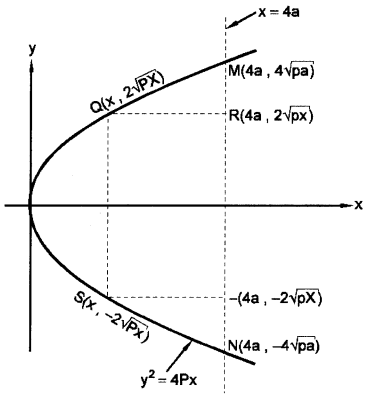
$$r^2(4r^2-x^2)=x^4-4r^2x^2+4r^4$$
$$4r^4-r^2x^2=x^4-4r^2+4r^4$$
$$x^4-3r^2x^2=0$$
$$x^2(x^2-3r^2)=0$$
$$x^2=0 \quad \vee \quad x^2=3r^2$$
$$x=0 \quad \vee \quad x=r\sqrt{3}$$

RESPUESTA:

El triángulo debe tener base $b=r\sqrt{3}$ y altura $h=\frac{1}{2}\sqrt{4r^2-3r^2}+r=\frac{3}{2}r$

9 Inscribir un rectángulo de la mayor área posible en el sector de la parábola $y^2=4px$ cortado por la recta: $x=4a$

DATOS:



Supongamos que el rectángulo inscrito sea $QRTS$, cuya área A sea:

$$A=|ST||TR| \quad \text{..... (1)}$$

$$|ST|=T-S=4a-x \quad \text{..... (2)}$$

$$|TR|=R-T=2\sqrt{px}-(-2\sqrt{px})$$
$$=4\sqrt{px} \quad \text{..... (3)}$$

Reemplazando (2) y (3) en (1):

$$A=(4a-x)(4\sqrt{px})$$

Para que la función A tenga máximo debe cumplirse que: $\frac{d}{dx}A = 0$.

Veamos: $\frac{d}{dx}A = (4a - x)\left(\frac{4p}{2\sqrt{px}}\right) + (4\sqrt{px})(-1)$

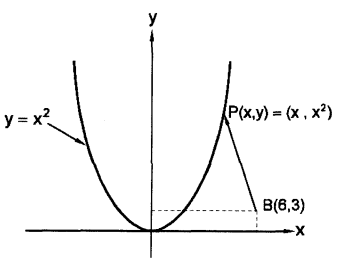
$$(4a - x)\left(\frac{4p}{2\sqrt{px}}\right) + (4\sqrt{px})(-1) = 0$$
$$(4a - x)(2p) - 4px = 0$$
$$8ap - 2px - 4px = 0$$
$$8ap = 6px$$
$$x = \tfrac{4}{3}a$$

RESPUESTA:

La base: $|ST| = 4a - \frac{4}{3}a = \frac{8}{3}a$

La altura: $|TR| = 4\sqrt{p\left(\frac{4}{3}a\right)} = 8\sqrt{\frac{pa}{3}}$

10 Hallar un punto sobre la curva $y = x^2$ que esté más próximo al punto (6,3).



Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera de la curva $y = x^2$, entonces el punto P será de la forma $P(x,x^2)$.

La distancia $|BP|$ del punto B al punto P será de la forma: $|BP| = \sqrt{(x-6)^2 + (x^2-3)^2}$

Luego, para que la distancia $|BP|$ sea mínima debe cumplirse que $\frac{d}{dx}|BP| = 0$

Veamos: $\frac{d}{dx}|BP| = \frac{2(x-6) + 2(x^2-3)(2x)}{2\sqrt{(x-6)^2 + (x^2-3)^2}} = 0$

Donde:

$$2(x-6) + 2(x^2-3)(2x) = 0$$
$$2[x - 6 + 2x^3 - 6x] = 0$$
$$2x^3 - 5x - 6 = 0$$

Resolviendo ésta ecuación por el método de Ruffini.

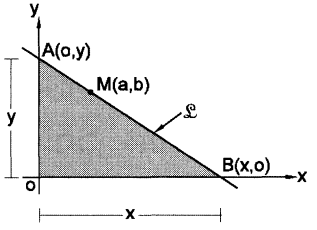
2	2	0	−5	−6
		4	8	6
	2	4	3	0

$$\iff (x-2)(2x^2 + 4x + 3) = 0$$
$$\Rightarrow x - 2 = 0 \iff x = 2$$

RESPUESTA: El punto será $P(2,4)$

11 En un plano coordenado se da un punto $M(a,b)$ situado en el primer cuadrante. Hacer pasar por éste punto una recta, de manera que el triángulo formado entre ella y los semiejes positivos de coordenadas tengo la menor área posible.

Datos:



Supongamos que la base del triángulo rectángulo AOB sea "x" y la altura "y", entonces el área estará dado por la formula:

$$A=\frac{xy}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Como los puntos A, M y B pasan por la recta $\mathcal{L}$; entonces la pendiente del segmento AM es igual a la pendiente del segmento MB, es decir:

$$\frac{b-y}{a-0}=\frac{0-b}{x-a} \iff b-y=\frac{-ab}{x-a} \ldots \quad (2)$$

Reemplazar (2) en (1): $A(x)=\dfrac{x\left(b+\frac{ab}{x-a}\right)}{2}$

Donde:

$$\frac{d}{dx}A=\frac{1}{2}\left[\, x\left(0-\frac{ab}{(x-a)^2}\right)+\left(b+\frac{ab}{x-a}\right)(1)\,\right]$$

Haciendo: $\frac{d}{dx}A=0$

$$\frac{-abx}{(x-a)^2}+b+\frac{ab}{x-a}=0$$

$$-abx+b(x-a)^2+ab(x-a)=0$$

$$-abx+bx^2-2abx+ba^2+abx-a^2b=0$$

$$bx^2-2abx=0$$

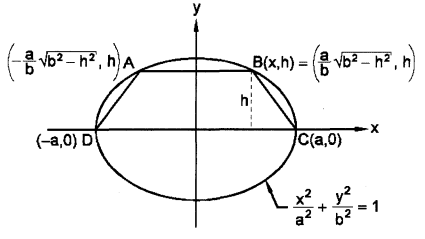
$$bx(x-2a)=0 \begin{cases} bx=0 \iff x=0 \\ x-2a=0 \iff x=2a \end{cases}$$

RESPUESTA: Los lados del triángulo serán:

$$x=2a \;;\; y=b+\frac{ab}{2a-a}=2b$$

12 La base inferior de un trapecio isósceles es el eje mayor de una elipse, los extremos de la base superior son puntos de la elipse. Demostrar que en el trapecio de este tipo, de área máxima la longitud de la base superior es la mitad de la longitud de la base inferior.

DATOS:



- Sea el trapecio $ABCD$ inscrito en la elipse: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$
- Donde: $|DC|$ = base mayor del trapecio.
  $|AB|$ = base menor del trapecio.
  h = altura
  A = área del trapecio

- El área del trapecio es: $A = \frac{(|DC|+|AB|)\,h}{2}$

- Pero: $\begin{cases} |DC| = a-(-a) = 2a \\ |AB| = \frac{a}{b}\sqrt{b^2-h^2} - \left(-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-h^2}\right) \\ \qquad = \frac{2a}{b}\sqrt{b^2-h^2} \end{cases}$

Entonces: $A = \frac{\left(2a+\frac{2a}{b}\sqrt{b^2-h^2}\right)h}{2}$

$$= \frac{2a\left(1+\frac{1}{b}\sqrt{b^2-h^2}\right)h}{2}$$

$$A = a\left(1+\tfrac{1}{b}\sqrt{b^2-h^2}\right)h$$

Para que el área del trapecio sea máximo debe cumplirse que: $\frac{d}{dh}A = 0$

Veamos:

$$\frac{d}{dh}A = a\left[\left(1+\tfrac{1}{b}\sqrt{b^2-h^2}\right)(1)+\left(0+\tfrac{1}{b}\frac{-2h}{2\sqrt{b^2-h^2}}\right)h\right] = 0$$

$$1+\tfrac{1}{b}\sqrt{b^2-h^2} - \frac{h^2}{b\sqrt{b^2-h^2}} = 0$$

$$b\sqrt{b^2-h^2} + b^2 - h^2 - h^2 = 0$$

$$b\sqrt{b^2-h^2} = 2h^2 - b^2$$

$$b^2(b^2-h^2) = 4h^4 - 4b^2h^2 + b^4$$

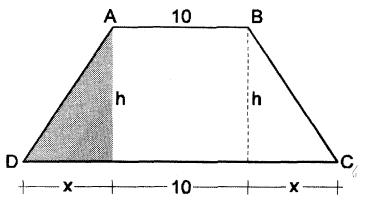
$$3b^2h^2 = 4h^4 \iff 4h^4 - 3bh^2 = 0 \iff h^2(4h^2-3b) = 0$$

$$\iff h^2 = 0 \ \vee \ 4h^2 - 3b = 0$$

$h = 0 \ \vee \ \boxed{h = \frac{1}{2}b\sqrt{3}}$. La base: $|AB| = \frac{2a}{b}\sqrt{b^2-\frac{3b^2}{4}} = a$

13 Si tres lados de un trapecio miden cada uno 10 cm. ¿Cuánto debe medir la base mayor para que el área sea máxima?

Datos:



Sea el trapecio $ABCD$, donde: $|DC| = 10 + 2x$

$$|DA| = 10 \;;\; |AB| = 10 \;;\; |BC| = 10$$

El área del trapecio, es:

$$A = \frac{(|DC| + |AB|)h}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Donde $\left.\begin{array}{l} |DC| = 10 + 2x \\ |AB| = 10 \\ h = \sqrt{10^2 - x^2} \end{array}\right\} \ldots\ldots (2)$

Reemplazar (2) en (1):

$$A = \frac{(10 + 2x + 10)\sqrt{10^2 - x^2}}{2}$$

$$A = (10 + x)\sqrt{10^2 - x^2}$$

Para que el área sea máxima debe cumplirse que: $\frac{d}{dx}A = 0$

Veamos:

$$\frac{d}{dx}A = (10 + x)\frac{-2x}{2\sqrt{10^2 - x^2}} + \sqrt{10^2 - x^2}$$

$$\frac{-x(10 + x)}{\sqrt{10^2 - x^2}} + \sqrt{10^2 - x^2} = 0$$

$$-10x - x^2 + 10^2 - x^2 = 0$$

$$-2x^2 - 10x + 100 = 0$$

$$x^2 + 5x - 50 = 0$$

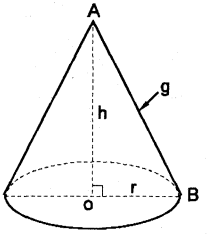
$$(x + 10)(x - 5) = 0 \iff \begin{cases} x = -10 \\ \vee \\ x = 5 \end{cases}$$

RESPUESTA: La base mayor mide:

$$|DC| = 10 + 2(5) = 20\,\text{cm}$$

14 Un cono circular recto tiene un volumen de 120 cm^3 ¿Que dimensiones debe tener para que su área lateral sea máxima?

DATOS:



I) Volumen del cono: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ { radio: r ; altura: h

II) Area lateral del cono: $AL = \pi r g$ { r : radio de la base ; g : generatriz

Lo que debemos hacer es expresar el AL en términos del radio r.

Veamos:

En el triángulo rectángulo AOB de la figura tenemos que:

$$g = \sqrt{h^2 + r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(III)}$$

De (I): $3V = \pi r^2 h$

$$3(120) = \pi r^2 h \iff \boxed{h = \frac{360}{\pi r^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(IV)}$$

Reemplazando (IV) en (III): $g = \sqrt{\left(\frac{360}{\pi r^2}\right)^2 + r^2}$

(V): $g = \frac{1}{\pi r^2}\sqrt{360^2 + \pi^2 r^6}$

Reemplazar (V) en (II): $AL = \pi r \frac{1}{\pi r^2}\sqrt{360^2 + \pi^2 r^6}$

$$AL(r) = \frac{1}{r}\sqrt{360^2 + \pi^2 r^6}$$

Se quiere que: $\frac{d}{dr}AL = 0$

Veamos:

$$\frac{d}{dr}AL = \frac{1}{r}\left[\frac{6\pi^2 r^5}{2\sqrt{360^2 + \pi^2 r^6}}\right] - \frac{1}{r^2}\sqrt{360^2 + \pi^2 r^6} = 0$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{3\pi^2 r^5}{\sqrt{360^2 + \pi^2 r^6}} - \frac{1}{r}\sqrt{360^2 + \pi^2 r^6}\right] = 0$$

$$3\pi^2 r^6 - 360^2 - \pi^2 r^6 = 0$$

$$2\pi^2 r^6 = 360^2 \iff r^6 = \frac{360^2}{2\pi^2} \iff \boxed{r = \sqrt[6]{\frac{360^2}{2\pi^2}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(VI)}$$

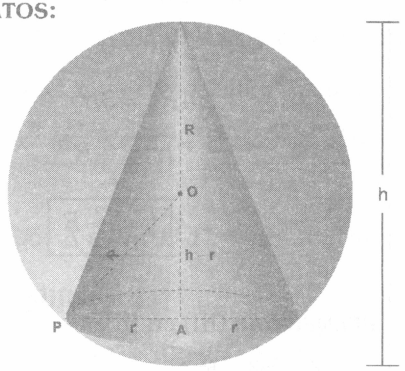
Sustituir (VI) en (V):

$$g = \frac{1}{\pi\left[\sqrt[6]{\frac{360^2}{2\pi^2}}\right]^2}\sqrt{360^2 + \pi^2\frac{360^2}{2\pi^2}} = \frac{\sqrt{\frac{3(360)^2}{2}}}{\frac{\pi 360^{2/3}}{2^{1/3}\pi^{2/3}}} = \frac{\frac{3^{1/2}360}{2^{1/2}}}{\frac{\pi 360^{2/3}}{2^{1/3}\pi^{2/3}}} = \frac{3^{1/2}360\,2^{1/3}\pi^{2/3}}{2^{1/2}\pi 360^{2/3}} = \frac{3^{1/2}360^{1/3}}{2^{1/6}\pi^{1/3}}$$

$$\boxed{g = \sqrt[6]{27\left(\frac{360^2}{2\pi^2}\right)^2}}$$

15 Halle las dimensiones y el volumen del cono circular recto, de volumen máximo que puede ser inscrito en una esfera de radio R.

DATOS:



Sean:

R: radio de la esfera (dato conocido).
r : radio de la base del cono.
h : altura del cono.

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ... (I) volumen del cono.

Como vemos el volumen V está expresado en función de dos variables "r" y "h", lo que se debe hacer es expresar sólo en función de una variable.

Veamos:

En el triángulo rectángulo OAP, tenemos:

$$r^2 = R^2 - (h-R)^2$$

$$r^2 = R^2 - h^2 + 2Rh - R^2$$

$$r^2 = 2Rh - h^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

Reemplazar (II) en (I):

$$V = \tfrac{1}{3}\pi (2Rh - h^2)h$$

Como V debe ser máximo, debe cumplirse que:

$$\frac{d}{dh}V = 0$$

Veamos:

$$\frac{dV}{dh} = \tfrac{1}{3}\pi [(2Rh - h^2)(1) + (2R - 2h)h] = 0$$

$$(2Rh - h^2) + (2R - 2h)h = 0$$

$$2Rh - h^2 + 2Rh - -2h^2 = 0$$

$$4Rh - 3h^2 = 0 \iff h(4R - 3h) = 0$$

$$h = 0 \quad \vee \quad \boxed{h = \tfrac{4}{3}R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(III)}$$

Reemplazar (III) en (II)

$$r^2 = 2R\left(\tfrac{4R}{3}\right) - \left(\tfrac{4R}{3}\right)^2$$

$$= \tfrac{8}{3}R^2 - \tfrac{16}{9}R^2$$

$$= \tfrac{8}{9}R^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = \tfrac{2R}{3}\sqrt{2}}$$

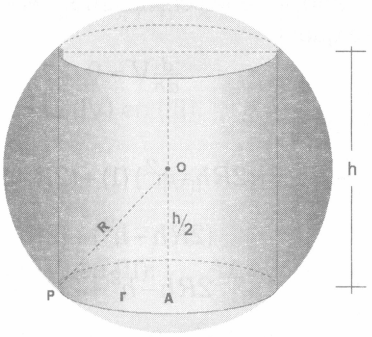
16 Halle las dimensiones y el volumen del cilindro circular recto, de volumen máximo que puede ser inscrito en una esfera de radio R.

DATOS: Sean
- R : radio de la esfera (dato conocido)
- r : radio de la base circular del cilindro
- h : altura del cilindro
- V : $\pi r^2 h$..... (I) VOLUMEN DEL CILINDRO

Debemos expresar el volumen *V*, en función de "*r*" o de "*h*":

En el triángulo rectángulo *OAP* se tiene:

$$r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$



Reemplazar (II) en (I):

$$V = \pi\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)h$$

Como el volumen *V* debe ser máximo entonces:

$$\frac{d}{dh}V = \pi\left[\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right)(1) + \left(\frac{-2h}{4}\right)h\right] = 0$$

$$R^2 - \frac{h^2}{4} - \frac{h^2}{2} = 0$$

$$4R^2 - h^2 - 2h^2 = 0$$

$$4R^2 - 3h^2 = 0$$

$$4R^2 = 3h^2$$

$$h^2 = \frac{4}{3}R^2$$

$$\boxed{h = \frac{2}{\sqrt{3}}R} \quad \ldots \text{(III)}$$

REEMPLAZAR (III) en (II):

$$r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$$

$$= R^2 - \frac{4R^2/3}{4} \Rightarrow \boxed{r = R\sqrt{2/3}}$$

Luego el volumen del cilindro:

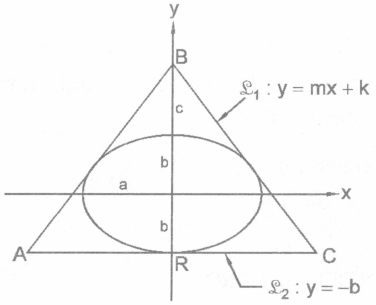
será: $V = \pi\left(\frac{2R^2}{3}\right)\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)$

$$\boxed{V = \frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}}$$

17 Hallar las dimensiones del triángulo isósceles, de área máxima, circunscrito a una elipse donde uno de sus lados es paralelo al eje *X*.

DATOS:

Sea el triángulo isósceles circunscrito *ABC*, circunscrito a la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$.



El problema consiste en hallar "C" en términos de *b*.

1. Ecuación de la elipse: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$
2. Ecuación de la recta $\mathcal{L}_1$: $y = mx + k$ donde "*m*" y "*k*" son valores por hallarse.
3. Pero: $k = b + c$. Ahora debemos hallar "*m*".

4. Reemplazar 2 en 1:

$$b^2x^2+a^2(mx+k)^2=a^2b^2$$

$$b^2x^2+a^2(m^2x^2+2mkx+k^2)=a^2b^2$$

$$b^2x^2+a^2m^2x^2+2mka^2x+a^2k^2=a^2b^2$$

$$x^2\underbrace{(b^2+a^2m^2}_{A}+\underbrace{2mka^2}_{B}+\underbrace{a^2(k^2-b^2)}_{C}=0$$

Como la recta $\mathcal{L}_1$ es tangente a la elipse, entonces debe cumplirse que $\Delta=B^2-4ac=0$.

NOTA: Decir que el descriminante es igual a cero es equivalente a decir que las raíces de una ecuación de 2° grado sean iguales.

Luego: $\Delta=4m^2k^2a^4-4(b^2+a^2m^2)a^2(k^2-b^2)=0$

Simplificar $4a^2$

$$m^2k^2a^2-(b^2+a^2m^2)(k^2-b^2)=0$$

$$m^2k^2a^2-b^2(k^2-b^2)-a^2m^2(k^2-b^2)=0$$

$$m^2[k^2a^2-a^2(k^2-b^2)]=b^2(k^2-b^2)$$

$$m^2[k^2a^2-a^2k^2+a^2b^2]=b^2(k^2-b^2)$$

$$m^2=\frac{b^2(k^2-b^2)}{a^2b^2}$$

$$m^2=\frac{k^2-b^2}{a^2}$$

$$m=\tfrac{1}{a}\sqrt{k^2-b^2}\quad\vee\quad\boxed{m=-\tfrac{1}{a}\sqrt{k^2-b^2}}\qquad\ldots\ldots\ldots

ÁREA DEL TRIÁNGULO RECTÁNGULO *BRC*:

$$A=\tfrac{1}{2}|RC||BR| \text{ , donde: } \begin{cases} |BR| = 2b+c \\ |RC| = \dfrac{a(2b+c)}{\sqrt{c^2+2bc}} \end{cases}$$

$$A=\tfrac{1}{2}\frac{a(2b+c)}{\sqrt{c^2+2bc}}(2b+c)$$

$$A=\tfrac{1}{2}\frac{a(2b+c)^2}{\sqrt{c^2+2bc}}$$

Como el área debe ser máxima, entonces debe cumplirse que: $\frac{dA}{dc}=0$

Veamos:

$$\frac{d}{dc}A=\tfrac{1}{2}a\left[\frac{\sqrt{c^2+2bc}\,2(2b+c)-(2b+c)^2\frac{(2c+2b)}{2\sqrt{c^2+2bc}}}{c^2+2bc}\right]$$

$$=\tfrac{1}{2}a\left[\frac{2(2b+c)(c^2+2bc)-(2b+c)^2(b+c)}{(c^2+2bc)\sqrt{c^2+2bc}}\right]$$

$$=\tfrac{1}{2}a(2b+c)\left[\frac{2(c^2+2bc)-(2b+c)(b+c)}{(c^2+2bc)\sqrt{c^2+2bc}}\right]$$

$$=\tfrac{1}{2}a(2b+c)\left[\frac{c^2+bc-2b^2}{(c^2+2bc)\sqrt{c^2+2bc}}\right]$$

$$=\tfrac{1}{2}a(2b+c)\left[\frac{(c+2b)(c-b)}{(c^2+2bc)^{3/2}}\right]$$

$$=\tfrac{1}{2}\frac{a(2b+c)^2(c-b)}{(c^2+2bc)^{3/2}}$$

Haciendo $\frac{dA}{dc}=0 \iff c-b=0 \iff c=b$

Luego, la altura del triángulo *ABC* es:

$$|RB| = 2b+c = 2b+b = 3b$$

La base del triángulo *ABC*, será:

$$|AC| = 2|RC| = \frac{2a(2b+c)}{\sqrt{c^2+2bc}} = \frac{2a(2b+b)}{\sqrt{b^2+2b^2}} = 2a\sqrt{3}$$

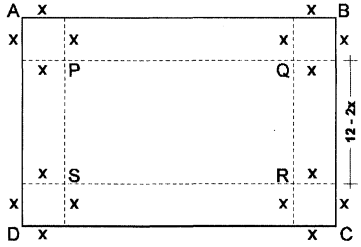
EL AREA DEL Δ ABC, ES:

$$A=\tfrac{1}{2}(3b)\left(2a\sqrt{3}\right)=3ab\sqrt{3}$$

18 Se tiene una plancha metálica cuadrada de lado igual a 12 cm. Se debe construir de ella una caja cortando cuadrados iguales en cada esquina y doblando los bordes hacia arriba. Hallar las dimensiones de la caja de capacidad máxima que se puede construir de este modo.

Solución:

1. Hagamos el dibujo correspondiente.



$$|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = 12$$

$$|\overline{PQ}| = |\overline{QR}| = 12 - 2x$$

2. La caja por construirse debe tener volumen:

$$V(x) = (12-2x)(12-2x)x$$
$$= (12-2x)^2 x$$

3. La condición necesaria para hallar el máximo de $V(x)$ es que $V'(x) = 0$.

Hallemos $V'(x) = \frac{dv}{dx}$.

$$V'(x) = [(12-2x)]'x + (12-2x)^2[x]'$$
$$= [2(12-2x)(-2)]x + (12-2x)^2[1]$$
$$= (12-2x)[-4x + (12-2x)]$$
$$= (12-2x)(12-5x)$$
$$= 12(6-x)(2-x)$$

4. Haciendo: $V'(x) = 0$, obtenemos:

$$x = 6 \quad \vee \quad x = 2$$

5. La condición suficiente para que haya máximo es que $V''(x_0) < 0$, siendo x_0 punto singular.

1°. Se halla $V''(x)$: De:

$$V'(x) = 12(x-6)(x-2) = 12(x^2 - 8x + 12)$$

Obtenemos: $V''(x) = 12(2x-8)$

$$= 24(x-4)$$

2°. Con $x = 2$ obtenemos:

$$V''(2) = 24(-2) < 0$$

Con $x = 2$ .obtenemos:

$$V''(2) = 24(-2) < 0$$

3°. Por tanto con $x = 2$ existe máximo.

6. Las medidas de la caja de capacidad máxima serán: altura $= 2\,\text{cm}$.

$$\text{Ancho} = \text{largo} = 12 - 2(2)$$
$$= 8\,\text{cm}$$

19 **PROBLEMA RELATIVO A LA FÍSICA.** El alcance R de un proyectil sobre un plano inclinado que toma un ángulo α con la horizontal está dado por:

$$R = \frac{2V^2}{g\cos^2\alpha}\cos\theta \cdot \operatorname{sen}(\theta - \alpha)$$

donde θ es el ángulo de elevación del cañón o arma que dispara el proyectil y V la velocidad inicial de la misma. Hallar θ para que R sea máxima.

Solución:

1. Para que R sea máxima debe cumplir dos condiciones:

1°. Que: $\frac{dR}{d\theta} = 0$

2°. Que: $\frac{d^2R}{d\theta^2} < 0$ Para un θ_0 .como punto singular.

2. De: $R(\theta) = \overbrace{\frac{2V^2}{g\cos^2\alpha}}^{\text{constante}} \underbrace{\cos\theta}_{\mu} \cdot \underbrace{\text{sen}(\theta-\alpha)}_{\upsilon}$

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{2V^2}{g\cos^2\alpha}[\mu'\upsilon + \mu\cdot\upsilon']$$

$$= \frac{2V^2}{g\cos^2\alpha}[-\text{sen}\theta\cdot\text{sen}(\theta-\alpha) + \cos\theta\cdot\cos(\theta-\alpha)]$$

3. Haciendo: $\frac{dR}{d\theta} = 0$, obtenemos:

$$\underbrace{\cos\theta\cdot\cos(\theta-\alpha) - \text{sen}\theta\cdot\text{sen}(\theta-\alpha) = 0}$$

$$\cos[\theta+\theta-\alpha] = 0$$

$$\cos[2\theta-\alpha] = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2\theta-\alpha = arc\cos 0$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad \theta = \frac{\pi+2\alpha}{4}$$

4. Como:

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{2V^2}{g\cos^2\alpha}\cdot\cos(2\theta-\alpha)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2R}{d\theta^2} = \frac{2V^2}{g\cos^2\alpha}(-\text{sen}(2\theta-\alpha))(2)$$

$$R''(\theta) = -\frac{4V^2}{g\cos^2\alpha}\text{sen}(2\theta-\alpha)$$

5. $R''\left(\frac{\pi+2\alpha}{4}\right) = -\frac{4V^2}{g\cos^2\alpha}\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$= -\frac{4\upsilon^2}{g\cos^2\alpha} < 0$$

6. Luego, existe máximo en:

$$\theta = \frac{\pi+2\alpha}{4}$$

20 PROBLEMA RELATIVO A LA FÍSICA.

Un cuerpo de peso W es arrastrado sobre un plano horizontal mediante una fuerza cuya línea de acción forma un ángulo θ con el plano y cuya magnitud P está dado por:

$$P = \frac{\mu . w}{\mu\,\text{sen}\theta + \cos\theta}$$

Donde μ es coeficiente de rozamiento.

Probar que el empuje es mínimo para $\text{tg}\theta = \mu$.

Solución:

1. Tenemos: $P(\theta) = \frac{\mu\ \ w}{\mu\,\text{sen}\theta + \cos\theta}$

2. Para que el empuje $P(\theta)$ sea mínimo debe cumplir dos cosas:

1°. Que: $P'(\theta) = 0$, $P'(\theta) = \frac{dP}{d\theta}$

2°. Que $P''(\theta_0) > 0$, siendo θ_0 un punto singular.

Veamos:

De: $P(\theta) = \frac{\mu W}{\mu\,\text{sen}\theta + \cos\theta}$, obtenemos:

$$\frac{dP}{d\theta} = \frac{[\mu\,\text{sen}\theta + \cos\theta][\mu w]' - [\mu w][\mu\,\text{sen}\theta + \cos\theta]'}{[\mu\,\text{sen}\theta + \cos\theta]^2}$$

$$\frac{dP}{d\theta} = \frac{0 - [\mu w][\mu\cos\theta - \text{sen}\theta]}{[\mu\,\text{sen}\theta + \cos\theta]^2}$$

Haciendo: $\frac{dP}{d\theta} = 0$, tendremos:

$$-\mu w[\mu\cos\theta - \text{sen}\theta] = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \mu\cos\theta - \text{sen}\theta = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \mu = \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \qquad \mu = \text{tg}\theta$$

21 **PROBLEMA RELATIVO A LA FÍSICA.**

El tiempo de oscilación de un péndulo compuesto alrededor de un eje distante h pies del centro de gravedad G, está dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{h^2+k^2}{hg}}$$

siendo k el radio de giro alrededor de G. Probar que T es mínimo para $h = \pm k$ y hallar su valor mínimo.

Solución:

1. Tenemos que T es función de h.

$$T(h) = 2\pi\sqrt{\frac{h^2+k^2}{hg}}$$

2. Para que $T(h)$ tenga mínimo debe cumplir dos condiciones:

$$\frac{dT}{dh} = 0 \quad \wedge \quad \frac{d^2T}{dh^2} > 0$$ PARA ALGÚN PUNTO SINGULAR.

3. Hallemos: $\frac{dT}{dh}$

$$\frac{dT}{dh} = 2\pi\left[\frac{\left[\frac{h^2+k^2}{hg}\right]'}{2\sqrt{\frac{h^2+k^2}{hg}}}\right]$$

$$= 2\pi\left[\frac{\frac{hg(2h)-(h^2+k^2)(g)}{(hg)^2}}{2\sqrt{\frac{h^2+k^2}{hg}}}\right]$$

$$= 2\pi\left[\frac{g(h^2-k^2)}{2(hg)^2\sqrt{\frac{h^2+k^2}{hg}}}\right]$$

4. Hacer: $\frac{dT}{dh} = 0$

$$\Rightarrow \quad h^2 - k^2 = 0 \Rightarrow h = \pm k$$

PUNTOS SINGULARES

5. Con $h = k$ .obtenemos:

$$T(k) = 2\pi\sqrt{\frac{k^2+k^2}{kg}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{2k}{g}} \longleftarrow \text{ES EL VALOR MÍNIMO}$$

22 De una hoja circular hay que cortar un sector tal que enrollado nos de un embudo de la mayor capacidad posible.

Solución:

1. Sea la hoja circular (fig. 1) de centro "0" y radio "R". donde podemos apreciar el sector circular AOB cuyo arco es $\overset{\frown}{AB}$.

2. Del sector circular AOB deseamos construir un embudo (fig. 2.) de altura "h" y cuya base tenga radio $r = \frac{R\theta}{2\pi}$

3. Debemos recordar que el área del sector circular AOB es: $A' = \frac{R^2\theta}{2}$ y la longitud del arco $\overset{\frown}{AB}$ es: $\ell = \theta R$

4. De esto podemos deducir que el radio "r" de la base del embudo (o cono) se halla de la relación siguiente:

$$\theta R = 2\pi r \quad \begin{cases} \theta R = \text{longitud del arco } AB \\ 2\pi r = \text{longitud de la circunferencia de} \\ \qquad \text{la base del embudo} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{\theta R}{2\pi}$$

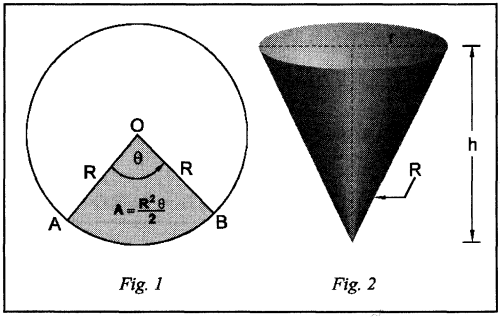


Fig. 1 *Fig. 2*

5. El embudo tiene volumen cuya fórmula es: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

6. Pero: r debe ser expresado en función de θ y R. h debe ser expresado en función de R y θ.

7. En 4. Tenemos: $r = \frac{\theta R}{2\pi}$

De la fig. 2 y por Pitágoras

$$h = \sqrt{R^2 - r^2}$$

$$= \sqrt{R^2 - \left(\frac{\theta R}{2\pi}\right)^2}$$

$$= \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}$$

8. Reemplazar 7 en 5.

$$V = \tfrac{1}{3}\pi\left(\frac{R\theta}{2\pi}\right)^2 \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}$$

$$V(\theta) = \frac{R^3}{24\pi^2}\theta^2\sqrt{4\pi^2 - \theta^2} \quad \ldots\ldots (8^*)$$

El volumen está expresado en función de θ.
R y π son constantes.

9. Para maximizar $V(\theta)$ debe cumplir dos condiciones:

1°. $\frac{dv}{d\theta} = 0$

2°. $\frac{d^2v}{d\theta^2} < 0$, para algún punto singular.

Veamos:

10. De (8*) obtenemos:

$$\frac{dv}{d\theta} = \frac{R^3}{24\pi^2}\left[(\theta^2)'\sqrt{4\pi^2 - \theta^2} + \theta(\sqrt{4\pi^2 - \theta^2})'\right]$$

$$= \frac{R^3}{24\pi^2}\left[2\theta\sqrt{4\pi^2 - \theta^2} + \theta^2\frac{(-2\theta)}{2\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}}\right]$$

$$= \frac{R^3}{24\pi^2}\left[\frac{2\theta(4\pi^2-\theta^2)-\theta^3}{\sqrt{4\pi^2-\theta^2}}\right]$$

$$= \frac{R^3}{24\pi^2}\left[\frac{8\pi^2\theta-3\theta^3}{\sqrt{4\pi^2-\theta^2}}\right]$$

11. Haciendo: $\frac{dv}{d\theta}=0$

$$\Rightarrow \quad 8\pi^2\theta-3\theta^3=0$$

$$\theta(8\pi^2-3\theta^2)=0$$

$$\Rightarrow \quad \theta=0 \quad \vee \quad 8\pi^2-3\theta^2=0$$

$$\theta^2=\frac{8\pi^2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \theta=0 \quad \vee \quad \theta=\pm 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$$

solo escogemos $\theta=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$

Porque es el único punto que maximisa la función $V(\theta)$.

23 Un depósito abierto, de hoja de lata, con fondo cuadrado, debe tener capacidad para "v" Litros ¿Qué dimensiones debe tener dicho depósito para que en su fabricación se necesita la menor cantidad de hoja de lata?

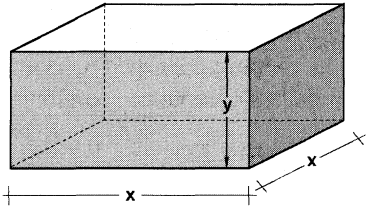
Solución:

1. Sea el depósito abierto de base cuadrado, cuyas dimensiones son:

x = Longitud de la base cuadrada

y = altura del depósito

$v = x^2y$: volumen del depósito, v es constante (dato conocido)



2. El problema pide las dimensiones que debe tener el depósito para que en su fabricación se use **LA MENOR CANTIDAD** de la hoja de lata. Es decir se pide **MINIMIZAR EL ÁREA CONFORMADA** por el **AREA LATERAL** + **AREA DE LA BASE**, cuya expresión matemática es:

$$A = AL + B \qquad \begin{cases} A: \text{ área total del depósito sin tapa.} \\ AL: \text{ área lateral.} \\ B: \text{ área de la base.} \end{cases}$$

$$(2^*) \qquad = 4xy + x^2$$

3. En 1 teníamos: $v = x^2y \Rightarrow y = \frac{V}{x^2}$

4. Sustituir: $y = \frac{v}{x^2}$ en (2*):

$$A = 4x\left(\frac{v}{x^2}\right) + x^2$$

$$A(x) = \frac{4v}{x} + x^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4^*)$$

5. Para hallar las dimensiones $x = ?$ $y = ?$ de modo que $A(x)$ tenga mínimo, se debe hacer 2 cosas:

1°. $\frac{dA}{dx} = 0$ ← CONDICIÓN NECESARIA PARA MINIMIZAR.

2°. $\frac{d^2A}{dx^2} > 0$ ← CONDICIÓN SUFICIENTE PARA QUE EXISTA MÍNIMO EN ALGÚN PUNTO SINGULAR.

6. De (4∗) obtenemos:

$$\frac{dA}{dx} = -\frac{4v}{x^2} + 2x$$

$$= \frac{-4v + 2x^3}{x^2} = \frac{2(x^3 - 2v)}{x^2} \ldots\ldots (6*)$$

7. Haciendo: $\frac{dv}{dx} = 0$

$$\Rightarrow \quad x^3 - 2v = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{2v}$$

8. De (6∗) obtenemos:

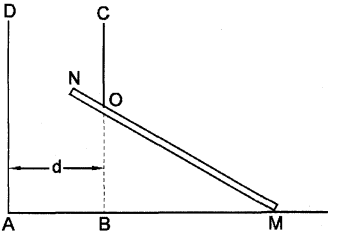
$$\frac{d^2A}{dx^2} = 2\left[\frac{x^2(3x^2) - (x^3 - 2v)(2x)}{x^4}\right]$$

$$= 2\left[\frac{x^3 + 4v}{x^3}\right]$$

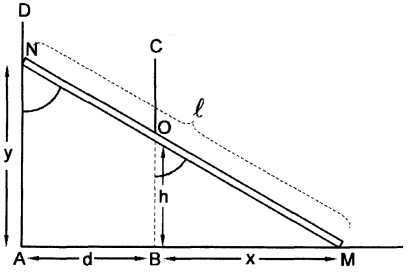
9. Se cumple:

$$\left.\frac{d^2A}{dx^2}\right]_{x=\sqrt[3]{2v}} = 2\left[\frac{(\sqrt[3]{2v})^3 + 4v}{(\sqrt[3]{2v})^3}\right] = 6 > 0$$

24 Determinar la altura mínima $h = OB$ que pueda tener la puerta de una torre vertical $ABCD$, para que a través de ella se pueda introducir en la torre una barra rígida MN de longitud "ℓ" cuyo extremo M resbalará a lo largo de la línea horizontal AB. La anchura de la torre es $d < \ell$. (ver. Fig. adjunta):



Solución: Hacer otra fig. auxiliar.



1. "ℓ" y "d" son constantes conocidos "h" y "x" son variables.

2. Se debe expresar h en términos de "x", "ℓ" y "d".

3. Por semejanza de triángulos tenemos:
El triángulo rectángulo NAM es semejante al triángulo rectángulo OBM y por tanto establecemos la siguiente proporción:

$$\frac{y}{h} = \frac{d + x}{x} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{xy}{d + x} \ldots\ldots (3*)$$

4. Debemos expresar h en función sólo de x. En el triángulo rectángulo NRM, por el **TEOREMA DE PITÁGORAS**, tenemos:

$$\ell^2 = y^2 + (d+x)^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 = \ell^2 - (d+x)^2 \Rightarrow y = \sqrt{\ell^2 - (d+x)^2}$$

5. Sustituir en (3*):

$$h(x) = \frac{x\sqrt{\ell^2 - (d+x)^2}}{d+x} \quad \ldots\ldots\ldots$$

La forma más sencilla de hallar $\frac{dh}{dx}$ es aplicar, en primer lugar logaritmo natural en ambos miembros.

Veamos:

$$\operatorname{Ln}(h) \underset{\text{derivar}}{=} \operatorname{Ln} x + \frac{1}{2}\operatorname{Ln}[\ell^2 - (d+x)^2] - \operatorname{Ln}(d+x)$$

$$\frac{\frac{dh}{dx}}{h} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\left[\frac{-2(d+x)}{\ell^2-(d+x)^2}\right] - \frac{1}{d+x}$$

$$\frac{\frac{dh}{dx}}{h} = \frac{(x+d)[\ell^2-(d+x)^2] - x(x+d)^2 - x[\ell^2-(x+d)^2]}{x(x+d)[\ell^2-(d+x)^2]}$$

$$= \frac{\ell^2(x+d) - (x+d)^3 - x(x+d)^2 - x\ell^2 + (x+d)^2}{x(x+d)[\ell^2-(d+x)^2]}$$

$$= \frac{\ell^2 x + \ell^2 d - (x+d)^3 - x\ell^2}{x(x+d)[\ell^2-(d+x)^2]}$$

$$\frac{\frac{dh}{dx}}{h} = \frac{\ell^2 d - (x+d)^3}{x(x+d)[\ell^2-(d+x)^2]}$$

$$\frac{dh}{dx} = \frac{h[\ell^2 d - (x+d)^3]}{x(x+d)[\ell^2-(d+x)^2]}$$

$$\frac{dh}{dx} = \left[\frac{x\sqrt{\ell^2-(d+x)^2}}{x+d}\right]\left[\frac{\ell^2 d - (x+d)^3}{x(x+d)[\ell^2-(d+x)^2]}\right]$$

$$= \frac{\ell^2 d - (x+d)^3}{(x+d)^2\sqrt{\ell^2-(d+x)^2}}$$

6. Haciendo: $\frac{dh}{dx} = 0$, se obtiene:

$$\ell^2 d - (x+d)^3 = 0$$

$$\Rightarrow \qquad (x+d)^3 = \ell^2 d$$

$$(x+d) = \sqrt[3]{\ell^2 d} \qquad \boxed{x = \sqrt[3]{\ell^2 d} - d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6*)$$

7. Sustituir (6*) en (5):

$$h = \frac{(\sqrt[3]{\ell^2 d} - d)\sqrt{\ell^2 - [\sqrt[3]{\ell^2 d} - d + d]^2}}{d + \sqrt[3]{\ell^2 d} - d}$$

$$= \frac{(\sqrt[3]{\ell^2 d} - d)\sqrt{\ell^2 - (\ell^{2/3} d^{1/3})^2}}{\sqrt[3]{\ell^2 d}}$$

$$= \left[\frac{\sqrt[3]{\ell^2 d}}{\sqrt[3]{\ell^2 d}} - \frac{d}{\sqrt[3]{\ell^2 d}}\right]\sqrt{\ell^2 - \ell^{4/3} d^{2/3}}$$

$$= \left(1 - \frac{d^{2/3}}{\ell^{2/3}}\right)\sqrt{\ell^2 - \ell^{4/3} d^{2/3}}$$

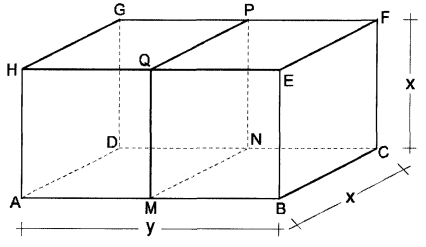
$$= (\ell^{2/3} - d^{2/3})\sqrt{\frac{\ell^2}{\ell^{4/3}} - \frac{\ell^{4/3} d^{2/3}}{\ell^{4/3}}}$$

$$= (\ell^{2/3} - d^{2/3})\sqrt{\ell^{2/3} - d^{2/3}}$$

$$\boxed{h = (\ell^{2/3} - d^{2/3})^{3/2}}$$

25 Se va a construir un embalaje con tapapara contener $2m^3$ de naranjas. Se va dividir en dos partes mediante una separación paralela a sus extremos cuadrados. Encuentre las dimensiones del embalaje que requiere la menor cantidad de material.

Solución:



1. Se pide maximizar el área total.

$$AT = \underbrace{\text{dos veces área de la base}}_{2xy} + \underbrace{\text{área lateral}}_{(2x+2y)x} + \underbrace{\text{área de extremos cuadrados}}_{x^2}$$

Que se puede expresar como:

$$AT = 2xy + (2x - 2y)x + x^2 \ldots\ldots (1*)$$

2. Pero: $x^2 y = 2$ ←VOLUMEN DE PARALELEPÍPEDO

$$y = \frac{2}{x^2}$$

3. Sustituir 2 en (1*):

$$AT = 2x \cdot \frac{2}{x^2} + \left(2x + 2 \cdot \frac{2}{x^2}\right) + x^2$$

$$= \frac{8}{x} + 3x^2$$

4. Para que AT sea mínimo debe cumplir dos requisitos:

1°. Que $\frac{d}{dx}(AT) = 0$

2°. Que $\frac{d^2}{dx^2}(AT) > 0$ ← Para algún punto singular.

Veamos:

5. De $A = \frac{8}{x} + 3x^2$, obtenemos:

$$\frac{d}{dx}(AT) = -\frac{8}{x^2} + 6x = \frac{6x^3 - 8}{x^2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(AT) = \frac{16}{x^3} + 6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5^*)$$

6. Haciendo:

$$\frac{d}{dx}(AT) = 0 \Rightarrow 6x^3 - 8 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{2}{\sqrt[3]{6}}$$

punto angular

Al sustituir en 2: $y = \frac{2}{(\sqrt[3]{6})^2} = \frac{2}{\sqrt[3]{36}}$

7. Al sustituir: $x = \frac{2}{\sqrt[3]{6}}$ en (5^*)

$$\frac{d^2}{dx^2}(AT)\Big]_{x=\frac{2}{\sqrt[3]{6}}} = \left(\frac{16}{\sqrt[3]{6}}\right) + 6 > 0$$

8. Conclusión: las dimensiones del embalaje son:

$$x = \frac{2}{\sqrt[3]{6}} \; ; \; y = \frac{2}{\sqrt[3]{36}}$$

26 **PROBLEMA DE FÍSICA.** La amplitud I de la corriente alterna que fluye en un circuito eléctrico con inductancia L, capacidad C y resistencia R en serie está dando por:

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(Lw - \frac{1}{wc}\right)^2}}$$

donde v es la amplitud del voltaje alternante y $w = 2\pi f$ es la frecuencia de voltaje, además f es ciclos por segundos.

Demostrar que I es un máximo cuando $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{Lc}}$ ciclos por segundo.

Solución:

1. En la formula de I tener en cuenta que:

$$\text{Son variables } \begin{cases} w \\ f \end{cases}, \text{ constantes } \begin{cases} V \\ R \\ L \\ C \\ \pi \end{cases}$$

2. Para derivar I debe expresarse en función sólo de la variable f.

3. Sustituir: $w = 2\pi f$ en I:

$$I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + \left(2L\pi f - \frac{1}{2\pi cf}\right)^2}}$$

4. Ahora hallemos $\frac{dI}{df}$. Pero antes, expresemos I como:

$$I = v\left[R^2 + \left(2L\pi f - \frac{1}{2\pi cf}\right)^2 \right]^{-1/2}$$

$$\frac{dI}{df} = -\frac{1}{2}v\left[R^2 + \left(2L\pi f - \frac{1}{2\pi cf}\right)^2 \right]^{-3/2} \left[0 + 2\left(2L\pi f - \frac{1}{2\pi cf}\right)\left(2L\pi - \left(\frac{1}{2\pi c}\right) - \left(\frac{1}{f^2}\right)\right)\right]$$

$$= -\frac{v\left(2L\pi f - \frac{1}{2\pi cf}\right)\left[2L\pi + \frac{1}{2\pi f^2} \right]}{\sqrt{\left[R^2 + \left(2L\pi f - \frac{1}{2\pi cf}\right)^2 \right]^3}}$$

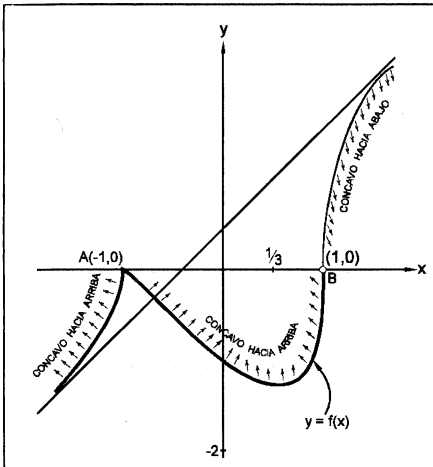
5. Al hacer $\frac{dI}{df} = 0$, sólo corresponde que: $2L\pi f - \frac{1}{2\pi cf} = 0$

$$\Rightarrow \quad 4\pi^2 Lcf^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad f^2 = \frac{1}{4\pi^2 Lc} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi\sqrt{Lc}}$$

15. CONCAVIDAD Y PUNTOS DE INFLEXIÓN

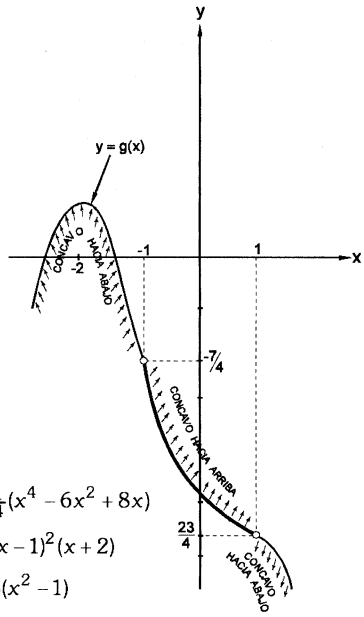
Introducción: Observemos los gráficos de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente.



$$f(x) = (x+1)^{2/3}(x-1)^{1/3}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}\frac{(3x-1)}{3(x+1)^{1/3}(x-1)^{2/3}}$$

$$f''(x) = \frac{1}{9}\frac{8}{9(x+1)^{4/3}(x-1)^{5/3}}$$



$$g(x) = -\frac{1}{4}(x^4 - 6x^2 + 8x)$$

$$g'(x) = -(x-1)^2(x+2)$$

$$g''(x) = -3(x^2 - 1)$$

Tenemos:

1. En los intervalos: $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle -1, 1\rangle$ $f(x)$ es cóncavo hacia arriba.
2. En el intervalo: $\langle 1, +\infty\rangle$, $f(x)$ es: cóncavo hacia abajo.
3. $B(1, 0)$ es un punto de **INFLEXIÓN**, porque $f(x)$ sufre un cambio de curvatura: de cóncavo hacia arriba pasa a cóncavo hacia abajo.
4. $A(-1, 0)$ A **NO ES** punto de inflexión, porque $f(x)$ no sufre cambio de curvatura.

Tenemos:

1. En los intervalos: $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$ $g(x)$ es cóncavo hacia abajo.
2. En el intervalo: $\langle -1, 1\rangle$, $g(x)$ es: cóncavo hacia arriba.
3. $\left(-1, -\frac{7}{4}\right)$ es punto de inflexión, porque $g(x)$ cambia de curvatura: de cóncavo hacia abajo pasa a cóncavo hacia arriba.
4. $\left(1, -\frac{23}{4}\right)$ es punto de **INFLEXIÓN**, porque $g(x)$ cambia de curvatura: de cóncavo hacia abajo.

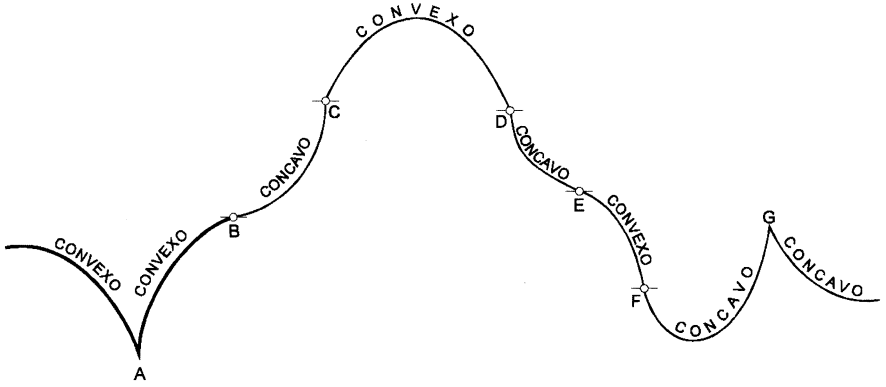
En este capítulo nos toca responder dos interrogantes:

1. ¿Cómo se hallan los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo, respectivamente?
2. ¿Cómo se hallan los puntos de inflexión?

   La respuesta es: los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión se hallan analizando la segunda derivada de la función en estudio.

   El análisis que se deberá hacer con la segunda derivada $f''(x)$, es similar al análisis que se hizo con la primera derivada $f'(x)$, cuando buscábamos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, para luego hallar los máximos y mínimos relativos de $f(x)$.

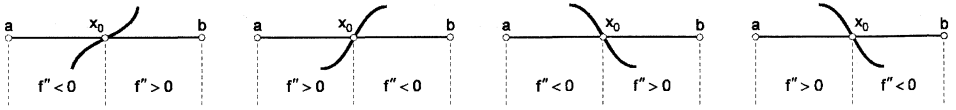
NOTA: *Visto el gráfico de las curvas desde arriba se observan dos curvaturas: cóncavo (cóncavo hacia arriba) y convexo (cóncavo hacia abajo).*



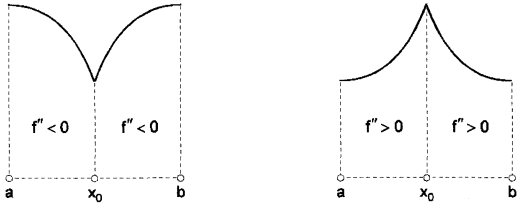
A y G no son puntos de inflexión. B, C, D, E, F son puntos de inflexión.

Resumen: Si la función $f(x)$ es dos veces diferenciable en un intervalo abierto I, entonces al analizar la segunda derivada $f''(x)$, deducimos 6 proposiciones básicas:

1. Lo posibles puntos de **INFLEXIÓN** de la función $f(x)$ se hallan en:
   a) Los: $x \in I$, tal que $f''(x) = 0$.
   b) Los: $x \in I$, tal que $\nexists\, f''(x)$.
2. Si $f''(x) > 0$, $\forall x \in I$, entonces $f(x)$ es cóncava hacia arriba sobre I.
3. Si $f''(x) < 0$, $\forall x \in I$, entonces $f(x)$ es cóncava hacia abajo sobre I.
4. Si x_0 es un punto del intervalo $I = \langle a, b \rangle$, tal que: la segunda derivada $f''(x)$ cambia de signo al pasar de $\langle a, x_0 \rangle$ hacia $\langle x_0, b \rangle$, entonces $(x_0, f(x_0))$ se llama **PUNTO DE INFLEXIÓN** de la gráfica de $f(x)$.



5. Si $f''(x)$ **NO CAMBIA** de signo al pasar de $\langle a, x_0 \rangle$ al intervalo $\langle x_0, b \rangle$, entonces $(x_0, f(x_0))$ **NO ES** punto de inflexión.



6. Si $x_0 \in I =$ **INTERVALO ABIERTO** y $f(x)$ es diferenciable sobre I, entonces $(x_0, f(x_0))$ es punto de inflexió $\iff$ existe $f''(x_0) \ \wedge \ f''(x_0) = 0$.

Antes de formalizar la definición de concavidad de una curva, hagamos dos ilustraciones gráficas:

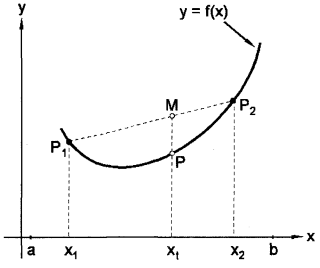


Fig. 1

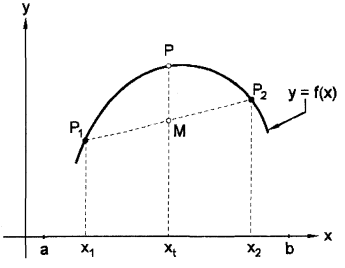


Fig. 2

En ambas figuras observemos la posición de los puntos M y P, donde:

M pertenece a la cuerda $\overline{P_1 P_2}$, $P_1 , P_2 \in Gr(f)$.

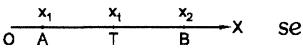
P pertenece al gráfico de f.

En la fig.1, el punto P está por debajo del punto M, en este caso $f(x)$ es "cóncavo hacia arriba", pues "ordenada de P es menor que ordenada de M".
En la fig. 2, el punto P está por encima del punto M, en este caso es "cóncavo hacia abajo"; pues "ordenada de P es mayor que ordenada de M".

La definición de concavidad se hace, precisamente comparando la "ordenada" de P con la "**ORDENADA**" de M, siendo x_t la abscisa común para ambos puntos y que $x_t \in \langle x_1, x_2 \rangle$.

El problema consiste en hallar "Las ordenadas de P y de M siendo x_t la abscisa común con $x_t \in \langle x_1, x_2 \rangle$.

En 1er lugar, veamos que forma tiene x_t, $\forall\, x_t \in \langle x_1, x_2 \rangle$.

1) En el eje x 

se tiene los siguientes segmentosde rectas:

$\overrightarrow{OA} = x_1$; $\overrightarrow{OT} = x_t$; $\overrightarrow{OB} = x_2$

2) $x_t - x_1$ es positivo, pues $x_t > x_1$.

$x_2 - x_1$ es positivo, pues $x_2 > x_1$.

3) Establecemos la siguiente razón geométrica $\frac{x_t - x_1}{x_2 - x_1}$,que es positivo y menor que 1

Es menor que 1, porque: $0 < (x_t - x_1) < (x_2 - x_1)$.

$$0 < \frac{x_t - x_1}{x_2 - x_1} < 1$$

4) Llamemos: $t = \frac{x_t - x_1}{x_2 - x_1}$

$$x_t - x_1 = t(x_2 - x_1) \;\Rightarrow\; \boxed{x_t = (1-t)x_1 + t x_2} \quad , \quad 0 < t < 1$$

En 2do lugar, hallemos las ordenas de P y de M.

5) Como $P \in Gr(f) \wedge x_t$ es la abscisa de P, entonces la ordenada de P es:

$$\boxed{f(x_t) = f((1-t)x_1 + t x_2))}$$

Luego: $P = (x_t\,,\, f(1-t)x_1 + t x_2)$

6) Para hallar la ordenada de M, establecemos una proporción en el trapecio $x_t P_1 P_2 x_2$:

$$t = \frac{x_t - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{M - P_1}{P_2 - P_1} \;\Rightarrow\; t = \frac{M - P_1}{P_2 - P_1}$$

$$\Rightarrow\; M = P_1 + t(P_2 - P_1)$$
$$= (x_1, f(x_1)) + t[(x_2, f(x_2)) - (x_1, f(x_1))]$$
$$= (x_1, f(x_1)) + t[x_2 - x_1\,,\, f(x_2) - f(x_1)]$$
$$= (x_1, t(x_2 - x_1)\,,\, f(x_1) + t[f(x_2) - f(x_1)]$$

Como vemos, la ordenada de M es: $\boxed{f(x_1) + t[f(x_2) - f(x_1)]}$

Por lo expuesto, estamos preparados para definir la concavidad.

Definición 1: La gráfica de la función f es **cóncava hacia arriba** en el intervalo $\langle a,b\rangle$, si $\forall\, x \in \langle a,b\rangle$ se cumple:

$$f((1-t)x_1 + tx_2) < (1-t)f(x_1) + tf(x_2),\ t \in \langle 0,1\rangle$$

ORDENADA DE P (sobre $f((1-t)x_1+tx_2)$) — ORDENADA DE M (sobre $(1-t)f(x_1)+tf(x_2)$)

Definición 2: La gráfica de la función f es **cóncava hacia abajo** en el intervalo $\langle a,b\rangle$, si $\forall\, x \in \langle a,b\rangle$ se cumple:

$$f((1-t)x_1 + tx_2) > (1-t)f(x_1) + tf(x_2),\ t \in \langle 0,1\rangle$$

Nuestro objetivo es relacionar la 2ª derivada $f''(x)$ con las definiciones 1, 2 a través del siguiente teorema:

Teorema 21: Sea f diferenciable en el intervalo $\langle a,b\rangle$:

a) Si $f''(x) > 0$, $\forall\, x \in \langle a,b\rangle \Rightarrow$ la gráfica de f es cóncava hacia arriba sobre $\langle a,b\rangle$

b) Si $f''(x) < 0$, $\forall\, x \in \langle a,b\rangle \Rightarrow$ la gráfica de f es cóncava hacia abajo sobre $\langle a,b\rangle$

Prueba de b)

HIPÓTESIS $\{ f''(x) > 0,\ \forall\, x \in \langle a,b\rangle$ **TÉSIS** $\{$ Debo probar que: $f((1-t)x_1 + tx_2) < (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$ con $t \in \langle 0,1\rangle$, para afirmar que f es cóncava hacia arriba sobre $\langle a,b\rangle$

1) Sean $x_1, x_2 \in \langle a,b\rangle$, con $x_1 < x_2$. x_1 c_1 x_t c_2 x_2

Sea $t \in \langle 0,t\rangle$, t fijo con $x_t \in \langle x_1, x_2\rangle$, donde $x_t = (1-t)x_1 + tx_2$.

2) Aplicando el **T.V.M.** sobre $[x_1, x_t]$ implica que $\exists\, c_1 \in \langle x_1, x_t\rangle$, tal que:

$$f'(c_1) = \frac{f(x_t) - f(x_1)}{x_t - x_1} = \frac{f((1-t)x_1 + tx_2) - f(x_1)}{(1-t)x_t - tx_2 - x_1} = \frac{f((1-t)x_1 + tx_2) - f(x_1)}{t(x_2 - x_1)}$$

3) Ahora, aplicando el **T.V.M.** sobre $[x_t, x_2]$ implica que $\exists\, c_2 \in \langle x_t, x_2\rangle$, tal que:

$$f'(c_2) = \frac{f(x_2) - f(x_t)}{x_2 - x_t} = \frac{f(x_2) - f((1-t)x_1 + tx_2)}{x_2 - [(1-t)x_1 + tx_2]} = \frac{f(x_2) - f((1-t)x_1 + tx_2)}{(1-t)(x_2 - x_1)}$$

4) Por hipótesis se tiene que $f''(x)>0$, $x\in\langle a,b\rangle$, esto implica que $f'(x)$ es creciente $\forall\, x\in\langle a,b\rangle$.

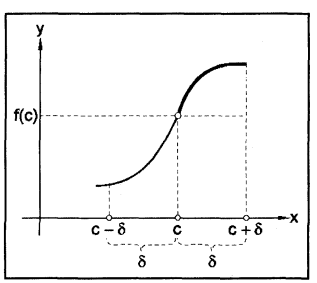
5) Como c_1, $c_2\in\langle x_1,x_2\rangle\subset\langle a,b\rangle$ con $c_1<c_2\ \wedge\ f'$ es creciente, entonces:

$$\begin{aligned}
f'(c_1) &< f'(c_2)\\
\frac{f((1-t)x_1+tx_2)-f(x_1)}{t(x_2-x_1)} &< \frac{f(x_2)-f((1-t)x_1+tx_2)}{(1-t)(x_2-x_1)}\\
(1-t)f((1-t)x_1+tx_2)-(1-t)f(x_1) &< t\cdot f(x_2)-t\cdot f((1-t)x_1+tx_2)\\
f((1-t+tx_2)-t\cdot \underline{f((1-t)x_1+tx_2)}-(1-t)f(x_1) &< t\cdot f(x_2)-\underline{t\cdot f((1-t)x_1+tx_2)}\\
f((1-t)x_1+tx_2) &< (1-t)f(x_1)+tf(x_2)
\end{aligned}$$

6) Esto implica que f es cóncavo hacia arriba sobre $\langle a,b\rangle$.

Prueba de b) Queda como ejercicio.

Definición 3. Un punto $(c,f(x))$ sobre la gráfica de una función $f(x)$ donde la dirección de concavidad cambia, se llama **PUNTO DE INFLEXION.**



Esto implica que existe una vecindad:

$B(c,\delta)=\langle c-\delta,c+\delta\rangle$, tal que $f(x)$ es cóncava hacia arriba en $\langle c-\delta,c\rangle$ y cóncavo hacia abajo en $\langle c,c+\delta\rangle$. o viceversa.

Teorema 22. Sea $(c\,,f(c))$ un punto **de inflexión** de la gráfica de la función $f(x)$, diferenciable en el intervalo $\langle a,b\rangle$ con $c\in\langle a,b\rangle$. Si existe: $f''(c)\ \Rightarrow\ f''(c)=0$.

Prueba:
La demostración es por reducción al absurdo. Las hipótesis son:

h_1: $(c,f(c))$ es un punto de inflexión del Grf. Esto es, en una vecindad $\langle c-\delta,c+\delta\rangle$ de c hay cambio de dirección de la concavidad.

h_2: $f(x)$ es diferenciable en $\langle a,b\rangle$ con $c\in\langle a,b\rangle$.

h_3: $\exists\, f''(c)$.

La tesis es $T: f''(c)=0$, $\sim T:\ \underbrace{f''(c)>0}_{\sim T_i}\ \vee\ f''(c)<0$

Debo probar: $\sim T_1\ \wedge\ h_2\ \wedge\ h_3\ \Rightarrow\ \sim h_1$

Veamos:

1. Supongamos que: $\sim T_1 : f''(c) > 0$ Debo probar $\sim h_1$: en $\langle c-\delta, c+\delta\rangle$ no hay cambio de dirección de la derivada.

2. Sea: $g(x) = f'(x)$.

3. Si $x = c \Rightarrow g'(c) = f''(c)$.

4. Según la hipótesis: existe $f''(c) = g'(c) > 0$.

5. La definición de $g'(c)$ es $g'(c) = \lim\limits_{x\to c} \frac{g(x)-g(c)}{x-c}$, $x \neq c$.

Si existe $g'(c)$ y haciendo $g'(c) = L > 0$, aplicamos la definición de límite:
$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)$, tal que, si:

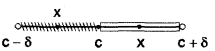
$$x \in \mathrm{Dom}(f) \wedge \underbrace{0 < |x-c| < \delta}_{c-\delta < x < c+\delta} \Rightarrow \left|\frac{g(x)-g(c)}{x-c} - L\right| < \varepsilon$$

6. Como el valor absoluto se cumple $\forall\, \varepsilon > 0$, en particular se cumplirá para $\varepsilon = L$, así tendremos:

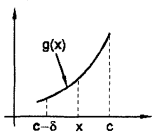
$$\left|\frac{g(x)-g(c)}{x-c} - L\right| < L \iff -L < \frac{g(x)-g(c)}{x-c} - L < L$$

$$0 < \frac{g(x)-g(c)}{x-c} < 2L$$

7. El cociente $\frac{g(x)-g(c)}{x-c}$ es positivo para dos casos:

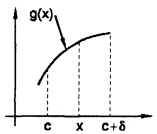


a) Si $c-\delta < x < c$, entonces $x - c < 0$, como $\frac{g(x)-g(c)}{x-c} > 0$, luego: $g(x) - g(c) < 0$



$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} g(x) < g(c) \\ \hline \forall\, x \in \langle c, c+\delta\rangle \end{array}}$$

b) Si $c < x < c+\delta$, entonces $x - c > 0$, como $\frac{g(x)-g(c)}{x-c} > 0$, luego: $g(x) - g(c) > 0$



$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} g(x) > g(c) \\ \hline \forall\, x \in \langle c, c+\delta\rangle \end{array}}$$

8. Por a) afirmamos que: $g(x) = f'(x)$, es creciente sobre $\langle c-\delta, c\rangle$.

Por b) afirmamos que: $g(x) = f'(x)$, es creciente sobre $\langle c, c+\delta\rangle$.

$\Rightarrow$ $f'(x)$ es creciente sobre $\langle c-\delta, c+\delta\rangle$.

9. Como: $g(x)=f'(x) \;\wedge\; \exists\, g'(c)=f''(c) \Rightarrow f'(x)$ es continua en $x=c$.

NOTA: Si existe $f'(c) \Rightarrow f(x)$ es continua en $x=c$. Igualmente, si existe $f''(c) \Rightarrow f'(x)$. es continua en $x=c$.

Ya tenemos: $\begin{cases} f'(x) \text{ es creciente sobre } \langle c-\delta, c+\delta\rangle \Rightarrow f''(x)>0 \,\forall\, x\in\langle c-\delta, c+\delta\rangle \\ f'(x) \text{ es continua en } x=c \end{cases}$

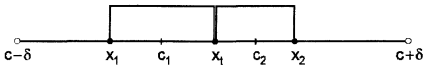
Ahora nos falta probar si $f(x)$ es cóncava hacia arriba sobre $\langle c-\delta\,,\, c+\delta\rangle$.

10. Por hipótesis: $f(x)$ es diferenciable en $\langle a,b\rangle$, en particular es diferenciable en: $\langle c-\delta, c+\delta\rangle \subset \langle a,b\rangle$.

11. $\forall\, x_1, x_2 \in \langle c-\delta, c+\delta\rangle$ con $x_1 < x_2$; podemos aplicar el **T.V.M.** a $f(x)$ en los intervalos cerrados $[x_1, x_t] \;\wedge\; [x_t, x_2]$, donde $x_t = (1-t)x_1 + t\,x_2$, $t\in\langle 0,1\rangle$.

a) Aplicando el **T.V.M.** en $[x_1, x_t]$: $\exists\, c_1 \in \langle x_1, x_t\rangle$, tal que, $\dfrac{f(x_t)-f(x_1)}{x_t - x_1} = f'(c_1)$.

b) Aplicando el **T.V.M.** en $[x_t, x_2]$: $\exists\, c_2 \in \langle x_1, x_2\rangle$, tal que, $\dfrac{f(x_2)-f(x_t)}{x_2 - x_t} = f'(c_2)$.



12. Donde: $c-\delta < x_1 < c_1 < x_t < c_2 < x_2 < c+\delta$ y como $f'(x)$ es creciente sobre $\langle c-\delta\,,\, c+\delta\rangle$, entonces:

$$f'(c_1) < f'(c_2)$$

$$\frac{f(x_t)-f(x_1)}{x_t - x_1} < \frac{f(x_2)-f(x_t)}{x_2 - x_t} \quad , \quad x_t = (1-t)x_1 + t\,x_2 \text{ con } t\in\langle 0\,,1\rangle$$

$$f((1-t)x_1 + t\,x_2) < (1-t)f(x_1) + t\cdot f(x_2) \quad , \quad t\in\langle 0\,,1\rangle$$

13. Entonces f es **cóncava hacia arriba** sobre $\langle c-\delta\,,\, c+\delta\rangle$, lo cual es absurdo, porque la concavidad de f debería cambiar de dirección en $c\in\langle c-\delta\,,\, c+\delta\rangle$ Esto contradice a la hipótesis que afirma $(c\,,\, f(c))$ es punto de inflexión $(\sim h_1)$.

14. Igualmente, si suponemos que: $f''(c)<0$ llegaremos a contradecir la hipótesis h_1

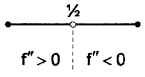
15. Por tanto: no puede ser $f''(c)>0 \;\vee\; f''(c)<0$, entonces debe ser $f''(c)=0$.

Observación.- El recíproco del Teorema 23 no siempre es verdadero. Es decir si $f''(c)=0$, ello no necesariamente implica que $(c, f(c))$ sea un punto de inflexión.

Ejemplo: Sea:

$$f(x)=(2x-1)^6-1$$
$$f'(x)=6(2x-1)^5(2)$$
$$=12(2x-1)^5$$
$$f''(x)=60(2x-1)^4(2)$$
$$=120(2x-1)^4$$

$$f''(x)=120(2x-1)^4 \begin{cases} f''=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \\ f''>0 \Rightarrow x\in \mathbb{R} \\ f''<0 \Rightarrow \phi \end{cases}$$



Como vemos, $f''(x)$ no cambia de signo al pasar de $\langle -\infty, 1/2\rangle$ a $\langle 1/2, +\infty\rangle$, entonces la concavidad no varía manteniéndose siempre hacia arriba.
Luego $(1/2, f(1/2))$ no es punto de inflexión de la gráfica de f:

15.1. REGLAS PARA POSIBLES PUNTOS DE INFLEXIÓN

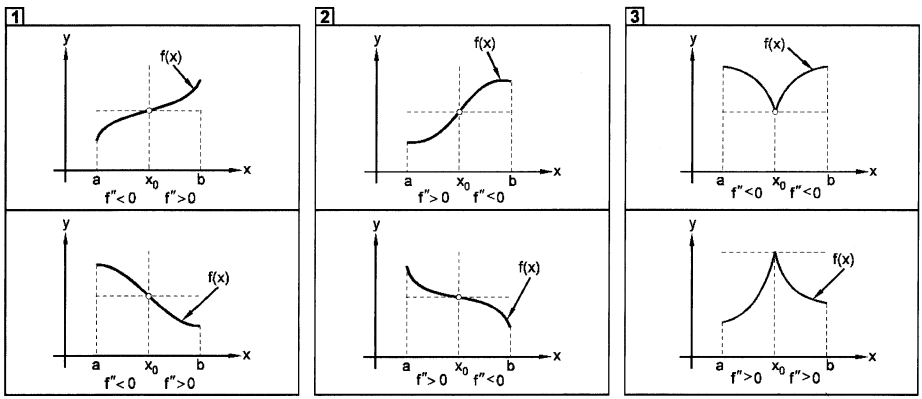
Teorema 23. Sea $f(x)$ una función continua sobre el intervalo abierto $\langle a,b\rangle$.
Sea $x_0 \in \langle a,b\rangle$, donde $f''(x_0)=0$ ó $\nexists f''(x_0)$, entonces:

1) Si: $f''(x)<0, \forall x\in\langle a,x_0\rangle \wedge f''(x)>0, \forall x\in\langle x_0,b\rangle \Rightarrow (x_0, f(x_0))$ es pto. de **INFLEXIÓN**

2) Si: $f''(x)>0, \forall x\in\langle a,x_0\rangle \wedge f''(x)<0, \forall x\in\langle x_0,b\rangle \Rightarrow (x_0, f(x_0))$ es pto. de **INFLEXIÓN**

3) $\left[\begin{array}{cc} f''(x)>0 & \wedge \quad f''(x)>0 \\ \forall\, x\in\langle a,x_0\rangle & \forall\, x\in\langle x_0,b\rangle \end{array}\right] \vee \left[\begin{array}{cc} f''(x)<0 & \wedge \quad f''(x)<0 \\ \forall\, x\in\langle a,x_0\rangle & \forall\, x\in\langle x_0,b\rangle \end{array}\right] \Rightarrow (x_0, f(x_0))$ no es punto de inflexión

Ilustración Gráfica:



15.2. APLICACIONES AL TRAZADO DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Trazar el gráfico de una función es muy importante ya que es una forma objetiva de apreciar el comportamiento de la función.

Los pasos a seguir pueden ser los siguientes:

1. Determinar el dominio de la función $f(x)$.

2. Determinar las intersecciones con los ejes.

3. Verificar las simetrías con respecto a los ejes y con respecto al origen.

4. Determinar las asíntotas: verticales (límites laterales en los puntos de discontinuidad), las asíntotas horizontales y oblicuas (límites en $x \to \pm\infty$).

5. Hallar la 1ª derivada $f'(x)$, resolver $\begin{cases} a) & f' = 0 \\ b) & f' > 0 \\ c) & f' < 0 \end{cases}$ y determinar los extremos de la función $f(x)$.

6. Hallar la 2ª derivada $f''(x)$, resolver $\begin{cases} a) & f'' = 0 \\ b) & f'' > 0 \\ c) & f'' < 0 \end{cases}$ y hallar los puntos de inflexión

7. Construir la gráfica de la función.

Ejemplo 1: Graficar: $f(x) = 5(x-1)^{2/3} - (x-1)^{5/3}$

Solución:

1. $\text{Dom}(f) = x \in \boldsymbol{R}$, porque la raíz cubica es cero, positiva o negativa.

2. Intersecciones:
   Con el eje x: hacemos $f(x) = 0$

$$\Rightarrow \quad 5(x-1)^{2/3} - (x-1)^{5/3} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x-1)^{2/3}[5-(x-1)] = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x-1)^{2/3}(6-x) = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = 1 \ \vee \ x = 6$$

3. Simetría: no hay.

4. Asíntotas: no tiene.

5. $f'(x)=\frac{10}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}-\frac{5}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}}$

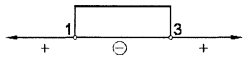
$f'(x)=\frac{5}{3}\cdot\frac{(3-x)}{\sqrt[3]{x-1}}$

a) $f'(x)=0 \Rightarrow x=0$, $\nexists f'(1)$. Los puntos críticos son: $\{0,1\}$.

b) $f'(x)>0 \Rightarrow \frac{5}{3}\cdot\frac{(3-x)}{\sqrt[3]{x-1}}>0$, racionalizar.

$$\Rightarrow \frac{5}{3}\cdot\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x-1}(x-3)<0$$

$$\frac{x-3}{x-1}<0$$



$\Rightarrow x\in\langle 1,3\rangle$

c) $f''(x)=\frac{5}{3}\left[\frac{\sqrt[3]{x-1}(-1)-(3-x)\cdot(x-1)^{-\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\right]$

$=-\frac{10}{9}\frac{x}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

Extremos:

a) Existe mínimo en $x=1$ que es $f(1)=0$.

b) Existe máximo en $x=3$ que es $f(3)=3\sqrt[3]{4}\approx 4.76$

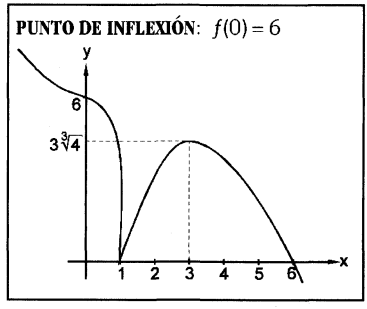
6. $f''(x)=\frac{5}{3}\left[\frac{\sqrt[3]{x-1}(-1)-(3-x)\cdot\frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\right]$

$=-\frac{10}{9}\frac{x}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$

a) $f''(x)=0 \Rightarrow x=0$, $\nexists f''(1)$.

b) $f''(x)>0 \Rightarrow x<0$: cóncava hacia arriba.

c) $f''(x)<0 \Rightarrow x>0$: cóncava hacia abajo.



Ejemplo 2. Graficar $f(x)=\frac{x^3-2}{(x-1)^2}$

Solución:

1. $\text{Dom}(f)=x\in\mathbb{R}-\{x=1\}$.
2. Intersecciones:
   a) Con eje x: $f(x)=0 \Rightarrow x^3-2=0 \Rightarrow x=\sqrt[3]{2}$
   b) Con eje y: $x=0 \Rightarrow f(0)=-2$

3. Simetría: No hay

4. Asíntotas

   a) Verticales: $x = 1$

   b) Horizontales: No hay, pues $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$

   c) Oblicuas: $y = ax + b$, donde:

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^3 - 2}{x(x-1)^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{2}{x^3}}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} = 1$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - bx] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^3 - 2}{(x-1)^2} - x \right]$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^3 - 2 - x^3 + 2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} \right]$$

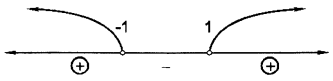
$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{2x^2 - x - 2}{x^2 - 2x + 1} \right] = 2$$

La asíntota oblicua es $y = x + 2$.

5. $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2 \cdot 3x^2 - (x^3 - 2) \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \dfrac{(x+1)(x-2)^2}{(x-1)^3}$

   a) $f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{(x+1)(x-2)^2}{(x-1)^3} = 0 \begin{cases} \nearrow x = -1 \\ \searrow x = 2 \end{cases}$. Puntos críticos $\{-1, 2\}$

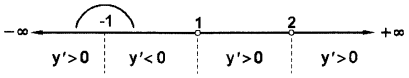
   b) $f'(x) > 0 \Rightarrow \dfrac{(x+1)(x-2)^2}{(x-1)^3} > 0$



$$\Rightarrow \frac{x+1}{x-1} > 0$$

$$\Rightarrow x \in \langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle$$

   c) $f'(x) < 0 \Rightarrow x \in \langle -1, 1 \rangle$



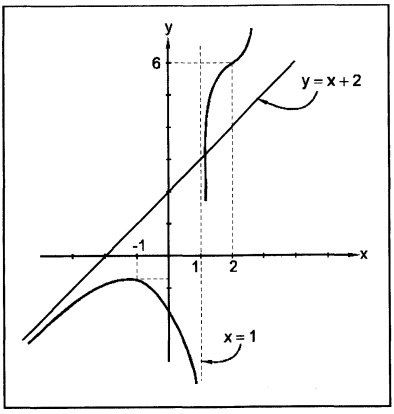
   Existe máximo en $x = -1$, que es $f(-1) = -3/4$.

6. De: $f'(x) = \dfrac{(x+1)(x-2)^2}{(x-1)^3}$ se obtiene:

$$f'' = \frac{(x+1)^3 [(x-2)^2 + (x+1) \cdot 2(x-2) - (x+1)(x-2)^2 \cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6}$$

$$f''(x)=\frac{3(x-2)}{(x-1)^4}\begin{cases}\nearrow & f''=0 \Rightarrow x=2\\ \rightarrow & f''>0 \Rightarrow x>2\\ \searrow & f''<0 \Rightarrow x<2 \quad , \quad x\neq 1\end{cases}$$

Punto de inflexión: $f(2)=6$



PROBLEMAS:

Graficar las siguientes funciones hallando máximos y mínimos, puntos de inflexión, intervalos de crecimiento, decrecimiento y concavidad.

1. $f(x)=x^4-8x^2+7$.

Puntos críticos $\{0, 2\}$. De: $f''(x)=0$ se obtienen $x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$

2. $f(x)=\frac{2x^2-7x+5}{x^2-5x+7}$

Asíntota $y=2$, de $f'=0$ se obtienen $x=2$, $x=4$. De $f''=0$, $x=1$, $\frac{5}{2}$, 4.

3. $f(x)=\sqrt{4x^2+2x+1}$

Asíntota: $y=2x+\frac{1}{2}$, $y=-2x-\frac{1}{2}$. De $f'=0$, $x=-\frac{1}{4}$. No existen puntos de inflexión.

4. $f(x)=\operatorname{sen}x+2\operatorname{sen}\frac{x}{2}$.

Período: $T=4\pi$. De $f''(x)=0$ se obtiene: $x=2\pi$. $f'>0 \iff x\in\left\langle 0,\frac{2\pi}{3}\right\rangle$

$f'<0 \iff x\in\left\langle \frac{2\pi}{3},2\pi\right\rangle$. De $f''(x)=0$ se obtiene $\cos\frac{x}{2}=-\frac{1}{4}$

5. $f(x)=\text{Ln}(\cos 2x)\,,\ x\in[-\pi,\pi]$

6. $f(x)=\begin{cases} e^{-|x+2|} & ,\ x\le 0 \\ x+e^{-2-x^2} & ,\ x>0 \end{cases}$

7. $f(x)=\text{Ln}\,|2\,\text{sen}\,hx|$

8. $f(x)=\begin{cases} \frac{1-x}{e^x} & ,\ x\ge 0 \\ \frac{2x+1}{x+1} & ,\ x<0 \end{cases}$

9. $f(x)=(x-1)(x^2-2x)^{-1/3}+1$

10. $f(x)=\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$

11. $f(x)=\begin{cases} x+e^{-1-x^2} & ,\ x<0 \\ e^{|x-1|-2} & ,\ x\ge 0 \end{cases}$

12. $f(x)=\begin{cases} 5x^{2/3}-x^{5/3} & ,\ x\le 1 \\ \frac{x^2-2x+2}{x-1} & ,\ x>1 \end{cases}$

13. $f(x)=\begin{cases} \frac{x}{x^2-4} & ,\ x\ge -1 \\ x-\frac{1}{x}+\frac{1}{3} & ,\ x<-1 \end{cases}$

14. $f(x)=x^2\sqrt[3]{2x-5}\ ,\ x\in[0,3]$

15. $f(x)=\begin{cases} \frac{(1+x)^2}{(1-x)^2} & ,\ x<1 \\ \frac{x^2-2}{x-1} & ,\ x>1 \end{cases}$

16. $f(x)=\begin{cases} (1-x)^2(1+x)^3 & ,\ x<1 \\ x+6x^{-1/3} & ,\ x\ge 1 \end{cases}$

17. Si f es una función continua en $\boldsymbol{R}$ tal que:

$$f''(x)=\begin{cases} 2 & ,\ x<1 \\ -\frac{10}{9}(x^{-4/3}+x^{-1/3}) & ,\ x>1 \end{cases}$$

$f(0)=-1\,,\ f'(0)=4\,,\ f'(8)=-5\,.$

Graficar f indicando crecimiento, concavidad y valores extremos.

18. Esbozar la gráfica de una función f continua en $\boldsymbol{R}$, tal que cumpla las siguientes condiciones:

i) $f(0)=f(4)=f(12)=0\,,\ f(6)=-5\,,$
$f(-1)=2\,,\ f(2)=1$

ii) $f'(2)=f'(6)=0\,,\ f'(0)$ no existe.

iii) $f'(x)>0\,,$. Si $0<x<2 \ \vee\ x>6$
$f'(x)<0\,,$ Si $x<0 \ \vee\ 2<x<6$

iv) $f''(x)>0\,,$. Si $-1<x<0 \ \vee\ x>4$
$f''(x)<0\,,$ Si $x<-1 \ \vee\ 0<x<4$

19. $f(x)=\sqrt[3]{(x+4)^2(x-5)}\,,\ x\in\boldsymbol{R}$

20. $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)(x+2)^2}\,,\ x\in[-3,2]$

21. $f(x)=\begin{cases} x+\frac{1}{x-6} & ,\ x\le 5 \\ \frac{x^2-25}{x+1} & ,\ x>5 \end{cases}$

22. $f(x)=\begin{cases} x^{2/3}(x+2)^{1/3}-x & ,\ x\le 0 \\ (x-6)^{1/3}(x-12)^{2/3} & ,\ x\ge 6 \end{cases}$

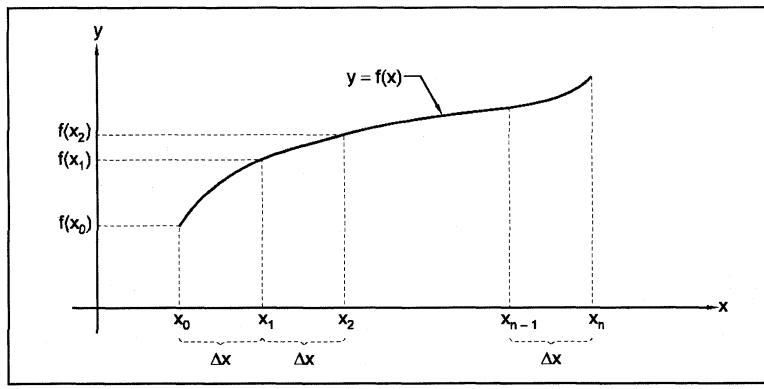
CAPÍTULO 6

DIFERENCIALES

1. INCREMENTO DE UNA VARIABLE INDEPENDIENTE E INCREMENTO DE UNA FUNCIÓN.

Supongamos que x sea la variable independiente y $f(x)$ sea una función de x.

Como los números reales son bien ordenados, entonces la variable x puede experimentar cambios desde un valor x_0 hasta otro valor, tal que $x_0 < x$. Ver gráfico.

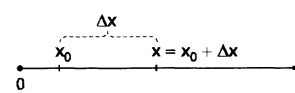


La diferencia $x - x_0$ se llama incremento de la variable x:

Notación: El incremento de x se denota por el símbolo Δx. Así habremos obtenido la siguiente definición.

1.1. Definición: EL INCREMENTO DE UNA VARIABLE x (denotado por Δx) es el aumento o disminución que experimenta la variable x, desde el valor x_0 hasta otro valor x, esto es: $\Delta x = x - x_0$

$$x = x_0 + \Delta x$$



Aplicando suma de segmentos, se tiene:

$$\overline{OX} = \overline{OX_0} + \overline{XOX} \quad , \quad \text{pero} \quad \begin{cases} \overline{OX} = x \\ \overline{OX_0} = x_0 \\ \overline{x_0 x} = x - x_0 = \Delta x \end{cases}$$

$$x = x_0 + \Delta x$$

Si los puntos x_0, x_1, x_2, x_3, ... , x_n son equidistantes entonces las siguientes diferencias son iguales:

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots = x_n - x_{n-1} = \Delta x$$

Así tendremos que:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \Delta x \\ x_2 &= x_0 + 2\Delta x \\ x_3 &= x_0 + 3\Delta x \\ &\vdots \\ x_n &= x_0 + n\Delta x \end{aligned}$$

Ahora, veamos cómo se comportan las imágenes de los puntos: x_0, x_1, x_2 ..... x_n. Si x varia de x_0 hasta x, siendo $x_0 < x$, donde $\Delta x = x - x_0$, entonces las imágenes de x_0 y x que son respectivamente $f(x_0)$ y $f(x)$ han sufrido también un cambio desde $f(x_0)$ hasta $f(x)$ y la diferencia $f(x) - f(x_0)$ se llama ***INCREMENTO DE LA FUNCIÓN f.***

La ***NOTACIÓN*** $\Delta f = f(x_1) - f(x_0)$ expresa el incremento de f.

$$\text{ó} \quad \Delta y = y - y_0 \quad \Rightarrow \quad y = y_0 + \Delta y$$

Como: $x - x_0 = \Delta x$

$$x = x_0 + \Delta x \quad \Rightarrow \quad \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Si x es una variable discreta y tuviéramos un conjunto de valores de x con sus respectivas imágenes, tales como lo mostramos en el siguiente cuadro:

VALORES DE X	IMÁGENES DE X	INCREMENTO DE X	INCREMENTO DE Y
x_0	$y_0 = f(x_0)$	$x_1 - x_0 = \Delta x_0$	$y_1 - y_0 = \Delta y_0 \iff y_1 = y_0 + \Delta y_0$
x_1	$y_1 = f(x_1)$	$x_2 - x_1 = \Delta x_1$	$y_2 - y_1 = \Delta y_1 \iff y_2 = y_1 + \Delta y_1$
x_2	$y_2 = (f(x_2)$	$x_3 - x_2 = \Delta x_2$	$y_3 - y_2 = \Delta y_2 \iff y_3 = y_2 + \Delta y_2$
x_3	$y_3 = f(xl3)$	⋮	⋮
⋮	⋮	$x_n - x_{n-1} = \Delta x_{n-1}$	$x_n - x_{n-1} = \Delta x_{n-1} \iff y_n = y_{n-1} + \Delta y_{n-1}$
x_{n-1}	$x_{n-1} = f(x_{n-1})$		
x_n	$y_n = f(x_n)$		

Entonces el análisis matemático que haríamos, estaría basado en el comportamiento que experimentan las variaciones de la variable x y sus imágenes $f(x)$.

Así por ejemplo:

1. La variación media de "y" cuando x varia de x_0 a x será: $\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{Y - Y_0}{X - X_0}$

2. En general: $\Delta x = x - x_0$, para x_0 fijo y para x que está variando.

Sus imágenes: $\Delta y = y - y_0$

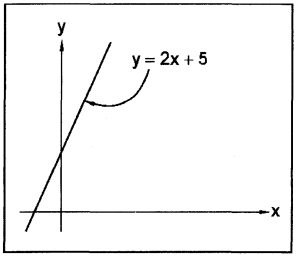
$= f(x) - f(x_0)$, siendo $y = f(x)$

$= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, donde $\Delta x = x - x_0 \Rightarrow x - x_0 + \Delta x$

Luego: $\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{Y - Y_0}{X - X_0}$ es la variación media de y con respecto a x.

APLICACIONES:

1 En geometría Analítica: en la ecuación cartesiana de la recta $y = ax + b$ se tiene $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ = pendiente de la recta.



Ejemplo: $y = 2x + 5$, donde $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$

2 En economía: La ecuación de la demanda: $q = -\frac{5}{4}p + 10$, $\frac{\Delta q}{\Delta p} = -\frac{5}{4}$

3 En física: $e = vt + e_0$, $e =$ espacio recorrido

$e = 2t + 5$ $t =$ tiempo

donde: $\frac{\Delta e}{\Delta t} = 2\text{km}/h = V =$ velocidad de un móvil

3. En $\Delta x = x - x_0$, si "x tiende a acercarse a x_0" Δx tiende a acercarse a cero, entonces Δx se convierte en dx.

Es decir: $\lim\limits_{x \to x_0} \Delta x = dx$ ← Diferencial de x.

4. Igualmente: Si en el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, llamado variación media de y con respecto a x, hallamos el límite cuando Δx tiende hacia cero, entonces el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tiende a convertirse en "la derivada de y con respecto a x".

Así: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y'$, siendo $y = f(x)$, $y' = f'(x) = \frac{df}{dx}$

← Se llama: variación instantánea de y con respecto a x o razón de cambio instantáneo de y con respecto a x.

5. Numéricamente, al comparar Δy con dy, se cumple que "dy es una buena aproximación de Δx".

Ejemplo: Dado la función: $y = f(x) = x^2 - x$

Hallar: Δy y dx para $x = 10$, $\Delta x = 0.1$

Solución:

a) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

$= f(10 + 0.1) - f(10)$

$= [10 \cdot 1)^2 - 10 \cdot 1] - [(10)^2 - 10]$

$\Delta y = 1.91$

b) $dy = y' \cdot dx$

$= f'(10) \cdot dx$

$= (19) \cdot (0.1)$

$dy = 1.9$

Hay un error: $\Delta y - dy = 0.01$

Donde:

$f(x) = x^2 - x$

$f'(x) = 2x - 1$

$f'(10) = 2(10) - 1$

$= 19$

Como vemos: el dy es una buena aproximación de Δy. Para el presente ejemplo hay un error de 0.01 entre Δy y dy a este error le llamaremos: **ERROR ABSOLUTO** y al cociente $\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}$ se le llama **ERROR RELATIVO** al Δy.

ERROR ABSOLUTO: $\Delta y - dy$

ERROR RELATIVO AL INCREMENTO DE: $y = \frac{\Delta y - dy}{\Delta y}$

1.2. ERROR RELATIVO Y ERROR PORCENTUAL APROXIMADO

Para explicar la variación porcentual (porcentaje de error) que experimenta una función $y = f(x)$ cuando la variable independiente x cambia de un valor fijo x_0 hasta cualquier otro valor x con $x > x_0$, se emplea el concepto de incremento de la función $y = f(x)$.

Por ejemplo, deseamos saber en qué porcentaje ha subido el precio del pan cuando la semana pasada costó 20 céntimos y ahora cuesta 25 céntimos.

El cálculo que se debe hacer será: $\frac{25-20}{20} \times 100 = 0.25 \times 100 = 25\%$

Afirmamos que "el precio del pan se ha incrementado en un 25% con respecto al precio de la semana pasada".

Al usar notaciones matemáticas se tendría:

Cuando una cantidad $y_0 = f(x_0)$ se aproxima mediante la cantidad $f(x_0 + \Delta x)$ con un error $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, entonces se llama **ERROR RELATIVO** al valor: $\frac{\Delta y}{y_0}$ y al valor $\left(\frac{\Delta y}{y_0} \times 100\right)\%$ se llama **PORCENTAJE ERROR.**

Es decir:

ERROR RELATIVO $= \frac{\Delta y}{y_0} = \frac{y - y_0}{y_0}$

PORCENTAJE DE ERROR $= \left(\frac{\Delta y}{y_0} \times 100\right)\%$

Respecto al ejemplo anterior:

x	1	2
$f(x) = y$	20	25
	$f(x_0)$	$f(x)$

a) **ERROR RELATIVO** $= \frac{\Delta y}{y_0} = \frac{25-20}{20} = 0.25$

b) **PORCENTAJE DE ERROR** $= \left(\frac{\Delta y}{y_0} \times 100 \right)\% = (0.25 \times 100)\% = 25\%$

Cuando la función $f = f(x)$ es continua, el Δy se aproxima por $dy = df(x_0)$ entonces el ***ERROR RELATIVO APROXIMADO*** y el ***PORCENTAJE DE ERROR APROXIMADO*** serán respectivamente:

ERROR RELATIVO APROXIMADO $= \frac{df(x_0)}{f(x_0)} = \frac{dy}{y_0}$
PORCENTAJE DE ERROR APROXIMADO $= \left[\frac{df(x_0)}{f(x_0)} \times 100 \right]\%$

Problema 01. Dada la función continua $y = f(x) = x^2$, si $x_0 = 2$, $\Delta x = 0.4$, hallar: el error relativo, error porcentual, error relativo aproximado, error porcentual aproximado, $\varepsilon = \frac{\Delta y / y_0}{\Delta x / x_0}$.

Solución:

x	2	2.04
y	$f(2)$	$f(2.04)$

Donde: Si $\Delta x = x - x_0$

$0.4 = x - 2$

$x = 2.4$

$f(2) = 2^2 = 4$

$f(2.04) = (2.04)^2 = 5.76$

Luego:

a) ***ERROR RELATIVO*** $= \frac{\Delta y}{y_0} = \frac{f(2.04) - f(2)}{f(2)}$

$= \frac{5.76 - 4}{4} = 0.44$

b) ***ERROR PORCENTUAL*** $= \left(\frac{\Delta y}{y_0} \times 100 \right)\% = 44\%$

c) De $y = x^2 \Rightarrow dy = 2x \cdot dx$

En $x = 2 \Rightarrow dy = 2(2) \cdot (0.4) = 1.6$

ERROR RELATIVO APROXIMADO $= \frac{dy}{y_0} = \frac{1.6}{4} = 0.40$

d) ***ERROR PORCENTUAL APROX*** $= \left(\frac{dy}{y_0} \times 100 \right)\% = 40\%$

e) ***ERROR ABSOLUTO*** $= \Delta y - dy$

$= 1.76 - 1.60 = 0.16$

f) $\frac{\Delta x}{x_0} = \frac{0.40}{2} = 0.20$ g) $\varepsilon = \frac{\frac{\Delta y}{y_0}}{\frac{\Delta x}{x_0}} = \frac{0.44}{0.20} = 2.2$

Problema 02. Dada la función $y = f(x) = x^2 + 5x - 8$, hallar ΔY e $\frac{\Delta Y}{\Delta X}$ cuando x varia de $x_0 = 1$ a $x_1 = 0.8$.

Solución:

1) $\Delta x = x_1 - x_0$

$\Delta x = 0.8 - 1 = -0.2$

2) $\Delta y = (f(x_1) - f(x_0)$

$= f(0.8) - f(1)$

$= [(0.8)^2 + 5(0.8) - 8] - [1^2 + 5(1) - 8]$

$= 0.64 + 4 - 8 - 1 - 5 + 8 = 4.64 - 6$

$\Delta Y = -1.36$

Problema 03. Calcular la velocidad media de los siguientes movimientos:

a) $S = (3t^2 + 5)m$ y t pasa de 2 a 3 seg.

b) $S = (2t^2 + 5t - 3)m$ y t pasa de 2 a 3 seg.

Solución de a)

1) La velocidad media es $\frac{\Delta S}{\Delta t}$

2) Pero: $\Delta t = 3 - 2 = 1$

Además: $\Delta S = S(3) - S(2)$

$\Delta S = 15$

3) $\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{15}{1} = 15$ m/seg

Solución de b)

1) La velocidad media es: $\frac{\Delta S}{\Delta t}$

donde: $\Delta t = 5 - 2 = 3$

Además: $\Delta S = S(5) - S(2)$

$\Delta S = 57$

2) $\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{57}{3} = 19 m/seg$

2. DIFERENCIALES

Proposición. Sea la función f: $I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, I es un intervalo abierto.

a) Probar que el diferencial de la función f en x_0 y h es:

$df(x_0 ; h) = f'(x_0)h$, lo cual es la aplicación lineal $\boxed{T(h) = mh}$

[T es lineal, si $T(h_1 + h_2) = T(h_1) + T(h_2)$ y $T(\alpha h) = \alpha T(h)$]

b) Probar que la función es continua en 0: $\phi(h) = \begin{cases} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0) & , \ h \neq 0 \\ 0 & , \ h = 0 \end{cases}$

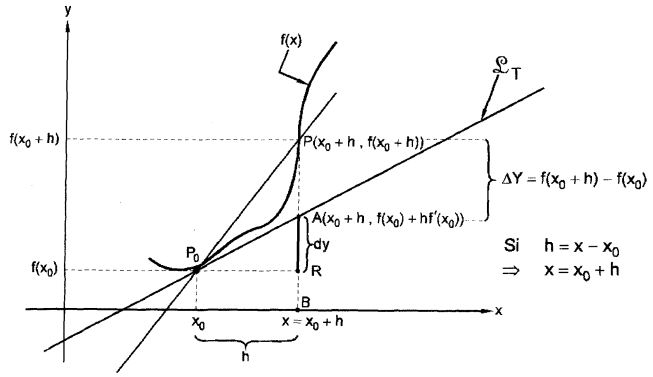
c) Probar que $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$

Se lee: $f(x_0) + hf'(x_0)$ es una buena aproximación de $f(x_0 + h)$ en el intervalo $[x_0, x_0 + h]$.

d) Decimos que f es diferenciable en $x_0 \in I$ sí y solo sí existe el número $f'(x_0)$ tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(x_0+h) - f(x_0) - hf'(x_0)|}{h} = 0 .$$

Recordemos la definición de la derivada de una función, y hagamos el gráfico siguiente:



1° Sabemos que $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, donde $h = \Delta x = x - x_0$

2° Tenemos que la ecuación de la recta tangente $\mathcal{L}_T$ que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$ con pendiente $f'(x_0)$, es:

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

3° Como podemos apreciar, el punto A pertenece a la recta $\mathcal{L}_T$. La primera componente del punto A es $x = x_0 + h$ en consecuencia la segunda componente del punto A se halla sustituyendo $x = x_0 + h$ en la ecuación (1), Así obtendremos:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x_0 + h - x_0)$$

$$\Rightarrow \quad y - f(x_0) = hf'(x_0)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y = (f(x_0) + hf'(x_0) = \overline{BA}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

De este modo las componentes del punto A, son $A(x_0 + h, f(x_0) + hf'(x_0))$.

4° Por otro lado tenemos que: $\overline{BA} = \overline{BR} + \overline{RA}$

Donde: $\overline{RA} = \overline{BA} - \overline{BR}$

Pero $\begin{cases} \overline{BA} = f(x_0) + hf'(x_0) \\ BR = f(x_0) \end{cases}$

Luego: $\overline{RA} = f(x_0) + hf'(x_0) - f(x_0)$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\overline{RA} = hf'(x_0)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

como $h = \Delta x = dx = x - x_0$.

Incremento de x. Diferencial de x.

Entonces la relación (3) se podrá escribir como: $\boxed{\overline{RA} = f'(x_0)h}$ o $\overline{RA} = f'(x_0)dx$

Esta ecuación es ***"EL DIFERENCIAL DE LA FUNCIÓN $f(x)$"***.

Definición: El diferencial de la función $f(x)$ en x_0 y h es el producto de la derivada de la función multiplicado por el diferencial de x.

NOTACIÓN $\boxed{df(x_0, h) = f'(x_0)h}$ ..... (4)

Que también se escribe así: $\boxed{dy = Y' \cdot dx}$

Como $f'(x_0) = m$ es un número real único, pendiente de la recta tangente a f en x_0 y h es una variable, entonces la diferencial de f en x_0 y h es la aplicación lineal.

$$\boxed{T(h) = mh \mid h \in \mathbb{R}}$$

5° Ahora, veamos cómo es la segunda componente del punto P pertenece a la función $y = f(x)$.

Se tiene que:

$$\overline{BP} = \overline{BA} + \overline{AP} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5) \qquad \text{Donde} \begin{cases} \overline{BP} = f(x_0 + h) \\ BA = f(x_0) + hf'(x_0) \end{cases}$$

Entonces la ecuación (5) se expresa del modo siguiente:

$$\boxed{f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \overline{AP}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Donde: $\boxed{\overline{AP} = f(x_0 + h) - f(x_0) - hf'(x_0)}$ $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (7)

Dividir por h: $\frac{\overline{AP}}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)$

Tomando límites cuando h tiende hacia cero:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\overline{AP}}{h} = \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{f'(x_0)} - \underbrace{\lim_{h \to 0} f'(x_0)}_{f'(x_0)}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\overline{AP}}{h} =$$

$\Rightarrow \boxed{\lim_{h \to 0} \frac{\overline{AP}}{h} = 0}$ de ésta igualdad se desprende que el cociente $\frac{\overline{AP}}{h}$ es una función que depende de la variable h, a ésta función llamémosla $\varphi(h)$ de modo que se tendrá:

$$\phi(h) = \frac{\overline{AP}}{h} \iff \boxed{\overline{AP} = \varphi(h)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Hemos probado entonces, que la función $\varphi(h)$ está cumpliendo dos condiciones:

$$\phi(h) = \begin{cases} \frac{\overline{AP}}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \text{ , si } h \neq 0 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{si } h = 0 \end{cases}$$

PRIMERO: Que $\varphi(0) = 0$

SEGUNDO: $\lim_{h \to 0} \phi(h) = 0$

Lo cual quiere decir que $\varphi(h)$ es **CONTINUA EN** 0.

6° Sustituir (8) en (6):

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varphi(h)$$

$$\Rightarrow \underbrace{f(x_0 + h) - f(x_0)} = hf'(x_0) + h\varphi(h)$$

$$\boxed{\Delta f = hf'(x_0) + h\varphi(h)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Cuando la función φh es muy pequeño, puede despreciarse el término $h\varphi(h)$ entonces la ecuación (9) podría escribirse del siguiente modo:

$$\boxed{\Delta f \approx hf'(x_0)} \quad \text{..... (10)}$$

SE LLAMA DIFERENCIAL DE f.

Lo cual quiere decir que, la expresión $hf'(x_0)$ es una buena aproximación al incremento de la función f.

De (10) tenemos entonces: $\overbrace{f(x_0+h)-f(x_0)}^{\Delta f} \approx hf'(x_0)$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f(x_0+h) \approx f(x_0)+hf'(x_0)}$$

lo cual indica que la expresión $\underbrace{f(x_0)+hf'(x_0)}_{\text{ordenada del punto } A}$ es una buena aproximación de:

$\underbrace{f(x_0+h)}_{\text{ordenada del punto } P}$

Todo lo descrito anteriormente indica que, en el intervalo infinitésimo $[x_0\ ,\ x_0+h]$ la recta tangente $\mathcal{L}_T$ es aproximadamente igual a la gráfica de la función f.

Problema 04. Usando diferenciables, calcúlese un valor aproximado de cada uno de los siguientes datos:

a) $\sqrt[3]{123}$ b) $\cos 57°$

Solución de a) $\sqrt[3]{123} \approx ?$

1) **FÓRMULA**: $f(x_0+h) \approx f(x_0)+hf'(x_0)$, donde:

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt[3]{x} \\ \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x}} \\ x_0+h=123 \\ 125+(-2)=123 \end{cases}$$

2) Entonces: $f(125-2) \approx f(125)+(-2)f'(125)$

$$\approx \sqrt[3]{125}+(-2)\frac{1}{3\sqrt[3]{(125)^2}} \approx 5+(-2)\frac{1}{75} \approx 5-\frac{2}{75}$$

$$\approx \frac{373}{75} \approx 4.973$$

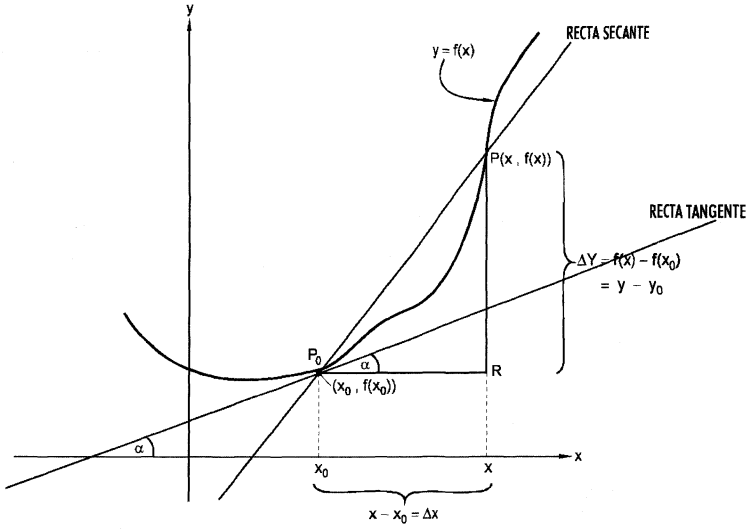
Solución de b) $\cos 57° \approx ?$

1) **FÓRMULA**: $f(x_0+h) \approx f(x_0)+hf'(x_0)$ donde $\begin{cases} f(x)=\cos x \\ x_0+h=57° \\ 60-3=57 \end{cases}$

2) Entonces:
$$\cos(60-3) \approx \cos 60° + (-3°)(-\operatorname{sen} 60°)$$
$$\approx \frac{1}{2} + (0.052)\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\approx \frac{1+0.09}{2} \approx 0.545$$

$$\begin{array}{l} 1° \rightarrow 0.01745 \\ 3° \rightarrow x \\ x = 0.052 \end{array}$$

3. RAZÓN DE CAMBIO



1. Sea la función $y = f(x)$ se lee "Y es función de X". Lo que quiere decir que "x" es la variable independiente e "Y" es la variable dependiente.

2. Supongamos que x_0 cambia en la cantidad Δx.
Es decir, a la cantidad x_0 se le aumenta la cantidad Δx, así habremos obtenido una nueva cantidad que sería $x = x_0 + \Delta x \iff \Delta x = x - x_0$.

3. Como Y depende de X, entonces la imagen de x_0, que es $f(x_0)$, cambiará en la cantidad $\Delta f = \Delta Y$. Es decir, a la cantidad $f(x_0)$ se le aumentará la cantidad ΔY, así obtendremos la cantidad:

$$f(x)=f(x_0) \iff \Delta Y = f(x)-f(x_0)$$
$$\Delta Y = f(x+x_0)-f(x_0)$$
$$\Delta Y = y-y_0$$

4. Simplificando lo dicho anteriormente tenemos:

Si: $\Delta x = x - x_0$ ..... (1)

Entonces: $\Delta y = f(x)-f(x_0)$ ..... (2)

Dividiendo (2) entre (1), tenemos:

(3) $\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$ $\quad x-x_0 \neq 0$

éste cociente se llama: "RAZÓN PROMEDIO DE CAMBIO de Y CON RESPECTO a X".

5. Si al cociente que tenemos en 3, le sacamos límite cuando el incremento de x, o sea Δx, tiende acercarse a ***CERO***, entonces obtenemos: "La derivada de y con respecto a x en el punto x_0".

Es decir: $\boxed{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)}$

Se lee "La derivada de f con respecto a x en el punto x_0".

Donde el valor $f'(x_0)=\left.\frac{df}{dx}\right]_{x=x_0}$ Se llama **RAZÓN DE CAMBIO** (instantáneo) de y con respecto a x en x_0.

6. Si "La variable Y es función de la variable x" y las dos, tanto x como y, son a su vez "funciones que dependan de la variable t que sea el tiempo, entonces, obtendremos la función compuesta $y = f(x(t))$.

Ahora, derivar con respecto a t, aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{df}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{df}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}}$$

Donde: $\frac{dy}{dx}$ es *LA RAZÓN DE CAMBIO DE* y *CON RESPECTO A* x.

$\frac{dy}{dt}$ es *LA RAZÓN DE CAMBIO DE* y *CON RESPECTO A* t.

$\frac{dx}{dt}$ es *LA RAZÓN DE CAMBIO DE* x *CON RESPECTO A* t.

3.1. PROBLEMAS DE APLICACIÓN

Problema 05. En un cierto instante t_0, la longitud de un lado de un cuadrado es de 20,32 cm. y cada lado del cuadrado está aumentando en longitud a razón de 0,508 cm/min. ¿Cuál de la razón de cambio del área del cuadrado con respecto al tiempo y con respecto a la longitud de un lado en el instante t_0?

Solución: $A = L^2 \Leftarrow$ *ÁREA DEL CUADRADO*

datos $\begin{cases} L = 20,32\,\text{cm} \\ \text{lado del cuadrado aumenta en longitud a} \\ \text{razón de } 0,508\ \text{cm/min} = \frac{dL}{dt} \end{cases}$

Se pide hallar:

RAZÓN DE CAMBIO DEL ÁREA DEL CUADRADO CON RESPECTO AL TIEMPO $= \frac{dA}{dt}$

RAZÓN DE CAMBIO DEL ÁREA DEL CUADRADO CON RESPECTO A LA LONGITUD DE UN LADO $= \frac{dA}{dt}$

1. Pero: $\underbrace{A \longrightarrow L \longrightarrow t}$

se lee: A es función de $L \wedge L$ es función de t.

Entonces: $\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dL} \cdot \frac{dL}{dt}}$ ..... (1*)

es la razón de cambio del área del cuadrado con respecto al tiempo

2. Como: $A = L^2 \Rightarrow \boxed{\frac{dA}{dL} = 2L}$ ..... (2*)

3. Sustituir (2*) en (1*):

$$\frac{dA}{dt} = 2L \cdot \frac{dL}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\,(20{,}32\ cm)\,(0{,}508\ cm/\text{min}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dA}{dt} = 20{,}65\ \text{cm}^2/\text{min}}$$

4. $\frac{dA}{dL} = 2L \quad \Rightarrow \quad \frac{dA}{dL} = 2\,(20.32\ cm) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dA}{dL} = 40.64\ \text{cm}}$

Problema 06. La ley del movimiento de un punto sobre el eje x es $x = 3t - t^3$ Hallar la velocidad del movimiento de dicho punto para los instantes $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ y $t_2 = 2$ (x se da en centímetros, t en segundos).

Solución:

1) Se pide calcular $\frac{dx}{dt}$ = velocidad del movimiento del punto.

2) Como $x = 3t - t^3$, entonces $\boxed{\frac{dx}{dt} = 3 - 3t^2}$ ——— (2)

3) En el instante $t_0 = 0$, se tendrá $\left.\frac{dx}{dt}\right]_{t_0=0} = 3\,\text{cm/seg}$

En el instante $t_1 = 1$, se tendrá $\left.\frac{dx}{dt}\right]_{t_1=1} = 3 - 3\,(1)^2 = 0\ \text{cm/seg}$

En el instante $t_2 = 2$, se tendrá $\left.\frac{dx}{dt}\right]_{t_2=2} = 3 - 3\,(2)^2 = -9\ \text{cm/seg}$

Problema 07. Un voltaje constante de 12 voltios es lo que se suministra a un circuito. Si a medida que el circuito se calienta aumenta su resistencia a razón de 0.1 ohmio/seg, encuéntrese la razón de cambio de la corriente cuando la resistencia es de 4 ohms.
Use la ley de Ohm. $E = \boldsymbol{R}\, I$

Solución:

Datos: De la fórmula $E = \boldsymbol{R} \cdot I$, despejamos I:

$E = 12$ voltios

$\frac{dR}{dt} = 0.1$ ohm/seg $\qquad I = \frac{E}{R}$

$R = 4$ ohm . De donde obtenemos: $\frac{dI}{dt} = E\left(-\frac{1}{R^2}\right)\frac{dR}{dt}$

$\frac{dI}{dt} = ?$ $\qquad \boxed{\frac{dI}{dt} = -\frac{E}{R^2}\cdot\frac{dR}{dt}}$

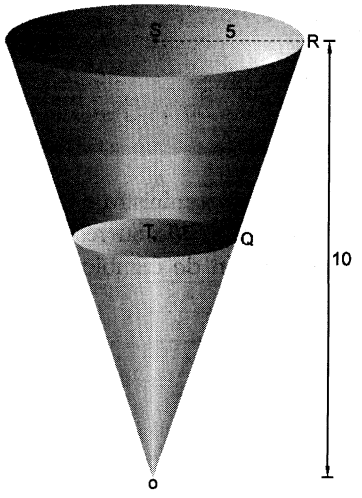
Luego: $\frac{dI}{dt} = -\frac{12 \text{ voltios}}{(4 \text{ ohm})^2}(0.1 \text{ Ohm/ seg}) = -\frac{12 \text{ voltios}}{16 \text{ ohm}^2}(0.1 \text{ ohm/seg})$

$\frac{dI}{dt} = (-0.75)(0.1)\frac{\text{voltios}}{\text{ohm}}/\text{seg}$

$\boxed{\frac{dI}{dt} = -(0.075 \text{ amp/seg})}$

Problema 08. Un depósito en forma de un cono invertido, tiene una altura de 10 metros y una base de 10 mts. de diámetro. Si el depósito está llenándose a razón de $2\text{m}^3/\text{seg}$?A qué velocidad se está elevando el nivel del agua cuando el nivel se encuentra a 3 metros de la parte superior del depósito ?

Solución:



$\frac{dv}{dt} = 2\text{m}^3/\text{seg}$

$h = 7$ m. ← Altura del cono OPR

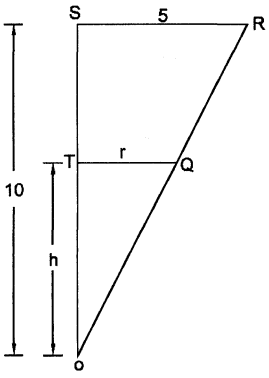
$\frac{dh}{dt} = ?$

El volumen del cono ***OPR***, es:

$V = \frac{1}{3}B\cdot h$ ..... (1)

como: $B = \pi \cdot r^2$

entonces: $\boxed{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$ ..... (2)



El triángulo OSR es semejante al triángulo OTQ, entonces:

$$\frac{r}{5}=\frac{h}{10} \Rightarrow r=\frac{5h}{10}=\frac{h}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textcircled{3}$$

Sustituir ③ en ②:

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h$$

$$\Rightarrow V=\frac{1}{12}\pi h^3$$

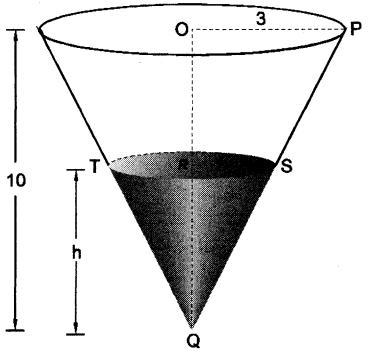
Luego: $\frac{dv}{dt}=\frac{1}{12}\pi(3h^2)\frac{dh}{dt}$

$$=\frac{1}{4}\pi h^2\frac{dh}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \textcircled{4}$$

sustituyendo los datos: $2\text{m}^3/\text{seg}=\frac{1}{4}\pi(7m)^2\frac{dh}{dt} \Rightarrow 8\,\text{m}^3/\text{seg}=49\pi\,\text{m}^2\frac{dh}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt}=\frac{8}{49}\text{m/seg} \Rightarrow \boxed{\frac{dh}{dt}=0{,}0519\approx 0.052\ \text{m/seg}}$$

Problema 09. De un recipiente cónico de 3 metros de radio y 10 de profundidad sale agua a razón de $4\text{m}^3/\text{minuto}$. Hallar la variación con respecto al tiempo, de la altura de la superficie libre y del radio de ésta cuando la profundidad del agua es de 6 metros.



$$\begin{cases} \frac{dv}{dt}=4\text{m}^3/\text{min}, \text{ donde } V=\text{volumen del cono QTS} \\ \frac{dh}{dt}=? \\ \frac{dr}{dt}=? \\ r=3\,\text{mts} \\ h=6\,\text{mts} \end{cases}$$

1) $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$

2) El triángulo QRS es semejante al triángulo QOP: $\frac{3}{r} = \frac{10}{h}$

3) $r = \frac{3}{10}h$.

4) Sustituir (3) en (1)

$$V = \tfrac{1}{3}\pi\left(\tfrac{3}{10}h\right)^2 h$$

$$V = \frac{3}{10^2}\pi h^3, \text{ donde } v \to h \to t$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{3}{10^2}\pi(3h^2)\frac{dh}{dt}$$

5) $\boxed{\frac{dv}{dt} = \frac{9\pi}{10^2}h^2\frac{dh}{dt}}$

6) Pero: $h = 6m$ y $\frac{dv}{dt} = 4\text{m}^3/\text{min}$

7) Sustituir **6** en **5**

$$4m^3/\text{min} = \frac{9\pi}{10^2}(6m)^2\frac{dh}{dt}$$

$$4m^3/\text{min} = \frac{9\pi}{10^2}(36m^2)\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{10^2(4m^3/\text{min})}{9\pi(36m^2)} = \frac{100}{81\pi}m/\text{min}$$

8) De (2) despejar la variable h

9) Sustituir: $h = \frac{10}{3}r$ en 1:

$$v = \tfrac{1}{3}\pi r^2\,\tfrac{10}{3}r = \tfrac{10}{9}\pi r^3$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{10}{3}\pi(3r^2)\frac{dr}{dt}$$

10) $\frac{dv}{dt} = \frac{10}{3}\pi r^2\frac{dr}{dt}$

11) De: $r = \frac{3}{10}h$, si $h = 6$

se tiene: $r = \frac{3(6)}{10} = \frac{9}{5}$ ..... (12)

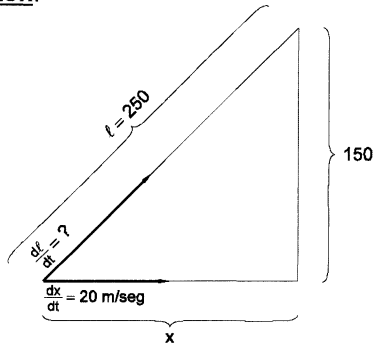
13) Sustituir (12) en (10):

$$4m^3/\text{min} = \frac{10}{3}\pi\left(\frac{9}{5}m\right)^2\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{3(25)(4m^3/\text{min})}{10\pi(81m^2)} = \frac{10}{27\pi}\,m/\text{min}$$

Problema 10. Un muchacho lanza una cometa a una altura de 150 metros. Sabiendo que la cometa se aleja del muchacho a una velocidad de 20 metros por segundo, hallar la velocidad a la que suelta el hilo cuando la cometa se encuentra a una distancia de 250 metros del muchacho.

Solución:



$$\begin{cases} h = 150 \text{ mts} \\ \ell = 250 \text{ mts} \\ \frac{dx}{dt} = 20\text{m/seg} \\ \frac{d\ell}{dt} = ? \end{cases}$$

1) Por teorema de Pitágoras, se tiene $x = \sqrt{\ell^2 - 150^2}$

2) Derivar "x" y "ℓ" con respecto a "t":

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2\ell}{2\sqrt{\ell^2 - 150^2}} \frac{d\ell}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 - 150^2}} \frac{d\ell}{dt}$$

3) Sustituir datos: $20 \text{ m/seg} = \frac{250m}{\sqrt{(250m)^2 - (150m)^2}} \frac{d\ell}{dt}$

$$2\text{m/seg} = \frac{250}{200} \frac{d\ell}{dt}$$

$$\frac{d\ell}{dt} = \frac{20\,(20m/seg)}{25}$$

$$\boxed{\frac{d\ell}{dt} = 16\text{m/seg}}$$

Problema 11. Si ℓ_0 es la longitud de un alambre de cobre a 0° centígrados la longitud $\ell(T)$, aT grados centígrados es aproximadamente.

$$\ell(T) = l_0(1 + aT + bT^2)$$

donde $a = 0.16 \times 10^{-4}$ y $b = 0.10 \times 10^{-7}$. Encuéntrese la razón de cambio de la longitud del alambre con respecto a la temperatura cuando $T = 22°C$ y $\ell_0 = 100\text{cm}$.

Datos: $\ell(T) = \ell_0(1 + aT + bT^2)$ ..... (1)

$a = 0.16 \times 10^{-4}$

$b = 0.10 \times 10^{-7}$

$T = 22°C$

$\ell_0 = 100\text{cm}$

$\frac{d\ell}{dT} = ?$

(2) De la ecuación (1), obtenemos:

$$\frac{d\ell}{dT} = \ell_0\,(a + 2bT)$$

Sustituyendo los datos, se tendrá:

$$\frac{d\ell}{dT} = 100\,\text{cm}(0.16 \times 10^{-4} + 2 \times 0.10 \times 10^{-7} \times 22°C)$$

$$= 16 \times 10^{-4} + 2 \times 0.10 \times 10^{-5} \times 22°C$$

$$= 16 \times 10^{-4} + 44 \times 10^{-6}$$

$$= 10^{-2}(16 \times 10^{-2} + 44 \times 10^{-4}$$

$$= 10^{-2}(0.16 + 0.0044)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\ell}{dT} = 0.1644 \times 10^{-2}\,\text{cm}/°C}$$

Problema 12. Una plancha circular está siendo calentada y su diámetro está exponiéndose a razón de $0.02 \times 10^{-2}\,\text{cm/seg}$. Encuéntrese la razón de cambio respecto al tiempo del área cuando el diámetro es de 3 cm.

Datos:

1) Si el diámetro es D entonces tenemos $\frac{dD}{dt} = 0.02 \times 10^{-2}\,\text{cm/seg}$ y si el radio es R, entonces tendremos: $\frac{dR}{dt} = \frac{0.02 \times 10^{-2}}{2} = 0.01\ x\ 10^{-2}\,\text{cm/seg}$

2) Hallar: $\frac{dA}{dt} = ?$, siendo $A = \pi R^2$ el área del circulo de radio R.

3) $D = 3\text{cm}$ y $R = \frac{3}{2}\,\text{cm}$.

4) De la fórmula $A = \pi R^2$, obtenemos:

$$\frac{dA}{dt} = \pi 2R \frac{dR}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi\,(3/2\,\text{cm})\,(0.01 \times 10^{-2}\,\pi\,\text{cm/seg}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dA}{dt} = 0.03 \times 10^{-2}\,\pi\,\text{cm}^2/\text{seg}$$

$$\Rightarrow \quad = 3\pi \times 10^{-4}\,\text{cm}^2/\text{seg}$$

$$= 3(3.1416)10^{-4}\,\text{cm}^2/\text{seg}$$

$$\frac{dA}{dt} = 9.43 \times 10^{-4}\,\text{cm/seg}$$

También se puede resolver del modo siguiente:

Si $A = \pi R^2$ D = diámetro

$\Rightarrow$ $A = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2$ R = radio

$\Rightarrow$ $A = \frac{\pi}{4} D^2$

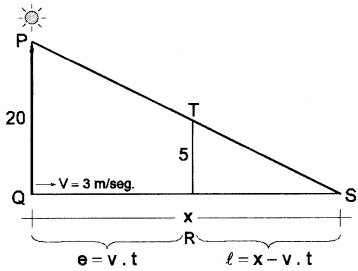
$\Rightarrow$ $\frac{dA}{dt} = \frac{\pi}{4} 2D \frac{dD}{dt}$ $\Rightarrow$ $\frac{dA}{dt} = \frac{\pi D}{2} \frac{dR}{dt}$

$\Rightarrow$ $\frac{dA}{dt} = \frac{\pi}{2}(3\text{cm})(0.02 \times 10^{-2}\text{cm/seg}) = 3 \times 10^{-4}\pi\,\text{cm/seg}$

Problema 13. Un objeto de 5 metros de altura se encuentra justamente debajo de un foco de luz de la calle situado a 20 m. de altura. Suponiendo que el objeto se mueva a una velocidad de 4 m/seg Calcular:

a) La velocidad del extremo de la sombra.
b) La variación de la longitud de la sombra en la unidad de tiempo.

Datos:



La velocidad que se mueve el objeto es: V = 4 m/seg.

a) calcular $\frac{dx}{dt}$: velocidad del extremo de la sombra.

b) $\frac{d\ell}{dt}$: variación de la longitud de la sombra en la unidad de tiempo.

(1) El triángulo ***SRT*** es semejante al triángulo ***SQP***, luego:

$$\frac{x - vt}{x} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \quad 4(x - vt) = x$$

$$\Rightarrow \quad 4x - 4v \cdot t = x$$

$$4x - x = 4vt$$

$$3x = 4vt$$

(2) $\boxed{x = \frac{4}{3} v.t}$ $\Rightarrow$ $\frac{dx}{dt} = \frac{4}{3} v$

como $v = 4\text{m/seg}$ $\Rightarrow$ $\frac{dx}{dt} = \frac{4}{3}(4\text{m/seg})$

$\Rightarrow$ $\frac{dx}{dt} = \frac{16}{3}\text{m/seg}$

(3) Como: $\ell = x - vt$

(4) Sustituir (2) en (3)

$$\ell = \frac{4}{3} vt - vt = \frac{1}{3} vt$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\ell}{dt} = \frac{1}{3} v$$

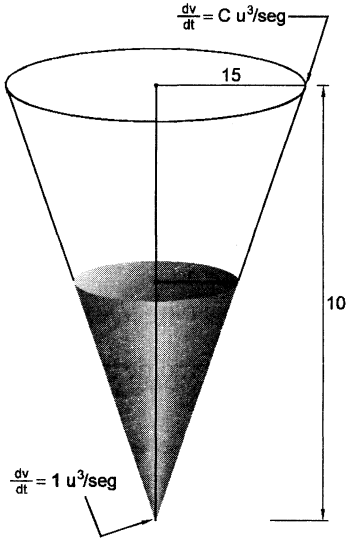
Pero: $v = 4\text{m/seg}$

$\Rightarrow$ $\frac{d\ell}{dt} = \frac{1}{3}(4\,\text{m/seg})$

$\boxed{\frac{d\ell}{dt} = \frac{1}{3}(4\,m/seg)}$

Problema 14. Un depósito de agua tiene la forma de un cono circular recto con vértice hacia abajo. Su altura es de $10u$ y el radio de la base $15u$. El agua sale por el fondo de modo constante a razón de $1u^3/seg$. Se vierte agua en el depósito a razón de cu^3/seg. Calcular c de modo que el nivel del agua asciende a razón de $4u/seg$, en el instante en el que el agua alcance la altura de $2u$.

Solución:



$$\frac{dh}{dt} = 4u/seg$$

$$h = 2u$$

① $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

② $\frac{r}{15} = \frac{h}{10} \Rightarrow r = \frac{15}{10}h$

$$\Rightarrow \boxed{r = \tfrac{3}{2}h} \quad \ldots\ldots\ldots \text{③}$$

④ Sustituir ③ en ①:

$$v = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{3}{2}h\right)^2 h$$

$$v = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{9}{4}h^2\right)h$$

$$v = \frac{3}{4}\pi h^3$$

$\Rightarrow$ $\frac{dv}{dt} = \frac{3}{4}\pi 3h^2\frac{dh}{dt}$. Pero $\frac{dv}{dt} = (c-1)u^3/seg$

$\Rightarrow$ $(c-1)u^3/seg = \frac{9}{4}\pi h^2\frac{dh}{dt}$

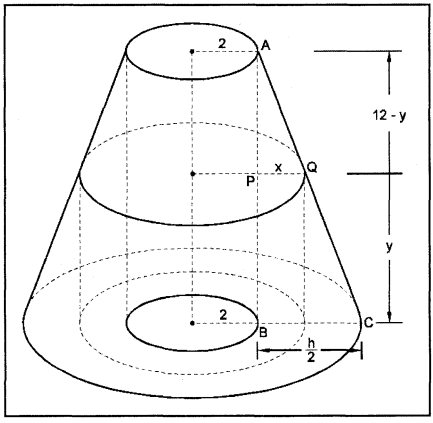
Si: $h = 2u \Rightarrow (c-1)u^3/seg = \frac{9}{4}\pi\, 4u^2\frac{4u}{seg}$

$$(c-1) = 36\pi$$

$\Rightarrow$ $\boxed{c = 1 + 36\pi}$

Problema 15. Un trozo de madera de 12 dm. de largo tiene la forma de un tronco de cono circular recto de diámetro 4dm y $(a+h)$dm en sus bases, donde $h \geq 0$. Determinar en función de h el volumen del mayor cilindro circular recto que se puede cortar de este trozo de madera, de manera que su eje coincida con el tronco de cono.

Solución:



A) Triángulo ***APQ*** semejante al **TRIÁNGULO *ABC***.

Luego:

$$\frac{x}{\frac{h}{2}} = \frac{12-y}{12} \Rightarrow \frac{2x}{h} = \frac{12-y}{12}$$

$$24x = (12-y)h$$

$$24x = 12h - yh$$

$$yh = 12h - 24x$$

$$\boxed{y = \frac{12(h-2x)}{h}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

B) Volumen del cilindro interior:

$$v = \pi (2+x)^2 y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

C) Sustituir (1) en (2):

$$v = \pi (2+x)^2 \left[\frac{12(h-2x)}{h} \right]$$

$$\boxed{v = \frac{12\pi}{h}(2+x)^2(h-2x)} \quad \ldots\ldots (3)$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{12\pi}{h}[2(2+x)(h-2x) + (2+x)^2(-2)]$$

$$= \frac{12\pi}{h} \cdot 2(2+x)[h-2x-2-x]$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{24\pi}{h}(2+x)(h-3x-2)$$

Haciendo: $\frac{dv}{dx} = 0$, obtenemos:

$$x = -2 \quad \vee \quad x = \frac{h-2}{3}$$

Analizando:

a) $x = -2$ no puede ser.

b) Lo único que puede ser es:

$$x = \frac{h-2}{3} \text{ siendo } x \geq 0$$

i) Si: $x = 0 \Rightarrow \frac{h-2}{2} = 0 \Rightarrow h = 2$

Si: $h = 2 \quad \Rightarrow y = 12$

Luego: $V = \pi(2+0)^2(12) = 48\pi$

ii) $x = \frac{h-2}{2} > 0$, el volumen será:

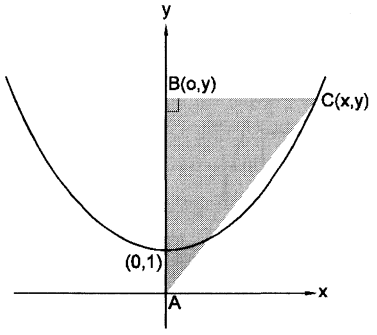
$$V = \frac{12\pi}{h}\left[2 + \frac{h-2}{3}\right]^2 \left[h - 2\left(\frac{h-2}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{12\pi}{h}\frac{(4+h)^2}{9} \cdot \frac{(h+4)}{3}$$

$$= \frac{4\pi}{9h}(4+h)^3$$

Problema 16. Un triángulo rectángulo variable *abc* en el plano *xy* tiene su ángulo recto en el vértice *B*, un vértice *A* fijo en el origen, y el tercer vértice *C* sobre la parábola $y = 1 + \frac{7}{36}x^2$. El vértice *B* parte del punto (0,1) en el tiempo $t = 0$ y se desplaza hacia arriba siguiendo el eje y a una velocidad constante de 2cm/seg. ¿Con que rapidez crece el área del triángulo cuando $t = \frac{7}{2}$ segundos?

Solución:



Datos:

$$\begin{cases} y = 1 + \frac{7}{36}x^2 \quad \text{.....} \ (\text{I}) \\ \frac{dy}{dt} = 2\text{cm/seg} \\ t = \frac{7}{2}\ seg \end{cases}$$

Se pide: $\left.\frac{dA}{dt}\right]_{t=\frac{7}{2}} = ?$

1. El área del triángulo rectángulo ***ABC*** es: $A = \frac{xy}{2}$.

2. De: $\frac{dy}{dt} = 2\text{cm/seg}$ se deduce:

$$dy = 2\tfrac{cm}{seg} \cdot dt$$

$$\Rightarrow \quad y = 2t + k$$

3. Como el vértice *B* parte del punto (0,1) en el tiempo $t = 0$, entonces.

(II) ..... $y = 2t + 1$, $\forall\, t \geq 0$.

4. Igualando las ecuaciones (I) y (II) obtenemos:

$$2t + 1 = 1 + \tfrac{7}{36}x^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = \tfrac{36}{7}(2t)$$

$$\Rightarrow \quad x = 6\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\sqrt{t} \quad \text{.....} \quad (\text{III})$$

5. Sustituir (III) y (II) en 1.

$$A = \tfrac{1}{2}\left[\, 6\tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\sqrt{t}\,\right](2t+1)$$

$$A = 3\sqrt{\tfrac{2}{7}}\sqrt{t}\,(2t+1) \quad \text{luego:}$$

$$\frac{dA}{dt} = 3\sqrt{\tfrac{2}{7}}\left[\, \tfrac{1}{2\sqrt{t}}(2t+1) + \sqrt{t}\cdot 2\,\right]$$

$$= 3\sqrt{\tfrac{2}{7}}\left[\, \tfrac{2t+1+4t}{2\sqrt{t}}\,\right]$$

$$= 3\sqrt{\tfrac{2}{7}}\left[\, \tfrac{6t+1}{2\sqrt{t}}\,\right]$$

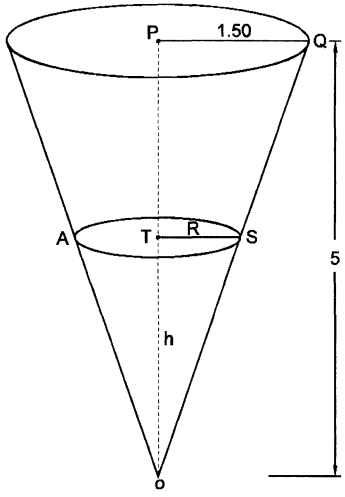
Si: $t = \frac{7}{2}$, obtenemos:

$$\frac{dA}{dt} = 3\sqrt{\tfrac{2}{7}}\left[\, \tfrac{6(7/2)+1}{2\sqrt{7/2}}\,\right]$$

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \tfrac{66}{7}\ \text{cm/seg}}$$

Problema 17. Un tanque de agua cónico con vértice hacia abajo, tiene una altura de 5 metros y un radio de 1.50 m . Si la altura del agua en el tanque está disminuyendo a razón de $30\,cm/hr$. Encuéntrese la razón a la que el volumen de agua decrece cuando la altura es de 2.40 metros.

Solución:



$\frac{dh}{dt} = 30\,cm/h = 0.30\,mts/h$

$\frac{dv}{dt} = ?$ Si $h = 2.40\,mts$

(1) $v = \frac{1}{3} Bh$ V = volumen del cono ***OAS***
B = Área de la Base.
h = altura del cono ***OAS***.

(2) $v = \frac{1}{3} \pi R^2 h$

El triángulo ***OTS*** es semejante al triángulo ***OPQ***, entonces se puede establecer la siguiente proporcionalidad:

$\frac{h}{5} = \frac{R}{1.50} \Rightarrow R = \frac{1.50}{5} h$

$\Rightarrow \boxed{R = 0.30\,h}$ ..... (3)

(4) **SUSTITUIR** (3) en (2):

$V = \frac{1}{3} \pi (0.30h)^2 h$

$V = \frac{1}{3} \pi (0.09) h^3$

$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{1}{3} \pi (0.09)(3h^2) \frac{dh}{dt} = (0.09) \pi h^2 \frac{dh}{dt}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{dV}{dt} = (0.09)(3.1416)(2.4)^2 (0.3) = 0.488}$

PROBLEMAS

1. Una escalera de 10 m. de largo está apoyada contra la pared de un edificio. La base de la escalera resbala alejándose de la pared a razón de 2m/seg. ¿Con qué rapidez desciende el extremo superior de la escalera cuando se encuentra a 8 metros del piso?

Rpta.: $-\frac{8}{3}$ m/seg

2. Se inyecta gas a un globo esférico a razón de 16 dm^3/min. ¿Si la presión se mantiene constante, cuál es la rapidez de cambio del radio cuando el diámetro mide 80 cm?

Rpta.: $\frac{1}{4\pi}$ dm/min

3. Una avioneta vuela con velocidad constante de 500 km/h y con una inclinación de 45° hacia arriba. Hallar la rapidez de cambio de distancia de la avioneta a una torre de control en tierra, un minuto después de que éste pasó directamente a 3 km. arriba de ella (no considerar la altura de la torre).

Rpta.: 353.6 mi/h

4. Al conectarse dos resistencias R_1 y R_2 en paralelo, la resistencia total es $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}$. Si R_1 y R_2 aumentan a razón de $0.01\Omega/s$ y $0.02\Omega/s$ respectivamente ¿a razón de cuántos *ohms* por segundo varia R en el momento en que $R_1=30\Omega$ y $R_2=90\Omega$?

Rpta.: $11/1600\Omega/s$

5. Un tanque esférico de agua de radio a contiene este líquido con una profundidad h y el volumen del agua en el tanque está dado por $v=\frac{1}{3}\pi h^2(3a-h)$. Suponga que un tanque esférico de 5m de radio se está llenando a razón de $400L/\min$. Calcular a razón de cuántos metros por segundo se eleva el nivel del agua cuando $h=1.25\,m$.

Rpta.: $13.37/112\pi=0.38$ pie/min

6. El área de un triángulo equilátero disminuye a razón de $4\,cm^2/\min$. Calcule la rapidez de variación de la longitud de sus lados en el momento en que el área del triángulo es de $200cm^2$.

Rpta.: $-0.215\,cm/\min$

7. Se lanza una piedra a una laguna y produce ondas circulares cuyos radios crecen a razón de $0.5\,m/s$. ¿A razón de cuántos metros por segundo aumenta el perímetro de una onda cuando su radio mide 4m.

Rpta.: $\pi\,m/s$

8. Un vaso de cartón con agua tiene la forma de un cono circular recto truncado de 15 cm. de altura y radios 2 cm y 4 cm, respectivamente. El agua se fuga del vaso a razón de$100m^3$/h. ¿A razón de cuántos cm. por hora disminuye la profundidad del agua cuando es de 10 cm.?

Rpta.: $-27/(25\pi)$

CAPÍTULO 7

LA DERIVADA DE LA FUNCIÓN INVERSA

1. TEOREMAS RELATIVOS A FUNCIONES INVERSAS

Teorema 24. Si f es una función **CRECIENTE** sobre I entonces:

1) f tiene inversa sobre $f(I)$. Donde $\begin{cases} f^* \text{ es la inversa de } f \\ f(I) = \text{Rang}(f) \end{cases}$

2) f^*, también es ***CRECIENTE*** sobre $f(I)$.

Prueba de 1)

Para afirmar que la función f tiene inversa sobre $f(I)$, bastará probar que f es inyectiva.

Definición 1: f es inyectiva, si y sólo si, $\underbrace{f(x_1) = f(x_2)}_{p} \Rightarrow \underbrace{x_1 = x_2}_{q}$; $\forall\, x_1, x_2 \in I$

La prueba se hace por contradicción: $[\sim q \Rightarrow \sim p] \iff [p \Rightarrow q]$

Donde: $\sim q : x_1 \neq x_2$

$\sim p : f(x_1) \neq f(x_2) \iff f(x_1) < f(x_2) \vee f(x_1) > f(x_2)$

Veamos:

1. Supongamos: $\sim q : x_1 \neq x_2 \iff x_1 < x_2 \vee x_2 < x_1$

2. Si: $x_1 < x_2$ y f es ***CRECIENTE*** sobre $I \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

3. Si: $x_2 < x_1$ y f es ***CRECIENTE*** sobre $I \Rightarrow \underbrace{f(x_2) < f(x_1)}_{\sim p}$

contradice la proposición "P"

Acabamos de probar que $\sim q \Rightarrow \sim p$, lo que es equivalente haber probado $p \Rightarrow q$.

4. Luego f es inyectiva sobre I y por tanto f tiene inversa.

Prueba de 2)

Si f^* es ***CRECIENTE*** sobre $f(I)$, debo probar: Si $\underbrace{y_1 < y_2}_{\underbrace{f(x_1) < f(x_2)}_{p}} \Rightarrow \underbrace{f^*(y_1) < f^*(y_2)}_{\underbrace{x_1 < x_2}_{q}}$

$\forall\, y_1, y_2 \in f(I) = \text{Rang}(f)$

Esta demostración se hace por contradicción:

$[q \Rightarrow \sim p \iff [p \Rightarrow q]$, donde $\begin{cases} \sim q : x_1 \geq x_2 \\ \sim p : f(x_1) \geq f(x_2) \end{cases}$

Veamos:

1. Supongamos $\sim p$: $x_1 \geq x_2 \iff x_1 = x_2 \quad \vee \quad x_1 > x_2$

2. Si $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ contradice a p: $f(x_1) < f(x_2)$

3. Si $x_2 < x_1$ y como f es ***CRECIENTE***: $\Rightarrow \quad f(x_2) < f(x_1)$ contadice a "p".

4. Por tanto , debe cumplirse: $\underbrace{p}_{y_1 < y_2} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{q}_{f^*(y_1) < f^*(y_2)}$, lo cual prueba que f^* es creciente $\forall\, y_1, y_2 \in f(I)$.

Teorema 25. Si f es una función decreciente sobre I entonces:

1. f tiene inversa sobre $f(I)$.

2. f^*, también, es decreciente sobre $f(I)$. Donde f^* es la inversa de f.

$f(I) = \text{Rang}(f)$ $\quad f: I \longrightarrow f(I) = \text{Rang}(f)$

$x \longrightarrow y = f(x)$

2. DOS TEOREMAS RELATIVOS A LA CONTINUIDAD DE LA INVERSADE LA FUNCIÓN f, CUANDO f ES CONTINUA

Teorema 26. Sea f una función estrictamente creciente y continua en el intervalo cerrado $[a,b]$. Sean $r = f(a)$, $s = f(b)$ y f^* la inversa de f sobre Rango (f), entonces:

1. f^* es estrictamente creciente sobre $f([a,b])$. Es decir, se cumple:

Si $y_1 < y_2 \quad \Rightarrow \quad f^*(y_1) < f^*(y_2)$, $\forall\, y_1,\ y_2 \in f([a \cdot b])$

2. $f([a,b]) = [f(a), f(b)] = [r,s]$

3. f^* es continua sobre $[r,s] = f([a,b])$

Demostración:

1. Está probado en el teorema 16.

2. 1. Como f es continua en $[a,b]$, entonces $f([a,b]) = \{f(x)/x \in [a,b]\}$ es la imagen de $[a,b]$.

2. Como f es estrictamente creciente, entonces $f([a,b])$ también es un intervalo que tendrá un mínimo y un máximo en $[a,b]$.

3. Supongamos que $f([a,b]) = [f(x_0), f(x_1)]$ para algún x_0, $x_1 \in [a,b]$

$$\text{donde:} \quad \begin{cases} f(x_0) = \min\{f(x) : x \in [a,b]\} \\ f(x_1) = \max\{f(x) : x \in [a,b]\} \end{cases}$$

Siendo así: $\overbrace{\forall x \in [a,b]}^{p} \Rightarrow \overbrace{f(x_0) \le f(x_1) < f(b)}^{q}$

Debo probar que $x_0 = a$ y que $x_1 = b$

4. Como $x_1 \in [a,b]$, supongamos que $x_1 < b \Rightarrow f(x_1) < f(b)\ldots$ (po que f es estrictamente creciente)

5. Por tanto, no es $x_1 < b$, si no: $x_1 \ge b$

6. A su vez, como $x_1 \in [a,b] \Rightarrow x_1 \le b$

} esto implica que $x_1 = b$

Contradice a "q", pues $f(x_1)$ es

7. Como $x_0 \in [a,b]$, suponer que a $a < x_0 \Rightarrow f(a) < f(x_0)\ldots\ldots$ (f es estrictamente creciente)

8. Por tanto, no debe ser $a < x_0$, sino: $a \ge x_0$

9. Como $x_0 \in [a,b] \quad \Rightarrow \quad a \le x_0$

} implica que $a = x_0$

Contradice a "q", pues $f(x_0)$ es mínimo

3. Debo probar dos cosas:

$$\begin{cases} \text{A) Que } f^* \text{ es continua sobre el intervalo abierto } \langle f(a), f(b)\rangle \\ \text{B) Que } \lim\limits_{y \to f(a)^+} f^*(y) = a \quad \wedge \quad \lim\limits_{y \to f(b)^-} f^*(y) = b \end{cases}$$

A) 1. Sea $y_0 \in \langle f(a), f(b)\rangle \Rightarrow \exists x_0 \in \langle a, b\rangle$, tal que, $y_0 = f(x_0)$

2. Dado $\varepsilon > 0$, construimos la vencidad: $x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon$, de modo que $x_0 - \varepsilon$ y $x_0 + \varepsilon$ pertenezcan al intervalo $\langle a, b\rangle$

3. Escoger $\delta = \min\{f(x_0) - f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)\}$

4. Si: $y \in \langle y_0 - \delta, y_0 + \delta\rangle \subset \langle f(a), f(b)\rangle \Rightarrow f(x_0 - \varepsilon) \le \underset{\uparrow}{y_0} - \delta < y < \underset{\uparrow}{y_0} + \delta \le f(x_0 + \varepsilon)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad f(x_0) \qquad\qquad f(x_0)$

$$\Rightarrow \quad f(x_0 - \varepsilon) < y < f(x_0 + \in)$$

5. Aplicar f^* $\Rightarrow$ $f^*(f(x_0 - \varepsilon) < f^*(y) < f^*(f(x_0 + \varepsilon)$

$$\Rightarrow \quad x_0 - \varepsilon < f^*(y) < x_0 + \varepsilon$$

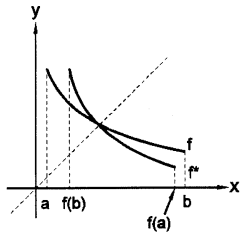
$$\Rightarrow \quad -\varepsilon < f^*(y) - x_0 < \varepsilon, \; x_0 = f^*(y_0)$$

$$\Rightarrow \quad |f^*(y) - f^*(y_0)| < \varepsilon, \; \forall\, |y - y_0| < \delta$$

Así, resulta que f^* es continua sobre $\langle (a), f(b)\rangle$

B) Queda como ejercicio. Por tanto f^* es continua sobre $\langle (a), f(b)\rangle$

Teorema 27. Sea f una función estrictamente decreciente y continua en $[a, b]$ y f^* su inversa, entonces:



1) f* es estrictamente decreciente sobre rango (f)

2) $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$

3) f^* es continua sobre $[f(b), f(a)]$

la demostración queda como ejercicio:

3. DERIVADA DE LA FUNCIÓN INVERSA

En el capítulo 1, demostramos el Teorema 10:

"Si $g(x)$ es derivable en x_0 y f es derivable en $g(x_0)$, entonces $f \circ g$ es derivable en x_0 y se cumple:

$$(f \circ g)'(x_0) = [f'(g(x_0))]\,[g'(x_0)]"$$

Para obtener la derivada de la inversa de una función aplicamos el teorema 10. A continuación estudiemos el teorema de la función inversa.

Teorema 28. Sea $I \subset \boldsymbol{R}$ y $J \subset \boldsymbol{R}$ intervalos abiertos.

Supongámos que la función f:. $I \longrightarrow J$ es biyectiva, por lo tanto posee inversa.

$$x \longrightarrow y = f(x)$$

Sea: $g = f^*$: $J \longrightarrow I$ la inversa de f.

$$y \longrightarrow x = g(y)$$

Si f es derivable en $a \in I$ y g es continua en $b = f(a)$, entonces g es derivable en b si, y sólo si $f'(a) \neq 0$. Si se cumplen las hipótesis dadas, entonces $g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$

DEMOSTRACIÓN

$(\Rightarrow)$

Debo probar: $g'(b) = \dfrac{1}{\lim\limits_{y \to b} \frac{f(g(y)) - f(g(b))}{g(y) - g(b)}}$

Veamos:

1. Si g es la inversa de f, se cumplen: $f(g(y)) = y$ y, $g(f(x)) = x$
2. Si f es derivable en $a \in I$, entonces f es continua en a.
3. Si g es continua en b, entonces: $\lim\limits_{y \to b} g(y) = g(b) = a$. Pues $b = f(a)$ implica $g(b) = a$, porque f y g son inversas.
4. Si $y \in J - \{a\}$, entonces $g(y) \neq a$ Luego:

$$g'(b) = \lim_{y \to b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b}, \text{ donde } \begin{cases} g(b) = a \\ y = f(g(y)) \end{cases}$$

$$= \lim_{y \to b} \frac{g(y) - b}{f(g(y)) - f(a)}, \quad g(y) \neq a$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{y \to b} \frac{f(g(y)) - f(a)}{g(y) - a}} = \frac{1}{f'(a)}$$

Pues $g(y) = x$, además, cuando $y \to b$ implica que $g(y) \to g(b)$ esto es $x \to a$

5. Con este resultado afirmamos que $g'(b)$ existe y $g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$, cuando $f'(a) \neq 0$.

$(\Leftarrow)$

Se sabe que: $(g \circ f)(x) = I(x)$, $I(x) = x$

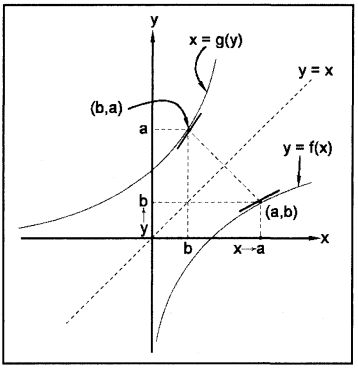
$$g(f(x)) = x$$

Derivar: $g'(f(x))f'(x) = 1$

Si existe $g'(b)$, para $x = a$, obtenemos:

$$g'(f(a))f'(a) = 1, \quad f(a) = b$$

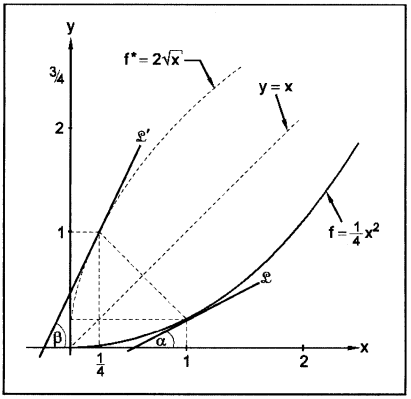
$$g'(b)f'(a) = 1 \Rightarrow g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$



Ejemplo: Sea la función $f:[0,+\infty\rangle \longrightarrow [0,+\infty\rangle$ biyectiva. Si f^* es $x \longrightarrow y=(x)=\frac{1}{4}x^2$ su inversa, hallar $[f^*(x)]'$ si existe.

Solución: Se tiene: $[f^*(x)]'=\frac{1}{f'(x)}$, si $f'(x)\neq 0$, $x=f^*(y)$. Como $f'(x)=\frac{1}{2}x$ y $x=f^*(y)=2\sqrt{y}$, entonces $[f^*(x)]'=\frac{1}{\sqrt{y}}$, siempre que $y\neq 0$, esto es $x\neq 0$.

ILUSTRACIÓN GRÁFICA DE LA DERIVADA DE LA FUNCIÓN INVERSA $f^*(y)=2\sqrt{y}$, $y\in\langle 0,+\infty\rangle$



Hallar la derivada de $f^*(y)$ en $y=\frac{1}{4}$

Se pide: $\left[f^*\left(\frac{1}{4}\right)\right]'=\frac{1}{f'(a)}$

Debemos hallar: a y $f'(x)$:

1) De $f(x)=\frac{1}{4}x^2 \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}x$

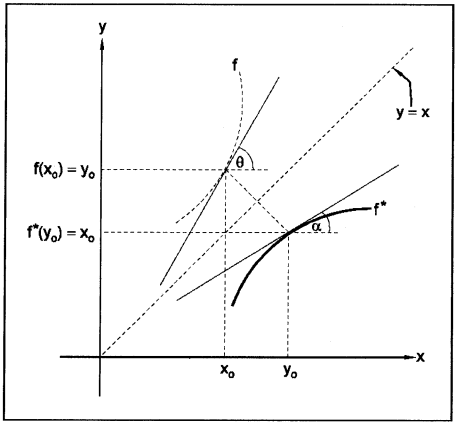
2) $f(a)=\frac{1}{4}$, porque $a=f^*\left(\frac{1}{4}\right)$

$\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{4} \Rightarrow a=1$

3) Luego, $f'(1)=\frac{1}{2}(1)=\frac{1}{2}$. Por tanto: $\left[f^*\left(\frac{1}{4}\right)\right]'=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$

4) Si $f'(1)=\operatorname{tg}\alpha \ \wedge\ [f^*]'\left(\frac{1}{4}\right)=\operatorname{tg}\beta$, entonces $f^{*\prime}\left(\frac{1}{4}\right)f'(1)=1$ se puede escribir como $tg\,\beta\cdot tg\,\alpha=1$, lo cual prueba que $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$; esto es, α y β son complementarios.

En general si $f^*(x)$ es la inversa de $f(x)$, donde $y_0=f(x_0)$ y $f^*(y_0)=x_0$



Tenemos: $tg\,\theta=f'(x_0)$

$\operatorname{tg}\alpha=(f^*)'(y_0)=(f^*)'(f(x_0))$

si $\theta\in\left\langle 0,\frac{\pi}{2}\right\rangle \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{2}-\theta$

si $\theta\in\left\langle \frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right\rangle \Rightarrow \alpha=\frac{3\pi}{2}-\theta$

En ambos casos:

1) $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\left\langle \frac{\pi}{2}-\theta\right\rangle=\operatorname{cotg}\theta$

2) $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\left\langle \frac{3\pi}{2}-\theta\right\rangle$

$$= \operatorname{tg}\left(\pi + \tfrac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$= \operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$= \operatorname{cotg}\,\theta$$

Como: $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{cotg}\theta \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\theta} \Rightarrow$ $\boxed{(f^*)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^*(y_0))} \;\Big|\; x_0 = f^*(y_0)}$

DERIVADA DE FUNCIONES INVERSAS QUE PROVIENEN DE FUNCIONES CRECIENTES O DECRECIENTES.

Proposición: Si la función f: $I \subset \boldsymbol{R} \longrightarrow \boldsymbol{R}$ es creciente sobre I, entonces f tiene inversa. Si f es decreciente sobre I, también tiene inversa.

Teorema 29: Sea f una función diferenciable sobre un intervalo I tal que $f'(x) > 0$, $\forall x \in I$, entonces la función f^* es diferenciable sobre el intervalo $f(I)$, y además: $\forall x \in f(I)$: $y_0 = f(x_0)$, $x_0 = f^*(y_0)$

$$\boxed{[f^*]'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}} = \frac{1}{f'(f^*(y_0))} \text{ donde } x_0 = f^*(y_0)$$

Demostración:

1) Como: $f'(x) > 0$, $\forall x \in I \Rightarrow f(x)$ es creciente en $\forall x \in I$.
2) Si: $f(x)$ es creciente, lo es también f^*, $\forall x \in f(I)$.
3) Sea: $y_0 = f(x_0) \iff x_0 = f^*(y_0)$.
4) Recordar las definiciones

$$\begin{cases} [f^*]'(y_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f^*(y_0 + h) - f^*(y_0)}{h} \\ f'(x_0) = \lim\limits_{k \to 0} \dfrac{f(x_0 + k) - f(x_0)}{k} \end{cases}$$

Debo probar: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f^*(y_0 + h) - f^*(y_0)}{h} = \dfrac{1}{\lim\limits_{k \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{k}}$

Veamos:

5) Definimos: $K = f^*(y_0 + h) - f^*(y_0)$, donde $\begin{cases} \text{Si: } h = 0 \Rightarrow k = 0 \\ \text{Si: } h \neq 0 \Rightarrow k \neq 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad f^*(y_0 + h) = f^*(y_0)$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{f^*(y_0 + h)} = \underbrace{K + x_0} \leftarrow \text{Definición de inversa de } f.$$

$$\Rightarrow \quad y_0 + h = f(k + x_0) \leftarrow$$

$$\Rightarrow \quad h = f(K + x_0) - y_0$$

$$\boxed{h = f(K + x_0) - f(x_0)}$$

6) Pero: $\lim_{h\to 0}\frac{f^*(y_0+h)-f^*(y_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\frac{f^*(y_0+h)-f^*(y_0)}{h}}$, Pero $\begin{cases} h=f(k+x_0)-f(x_0) \\ f^*(y_0+h)-f^*(y_0)=K \end{cases}$

$$=\lim_{k\to 0}\frac{1}{\frac{h}{k}}=\lim_{k\to 0}\frac{1}{\frac{f(K+x_o)-f(x_o)}{k}}$$

$$=\frac{1}{\lim_{k\to 0}\frac{f(K+x_o)-f(x_o)}{k}}$$

$$[f^*]'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}\text{, pues: } h\to 0 \iff k\to 0$$

Que también denotamos por: $Df^*(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$

NOTA: 1) Otra forma de denotar $[f^*]$ es Df^*, de modo que:

$$\boxed{Df^*=\frac{1}{f'\circ f^*}} \text{ sobre } f(I) \text{ f (I)}$$

2) El teorema 25 se cumple también, cuando $f'(x)<0$, $\forall x\in I$

Problema 1. Hallar $Df^*(2)$ para $f(x)=x^2-2x-6$, $Dom(f)=[-3/2,+\infty\rangle$

Solución:

1) Fórmula: $Df^*(y_0)=\frac{1}{Df(x_0)}$, $y_0=f(x_0)$

Debo hallar: $x_0\in[-3/2,+\infty\rangle$, conociendo $y_0=0$

Veamos:

2) como: $\underbrace{y_0}=\underbrace{f(x_0)}$

$$2=x_0^2-2x_0-6$$

$$\iff x_0^2-2x_0-8=0$$

$$\iff (x_0-4)(x_0+2)=0 \begin{cases} x_0=4\in[-3/2,+\infty\rangle \\ x_0=-2\notin'[-3/2,+\infty\rangle \end{cases}$$

3) Como: $x_0 = 4$, todo lo que habrá de hallar es: $Df(x)$ y $Df(4)$

Veamos: si $f(x) = x^2 - 2x - 6$

$$Df(x) = 2x - 2 \Rightarrow Df(4) = 2(4) - 2 = 6$$

4) Por tanto: $Df^*(2) = \frac{1}{6}$

Problema 2. Dado: $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$, $\text{Dom}(f) = [0, +\infty\rangle - \{2\}$; Hallar: $Df^*(3/5)$.

Solución:

1) Fórmula: $Df^*(y_0) = \frac{1}{Df(x_0)}$, donde $y_0 = f(x_0)$

En primer lugar debo hallar x_0 sabiendo que $y_0 = \frac{3}{5}$

2) Como: $\underbrace{y_0}_{\frac{3}{5}} = \underbrace{f(x_0)}_{\frac{x_0}{x_0^2 - 4}}$

$$\Rightarrow 3x_0^2 - 12 = 5x_0$$

$$\Rightarrow 3x_0^2 - 5x_0 - 12 = 0 \iff (3x_0 + 4)(x_0 - 3)$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} 3x_0 & +4 \\ x_0 & -3 \end{matrix}$$

$x_0 = 3 \in \text{Dom}(f)$

$x_0 = -\frac{4}{3} \notin \text{Dom}(f)$

3) Como $x_0 = 3$, ahora hallamos: $Df(x)$ y $Df(3)$.

Veamos:

Como: $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$

$$\Rightarrow Df(x) = \frac{(x^2 - 4)(1) - x(2x)}{(x^2 - 4)} = \frac{-x^2 - 4}{(x^2 - 4)}$$

Para: $x = 3 \Rightarrow Df(3) = \frac{-9 - 4}{(9 - 4)^2} = -\frac{13}{25}$

Problema 3. Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$, $x \neq 1$

a) Hallar los intervalos sobre los cuales $f(x)$ tiene inversa continua b

b) Hallar el valor de $Df^*\left(\frac{5}{2}\right)$

Solución de a)

1) En primer lugar, tenemos que $f(x)$ es continua en $\langle -\infty,-1\rangle \cup \langle 1,+\infty\rangle$.

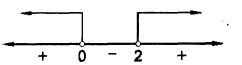
2) En segundo lugar, hallemos los intervalos sobre los cuales tiene inversa.

Esto se logra resolviendo las inecuaciones $\begin{cases} \text{a) } f'>0 \\ \text{b) } f'<0 \end{cases}$

3) Hallemos f': $\quad f'(x)=\dfrac{(x-1)(2x-2)-(x^2-2x+2)(1)}{(x-1)^2}$

$$\boxed{f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}}$$

$$\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}>0 \Rightarrow x(x-2)>0$$



$$x\neq 1$$

$$\Rightarrow x\in\langle -\infty,0\rangle \cup \langle 2,+\infty\rangle$$

$$\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}<0 \Rightarrow x(x-2)<0$$

$$x\neq 1$$

$$\Rightarrow x\in\langle 0,2\rangle - 1$$

$$\Longleftrightarrow x\in\langle 0,1\rangle \cup \langle 1,2\rangle$$

4) Afirmamos:

i) Si $f'>0$, $\forall\, x\in\langle -\infty,0\rangle \cup \langle 2,+\infty\rangle$, entonces $f(x)$ es creciente en $\forall\, x\in\langle -\infty,0\rangle \cup \langle 2,+\infty\rangle$, por tanto $f(x)$ tiene inversa f^* continua sobre $f(\langle -\infty,0\rangle \cup \langle 2,+\infty\rangle)=\langle -\infty,-2\rangle \cup \langle 2,+\infty\rangle$.

Donde:

$$f(\langle -\infty,0\rangle \cup \langle 2,+\infty\rangle)=\overbrace{\left\langle \lim_{x\to-\infty} f(x)\ ,\ \lim_{x\to 0^-} f(x)\right\rangle}^{\langle -\infty,-2\rangle} \cup \overbrace{\left\langle \lim_{x\to 2^+} f(x)\ ,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)\right\rangle}^{\langle 2,+\infty\rangle}$$

ii) Si $f'<0$, $\forall\, x\in\langle 0,1\rangle \cup \langle 1,2\rangle$, entonces $f(x)$ es decreciente en $\forall\, x\in\langle 0,1\rangle \cup \langle 1,2\rangle$ por tanto $f(x)$ tiene inverso f^* continua sobre:
$f(\langle 0,1\rangle \cup \langle 1,2\rangle)=\langle -\infty,-2\rangle \cup \langle 2,+\infty\rangle$

Donde:

$$f(\langle 0,1\rangle \cup \langle 1,2\rangle)=\left\langle \lim_{x\to 1^-} f(x)\ ,\ \lim_{x\to 0^+} f(x)\right\rangle \cup \left\langle \lim_{x\to 2^-} f(x)\ ,\ \lim_{x\to 1^+} f(x)\right\rangle$$

$$=\langle -\infty,-2\rangle \cup \langle 2,+\infty\rangle$$

Solución de b)

1) Fórmula: $Df^*(y_0) = \frac{1}{Df(x_0)}$, donde $y_0 = f(x_0)$

$y_0 = 5/2$

2) Como: $\underbrace{y_0}_{\frac{5}{2}} = \underbrace{f(x_0)}_{\frac{x_0^2 - 2x_0 + 2}{x_0 - 1}}$

$$\Rightarrow \quad 5x_0 - 5 = 2x_0^2 - 4x_0 + 4$$

$$0 = 2x_0^2 - 9x_0 + 9$$

$$(2x_0 - 3)(x_0 - 3) = 0 \quad \begin{cases} x_0 = 3 \in \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle \\ x_0 = 3/2 \in \langle \infty, 1\rangle \cup \langle 1, 2\rangle \end{cases}$$

Como f^* existe sólo cuando f es inyectiva, entonces a cada y_0 le debe corresponder un solo x_0.

i) Para el caso en que $f(x)$ es ***CRECIENTE*** sobre $\langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle$ se tiene que a $y_0 = \frac{5}{2}$, le corresponde sólo $x_0 = 3 \in \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle$.

Por tanto:

$$Df^*\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{Df(3)} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

Como $Df(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$

$$\Downarrow$$

$$Df(3) = \frac{3(3-2)}{(3-1)^2} = \frac{3}{4}$$

ii) Para el caso en que $f(x)$ es decreciente sobre $\langle 0, 1\rangle \cup \langle 1, 2\rangle$ se tiene que a $y_0 = \frac{5}{2}$ le corresponde sólo $x_0 = \frac{3}{2} \in \langle 0, 1\rangle \cup \langle 1, 2\rangle$

Por tanto:

$$Df^*\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{Df\left(\left(\frac{3}{2}\right)\right)} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

Como $Df(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$

$$Df\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2} - 2\right)}{\left(\frac{3}{2} - 1\right)^2} = -3$$

NOTA: De: $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} \Rightarrow x = 1 + \dfrac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}$

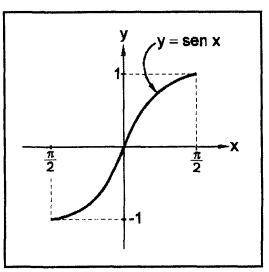
$$x = 1 + \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2} \begin{cases} f^*(y) = 1 + \dfrac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}, & x = f^*(y) \in \langle 0, 1\rangle \cup \langle 1, 2\rangle \\ f^*(y) = 1 + \dfrac{y - \sqrt{y^2 - 4}}{2}, & x = f^*(y) \in \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 3, \infty\rangle \end{cases}$$

4. DERIVADA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

1 DERIVADA DEL ARCO SENO: $D_x \operatorname{arc\,sen} x = ?$

Sea $\begin{cases} y = f(x) = \operatorname{sen} x, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ f^*(y) = x = \operatorname{arc\,sen} y, & y \in [-1, 1] \end{cases}$

Se sabe que: $Df^*(y) = \dfrac{1}{Df(x)}$



Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{1}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow Df(x) = \cos x$

i) si $\cos x = 0 \iff x = \pm\frac{\pi}{2}$

ii) si $\cos x > 0 \Rightarrow x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$

$\iff f(x) \in f\left(\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle\right)$

$\iff y \in \langle -1, 1\rangle$

iii) Como: $\cos x > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{\cos x} > 0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}} > 0$

D arc sen $y = \dfrac{1}{\cos x}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}}$

D arc sen $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$, $y \in \langle -1, 1\rangle$

Por tanto:

$$\boxed{D_x \operatorname{arc\,sen} x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \forall\, x \in \langle -1, 1\rangle}$$

La función sen x es creciente en $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$

La función arcsen y es creciente en $\langle -1, 1\rangle$

② DERIVADA DEL ARCO COSENO: $D_x \arccos x = ?$

Sea: $\begin{cases} y = f(x) = \cos x \quad , \quad x \in [0, \pi] \\ f^*(y) = x = \arccos y \quad , \quad y \in [-1, 1] \end{cases}$

Pero: $f(x) = \cos x$, $x \in [0, \pi]$

y $Df(x) = -\operatorname{sen} x$

i) si: $-\operatorname{sen} x = 0 \iff x = 0, \pi$

ii) $-\operatorname{sen} x < 0 \quad , \quad \forall x \in \langle 0, \pi \rangle$

$\frac{1}{-\operatorname{sen} x} < 0$

Se sabe: $Df(y) = \frac{1}{Df(x)}$

$$D\arccos y = \frac{1}{-\operatorname{sen} x} < 0 \quad , \quad \forall x \in \langle 0, \pi \rangle$$

$$= \frac{1}{-\sqrt{1 - \cos^2 x}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \quad , \quad y \in \langle -1, 1 \rangle$$

Por tanto:

$$\boxed{D_x \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad , \quad x \in \langle -1, 1 \rangle}$$

Ejemplos:

① Dado $f(x) = \operatorname{arc\,sen}\sqrt{1 - x^2}$, $|x| \leq 1$, hallar $D_x f$.

Solución:

$$D_x f(x) = \frac{(\sqrt{1 - x^2})'}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{1 - x^2}\right)^2}} = \frac{\frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}}}{\sqrt{1 - (1 - x^2)}} = \frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{|x|\sqrt{1 - x^2}} \quad , \text{ para } 0 < |x| < 1$$

② Dado $f(x) = arc\cos\left[\frac{4 - x^2}{1 + x^2}\right]$

a) Hallar el dominio de $f(x)$.

b) Hallar los extremos de $f(x)$

c) Bosquejar la gráfica de $f(x)$

Solución:

a) $\text{Dom}(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \Big/ -1 \leq \frac{4 - x^2}{1 + x^2} \leq 1 \right\}$

Resolver la desigualdad:

$$\frac{4-x^2}{1+x^2} \geq -1 \quad \wedge \quad \frac{4-x^2}{1+x^2} \leq 1$$

$$\frac{4-x^2}{1+x^2} + 1 \geq 0 \quad \wedge \quad \frac{4-x^2}{1+x^2} - 1 \leq 0$$

$$\frac{4-x^2+1+x^2}{1+x^2} \geq 0 \quad \wedge \quad \frac{4-x^2-1-x^2}{1+x^2} \leq 0$$

$$\frac{5}{1+x^2} \geq 0 \quad \wedge \quad \frac{3-2x^2}{1+x^2} \leq 0$$

$$3-2x^2 \leq 0$$

$$x^2 \geq 3/2$$

$$\boldsymbol{R} \quad \cap \quad x \geq \sqrt{\tfrac{3}{2}} \quad \vee x \leq -\sqrt{\tfrac{3}{2}}$$

$$x \leq -\sqrt{\tfrac{3}{2}} \quad \vee \quad x \geq \sqrt{\tfrac{3}{2}}$$

$$x \in \left]-\infty, -\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right] \cup \left[\sqrt{\tfrac{3}{2}}, +\infty\right[$$

b) $$f'(x) = -\frac{\frac{(1+x^2)(-2x)-(4-x^2)(2x)}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{4-x^2}{1+x^2}\right)^2}} = \frac{10x}{\sqrt{5(2x^2-3)}}, \quad x^2 > \frac{3}{2}$$

Puntos críticos:

i) De $f'(x) = 0$, se obtiene $x = 0 \in \text{Dom}(f)$

ii) Los extremos del dominio: $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$

iii) Los $x \in Df / \nexists f'(x)$, son $x = -\sqrt{\frac{3}{2}}$, $x = \sqrt{\frac{3}{2}}$

Intervalos donde $f(x)$ es creciente y decreciente:

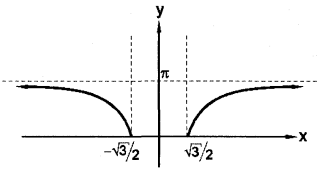
i) De $f'(x) > 0 \Rightarrow x > 0 \quad \wedge \quad x^2 > \frac{3}{2} \Rightarrow x > \sqrt{\frac{3}{2}}$

ii) De $f'(x) < 0 \Rightarrow x < 0 \quad \wedge \quad x^2 > \frac{3}{2} \Rightarrow x < -\sqrt{\frac{3}{2}}$

Los extremos son: $f\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \arccos(1) = 0$

$$f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \arccos(1) = 0$$

Asíntota horizontal: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \arccos(-1) = \pi$



Asíntota vertical: *i)* $\lim_{x \to \sqrt{\frac{3}{2}}^{+}} f(x) = \arccos(1) = 0$

ii) $\lim_{x \to -\sqrt{\frac{3}{2}}^{-}} f(x) = \arccos(1) = 0$

③ DERIVADA DEL ARCO TANGENTE: $D_x \operatorname{arc\,tg}\, x = ?$

1) Sea: $f(x) = y = \operatorname{tg} x \quad , \quad x \in \langle -\pi/2 \ , \ \pi/2 \rangle$

2) Donde: $x = f^*(y) = \operatorname{arc\,tg}\, y \quad , \quad y \in \mathbb{R}$

3) Como: $f(x) = \operatorname{tg} x$ es creciente, $\forall\, x \in \langle -\pi/2 \, , \, \pi/2 \rangle$

Entonces $f'(x) = \sec^2 x > 0 \quad , \quad \forall\, x \in \langle -\pi/2 \, , \, \pi/2 \rangle$

4) Pero: $Df^*(y) = \frac{1}{Df'(x)}$

$$= \frac{1}{\sec^2 \cdot x}$$

$$= \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \cdot x}$$

$$D \operatorname{arc\,tg}\, y = \frac{1}{1+y^2} \ , \ y \in \mathbb{R}$$

Lo que es lo mismo:

5) $\boxed{D_x \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2} \ , \ x \in \mathbb{R}}$

④ DERIVADA DEL ARCO COTANGENTE: $D_x \operatorname{arc\,cot\,g}\, x = ?$

1) Sea: $f(x) = y = \operatorname{cotg} x \, , \ x \in \langle 0, \pi \rangle$

Donde: $x = f^*(y) = \operatorname{arc\,cot\,g}\, y \quad , \quad y \in \mathbb{R}$

2) Como: $f(x) = \operatorname{cotg} x$ es decreciente $\forall\, x \in \langle 0\,,\, \pi \rangle$

Entonces: $f'(x) = -\csc^2 x < 0\,,\ \forall\, x \in \langle 0, \pi \rangle\,.$

3) Pero: $Df^*(y) = \dfrac{1}{Df'(x)}$

$$= \frac{1}{-\csc^2 x} < 0$$

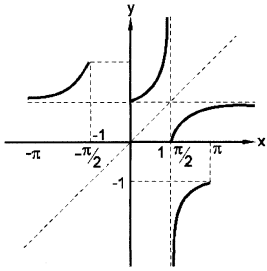
$$= \frac{1}{-(1 + \operatorname{cotg}^2 x)} \qquad \text{por (1)} \quad y = \operatorname{cotg} x \Rightarrow y^2 = \operatorname{cotg}^2 x$$

$$D \operatorname{arc\,cotg}\, y = \frac{1}{1+y^2}\,,\ y \in \mathbb{R}$$

Lo que es lo mismo:

$$\boxed{D_x \operatorname{arc\,cotg}\, x = -\frac{1}{1+x^2} \quad | \quad x \in \mathbb{R}}$$

5 DERIVADA DEL ARCO SECANTE: $D_x \operatorname{arc\,sec} x = ?$



1) Sea: $f(x) = y = \sec c\,,\ x \in [0, \pi] - \{\pi/2\}$

Donde: $x = f^*(y) = \operatorname{arc\,sec} y\,,\ |y| \geq 1$

2) Pero: $f(x) = \sec x$ es creciente en $\forall\, x \in \langle 0\,,\, \pi \rangle - \{\pi\,/\,2\}$

Luego, se cumple que:

$f'(x) = \sec x \operatorname{tg} x > 0\,,\ x \in \langle 0, \pi/2 \rangle \cup \langle \pi/2, \pi \rangle\,.$

Pues:

a) $\sec x \begin{cases} > 0\,,\ x \in \langle 0, \pi/2 \rangle \\ < 0\,,\ x \in \langle \pi/2\,,\, \pi \rangle \end{cases}$

b) $\operatorname{tg} x \begin{cases} > 0\,,\ x \in \langle 0\,,\, \pi/2 \rangle \\ < 0\,,\ x \in \langle \pi/2\,,\, \pi \rangle \end{cases}$

FL FreeLibros

3) Por otro lado:

$$Df^*(x) = \frac{1}{Df(x)}$$

$$= \frac{1}{\sec x \cdot \operatorname{tg} x} = \begin{cases} \dfrac{1}{(+\sec x)(+\operatorname{tg} x)} > 0 \ , \ x \in \langle 0, \pi/2 \rangle \\ \dfrac{1}{(-\sec x)(-\operatorname{tg} x)} > x \in \langle \pi, \pi/2 \rangle \end{cases}$$

$$= \frac{1}{\sec^2 x \sqrt{\sec^2 x - 1}}$$

$$D \operatorname{arcsec} y = \frac{1}{y\sqrt{y^2 - 1}} \quad , \quad |y| > 1$$

De: $\sec x = y \Rightarrow \sec^2 x = y^2$

4) $\therefore$ $\boxed{D_x \operatorname{arc\,sec} x = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \quad , \quad |x| > 1}$

⑥ DERIVADA DEL ARCO COSECANTE: $D_x \operatorname{arc\,csc} x = ?$

1) Sea: $f(x) = y = \csc x \quad , \quad x \in [-\pi/2, \pi/2] - \{0\}$

Donde: $x = f^*(y) = \operatorname{arc\,csc} y \quad , \quad |y| \geq 1$

2) Pero: $f(x) = \csc x$ es decreciente en $\forall x \in \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle - \{0\}$

Luego: $f'(x) = \csc x \cdot \operatorname{cot} g\, x < 0 \quad , \quad \forall x \in \langle -\pi/2, 0 \rangle \cup \langle 0, \pi/2 \rangle$

Donde: a) $\csc x \begin{cases} < 0, x \in \langle -\pi/2, 0 \rangle \\ > 0, x \in \langle 0, \pi/2 \rangle \end{cases}$ b) $\operatorname{cot} g\, x \begin{cases} < 0, x \in \langle -\pi/2, 0 \rangle \\ > 0, x \in \langle 0, \pi/2 \rangle \end{cases}$

3) Además: $Df^*(y) = \frac{1}{Df(x)}$

$$= \frac{1}{-\csc x \cdot \operatorname{cot} g\, x} = \begin{cases} \dfrac{1}{-[(+\csc x)(+\operatorname{cot} gx)]} < 0, \ x \in \langle \pi/2, 0 \rangle \\ \dfrac{1}{-[(-\csc x)(-\operatorname{cot} gx)]} < 0, \ x \in \langle 0, \pi/2 \rangle \end{cases}$$

$$= \frac{1}{-\csc x \sqrt{\csc^2 x - 1}}$$

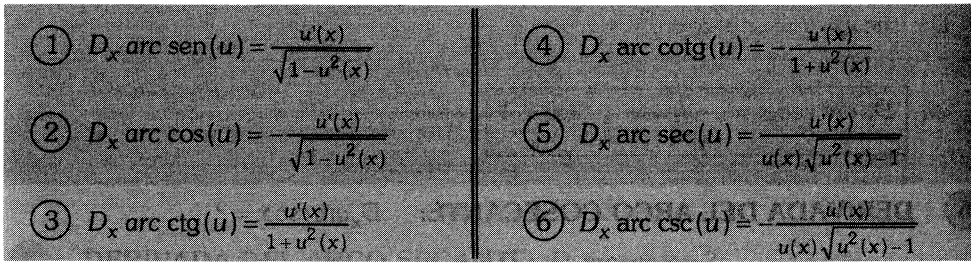
$$D \operatorname{arc\,csc} y = \frac{1}{-y\sqrt{y^2 - 1}} \quad , \quad |y| > 1$$

4) Lo que es lo mismo:

$$\boxed{D_x \operatorname{arccsc} x = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \quad , \quad |x| > 1}$$

5. DERIVADA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICASINVERSAS COMPUESTAS

$$\text{Si} \quad u = u(x) \quad , \quad u' = \frac{du}{dx}$$



Solución de ②

Empleando la regla de la cadena: si $y \xrightarrow{f} u \xrightarrow{g} x$, entonces: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$$y = (g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

Así tenemos:

$$\frac{d}{dx}[\arccos(u(x))] = \frac{d}{du}(\arccos u) \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx} = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2}} \quad , \quad u'(x) = \frac{du}{dx}$$

Teorema 30. Sea $y = f(x)$ continua y monótona en $[a,b]$, si $f(x)$ es diferenciable dos veces en $[a,b]$ y $f'(x) \neq 0$, $\forall\, x \in [a,b]$, entonces la segunda derivada de: $f^*(y) = x$ es:

$$[f^*]''(y) = \frac{f''(f^*(y))}{[f'(f^*(y))]^3}$$

Prueba:

1) La primera derivada de: $f^*(y)$ es:

$$[f^*]'_{(y)} = \frac{1}{f'(f^*(y))} = [f'(f^*(y))]^{-1}$$

2) Derivando por 2[da]. vez:

$$\begin{aligned}
[f^*]''_{(y)} &= -[f'(f^*(y))]^{-2}\,[f'(f^*(y))]' \\
&= -[f'(f^*(y)]^{-2}\,[f''(f^*(y))]\,[(f^*)'(y)] \\
&= -[f'(f^*(y)]^{-2}\,[f''(f^*(y))]\left[\frac{1}{f'(f^*(y))}\right] \\
&= -\frac{f''(f^*(y))}{[f'(f^*(y))]^3}
\end{aligned}$$

$$[f^*]''(y) = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}\ ,\ \text{pues}\ f^*(y) = x$$

Ejemplo. Sea: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$, $x \in [0,2]$. Hallar $[f^*]''\left(\frac{19}{8}\right)$

Solución:

1. $f(x)$ es continua y decreciente.

   Es continua en $[0,2]$ porque f es polinomio. f es decreciente $\Longleftrightarrow f' < 0$

   $$f'(x) = 3x^2 - 6x \ \Rightarrow\ 3x(x-2) < 0$$
   $$\Rightarrow\ x \in \langle 0\,,\,2\rangle$$

2. Fórmula

   $$[f^*]''_{\left(\frac{19}{8}\right)} = -\frac{f''\left(f^*\left(\frac{19}{8}\right)\right)}{\left[f'\left(f^*\left(\frac{19}{8}\right)\right)\right]^3} = \frac{f''(x_0)}{[f'(x_0)]^3}$$

3. Pero: $f^*\left(\frac{19}{8}\right) = x_0 \Longleftrightarrow \frac{19}{8} = f(x_0)$

   $$\frac{19}{8} = x_0^3 - 3x_0^3 + 3$$
   $$8x_0^3 - 24x_0^2 + 5 = 0$$

   Se obtiene: $x_0 = \frac{1}{2} \in [0\,,\,2]$

4. Ahora hallemos f' y f''

   De: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

   $$f'(x) = 3x^2 - 6x \wedge f'\left(\tfrac{1}{2}\right) = -\tfrac{9}{4}$$
   $$f''(x) = 6x - 6 \wedge f''\left(\tfrac{1}{2}\right) = -3$$

5. Reemplazar en 2:

   $$\begin{aligned}
   [f^*]''\left(\frac{19}{8}\right) &= -\frac{f''\left(\frac{1}{2}\right)}{\left[f''\left(\frac{1}{2}\right)\right]^3} \\
   &= -\frac{-3}{\left(-\frac{9}{4}\right)^3} \\
   &= -\frac{64}{243}
   \end{aligned}$$

Proposición: De la fórmula $[f^*]''(y) = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$, deducimos las siguientes relaciones:

A) Si: $[f^*]''(y) < 0 \iff -\frac{f''}{[f']^3} < 0$

$\iff \frac{f''}{f'} > 0 \iff [f'' > 0 \wedge f' > 0] \vee [f'' < 0 \wedge f' < 0]$

B) Si $[f^*]''(y) > 0 \iff -\frac{f''}{[f']^3} > 0$

$\iff \frac{f'}{f} < 0 \iff [f'' < 0 \wedge f' > 0] \vee [f'' > 0 \wedge f'' < 0]$

De todo esto, concluimos:

A) si $f' > 0$, entonces f es **CRECIENTE**

(i) $[f^*]''(y)0 \iff f'' > 0$ **CÓNCAVO HACIA ARRIBA**

(ii) $[f^*](y) > 0 \iff f'' < 0$ **CÓNCAVO HACIA ABAJO**

B) Si $f' < 0$, entonces f es **DECRECIENTE**

(i) $[f^*]''(y) < 0 \iff f'' > 0$ **CÓNCAVO HACIA ABAJO**

(ii) $[f^*]''(y) > 0 \iff f'' > 0$ **CÓNCAVO HACIA ARRIBA**

Problema 01. Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ una función cuya inversa f^* es decreciente y cóncava hacia abajo en $[0,2]$ y donde:

$f^*(0) = 1$, $f^*(2) = 0$, $a + d = 3$

$(f^*)'\left(\frac{46}{27}\right) = -\frac{3}{5}$, $(f^*)''\left(\frac{46}{27}\right) = -\frac{108}{125}$. Halle la función $f(x)$ con su respectivo dominio y rango. Grafique $f(x)$ y f^*.

Solución:

1. Si f^* es decreciente en $[0,2] \Rightarrow f$, también, es decreciente en: $[f^*(2), f^*(0)] = [0,1]$ y por tanto: $\boxed{f'(x) < 0 \ , \ \forall x \in \langle 0,1 \rangle}$

2. Si f^* es cóncava hacia abajo $\Rightarrow [f^*] < 0$, $\forall x \in \langle 0,2 \rangle$

3 Según el **TEO.** si: $f' < 0 \Rightarrow \{[f^*]'' < 0 \iff \boxed{f'' < 0}$, $\forall x \in \langle 0,1 \rangle\}$ (3*)

4. Si $\begin{cases} f^*(0)=1 \Longleftrightarrow f(1) & \Longleftrightarrow 0=a+b+c+d \\ f^*(2)=0 \Longleftrightarrow 2=f(0) & \Longleftrightarrow 2=0+0+0+d \Rightarrow \boxed{d=2} \end{cases}$

5. Ahora, tenemos 3 ecuaciones $\begin{cases} a+d=3 \\ a+b+c+d=0 \\ d=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+2=3 \Rightarrow \boxed{a=1} \\ b+c=-3 \\ \boxed{d=2} \end{cases}$

6. Por el **TEO.** $[f^*]'(y_0)=\frac{1}{f'(f^*(y_0))}$, $f^*(y_0)=x_0$, $y_0=\frac{46}{27}$

Pero: $-\frac{3}{5}=[f^*]'\left(\frac{46}{27}\right)=\frac{1}{f'\left(f^*\left(\frac{46}{27}\right)\right)} \Rightarrow \boxed{f'\left(f^*\left(\frac{46}{27}\right)\right)=-\frac{5}{3}}$ (6*)

7. Por el **TEO.** $\underbrace{[f^*]''(y_0)}=-\frac{f'(f^*(y_0))}{[f'(f^*(y_0))]^3}$

$$-\frac{108}{125}=[f^*]''\left(\frac{46}{27}\right)=-\frac{f'\left(f^*\left(\frac{46}{27}\right)\right)}{\left[f'\left(f^*\left(\frac{46}{27}\right)\right)\right]^3} \Longleftrightarrow \frac{-108}{125}=-\frac{f''\left(f^*\left(\frac{46}{27}\right)\right)}{\left[-\frac{5}{3}\right]^3}$$

$$f''\left(f^*\left(\frac{46}{27}\right)\right)=-4 \qquad (7^*)$$

8. Por otro lado: $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, donde $\begin{cases} a=1 \\ d=2 \end{cases}$

$\boxed{f(x)=x^3+bx^2+cx+2}$ Por hallarse: $b=?$, $c=2$

9. DERIVANDO $\begin{cases} f'(x)=3x^2+2bx+c, \text{ como: } b+c=-3 \Rightarrow c=-3-b \\ \qquad\qquad \text{luego: } f'(x)=3x^2+2bx-3-b \\ f''(x)=bx+2b+c \quad , \quad x\in\langle 0,1\rangle \end{cases}$

10. Reemplazando (6*) y (7*) en (9) $\begin{cases} -\frac{5}{3}=3\left[f^*\left(\frac{46}{27}\right)\right]^2+2b\left[f^*\left(\frac{46}{27}\right)\right]-3-b \\ -4=6\left[f^*\left(\frac{46}{27}\right)\right]+2b \Rightarrow f^*\left(\frac{46}{27}\right)=\frac{-4-2b}{6} \end{cases}$

$$=\frac{-2-b}{3}$$

11. Reemplazar (10**) en (10*):

$$-\frac{5}{3}=3\left(\frac{-2-b}{3}\right)^2+2b\left(\frac{-2-b}{3}\right)-3-b$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{5}{3}=\frac{(2+b)^2}{3}+2b\left(\frac{-2-b}{3}\right)-3-b$$

$$\Rightarrow \quad -5=4+4b+b^2-4b-2b^2-9-3b$$

$$0=-b^2-3b$$

$$b^2+3b=0 \iff b(b+3)=0 \iff b=0 \ \vee \ b=-3$$

12. Si: $b=0$, en (9): $f''(x)=6x$, $\forall x\in\langle 0,1\rangle$

Pero $f''(x)=6x>0$, $\forall x\in\langle 0,1\rangle$, lo cual contradice a (3*)

luego el valor de b no es "0".

13. Si $b=-3$, en (9): $f''(x)=6x-6$

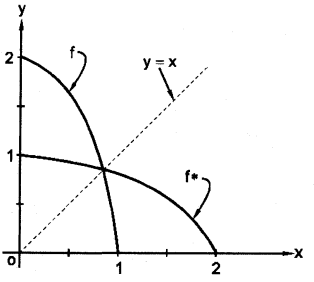
$=6(x-1)<0$, $\forall x\in\langle 0,1\rangle$ esto no contradice (3*)

14. Com: $\boxed{b=-3}$, en $b+c=-3 \iff -3+c=-3 \Rightarrow \boxed{c=0}$

15. Reemplazar en (8):

$f(x)=x^3-3x^2+2$	$x\in[0,1]$ $f(x)\in[f(1),f(0)]=[0,2]$

16. El gráfico es:



Problema 02. Dada la función: $f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right) & , \quad 0<x<2 \\ \frac{1}{4}x^2-x+2 & , \quad x>2 \end{cases}$

a) Utilizando el criterio de la primera derivada, indique si $f(x)$ tiene inversa.

b) Hallar la derivada de la función inversa, en caso de existir la inversa de f.

Solución de a)

1. Para saber si $f(x)$ tiene inversa, debo probar que $f(x)$ sea estrictamente creciente o decreciente en su respectivo dominio.

2. Pero: $f'(x)=\begin{cases} \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) & , \quad 0<x<2 \\ \frac{1}{2}x-1 & , \quad x>2 \end{cases}$

3. Si pruebo que $f'(x)>0$, $\forall\, x\in D_f \circ f'<0$, $\forall\, x\in D_f$, entonces afirmaremos que f tiene inversa.

Veamos:

a) Si $0<x<2 \Rightarrow 0<\frac{\pi}{4}x<\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right)>0$

por $\frac{\pi}{4} \Rightarrow \underbrace{\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right)}_{f'(x)>0} > 0 \quad , \quad \forall x\in\langle 0.2\rangle$

b) si: $z>2 \Rightarrow$ por: $\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2}>1$

$\Rightarrow \underbrace{\frac{x}{2}-1}_{f'} > 0$

Como vemos: $f'(x)>0$, $\forall\, x>2$; luego $f(x)$ es creciente para $x>0$.

4. En consecuencia $f(x)$ es estrictamente creciente sobre:

$\text{Dom}(f)=\langle 0,2\rangle \cup \langle 2,+\infty\rangle$ y por tanto $f(x)$ tiene inversa sobre $\text{Dom}(f)$

Solución de b) La derivada de f^* será:

$$[f^*]'(y)=\frac{1}{f'(x)} \text{ , donde } x=f^*(y)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)} & , \quad 0 < x < 2 \\ \dfrac{1}{\frac{1}{2}x - 1} & , \quad x > 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\frac{\pi}{4}\sqrt{1-y^2}} \\ \dfrac{1}{\frac{1}{2}\left[2+\sqrt{4y-1}\right]-1} \end{cases}$$

$$f^*(y) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi\sqrt{1-y^2}} & , \quad 0 < y < 1 \\ \dfrac{2}{\sqrt{4y-1}} & , \quad y > 1 \end{cases}$$

si $y = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}x\right)}$

$$= \sqrt{1-y^2}$$

si $y = \frac{1}{4}x^2 - x + 2$

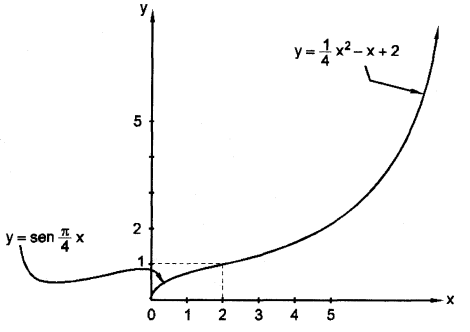
$$= \frac{1}{4}(x-2)^2 + 1$$

$4y = (x-2)^2 + 4 \Rightarrow (x-2)^2 = 4y - 4$

$x - 2 = \pm\sqrt{4y-4}$

$x = 2 \pm 2\sqrt{y-17}$

$x = 2 + 2\sqrt{y-1}$



Problema 03. Dada la función: $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\operatorname{sen}(2\pi x)$, $x \in [0,1/4]$.

Hallar: $[f^*]''(y_0)$, con $y_0 = e^{-1/8}$.

Solución:

1. Fórmula: $[f^*]''(y_0) = -\dfrac{f''(x_0)}{[f'(y_0)]^3}$, $x_0 = f^*(y_0) \iff y_0 = f(x_0)$

2. Hallemos x_0 conociendo: $y_0 = f(x_0)$ en $\underbrace{f(x)} = e^{-1/2\pi}\operatorname{sen}(2\pi x)$

$$e^{-\frac{1}{8}} = e^{-\frac{1}{2}x_0} \cdot \operatorname{sen}(2\pi x_0)$$

$$e^{-\frac{1}{8}} \cdot 1 = e^{-\frac{1}{2}x_0} \cdot \operatorname{sen}(2\pi x_0)$$

$$\iff \begin{cases} e^{-\frac{1}{8}} = e^{-\frac{1}{2}x_0} & \iff -\frac{1}{8} = -\frac{1}{2}x_0 \Rightarrow \boxed{x_0 = \frac{1}{4}} \\ 1 = \operatorname{sen}(2\pi x_0) & \iff 2\pi x_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{x_0 = \frac{1}{4}} \end{cases}$$

3. Ahora, hallemos: $f'(1/4)$ y $f''(1/4)$, pues $1/4 = x_0$

Veamos:

De $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x_0} \cdot \operatorname{sen}(2\pi x)$

$$a) \Rightarrow f'(x) = -\tfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} \cdot \operatorname{sen}(2\pi x) + e^{-\frac{1}{2}x} 2\pi \cdot \cos(2\pi x)$$

$$= -\tfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}[\operatorname{sen}(2\pi x) - 4\pi \cdot \cos(2\pi x)]$$

$$f'\left(\tfrac{1}{4}\right) = -\tfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{8}}$$

$$b)\ f''(x) = \tfrac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x} \cdot [\operatorname{sen}(2\pi x) - 4\pi \cdot \cos(2\pi x)] + (-\tfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x})[2\pi \cos 2\pi x + 8\pi^2 \operatorname{sen} 2\pi x]$$

$$f''\left(\tfrac{1}{4}\right) = \tfrac{1}{4}e^{-\frac{1}{8}}[1-0] - \tfrac{1}{2} \cdot -\tfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{8}}[0 + 8\pi^2]$$

$$= \tfrac{1}{4}e^{-\frac{1}{8}}[1 - 16\pi^2]$$

4. Luego: $[f^*]''(\tfrac{1}{4}) = \dfrac{-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{8}}[1-16\pi^2]}{\left[-\frac{1}{2}e^{-1/2}\right]^3} = 2e^{-\frac{1}{4}}(1 - 16\pi^2)$

Problema 04. Dada la función $f(x)=\frac{x^3+1}{2x}$, $x>\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

a) Calcular. $[f^*](y_0)$, para $y_0=\frac{9}{4}$

b) Si: $g=f^*$, calcular (con diferenciales) $g\left(\frac{9}{4}-\frac{1}{4}\right)$

Solución de a)

1. Hallar, en primer lugar, el valor de $x_0=?$

Se sabe que: $x_0=f^*(y_0) \iff y_0=f(x_0)$

$$\iff \frac{9}{4}=\frac{x_0^2+1}{2x_0}$$

$$\iff 18x_0^2=4x_0^3+4$$

$$\iff 4x_0^3-18x_0+4=0$$

$$\iff 2x_0^3-9x_0+2=0$$

2	2	0	−9	+2
		4	8	−2
	2	4	−1	0

$$\iff (x_0-2)(2x_0^2+4x_0-1)=0$$

Sólo $x_0=0$ pertenece al intervalo: $x>\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Por tanto: $2=f^*(9/4)$

2. Luego, hallaremos: $[f^*]''\left(\frac{9}{4}\right)=-\frac{f''(2)}{[f'(2)]^3}$

3. De $f(x)=\frac{x^3+1}{2x}$

$$f'(x)=\frac{2x^3-1}{2x^2} \Rightarrow f'(2)=\frac{15}{8}$$

$$f''(x)=\frac{x^3+1}{x^3} \Rightarrow f''(2)=\frac{9}{8}$$

4. Por tanto: $[f^*]''\left(\frac{9}{4}\right)=-\frac{\frac{9}{8}}{\left(\frac{15}{8}\right)^3}=-\frac{64}{375}$

Solución de b) Aplicar: $g(x_0+h)=g(x_0)+hg'(x_0)$, donde $x_0=\frac{9}{4}$, $h=\frac{1}{4}$

5. Se pide hallar: $g\left(\frac{9}{4}-\frac{1}{4}\right)=g\left(\frac{9}{4}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)g'\left(\frac{9}{4}\right)$

6. Como $g=f^*$ $\begin{cases} g\left(\frac{9}{4}\right)=f^*\left(\frac{9}{4}\right)=2 \\ g'\left(\frac{9}{4}\right)=[f^*]'\left(\frac{9}{4}\right)=\frac{1}{f'(2)}=\frac{8}{15} \end{cases}$

7. Reemplazar (6) en (5): $g\left(\frac{9}{4}-\frac{1}{4}\right)=2-\frac{1}{4}\left(\frac{8}{15}\right)=\frac{28}{15}$

Problema 05. $y=f(x)$ y existe f^* sobre $\text{Dom}(f)=\langle a,b\rangle$ probar que:

a) $[f^*]'''(y)=-\dfrac{3[f''(x)]^2-f'(x)f'''(x)}{[f'(x)]^4}$, si $f'(x)>0$

b) Si $3[f'''(x)]^2-f'(x)\cdot f'''(x)=0$, $f'(x)>0$, entonces f^* es un polinomio de grado ≤ 2

Solución de a)

1. Se tiene: $[f^*]''(y)=-\dfrac{f''(x)}{[f'(x)]^3}$, donde $x=f^*(y) \iff y=f(x)$

2.
$$\Rightarrow \quad [f^*]''(y)=-\frac{f''[(x)]^3 f'''(x)-f''(x)\cdot 3[f'(x)]^2[f''(x)]}{[f'(x)]^6}$$
$$=\frac{[f'(x)]^2}{[f'(x)]^6}(3[f'(x)]^2-f'(x)\cdot f'''(x))$$
$$=\frac{3[f''(x)]^2-f'(x)\cdot f'''(x)}{[f'(x)]^4} \quad , \quad \text{si } f'(x)>0$$

Solución de b)

3. Si $3[f''(x)]^2-f'(x)\cdot f''(x)=0$, entonces:

$$[f^*]'''(y)=0$$
$$\Rightarrow \quad [f^*]''(y)=a$$
$$\Rightarrow \quad [f^*]'(y)=ay+b$$
$$\Rightarrow \quad [f^*](y)=a\frac{y^2}{2}+by+c \Leftarrow \text{POLINOMIO DE GRADO } \leq 2$$

a, b, c **SON CONSTANTES**

Problema 06. Sea f una función creciente definida sobre $[2,\infty\rangle$ y sea $F(x)=f\left(\frac{x}{x-1}\right)$. Demostrar que F es univalente y hallar F^* en términos de f^*.

Solución:

1. La función $F(x)$ es una composición de dos funciones, y se puede escribir de la siguiente forma:

$$F(x)=f(g(x))=(f\circ g)(x),\ \text{siendo}\quad g(x)=\frac{x}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}\ \text{ y}$$

$$g'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}$$

2. $\text{Dom}(F)=\text{Dom}(f\circ g)=x\in\text{Dom}(g)\ \wedge\ g(x)\in\text{Dom}(f)$

$$=x\in\text{Dom}\,g(x)\ \wedge\ g(x)\in[2,+\infty\rangle$$

$$=x\in\langle 1,2]\ \wedge\ x\in[1,2\rangle$$

$$=x\in\langle 1,2]$$

($g(x)\in[2,+\infty\rangle$ indica que el rango de $g(x)$ es $[2;+\infty\rangle$)

3. Si $g(x)\in[2,+\infty\rangle\ \Rightarrow\ 2\le g(x)<+\infty$

$$\Rightarrow\ 2\le 1+\frac{1}{x-1}<+\infty$$

$$\Rightarrow\ 1\le\frac{1}{x-1}<+\infty$$

Al invertir, en el límite: $\Rightarrow\ 1\ge x-1>\frac{1}{+\infty}$

$$1\ge x-1>0$$

$$2\ge x>1\ \Rightarrow\ x\in\langle 1,2]=\text{Dom}(g)$$

4. De: $g(x)=1+\frac{1}{x-1}$, obtenemos $g'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}$

Si $x\in\langle 1,2]\ \Rightarrow\ 1<x\le 2\Rightarrow 0<x-1\ \Rightarrow\ 0<(x-1)^2\le 1$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{(x-1)^2}>0$$

$$\Rightarrow\ -\frac{1}{(x-1)^2}<0$$

$$\Rightarrow\ g'(x)<0\quad,\quad\forall x\in\langle 1,2]$$

Luego, $g(x)$ es decreciente $\forall x\in\langle 1,2]$.

5. Además, si: $F(x) = (f \circ g)(x)$

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$= (+)(-) = -\text{pues} \begin{cases} f'(g(x)) > 0 & , \text{ porque } g \text{ es creciente} \\ g'(x) < 0 & , \text{ porque } g \text{ es decrteciente} \end{cases}$$

Luego: $f'(x) < 0$, entonces $F(x)$ es decreciente, por tanto F es univalente.

6. De: $F = g \circ f$

Se obtiene: $F^* = g^* \circ f^*$

$$F^*(z) = g^*(f^*(z))$$

$$= \frac{f^*(z)}{f^*(z)-1}$$

Como: $g(x) = \frac{x}{x-1}$, la inversa de g se halla:

$$g(g^*(x)) = x$$

$$\frac{g^*}{g^*-1} = x$$

$$g^* = x g^* - x$$

$$x = (x-1)g^*$$

$$g^*(x) = \frac{x}{x-1}$$

y $\quad g^*(f^*(z)) = \frac{f^*(z)}{f^*(z)-1}$

7. Ahora, falta hallar el recorrido de z.

Como f es decreciente sobre $[2, +\infty\rangle$ también $f^*(z)$ es decreciente sobre $f[2, +\infty\rangle)$

Además: Si $y = f(z) \iff z = f(y)$, con $y \in [2, +\infty\rangle$

$$\Rightarrow \quad y \geq 2$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{f(y)}_{z} \geq f(2) \quad , \text{ porque } f \text{ es creciente}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{z \geq f(2)}$$

8. CONCLUSION:

$F^*(z) = \frac{f^*(z)}{f^*(z)-1}$	$z \geq f(2)$

Problema 07. Probar que $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$, para $x\in[-2,-1]$ posee inversa. Hallar f^*.

Solución:

1. En primer lugar se halla la primera derivada:

$$f'(x)=\frac{x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}-\sqrt{1+x^2}\cdot 1}{x^2}=\frac{x^2-(1+x^2)}{x^2\sqrt{1+x^2}}=\frac{-1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-1}{x^2\sqrt{1+x^2}}}$$

2. f es **CRECIENTE** $\iff f'>0$

$$\iff \frac{-1}{x^2\sqrt{1+x^2}}>0 \iff \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}<0$$

(es falso, esta relación)

Afirmamos que f **NO** es **CRECIENTE**, en el intervalo $\forall x\in\langle -2,-1\rangle$

3. f es **DECRECIENTE** $\iff f'<0$

$$\iff \frac{-1}{x^2\sqrt{1+x^2}}<0$$

(es verdadero $\forall x\in\langle -1,-2\rangle$)

Afirmamos, que f es **DECRECIENTE** sobre $\forall x\in\langle -2,-1\rangle$, por lo tanto f tiene inversa.

4. Hallemos la inversa de $f(x)$. Teniendo en cuenta que: $f[f^*(x)]=x$.

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{1+(f^*)^2}}{f^*}=x \iff \sqrt{1+(f^*)^2}=x f^*$$

$$\iff 1+(f^*)^2=x^2(f^*)^2$$

$$\iff 1=x^2(f^*)^2-(f^*)^2$$

$$f=(x^2-1)(f^*)^2 \iff (f^*)^2=\frac{1}{x^2-1}$$

$$\iff \boxed{\begin{array}{c} f^*=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \\ \hline x\in[-\sqrt{2},-\sqrt{5}/2] \end{array}}$$

FL FreeLibros

RANGO DE f

Como: $x \in [-2, -1]$ f es decreciente entonces el rango de f es:

$$f(x) \in [f(-1)\ ,\ f(-2)] = \left[-\sqrt{2}\ ,\ -\frac{\sqrt{5}}{2} \right], \text{ donde:}$$

$$f(-1) = \frac{\sqrt{1+1}}{-1} = -\sqrt{2}$$

$$f(-2) = \frac{\sqrt{1+4}}{-2} = \frac{\sqrt{5}}{-2} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Problema 08. Pruebe que: $y = f(x) = 2\,arc\,\mathrm{tg}\,x + arc\,\mathrm{sen}\frac{2x}{1+x^2}$ es constante, cuando $x \geq 1$. Hallar el valor de dicha constante.

Solución:

1. Si "y" es constante debe ser que $y' = 0$.

Veamos:

$$y' = 2\frac{1}{1+x^2} + \frac{\frac{(1+x^2)(2) - 2x(2x)}{(1+x^2)^2}}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} = \frac{2}{1+x^2} + \frac{2(1+x^2)(1+x^2)}{(1+x^2)\sqrt{(1+x^2)^2}}$$

$$= \frac{2}{1+x^2} + \frac{2(1+x^2)}{(1+x^2)\left|1-x^2\right|}\ ,\ \text{analizar el signo de } |1-x^2| = |1-x||1+x| =$$

$$= |x-1||x+1| = (x+1) = -(1-x^2)$$

Para $x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0$ y $x + 1 > 2 > 0$

$$= \frac{2}{1+x^2} + \frac{2(1+x^2)}{-(1+x^2)(1-x^2)} = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2} = 0$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = y' = 0\ ,\ \text{para } x > 1$$

2. En consecuencia $y = f(x)$ es constante, puesto que la derivada de una constante es cero.

3. Si: $\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \boxed{y = C}$ $C = \text{constante}$

4. Para: $x = 1$, el valor de $f(x)$ es $f(1) = 2\,\mathrm{arctg}(1) + \mathrm{arc\,sen}(1) = \frac{2\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \pi$

Es decir: $c = \pi \Rightarrow f(x) = \pi$, $\forall\, x \geq 1$.

Problemas sobre Razón de Cambio y Teorema del Valor Medio.

1. Se está grabando un vídeo de una carrera desde un lugar que está a 40m de la pista siguiendo a un auto que se mueve a 290 km/h.

a) ¿con qué rapidez cambia el ángulo θ de la cámara cuando el auto se encuentra exactamente frente a ésta (es decir $\theta = 0$)?

b) ¿con qué rapidez cambia el ángulo medio segundo después?

Rpta.: $\frac{d\theta}{dt} = -\frac{290}{40}$, $\frac{d\theta}{dt} = \frac{dx/dt}{40\sec^2\theta}$

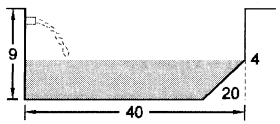
2. Un avión vuela a velocidad constante de 300km/h, pasa sobre una estación terrestre de radar a una altura de 1km y se eleva a un ángulo de 30°.
¿A qué velocidad aumenta la distancia del avión respecto de la estación del radar 1 minuto más tarde?

3. Usando el Teorema del Valor Medio o el Rolle, verifique que:

$$\frac{x-1}{x} < \operatorname{Ln} x < x-1, \text{ para } x > 1$$

4. Por el *T.V.M.* demostrar que $\frac{x}{x^2+1} < \operatorname{arc\,tan} x < x$, $\forall\, x > 0$

5.

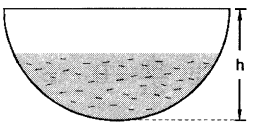


La piscina de la fig. tiene un ancho de 30 pies y está siendo llenada mediante una bomba a razón de 28 pies^3/min. ¿Con qué velocidad sube el nivel del agua en el instante en que ha alcanzado 4 pies en la parte más honda?

6. Usando el *T.V.M.* demostrar que $\operatorname{Ln}(x+1) > \frac{x}{x+1}$, $\forall\, x > 0$

7. El radio r de la base de un cono circular recto está creciendo a una razón de 3 cm/min y la altura h está creciendo a razón de 4 cm/min. ¿Con qué rapidez cambia el área lateral de la superficie del cono cuando $r = 5\,\text{cm}$ y $h = 12\,\text{cm}$?

8. Si se bombea agua en el tanque hemisférico que se muestra en la figura a razón de 22.5 pies/min. Si el radio r de la esfera es 10 pies, ¿con qué rapidez está subiendo el nivel del agua, cuando está a 5 pies de profundidad en el centro?



Fórmula: $v = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$ ***Rpta.:*** $\frac{dh}{dt} = \frac{0.3}{\pi}$ pies/min

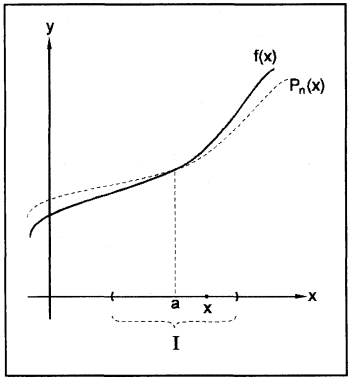
9. Demostrar que $x + \tan x > \operatorname{Ln}(1+x^2)$, $\forall\, x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

CAPÍTULO 8

POLINOMIO DE TAYLOR

1. POLINOMIOS DE TAYLOR Y APROXIMACIONES

Introducción: En este capítulo trataremos de aproximar un polinomio $P_n(x)$ de grado n hacía una función $f(x)$ pasando por el punto común $x = a$, es decir cuando $f(a) = P_n(a)$. En un intervalo I muy pequeño que contiene el punto a la aproximación de $P_n(x)$ a la función $f(x)$ es casi exacta.



$$\boxed{\text{cuando } x \to a \text{ entonces } P_n(x) \to f(x)}$$

¿Qué hipótesis debe tener la función $f(x)$ para poder ser aproximado por un polinomio $P_n(x)$ alrededor de un punto "a"?. Para que $P_n(x)$ se aproxima a $f(x)$ alrededor del punto "a", la función $f(x)$ debe ser derivable hasta el orden $n+1$ en un intervalo I muy pequeño que contiene el punto a.

¿Qué forma tiene el polinomio $P_n(x)$ alrededor del punto "a" y cómo se halla?.

A continuación se da la forma del polinomio $P_n(x)$ y después justificamos su existencia por medio de un teorema.

1.1. DEFINICIÓN DEL *n*-ésimo POLINOMIO DE TAYLOR

Si f tiene n derivadas en el punto "a", el polinomio.

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)x + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Se llama **POLINOMIO DE TAYLOR** de grado n para $f(x)$ en a.

NOTA: Si $a = 0$, entonces.

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

se llama **POLINOMIO DE MACLAURIN** de grado n para f.

Teorema 1. Si $f(x)$ es una función tal que existe $f^{(n)}_{(a)}$ y si $P_n(x)$ es un polinomi de grado n centrado en "a" cuya forma es:

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + ... + c_n(x-a)^n$$

tal que: $P_n(a) = f(a)$

$P_n'(a) = f'(a)$

$P_n''(a) = f''(a)$

$P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$

Entonces: $P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)$

Demostración:

Derivar la función polinomial $P_n(x)$ y sustituir x por a.

Así:

1. $P_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + ... + c_n(x-a)^n$

$P_n'(x) = 0 + c_1 + 2c_2(x-a) + 3\cdot c_3(x-a)^2 + ... + nc_n(x-a)^{n-1}$

$P_n''(x) = 0 + 2c_2 + 2.3.c_3(x-a) + ... + n(n-1)cn(x-a)^{n-2}$

$P_n^{(3)}(x) = 0 + 2\cdot 3\cdot c_3 + ... + n(n-1)(n-2)c_n(x-a)^{n-3}$

$\vdots$

$P_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2) \ ... \ 3,2,1 \ C_n$

2. Sustituir en $P_n(x)$ y sus derivadas $P^{(k)}(x)$ en $x = a$.

$$P_n(a) = c_0 \qquad c_0 = P_n(a) = f(a)$$
$$P_n'(a) = c_1 \qquad c_1 = P_n'(a) = f'(a)$$
$$P_n''(a) = 2c_2 \qquad c_2 = \frac{P_n''(c)}{2!} = \frac{f''(a)}{2!}$$
$$P_n^{(3)}(a) = 2 \cdot 3 \cdot c_3 \qquad c_3 = \frac{P_n^{(3)}(a)}{3!} = \frac{f^{(3)}(a)}{3!}$$
$$P_n^{n}(a) = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot c_3 \qquad c_n = \frac{P_n^{(n)}(a)}{n!} = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

3. Sustituir en (1) los coeficientes C_i obtenidos en (2):

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots\ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

I. EJERCICIOS

En los ejercicios 1–5, hallar el polinomio de Maclauirin de grado n para la función dada:

1. $f(x) = e^{-x}$, $n = 3$

2. $f(x) = xe^{x}$, $n = 4$

3. $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $n = 4$ **Rpta.:** $P_4(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4$

4. $f(x) = \operatorname{sen} x$, $n = 5$ **Rpta.:** $P_5(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$

Solución:

1. El polinomio de Maclaurin de grado 3 buscado es:

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3$$

De: $f(x) = e^{-x} \longrightarrow f(0) = e^{-0} = 1$

$f'(x) = e^{-x} \longrightarrow f''(0) = -e^{0} = -1$

$f^{(3)}(x) = -e^{-x} \longrightarrow f^{(3)}(0) = -e^{0} = -1$

$f^{(3)}(x) = -e^{-x} \longrightarrow f^{(3)}(0) = -e^{0} = -1$

Sustituir en $P_3(x)$, obtenemos:

$$P_3(x) = 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3$$
$$= 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$$

2. El polinomio de Maclaurin de grado $n = 4$, buscado es:

$$P_4(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4$$

De: $f(x) = xe^x \longrightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = e^x + xe^x \longrightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = e^x + e^x + xe^x$

$= 2e^x + x \cdot e^x \longrightarrow f''(0) = 2$

$f^{(3)}(x) = 2e^x + e^x + xe^x$

$= 3e^x + xe^x \longrightarrow f^{(3)}(0) = 3$

$f^{(4)}(x) = 3e^x + e^x + xe^x$

$= 4e^x + xe^x \longrightarrow f^{(4)}(0) = 4$

Sustituir en $P_4(x)$, obtenemos:

$$P_n(x) = 0 + x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{3}{3!}x^3 + \frac{4}{4!}x^4$$
$$= x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4$$

II. EJERCICIOS

5. Hallar el polinomio de Taylor de grado 2 centrado en π que se aproxima a la función $f(x) = x^2 \cdot \cos x$.

Solución:

El polinomio de Taylor de grado 2 centrado en π es:

$$P_2(x) = f(\pi) + f'(\pi)(x - \pi) + \frac{f''(\pi)}{2!}(x - \pi^2$$

De:

$$f(x)=x^2\cdot\cos x \quad \rightarrow \quad f(\pi)=\pi^2(-1)=-\pi^2$$

$$f'(x)=2x\cos x-x^2\operatorname{sen}x \quad \rightarrow \quad f'(\pi)=2\pi(-1)-\pi^2(0)=-2\pi$$

$$f''(x)=2\cos x-2x\operatorname{sen}x-x^2\cos x \quad \rightarrow \quad f''(\pi)=-2-0-0-\pi^2(-1)=-2+\pi^2$$

Sustituir en $P_2(x)$: $P_2(x)=-\pi^2-2\pi(x-\pi)+\frac{\pi^2-2}{2}(x-\pi)^2$

6. Aproximar Ln(1.2) mediante un polinomio de cuarto grado.

Solución:

Se pide aproximar $f(x)=\operatorname{Ln}(x)\approx P_4(x)$, para $x=1\cdot 2$. Como $x=1\cdot 2$ está cerca de 1, entonces hallemos $P_4(x)$ alrededor de $a=1$.

$$P_4(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+\frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3+\frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4.$$

De:

$$f(x)=\operatorname{Ln}x \longrightarrow f(1)=0$$

$$f'(x)=\frac{1}{x} \longrightarrow f'(1)=1$$

$$f''(x)=-\frac{1}{x^2} \longrightarrow f''(1)=-1$$

$$f^{(3)}(x)=\frac{2!}{x^3} \longrightarrow f^{(3)}(1)=2$$

$$f^{(4)}(x)=-\frac{3!}{x^4} \longrightarrow f^{(4)}(1)=-6$$

Al sustituir los valores de $f(1)$, $f'(1)$, $f''(1)$, $f^{(3)}(1)$ y $f^{(4)}(1)$ en $P_4(x)$, obtenemos:

$$P_4(x)=0+(x-1)-\frac{1}{2!}(x-1)^2+\frac{2}{3!}(x-1)^3+\frac{-6}{4!}(x-1)^4$$

$$\boxed{P_4(x)=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4}$$

Como: $f(x)=\operatorname{Ln}x\approx P_4(x)$ para todo "x" cerca al número "1" entonces:

$$\begin{aligned}\text{Ln}(1.2) &\approx P_4(1.2)\\ &\approx (1.2-1)-\tfrac{1}{2}(1.2-1)^2+\tfrac{1}{3}(1.2-1)^3-\tfrac{1}{4}(1.2-1)^4\\ &\approx 0.2-\tfrac{1}{2}(0.2)^2+\tfrac{1}{3}(0.2)^3-\tfrac{1}{4}(0.2)^4\\ &\approx 0.1822666\end{aligned}$$

Problema. Aplicar el polinomio de Maclaurin para calcular $\text{Ln}(1.2)$.

Solución:

Como $\text{Ln}(1.2)=\text{Ln}(1+0.2)=\text{Ln}(1+x)=g(x)$, para $x=0.2$ y como $x=0.2$ está muy próximo a "0", entonces el polinomio de Maclaurin de cuarto grado que se aproxima a la función $g(x)=\text{Ln}(1+x)$ alrededor "0" es:

$$P_4(x)=g(0)+g'(0)\,x+\frac{g''(0)}{2!}x^2+\frac{g^{(3)}(0)}{3!}x^3+\frac{g^{(4)}(0)}{4!}x^4$$

Donde:
$$\begin{aligned}g(x)&=\text{Ln}(1+x) &\longrightarrow\quad g(0)&=0\\ g'(x)&=\frac{1}{1+x} &\longrightarrow\quad g'(0)&=1\\ g''(x)&=-\frac{1}{(1+x)^2} &\longrightarrow\quad g''(0)&=-1\\ g^{(3)}(x)&=\frac{2}{(1+x)^3} &\longrightarrow\quad g^{(3)}(0)&=2\\ g^{(4)}(x)&=-\frac{6}{(1+x)^4} &\longrightarrow\quad g^{(4)}(0)&=-6\end{aligned}$$

Sustituir en $P_4(x)$: $P_4(x)=0+x-\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{4}x^4$

Por tanto:

$$g(x)=\text{Ln}(1+x)\approx P_4(x)$$

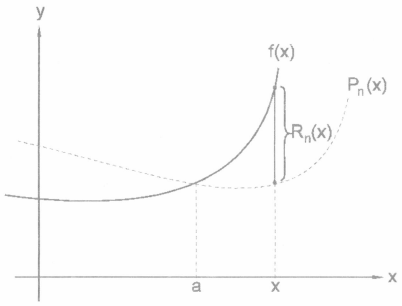
$$\begin{aligned}g(0.2)=\text{Ln}(1+0.2)&\approx P_4(0.2)\approx 0.2-\tfrac{1}{2}(0.2)^2+\tfrac{1}{3}(0.2)^3-\tfrac{1}{4}(0.2)^4\\ &\approx 0.1822666\end{aligned}$$

Observación: El cálculo de muchas funciones elementales, tales como: $\sqrt[5]{2.04}$, $e^{0.2}$, $\text{sen}\,30.7°$, etc. se hacen por aproximación mediante los polinomios de Maclaurin.

1.2. EL RESTO DE UN POLINOMIO DE TAYLOR

En los ejemplos anteriores hemos visto que es posible hallar polinomios $P_n(x)$ que se aproximen a una función $f(x)$ alrededor de un punto fijo "a".

Es decir: $P_n(x) \approx f(x)$, para todo x tal que $x \longrightarrow ap$



Notación: $P_n(x) \approx f(x),\ \forall\ x/x \longrightarrow a$

Se lee "$P_n(x)$ se aproxima a $f(x)$, para todo x, tal que x tiende en acercarse hacía el número a".

Cuando se trabaja con aproximaciones, se debe tener especial cuidado de saber con qué precisión se está haciendo la aproximación. Cuando el error es mínimo afirmamos con mucha confianza que la aproximación es buena.

Para medir la **PRECISIÓN** del valor exacto de $f(x)$ cuando es aproximado por el polinomio de Taylor $P_n(x)$, usaremos el concepto de **resto**.

Si denotamos por $R_n(x)$ el resto, definimos:

$$\underbrace{f(x)}_{\text{Valor exacto}} = \underbrace{P_n(x)}_{\text{Valor aproximado}} + \underbrace{R_n(x)}_{\text{resto}}$$

De donde obtenemos: $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$.

Al valor absoluto de $R_n(x)$ le llamamos **ERROR**, es decir:

$$\text{ERROR} = |R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)|$$

En la práctica, el error es imposible de hallarse en forma exacta, lo que se hace es **ESTIMAR** dicho **ERROR** mediante un procedimiento general conocido con el nombre de **TEOREMA DE TAYLOR** y el resto que en él se halla se llama la **FORMA DE LAGRANGE PARA EL RESTO.**

Teorema 2. (TEOREMA DE TAYLOR)

Si una función f es derivable hasta el orden $n+1$ en el intervalo $[a,x]$ y f, $f'',\ldots,f^{(n)}$ están definidas sobre $[a,x]$, entonces existe un $z \in \langle a,x \rangle$, tal que:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}_{(a)}}{n!}(x-a)^n+\mathrm{Rn}(x) \quad \text{(I)}$$

donde: (1)

$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}_{(Z)}}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ *forma* de LAGRANGE	$x \neq a$ $a<z<x$

(2)

$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}_{(z)}}{(n+1)!}(x-z)^n(x-a)$ Forma de CAUCHY	$x \neq a$ $a<z<x$

Además, Si $f^{(n+1)}$ es integrable sobre $[a\,,x]$, entonces

(3)

$R_n(x)=\int_a^x \frac{f^{(n+1)}_{(Z)}}{n!}(x-z)^n\,dz$	$x \neq z$ $a<z<x$

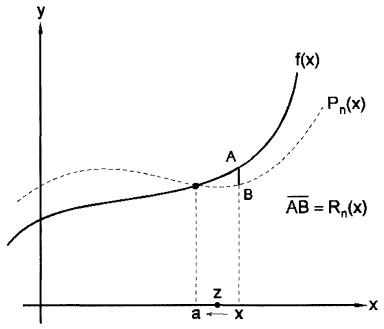
Observaciones:

a) A la igualdad (I) se le llama ***POLIGONO DE TAYLOR*** con residuo.

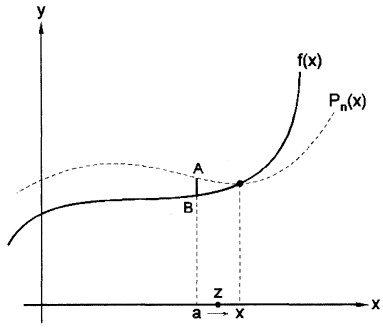
b) En (1) si $x=4 \Rightarrow R_n(a)=0$

c) En (1) el coeficiente $\frac{f^{(n+1)}_{(z)}}{(n+1)!}$ comúnmente no se puede calcular, porque el valor de z no es conocido, lo único que se sabe es que $a<z<x$.

ILUSTRACIÓN GRÁFICA



a < z < x



x < z < a

d) Cuando $\underbrace{x \text{ se acerca al número } a}_{x \to a}$, $\underbrace{\text{entonces } P_n(x) \text{ se acerca a } f(x)}_{P_n \approx f(x)}$

e) El polinomio $P_n(x)$ depende de $\begin{cases} n \\ a \\ f(x) \end{cases}$

f) Como $P_n(x)$ se construye alrededor de "a", entonces es expresado en términos de la potencia de $(x-a)$.

Así: $P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

g) En la práctica: "x" se nos da y el número "a" uno lo escoge teniendo cuidado que "x" esté cerca de "a".

Ejemplos:

1 En $\sqrt[3]{3.02}$ $\begin{cases} x = 3.02 \\ a = 3 \end{cases}$ y $f(x) = \sqrt[3]{x}$

donde: $P_n(x) = f(3) + f'(3)(x-3) + \ldots + \frac{f^{(n)}(3)}{n!}(x-3)^n$

En el intervalo $[3, 3.02]$ se analiza el residuo para $3 < z < 3.02$.

Otra forma de hacer:

$$\sqrt[3]{3.02} = \sqrt[3]{3+0.02} \begin{matrix} \nearrow x = 0.02 \\ \searrow a = 0 \end{matrix} \Big\rangle\ g(x) = \sqrt{3+x}$$

donde:

$$P_n(x) = g(0) + g'(0)x + \ldots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

En el intervalo $[0, 0.02]$ se analiza el residuo, para $0 < z < 0.2$.

2 En: $e^{0.2} \begin{matrix} \nearrow x = 0.2 \\ \searrow a = 0 \end{matrix} \Big\rangle\ f(x) = e^x$

Luego: $P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

En el intervalo $[0, 0.2]$ se analiza el residuo para $0 < z < 0.2$.

3 En: $\text{Ln}(1.1) \begin{matrix} \nearrow x = 1.1 \\ \searrow a = 1 \end{matrix} \Big\rangle\ f(x) = \text{Ln}\, x$

Luego: $P_n(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \ldots\ldots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n$

En el intervalo $[1, 1.1]$ se analiza el residuo para $1 < z < 1.1$. Otra forma de hacer:

$$\text{Ln}(1.1) = \text{Ln}(1+0.1) \begin{matrix} \nearrow x = 0.1 \\ \searrow a = 0 \end{matrix} \Big\rangle\ g(x) = \text{Ln}(1+x)$$

Luego:

$$P_n(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

En el intervalo $[0, 0.1]$ se analiza el residuo.

4 En: $e^{0.2} \begin{matrix} \nearrow x = -0.2 \\ \searrow a = 0 \end{matrix} \Big\rangle\ f(x) = e^x$

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

En el intervalo $[-0.2, 0]$ se analiza el residuo para $-0.2 < z < 0$.

También se puede hacer del siguiente modo:

En: $e^{-0.2}$ hacemos $\begin{cases} x = 0.2 \\ a = 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) = e^{-x}$

En el intervalo $[0, 0.2]$ se analiza el residuo para $0 < z < 0.2$.

(5) Ahora, el gran problema es analizar la **ESTIMACIÓN DEL ERROR.**

NOTA: ***EL ERROR*** depende de $\begin{cases} n \\ a \\ f(x) \end{cases}$

El error según la forma de Lagrange es: $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}_{(z)}}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ $a < z < x$, $a \neq x$

NOTA: El coeficiente $\frac{f^{(n+1)}_{(z)}}{(n+1)!}$ no se puede calcular porque el valor de "Z" no se conoce, todo lo que sabe es que $a < z < x$.
Para estimar este error, tener en cuenta lo siguiente:

1º Acotar la función $f^{(n+1)}_{(Z)}$, $\forall Z \in [a, x]$ teniendo en cuenta que:
$a < z < x < x_1$, x_1 un valor conveniente.

2º Analizar en $[a, x]$, si $f^{(n+1)}_{(z)}$ es creciente o decreciente.

3º Supongamos que $f^{(n+1)}_{(z)}$ es acotado para $a \leq z \leq x$ y que la cota sea $M > 0$, entonces se tendrá: $|f^{(n+1)}_{(z)}| \leq M$

Luego: $|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}_{(z)}}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \right| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$

Si podemos escoger algún "n" tal que:

$\frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} < \varepsilon$, ε es un número real muy pequeño, entonces de la igualdad $|R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)|$ obtenemos:

$$|f(x) - P_n(x) = |R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} < \varepsilon$$

$$|f(x)-P_n(x)|<\varepsilon \iff P_n(x)-\varepsilon<f(x)<P_n(x)+\varepsilon$$

esta desigualdad indica que $P_n(x)$ difiere de $f(x)$ por una cantidad menor que ε.
ε es muy pequeño, casi cero

PROBLEMAS

Problemas 01. Use la fórmula de Taylor con residuo para desarrollar $f(x)=e^x$ en potencias de $x-1$ para $n=2$. Demuestre que para este desarrollo el residuo es menor que 0.0005 y que $e^{0.9\to x}=2.460$ es correcto hasta la tercera cifra decimal.

Solución:

Se pide hallar:

a) $P_2(x)$ con residuo, dados $\begin{cases} f(x)=e^x \\ n=2 \\ a=1 \end{cases}$, se obtiene de $(x-1)$

b) Aproximar $e^{0.9}$

c) Estimar el residuo $R_3(x)$, para $0.9<x<1$

Veamos:

a) $P_2(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+R_3(x)$

donde $R_3(x)=\frac{f^{(3)}(z)}{3!}(x-1)^3$, $0.9<z<1$

De: $f(x)=e^x \longrightarrow f(1)=e$

$f'(x)=e^x \longrightarrow f'(1)=e$

$f''(x)=e^x \longrightarrow f''(1)=e$

$f^{(3)}(x)=e^x \longrightarrow f^{(3)}(z)=e^z$

Luego: $P_2(x)=e+e(x-1)+\frac{e}{2}(x-1)^2+R_3(x)$

Donde: $R_3(x)=\frac{e^z}{3!}(x-1)^3$, $0.9<z<1$

b) $e^{0.9} = f(0.9) \approx P(0.9) = e + (0.9-1) + \frac{e}{2}(0.9-1)^2$

$= e\,[1 - 0.1 + 0.005]$

$= e\,[0.905]$, con $e = 2.7182$

$= 2.439 \approx 2.460$

c) $R_3(x) = \frac{e^z}{3!}(x-1)^3$, $0.9 < z < 1$

A continuación, estimemos el valor de $R_3(x)$, haciendo sucesivas acotaciones:

Paso 1: De: $0.9 < z < 1$, deducimos:

$0 < x < z < 1$ ..... (*)

$e^0 < e^x < e^z < e^1$, esto porque la función e^x es creciente.

$1 < e^x < e^z < e$ ..... (**)

Paso 2: En (*) se tiene:

$0 < x < 1$, sumar -1

$-1 < x - 1 < 0$, elevar al cubo

$-1 < (x-1)^3 < 0$

↑ ES NEGATIVO

Paso 3: Como $(x-1)^3$ es negativo, al multiplicar $\frac{(x-1)^3}{3!}$ en (**), obtenemos:

$$\frac{(x-1)^3}{3!} > \frac{e^x(x-1)^3}{3!} > \underbrace{\frac{e^z(x-1)^3}{3!}}_{R_3(x)} > \frac{e(x-1)^3}{3!}$$

Luego: $\frac{(x-1)^3}{3!} > R_3(x) > \frac{e(x-1)^3}{3!}$

Paso 4: Para $x = 0.9$: $\frac{(-0.1)^3}{3!} > R_3(0.9) > \frac{e(-0.1)^3}{3!}$

$\Rightarrow \quad |R_3(0.9)| < \text{máx}\left\{\left|\frac{(-0.1)^3}{3!}\right|, \left|\frac{e(-0.1)^3}{3!}\right|\right\}$

$\Rightarrow \quad |R_3(0.9)| < \frac{e(0.1)^3}{3!}$, $e = 2.7182$

$\Rightarrow \quad |R_3(0.9)| < 0.0004530$

$\Rightarrow \quad |R_3(0.9)| < 0.0005$

Problema 02. Calcular $\text{Ln}1.2$, aproximando un polinomio de grado 5 y dé el error estimado en este cálculo.

Solución:

Se pide Hallar: a) Hallar: $\text{Ln}1.2$, aproximando un polinomio de grado 5.

b) Hallar: $R_6(x)$.

Veamos:

a) Se tiene como datos $\begin{cases} x = 1.2 \\ a = 1 \\ n = 5 \end{cases}$, porque 1.2 está cerca de 1.

Se tiene: $\text{Ln}1.2 = \text{Ln}\,x = f(x)$, para $x = 1.2$.

Se pide hallar: $\text{Ln}\,x \approx P_5(x)$, para $x = 1.2$ donde:

$$P_5(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}_{(1)}}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}_{(1)}}{2!}(x-1)^4 + \frac{f^{(5)}_{(1)}}{5!}(x-1)^5 + R_6(x)$$

Donde: $R_6(x) = -\frac{f^{(6)}_{(z)}}{6!}(x-1)^6 \quad , \quad 1 < z < x \quad , \quad x = 1.2$

De: $f(x) = \text{Ln}\,x \longrightarrow f(1) = \text{Ln}1 = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x} \longrightarrow f'(1) = 1$

$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \longrightarrow f''(1) = -1$

$f^{(3)}_{(x)} = \frac{2!}{x^3} \longrightarrow f^{(3)}_{(1)} = -2$

$f^{(4)}_{(x)} = -\frac{3!}{x^4} \longrightarrow f^{(4)}_{(1)} = -6$

$f^{(5)}_{(x)} = \frac{4!}{x^5} \longrightarrow f^{(5)}_{(1)} = 24$

$f^{(6)}_{(x)} = -\frac{5!}{x^6} \longrightarrow f^{(6)}_{(z)} = -\frac{5!}{z^6}$

Sustituir en $P_5(x)$:

$$P_5(x) = 0 + (x-1) - \tfrac{1}{2}(x-1)^2 + \tfrac{2}{3!}(x-1)^3 - \tfrac{6}{4!}(x-1)^4 + \tfrac{24}{5!}(x-1)^5 + R_6(x)$$

$$= (x-1) - \tfrac{1}{2}(x-1)^2 + \tfrac{1}{3}(x-1)^3 - \tfrac{1}{4}(x-1)^4 + \tfrac{1}{5}(x-1)^5 + R_6(x)$$

Donde: $R_6(x) = -\frac{5!}{z^6}\frac{1}{6!}(x-1)^6 \quad , \quad 1 < z < x \quad , \quad x = 1.2$

$$= -\frac{1}{6z^6}(x-1)^6$$

Para. $x = 1.2$, obtenemos:

$$P_5(1.2) = 0.2 - \tfrac{1}{2}(0.2)^2 + \tfrac{1}{3}(0.2)^3 - \tfrac{1}{4}(0.2)^4 + \tfrac{1}{5}(0.2)^5 + R_6(x) = 0.182333$$

b) El error es: $R_6(x) = -\frac{1}{6z^6}(x-1)^6$.

De $1 < z < 1.2$

$1 < z^6 < (1.2)^6$	$1 < x < 1.2$
$\frac{1}{(1.2)^6} < \frac{1}{z^6} < 1$	$0 < x - 1 < 0.2$
$-\frac{1}{6(1.2)^6} > \frac{1}{-6z^6} > -\frac{1}{6}$	$0 < (x-1)^6 < (0.2)^6$
$-\frac{(x-1)^6}{6(1.2)^6} > \frac{1}{-6z^6}(x-1)^6 > -\frac{1}{6}(x-1)^6$	$0 < (x-1)^6 < 6.4 \times 10^{-5}$

$$-\tfrac{1}{6}(x-1)^6 < R_6(x) < \frac{-(x-1)^6}{6(1.2)^2}$$

Para $x = 1.2$

$$|R_6(x)| < \text{máx}\left\{ \left| -\tfrac{1}{6}(1.2-1)^6 \right|, \left| -\frac{(1.2-1)^6}{6(1.2)^6} \right| \right\}$$

$$|R_6(x)| < \text{máx}\left\{ \left| -\tfrac{1}{6}(0.2)^6 \right|, \left| -\frac{(0.2)^6}{6(1.2)^6} \right| \right\} = \text{máx}\left| \tfrac{1}{6}(0.2)^6 \right|, \left| \tfrac{1}{6}(0.166)^6 \right|$$

$$< \text{máx}\left\{ 1.06 \times 10^{-5}, 3.57 \times 10^{-6} \right\}$$

$$|R_6(x)| < 1.06 \times 10^{-5}$$

Problema 03.

a) Verifique que el desarrollo de $F(x)=(1-x)^{1/3}$. en potencias de x para $n=2$ por la fórmula de Maclaurin es: $(1-x)^{1/2}=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+R_3(x)$.

b) Determine, hasta la cuarta cifra decimal la cota superior de $R_3(x)$ cuando $0<x<1/4$.

Solución:

a) Deseamos hallar:

$$P_2(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+R_3(x)$$

De: $f(x)=(1-x)^{1/2} \longrightarrow f(x)=1$

$$f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{1-1}} \longrightarrow f'(0)=-\frac{1}{2}$$

$$=-\tfrac{1}{2}(1-x)^{-1/2}$$

$$f''(x)=\left(-\tfrac{1}{2}\right)\left(-\tfrac{1}{2}\right)(1-x)^{-3/2}(-1)$$

$$=-\tfrac{1}{4}\frac{1}{(1-x)^{3/2}} \longrightarrow f''(0)=-\tfrac{1}{4}$$

$$f'''(x)=-\tfrac{1}{4}\left(-\tfrac{3}{2}\right)(1-x)^{-5/2}(-1)$$

$$f'''(x)=-\tfrac{3}{8}\frac{1}{(1-x)^{5/2}}$$

$$\boxed{f'''(z)=-\tfrac{3}{8}\frac{1}{(1-z)^{5/2}}} \Rightarrow R_3(x)=\frac{-\frac{3}{8}\frac{1}{(1-z)^{5/2}}}{3!}\cdot x^3$$

$$\boxed{R_3(x)=-\tfrac{1}{16}\frac{1}{(1-z)^{5/2}}x^3} \quad \boxed{0<x<\tfrac{1}{4}}$$

Sustituir en: $P_2(x)$

$$P_2(x)=1-\tfrac{1}{2}x+\frac{-1/4}{2!}x^2+R_3(x)$$

$$P_2(x)=1-\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{8}x^2+R_3(x)$$

$$R_3(x)=-\tfrac{1}{16}\frac{1}{(1-z)^{5/2}}x^3$$

Hallar ε, tal que: $\left| -\frac{1}{16}\frac{1}{(1-z)^{5/2}}x^3 \right| < \varepsilon$, siempre $0 < x < \frac{1}{4}$

Veamos:

Para hallar el número ε, que es muy pequeño, casi cero, se debe acotar la función residuo $R_n = -\frac{1}{16}\frac{1}{(1-z)^{\frac{5}{2}}}x^3$ a partir del intervalo $0 < x < \frac{1}{4}$.

Para ello, procedemos del siguiente modo:

1º Aplicar a R_n el valor absoluto y usar propiedades de valor absoluto. Así:

$$|R_n| = \left| -\frac{1}{16}\frac{1}{(1-z)^{\frac{5}{2}}}x^3 \right| = \frac{1}{16}\frac{1}{|1-z|^{5/2}}|x|^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

2º Debemos acotar la función $\frac{1}{|1-2|^{5/2}}$ y la función $|x|^3$

a partir del intervalo $0 < x < \frac{1}{4}$

$0 < z < x < \frac{1}{4}$ $\qquad$ $0 < x^3 < \left(\frac{1}{4}\right)^3$

$0 < z < -\frac{1}{4}$ $\qquad$ $|x|^3 < \frac{1}{4^3}$

$0 > -z > -\frac{1}{4}$

$1 > 1 - z > \frac{3}{4}$

$1 < \frac{1}{(1-Z)^{5/2}} < \left(\frac{4}{3}\right)^{5/3}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{|1-z|^{\frac{5}{2}}} < \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{5}{3}}$$

Volver a (1): $\frac{1}{16}\frac{1}{|1-z|^{5/2}}|x|^3 < \frac{1}{16}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{5}{2}}\frac{1}{4^3} = 0{,}0020046 = 0{,}002$.

3º Conclusión: $|R_n| < 0{,}002$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

GRUPO 01.

- Construir las gráficas de las funciones que se indican más abajo, determinando, el campo de existencia de cada función, los puntos de discontinuidad, los puntos extremos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los puntos de inflexión de sus gráficas, la dirección de las concavidades y las asíntotas de las gráficas.

01. $y = x^3 - 3x^2$

02. $y = \frac{6x^2 - 4x^4}{9}$

03. $y = (x-1)^2(x+2)$

04. $y = \frac{(x-2)^2(x+4)}{4}$

05. $y = \frac{(x^2-5)^3}{125}$

06. $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$

07. $y = \frac{x^4 - 3}{x}$

08. $y = \frac{x^4 + 3}{x}$

09. $y = x^2 + \frac{2}{x}$

10. $y = \frac{1}{x^2 + 3}$

11. $y = \frac{8}{x^2 - 4}$

12. $y = \frac{4x}{4 + x^2}$

13. $y = \frac{4x - 12}{(x-2)^2}$

14. $y = \frac{x}{x^2 - 4}$

15. $y = \frac{16}{x^2(x-4)}$

16. $y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$

17. $y = \sqrt{x} + \sqrt{4 - x}$

18. $y = \sqrt{8 + x} - \sqrt{8 - x}$

19. $y = x\sqrt{x+3}$

20. $y = \sqrt{x^3 - 3x}$

21. $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$

22. $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$

23. $y = 2x + 2 - 3\sqrt[3]{(x+1)^2}$

24. $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$

25. $y = \sqrt[3]{(x+4)^2} - \sqrt[3]{(x-4)^2}$

26. $y = \sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{(x-4)^2}$

27. $y = \frac{4}{\sqrt{4 - x^2}}$

28. $y = \frac{8}{x\sqrt{x^2 - 4}}$

29. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$

30. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$

31. $y = xe^{-x}$

32. $y = \left(a + \frac{x^2}{a}\right)e^{-\frac{x}{a}}$

33. $y = e^{8x - x^2 - 14}$

34. $y = (2 + x^2)e^{-x^2}$

35. $y = 2|x| - x^2$

36. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

37. $y = \frac{x^2}{2}\ln\frac{x}{a}$

38. $y = \frac{x}{\ln x}$

39. $y = (x+1)\ln^2(x+1)$

40. $y = \ln(x^2-1) + \frac{1}{x^2-1}$

41. $y = \ln\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$

42. $y = \ln(1+e^{-x})$

43. $y = \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$

44. $y = \operatorname{sen} x + \cos x$

45. $y = \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}$

46. $y = \cos x - \cos^2 x$

47. $y = \operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x$

48. $y = \frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}$

49. $y = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$

50. $y = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} 2x$

51. $y = \cos x \cdot \cos 2x$

52. $y = x + \operatorname{sen} x$

53. $y = \operatorname{arcsen}(1 - \sqrt[3]{x^2})$

54. $y = \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}$

55. $y = 2x - \operatorname{tg} x$

56. $y = x \operatorname{arctg} x$

57. $y = x \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, si $x \neq 0$ e $y = 0$, si $x = 0$

58. $y = x + 2\operatorname{arcctg} x$

59. $y = \frac{x}{2} + \operatorname{arcctg} x$

60. $y = \ln \operatorname{sh} x$

61. $y = \operatorname{Arch}\left(x + \frac{1}{x}\right)$

62. $y = e^{\operatorname{sen} x}$

63. $y = e^{\operatorname{arc\,sen}\sqrt{x}}$

64. $y = e^{\operatorname{arctg} x}$

65. $y = \ln \operatorname{sen} x$

66. $y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$

67. $y = \ln x - \operatorname{arctg} x$

68. $y = \cos x - \ln \cos x$

69. $y = \operatorname{arctg}(\ln x)$

70. $y = \operatorname{arcsen} \ln(x^2+1)$

71. $y = x^x$

72. $y = x^{\frac{1}{x}}$

Construir las gráficas de las funciones siguientes, dadas en forma paramétrica:

73. $x = t^2 - 2t$, $y = t^2 + 2t$

74. $x = a\cos^3 t$, $y = a\operatorname{sen} t$ $(a > 0)$

75. $x = te^t$, $y = te^{-t}$

76. $x = t + e^{-t}$, $y = 2t + e^{-2t}$

77. $x = a(\operatorname{sh} t - t)$, $y = a(ch\, t - 1)$ $(a > 0)$

RESPUESTAS GRUPO 01:

01. $y_{máx}=0$ cuando $x=0$; $y_{mín}=-4$ cuando $x=2$; el punto de inflexión es $M_1(1,-2)$. **02.** $y_{máx}=1$ cuando $x=\pm\sqrt{3}$; $y_{mín}=0$ cuando $x=0$; el punto de inflexión es $M_{1,2}\left(\pm1,\frac{5}{9}\right)$. **03.** $y_{máx}=4$ cuando $x=-1$; $y_{mín}=0$ cuando $x=1$; el punto de inflexión es $M_1(0,2)$. **04.** $y_{máx}=8$ cuando $x=-2$; $y_{mín}=0$ cuando $x=2$; el punto de inflexión es $M(0,4)$. **05.** $y_{mín}=-1$ cuando $x=0$; los puntos de inflexión son $M_{1,2}(\pm\sqrt{5};0)$ y $M_{3,4}\left(\pm1;-\frac{64}{125}\right)$. **06.** $y_{máx}=-2$ cuando $x=0$; $y_{mín}=2$ cuando $x=2$; las asíntotas son $x=1$, $y=x-1$. **07.** Los puntos de inflexión son $M_{1,2}(\pm1,\pm2)$; la asíntota es $x=0$. **08.** $y_{máx}=-4$ cuando $x=-1$; $y_{mín}=4$ cuando $x=1$; la asíntota es $x=0$. **09.** $y_{mín}=3$ cuando $x=1$; el punto de inflexión es $M(-\sqrt[3]{2};0)$; la asíntota es $x=0$. **10.** $y_{máx}=\frac{1}{3}$ cuando $x=0$; los puntos de inflexión son $M_{1,2}\left(\pm1;\frac{1}{4}\right)$; la asíntota es $y=0$. **11.** $y_{máx}=-2$ cuando $x=0$; las asíntotas son $x=\pm2$ e $y=0$. **12.** $y_{mín}=-1$ cuando $x=-2$; $y_{máx}=1$ cuando $x=2$; los puntos de inflexión son $O(0;0)$ y $M_{1,2}\left(\mp2\sqrt{3};\mp\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; la asíntota es $y=0$. **13.** $y_{máx}=1$ cuando $x=4$; el punto de inflexión es $M\left(5;\frac{8}{9}\right)$; las asíntotas son $x=2$ e $y=0$. **14.** El punto de inflexión es $O(0;0)$; las asíntotas son $x=\pm2$ e $y=0$. **15.** $y_{máx}=-\frac{27}{16}$ cuando $x=\frac{8}{3}$; las asíntotas son $x=0$, $x=4$ e $y=0$. **16.** $y_{máx}=-4$ cuando $x=-1$; $y_{mín}=4$ cuando $x=1$; las asíntotas son $x=0$ e $y=3x$. **17.** $A(0;2)$ y $B(4;2)$ son los puntos extremos; $y_{máx}=2\sqrt{2}$ cuando $x=2$. **18.** $A(-8;-4)$ y $B(8;4)$ son los puntos de los extremos. El punto de inflexión es $O(0;0)$. **19.** El punto del extremo es $A(-3;0)$; $y_{mín}=-2$ cuando $x=-2$. **20.** Los puntos de los extremos son $A(-\sqrt{3};0)$, $O(0;0)$ y $B(\sqrt{3};0)$; $y_{máx}=\sqrt{2}$ cuando $x=-1$; el punto de inflexión es $M\left(\sqrt{3+2\sqrt{3}};\sqrt{6\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{3}}}}\right)$. **21.** $y_{máx}=1$ cuando $x=0$; los puntos de inflexión son $M_{1,2}(\pm1;0)$. **22.** Los puntos de inflexión son $M_1(0;1)$ y $M_2(1;0)$; la asíntota es

$y=-x$. **23.** $y_{máx}=0$ cuando $x=-1$; $y_{mín}=-1$ (cuando $x=0$). **24.** $y_{máx}=2$ cuando $x=0$; los puntos de inflexión son $M_{1,2}\left(\pm 1:\sqrt[3]{2}\right)$; la asíntota es $y=0$. **25.** $y_{mín}=-4$ cuando $x=-4$; $y_{máx}=4$ cuando $x=4$; el punto de inflexión es $O(0;0)$; la asíntota es $y=0$. **26.** $y_{mín}=\sqrt[3]{4}$ cuando $x=2$; $y_{mín}=\sqrt[3]{4}$ cuando $x=4$; $y_{máx}=2$ cuando $x=3$. **27.** $y_{mín}=2$ cuando $x=0$; las asíntotas son $x=\pm 2$. **28.** Las asíntotas son $x=\pm 2$ e $y=0$. **29.** $y_{mín}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$ cuando $x=\sqrt{3}$; $y_{máx}=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$ cuando $x=-\sqrt{3}$; los puntos de inflexión son $M_1\left(-3;-\frac{3}{2}\right)$, $O(0;0)$ y $M_2\left(3;\frac{3}{2}\right)$; las asíntotas, $x=\pm 1$. **30.** $y_{mín}=\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ cuando $x=6$; el punto de inflexión es $M\left(12;\frac{12}{\sqrt[3]{100}}\right)$; la asíntota es $x=2$. **31.** $y_{máx}=-\frac{1}{e}$ cuando $x=1$; el punto de inflexión es $M_1\left(2;\frac{2}{e^2}\right)$; la asíntota, $y=0$. **32.** Los puntos de inflexión son $M_1\left(-3a;\frac{10a}{e^3}\right)$ y $M_2\left(-a,\frac{2a}{e}\right)$; la asíntota es $y=0$. **33.** $y_{máx}=e^2$ cuando $x=4$; los puntos de inflexión son $M_{1,2}\left(\frac{8\pm 2\sqrt{2}}{2};e^{\frac{3}{2}}\right)$; la asíntota, $y=0$. **34.** $y=2$ cuando $x=0$; los puntos de inflexión son $M_{1,2}\left(\pm 1;\frac{3}{e}\right)$. **35.** $y_{máx}=1$ cuando $x=\pm 1$; $y_{mín}=0$ cuando $x=0$. **36.** $y_{máx}=0{,}74$ cuando $x=e^2\approx 7{,}39$; el punto de inflexión $M(e^{\frac{8}{3}}\approx 14{,}39;0{,}70)$; las asíntotas, $x=0$ e $y=0$. **37.** $y_{mín}=-\frac{a^2}{4e}$ cuando $x=\frac{a}{\sqrt{e}}$; el punto de inflexión es $M\left(\frac{a}{\sqrt{e^3}};-\frac{3a^2}{4e^3}\right)$. **38.** $y_{mín}=e$ cuando $x=e$; el punto de inflexión es $M\left(e^2;\frac{e^2}{2}\right)$; la asíntota es $x=1$; $y\to 0$ cuando $x\to 0$. **39.** $y_{máx}=\frac{4}{e^2}\approx 0{,}54$ cuando $x=\frac{1}{e^2}-1\approx -0{,}86$; $y_{mín}=0$ cuando $x=0$; el punto de inflexión es $M\left(\frac{1}{e}-1\approx -0{,}63;\frac{1}{e}\approx 0{,}37\right)$; $y\to 0$ cuando $x\to -1+0$ (punto límite extremo). **40.** $y_{mín}=1$ cuando $x=\pm\sqrt{2}$; los puntos de inflexión son $M_{1,2}(\pm 1{,}89;1{,}33)$; las asíntotas, $x=\pm 1$. **41.** La asíntota es $xy=0$. **42.** Las asíntotas son $y=0$ (cuando $x\to+\infty$) e $y=-x$ (cuando $x\to-\infty$). **43.** Las asíntotas son $x=-\frac{1}{e}$; $x=0$ e $y=1$;

la función no está determinada en el segmento $\left[-\frac{1}{e}, 0\right]$. **44.** Es una función periódica de período 2π. $y_{mín} = -\sqrt{2}$ cuando $x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$; $y_{máx} = \sqrt{2}$ cuando $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); los puntos de inflexión son $M_k\left(\frac{3}{4}\pi + k\pi; 0\right)$. **45.** Es una función periódica de período 2π. $y_{mín} = -\frac{3}{4}\sqrt{3}$ cuando $x = \frac{5}{3}\pi + 2k\pi$; $y_{máx} = \frac{3}{4}\sqrt{3}$ cuando $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); los puntos de inflexión son $M_k(k\pi, 0)$ y $N_k\left(\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2k\pi; \frac{3}{16}\sqrt{15}\right)$. **46.** Es una función periódica de período 2π. Es el segmento $[-\pi, \pi]$ $y_{máx} = \frac{1}{4}$ cuando $x = \pm\frac{\pi}{3}$; $y_{mín} = -2$ cuando $x = \pm\pi$; $y_{mín} = 0$ cuando $x = 0$; los puntos de inflexión son $M_{1,2}(\pm 0{,}57; 0{,}13)$ y $M_{3,4}(\pm 2{,}20; -0{,}95)$. **47.** Es una función periódica impar de período 2π. En el segmento $[0, 2\pi]$: $y_{máx} = 1$ cuando $x = 0$; $y_{mín} = 0{,}71$ cuando $x = \frac{\pi}{4}$; $y_{máx} = 1$ cuando $x = \frac{\pi}{2}$; $y_{mín} = -1$ cuando $x = \pi$; $y_{máx} = -0{,}71$ cuando $x = \frac{5}{4}\pi$; $y_{mín} = -1$ cuando $x = \frac{3}{2}\pi$; $y_{máx} = 1$ cuando $x = 2\pi$; los puntos de inflexión son $M_1(0{,}36; 0{,}86)$; $M_2(1{,}21; 0{,}86)$; $M_3(2{,}36; 0)$; $M_4(3{,}51; -0{,}86)$; $M_5(4{,}35; -0{,}86)$ y $M_6(5{,}50; 0)$. **48.** Es una función periódica de período 2π. $y_{mín} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ cuando $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$; $y_{máx} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ donde $x = -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); las asíntotas son $x = -\frac{3}{4}\pi + k\pi$. **49.** Es una función periódica de período π; los puntos de inflexión son $M_k\left(\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); las asíntotas son $x = \frac{3}{4}\pi + k\pi$. **50.** Es una función periódica par de período 2π. En el segmento $[0, \pi]$: $y_{máx} = \frac{4}{3\sqrt{3}}$ cuando $x = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$; $y_{máx} = 0$ cuando $x = \pi$; $y_{mín} = -\frac{4}{3\sqrt{3}}$ cuando $x = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $y_{mín} = 0$ cuando $x = 0$; los puntos de inflexión son $M_1\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$; $M_2\left(\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{4\sqrt{7}}{27}\right)$ y $M_3\left(\pi - \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{2}}{3}; -\frac{4\sqrt{7}}{27}\right)$. **51.** Es una función periódica par de período 2π. En el segmento $[0, \pi]$: $y_{máx} = 1$ cuando $x = 0$; $y_{máx} = \frac{2}{3\sqrt{6}}$ cuando $x = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$; $y_{mín} = -\frac{2}{3\sqrt{6}}$ cuando $x = \arccos\frac{1}{\sqrt{6}}$; $y_{mín} = -1$ cuando $x = \pi$; los puntos de inflexión son $M_1\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$; $M_2 \times \left(\arccos\sqrt{\frac{13}{18}}; \frac{4}{9}\sqrt{\frac{13}{18}}\right)$ y

$M_3\left(\arccos\left(-\sqrt{\frac{13}{18}}\right); -\frac{4}{9}\sqrt{\frac{13}{18}}\right)$. **52.** Es una función impar. Los puntos de inflexión son $M_k(k\pi\,;k\pi)$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$. **53.** Es una función par. Los puntos de los extremos son $A_{1,2}(\pm2{,}83\,;-1{,}57)$; $y_{\text{máx}}\approx1{,}57$ cuando $x=0$ (punto de retroceso); los puntos de inflexión son $M_{1,2}(\pm1{,}54\,;-0{,}34)$. **54.** Es una función impar. Su campo de existencia es $-1<x<1$. El punto de inflexión $O(0;0)$; la asíntota $x=\pm1$. **55.** Es una función impar. $y_{\text{máx}}=\frac{\pi}{2}-1+2k\pi$ cuando $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$; $y_{\text{mín}}=\frac{3}{2}\pi+1+2k\pi$ cuando $x=\frac{3}{4}\pi+k\pi$; los puntos de inflexión son $M_k(k\pi:2k\pi)$; las asíntotas son $x=\frac{2k+1}{2}\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$. **56.** Es una función par; $y_{\text{mín}}=0$ cuando $x=0$; las asíntotas son $y=-\frac{\pi}{2}x-1$ (cuando $x\to-\infty$) e $y=\frac{\pi}{2}x-1$ (cuando $x\to+\infty$). **57.** $y_{\text{mín}}=0$ cuando $x=0$ (punto anguloso); la asíntota es $y=1$. **58.** $y_{\text{mín}}=1+\frac{\pi}{2}$ cuando $x=1$; $y_{\text{máx}}=\frac{3\pi}{2}-1$ cuando $x=-1$; el punto de inflexión (centro de simetría) es $(0,\pi)$; las asíntotas, $y=x+2\pi$ (izquierda) e $y=x$ (derecha). **59.** Es una función impar: $y_{\text{mín}}\approx1{,}285$ cuando $x=1$; $y_{\text{máx}}\approx1{,}856$ cuando $x=-1$; el punto de inflexión es $M\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$; las asíntotas, $y=\frac{x}{2}+\pi$ (cuando $x\to-\infty$) e $y=\frac{x}{2}$ (cuando $x\to+\infty$). **60.** Las asíntotas son $x=0$ e $y=x-\ln 2$. **61.** $y_{\text{mín}}\approx1{,}32$ cuando $x=1$; la asíntota es $x=0$. **62.** Es una función periódica de período 2π. $y_{\text{mín}}=\frac{1}{e}$ cuando $x=\frac{3}{2}\pi+2k\pi$; $y_{\text{máx}}=e$ cuando $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$; los puntos de inflexión son $-M_k\left(\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2k\pi\,;e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)$ y $N_k\left(-\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{5}-1}{2}+(2k+1)\pi\,;e^{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\right)$. **63.** Los puntos de los extremos son $A(0;1)$ y $B(1;4{,}81)$. El punto de inflexión es $M(0{,}28\,;1{,}74)$. **64.** El punto de inflexión es $M(0{,}5\,;1{,}59)$; las asíntotas, $y\approx0{,}21$ (cuando $x\to-\infty$) e $y\approx4{,}81$ (cuando $x\to+\infty$). **65.** El campo de determinación de la función es el conjunto de los intervalos $(2k\pi\,,2k\pi+\pi)$, donde $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$ La función es periódica de período 2π: $y_{\text{máx}}=0$ cuando $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$; las asíntotas son $x=k\pi$. **66.** El campo de determinación es el conjunto de los intervalos $\left(\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi\,,\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)$. donde k es un número entero. La función es pe-

riódica de período 2π. Los puntos de inflexión son $M_k(2k\pi\,;0)$ ($k=0$, ±1, ±2, ...); las asíntotas, $x=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$. **67.** El campo de determinación es $x>0$; la función es monótona creciente; la asíntota es $x=0$. **68.** El campo de determinación es $|x-2k\pi|<\frac{\pi}{2}$ ($k=0$, ±1, ±2, ...). La función es periódica de período 2π; $y_{\text{mín}}=1$ cuando $x=2k\pi$ ($k=0$, ±1, ±2, ...); las asíntotas son $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$. **69.** La asíntota es $y\approx1{,}57$; $y\to-\frac{\pi}{2}$ cuando $x\to0$ (punto límite del extremo). **70.** Los puntos de los extremos son $A_{1,2}(\pm1{,}31\,;1{,}57)$; $y_{\text{mín}}=0$ cuando $x=0$. **71.** $y_{\text{mín}}=\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}\approx0{,}69$ cuando $x=\frac{1}{e}\approx0{,}37$; $y\to1$ cuando $x\to+0$. **72.** El punto límite del extremo es $A(+0\,;0)$; $y_{\text{máx}}=e^{\frac{1}{e}}\approx1{,}44$ cuando $x=e\approx2{,}72$; la asíntota es $y=1$; los puntos de inflexión, $M_1(0{,}58\,;0{,}12)$ y $M_2(4{,}35\,;1{,}40)$. **73.** $x_{\text{mín}}=-1$ cuando $t=1$ ($y=3$); $y_{\text{mín}}=-1$ cuando $t=-1$ ($x=3$). **74.** Para obtener la gráfica basta con variar t entre los límites de 0 a 2π; $x_{\text{mín}}=-a$ cuando $t=\pi$ ($y=0$); $x_{\text{máx}}=a$ cuando $t=0$ ($y=0$); $y_{\text{mín}}=-a$ (punto de retroceso) cuando $t=+\frac{3\pi}{2}$ ($x=0$); $y_{\text{máx}}=+a$ (punto de retroceso) cuando $t=\frac{\pi}{2}$ ($x=0$); los puntos de inflexión cuando $t=\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$ son $\left(x=\pm\frac{a}{2\sqrt{2}},\,y=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$. **75.** $x_{\text{mín}}=-\frac{1}{e}$ cuando $t=-1$ ($y=-e$); $x_{\text{máx}}=\frac{1}{e}$ cuando $t=1$ ($x=e$); los puntos de inflexión son $\left(-\frac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}},\,-\sqrt{2e}^{\sqrt{2}}\right)$ cuando $t=-\sqrt{2}$ y $\left(\sqrt{2e}^{\sqrt{2}}\,;\frac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}\right)$ cuando $t=\sqrt{2}$; las asíntotas, $x=0$ e $y=0$. **76.** $x_{\text{mín}}=1$ e $y_{\text{mín}}=1$ cuando $t=0$ (punto de retroceso); la asíntota es $y=2x$ cuando $t\to+\infty$. **77.** $y_{\text{mín}}=0$ cuando $t=0$.

GRUPO 02:

Hallar y', tomando previamente logaritmos para la función $y = f(x)$.

01. $y = (x+1)(2x+1)(3x+1)$

02. $y = \dfrac{(x+2)^2}{(x+1)^3(x+3)^4}$

03. $y = \sqrt{\dfrac{x(x-1)}{x-2}}$

04. $y = x\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x^3+1}}$

05. $y = \dfrac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$

06. $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt{(x+3)^3}}$

07. $y = x^x$

08. $y = x^{x^2}$

09. $y = \sqrt[x]{x}$

10. $y = x^{\sqrt{x}}$

11. $y = x^{x^x}$

12. $y = x^{\operatorname{sen} x}$

13. $y = (\cos x)^{\operatorname{sen} x}$

14. $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

15. $y = (\operatorname{arctg} x)^x$

16. Hallar la derivada x'_y, si

a) $y = 3x + x^3$; b) $y = x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x$; c) $y = 0{,}1x + e^{\frac{x}{2}}$.

Calcular la derivada $y' = \dfrac{dy}{dx}$ de las siguientes funciones dadas en forma paramétrica.

17. $\begin{cases} x = 2t-1 \\ y = t^2 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x = \frac{1}{t+1} \\ y = \left(\frac{t}{t+1}\right)^2 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x = \frac{2at}{1+t^2} \\ y = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2} \end{cases}$

20. $\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases}$

21. $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[3]{t} \end{cases}$

22. $\begin{cases} x = \sqrt{t^2+1} \\ y = \frac{t-1}{\sqrt{t^3+1}} \end{cases}$

23. $\begin{cases} x = a(\cos t + t\operatorname{sen} t) \\ y = a(\operatorname{sen} t - t\cos t) \end{cases}$

24. $\begin{cases} x = a\cos^2 t \\ y = b\operatorname{sen}^2 t \end{cases}$

25. $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = b\operatorname{sen}^3 t \end{cases}$

26. $\begin{cases} x = \frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \\ y = \frac{\operatorname{sen}^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \end{cases}$

27. $\begin{cases} x = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ y = \operatorname{arcsen}\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$

28. $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = e^{2t} \end{cases}$

29. $\begin{cases} x = a\left(\ln \operatorname{tg}\frac{t}{2} + \cos t - \operatorname{sen} t\right) \\ y = a(\operatorname{sen} t + \cos t) \end{cases}$

30. Calcular $\frac{dy}{dx}$ para $t=\frac{\pi}{2}$, si $\begin{cases} x=a(t-\operatorname{sen}t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$

Solución: $\frac{dy}{dx}=\frac{a\operatorname{sen}t}{a(1-\cos t)}=\frac{\operatorname{sen}t}{1-\cos t}$ y $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}{1-\cos\frac{\pi}{2}}=1$

31. Hallar $\frac{dy}{dx}$ para $t=1$, si $\begin{cases} x=t\ln t \\ y=\frac{\ln t}{t} \end{cases}$

32. Hallar $\frac{dy}{dx}$ para $t=\frac{\pi}{4}$, si $\begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=e^t\operatorname{sen}t \end{cases}$

33. Demostrar que la función y, dada por las ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x=2t+3t^2 \\ y=t^2+2t^3 \end{cases}$

satisface a la ecuación $y=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$.

34. Para $x=2$ se cumple la igualdad $x^2=2x$. ¿Se deduce de esto que $(x^2)'=(2x)'$ para $x=2$?

35. Sea $y=\sqrt{a^2-x^2}$. ¿Se puede derivar miembro a miembro la igualdad $x^2+y^2=a^2$?

Hallar la derivada $y'=\frac{dy}{dx}$ de las siguientes funciones implícitas y:

36. $2x-5y+10=0$ **37.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **38.** $x^3+y^3=a^3$

39. $x^3+x^2y+y^2=0$ **40.** $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ **41.** $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$

42. $y^3=\frac{x-y}{x+y}$ **43.** $y-0{,}3\operatorname{sen}y=x$ **44.** $a\cos^2(x+y)=b$

45. $\operatorname{tg}y=xy$ **46.** $xy=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$ **47.** $\operatorname{arctg}(x+y)=x$

48. $e^y=x+y$ **49.** $\ln x+e^{-\frac{y}{x}}=c$ **50.** $\ln y+\frac{x}{y}=c$

51. $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ **52.** $\sqrt{x^2+y^2}=c\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ **53.** $x^y=y^x$

54. Hallar y' en el punto $M(1;1)$, si $2y=1+xy^3$

Solución: Derivando, tenemos: $2y'=y^3+3xy^2y'$. Haciendo $x=1$ e $y=1$, obtenemos $2y'=1+3y'$, de donde $y'=-1$.

55. Hallar las derivadas y' de las funciones y, que se dan a continuación, en los puntos que se indican:

a) $(x+y)^3 = 27(x-y)$ cuando $x=2$ e $y=1$;

b) $ye^y = e^{x+1}$ cuando $x=0$ e $y=1$;

c) $y^2 = x + \ln\frac{y}{x}$ cuando $x=1$ e $y=1$.

56. ¿Qué ángulos φ forman con el eje OX las tangentes a la curva $y = x - x^2$ en los puntos cuyas abscisas son: a) $x=0$; b) $x=\frac{1}{2}$; c) $x=1$?

Solución: Tenemos $y' = 1-2x$. De donde: a) $\operatorname{tg}\varphi = 1$, $\varphi = 45°$; b) $\operatorname{tg}\varphi = 0$, $\varphi = 0°$; c) $\operatorname{tg}\varphi = -1$; $\varphi = 135°$. (Fig. 2)

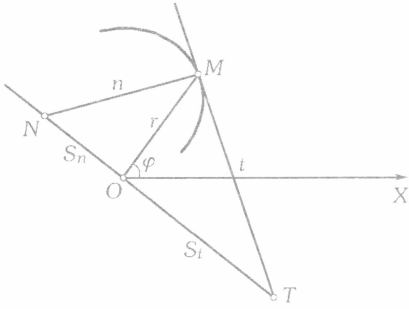


Fig. 1

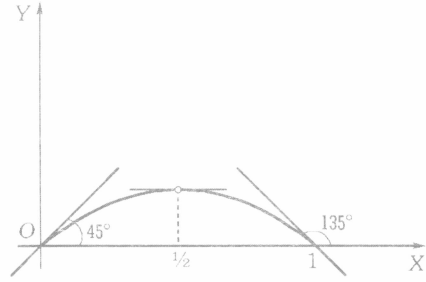


Fig. 2

57. ¿Qué ángulos forman con el eje de abscisas, al cortarse con éste en el origen de coordenadas, las sinusoides $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \operatorname{sen} 2x$?

58. ¿Qué ángulo forma con el eje de abscisas, al cortarse con éste en el origen de coordenadas, la tangentoide $y = \operatorname{tg} x$?

59. ¿Qué ángulo forma la curva $y = e^{0.5x}$ con la recta $x=2$ al cortarse con ella?

60. Hallar los puntos en que las tangentes a la curva $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$ sean paralelas al eje de abscisas.

61. ¿En qué punto la tangente a la parábola $y = x^2 - 7x + 3$ es paralela a la recta $5x + y - 3 = 0$?

62. Hallar la ecuación de la parábola $y = x^2 + bx + c$, que es tangente a la recta $x = y$ en el punto $(1;1)$.

63. Determinar el coeficiente angular de la tangente a la curva $x^3 + y^3 - xy - 7 = 0$ en el punto $(1;2)$.

64. ¿En qué punto de la curva $y^2 = 2x^3$ la tangente es perpendicular a la recta $4x - 3y + 2 = 0$?

65. Escribir las ecuaciones de la tangente y de la normal a la parábola $y = \sqrt{x}$ en el punto cuya abscisa es $x = 4$.

Solución: Tenemos $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; de que, el coeficiente angular de la tangente será $k = [y']_{x=4} = \frac{1}{4}$. Como el punto de contacto tiene las coordenadas $x = 4$ e $y = 2$, la ecuación de la tangente es $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$, o bien, $x - 4y + 4 = 0$. En virtud de la condición de perpendicularidad, al coeficiente angular de la normal es: $k_1 = -4$, de donde la ecuación de la normal es $y - 2 = -4(x - 4)$, o bien, $4x + y - 18 = 0$.

66. Escribir las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ en el punto $(-2; 5)$.

67. Hallar las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva $y = \sqrt[3]{x-1}$ en el punto $(1; 0)$.

68. Hallar las ecuaciones de las tangentes y de las normales a las siguientes curvas en los puntos que se indican:

a) $y = \operatorname{tg} 2x$ en el origen de coordenadas;

b) $y = \operatorname{arcsen} \frac{x-1}{2}$ en el punto de intersección con el eje OX;

c) $y = \arccos 3x$ en el punto de intersección con el eje OY;

d) $y = \ln x$ en el punto de intersección con el eje OX;

e) $y = e^{1-x^2}$ en los puntos de intersección con la recta $y = 1$.

69. Escribir las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva $\begin{cases} x = \frac{1+t}{t^3} \\ y = \frac{3}{2t^2} + \frac{1}{2t} \end{cases}$ en el punto $(2; 2)$.

70. Escribir la ecuación de la tangente a la curva $x = t\cos t$, $y = t\operatorname{sen} t$ en el origen de coordenadas y en el punto $t = \frac{\pi}{4}$.

71. Escribir las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva $x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$ en el punto cuya ordenada es $y = 3$.

72. Escribir la ecuación de la tangente a la curva $x^5 + y^5 - 2xy = 0$ en el punto $(1; 1)$.

73. Escribir las ecuaciones de las tangentes y de las normales a la curva $y=(x-1)(x-2)(x-3)$ en sus puntos de intersección con el eje de abscisas.

74. Escribir las ecuaciones de la tangente y de la normal a la curva $y^4=4x^4+6xy$ en el punto $(1;2)$.

75. Demostrar que el segmento de tangente a la hipérbola $yx=a^2$, comprendido entre los ejes de coordenadas, está dividido en dos partes iguales por el punto de contacto.

76. Demostrar que en la astroide $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ el segmento tangente, comprendido entre los ejes de coordenadas, tiene magnitud constante e igual a a.

77. Demostrar que las normales a la envolvente de la circunferencia $x=a(\cos t+t\operatorname{sen}t)$, $y=-4+6x-x^2$ son tangentes a la circunferencia $x^2+y^2=a^2$.

78. Hallar el ángulo de intersección de las parábolas $y=(x-2)^2$ e $y=-4+6x-x^2$.

79. ¿Qué ángulo forman entre sí las parábolas $y=x^2$ e $y=x^3$ al cortarse?

80. Demostrar que las curvas $y=4x^2+2x-8$ e $y=x^3-x+10$ son tangentes entre sí en el punto $(3;34)$. ¿Ocurriría lo mismo en el punto $(-2;4)$?

81. Demostrar que las hipérbolas $xy=a^2$ y $x^2-y^2=b^2$ se cortan entre sí formando un ángulo recto.

82. Se da la parábola $y^2=4x$. Calcular la longitud de los segmentos tangente, normal, subtangente y subnormal en el punto $(1;2)$.

83. Hallar la longitud del segmento subtangente de la curva $y=2^x$ en cualquier punto de la misma.

84. Demostrar que la longitud del segmento normal a cualquier punto de la hipérbola equilátera $x^2-y^2=a^2$ es igual al radio polar de dicho punto.

85. Demostrar que la longitud del segmento subnormal de la hipérbola $x^2-y^2=a^2$, en un punto cualquiera de la misma, es igual a la abscisa de dicho punto.

86. Demostrar que los segmentos subtangentes de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ y de la circunferencia $x^2+y^2=a^2$, en los puntos de abscisas iguales, son iguales entre sí, ¿Qué procedimiento de construcción de la tangente a la elipse se desprende de lo antedicho?

87. Hallar la longitud de los segmentos tangente, normal, subtangente, y subnormal a la cicloide $\begin{cases} x=a(t-\operatorname{sen}t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ en un punto cualquiera $t=t_0$.

88. Hallar el ángulo que forman entre sí la tangente a la espiral logarítmica $r = ae^{k\varphi}$ el radio polar del punto de contacto.

89. Hallar el ángulo entre la tangente y el radio polar del punto de contacto para lemniscata $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

90. Hallar la longitud de los segmentos polares: tangente, normal, subtangente y su normal y el ángulo que forman entre si la tangente y el radio polar del punto de contacto para la espiral de Arquímedes $r = a\varphi$ en el punto de ángulo polar $\varphi = 2\pi$.

91. Hallar la longitud de los segmentos polares: subtangente, subnormal, tangente y normal, y el ángulo que forman entre sí la tangente y el radio polar para la espiral hiperbólica $r = \frac{a}{\varphi}$ en un punto arbitrario $\varphi = \varphi_0$; $r = r_0$.

92. La ley del movimiento de un punto sobre el eje OX es $x = 3t - t^3$. Hallar la velocidad del movimiento de dicho punto para los instantes $t_0 = 0$; $t_1 = 1$ y $t_2 = 2$ (x se da en centímetros; t, en segundos).

93. Por el eje OX se mueven dos puntos que tienen respectivamente las leyes del movimiento $x = 100 + 5t$ y $x = \frac{1}{2}t^2$, donde $t \geq 0$. ¿Con qué velocidad se alejarán estos puntos, el uno del otro, en el momento de su encuentro (x se da en centímetros; t, en segundo)?

94. Los extremos de un segmento $AB = 5$ m se deslizan por las rectas perpendiculares entre sí OX y OY (Fig. 3). La velocidad de desplazamiento del extremo A es igual a 2 m/seg. ¿Cuál será la velocidad de desplazamiento del extremo B en el instante en que el extremo A se encuentre a una distancia $OA = 3$ m del origen de coordenadas?

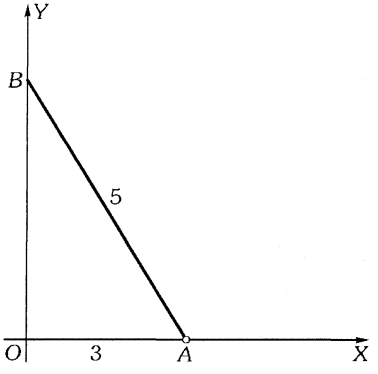


Fig. 3

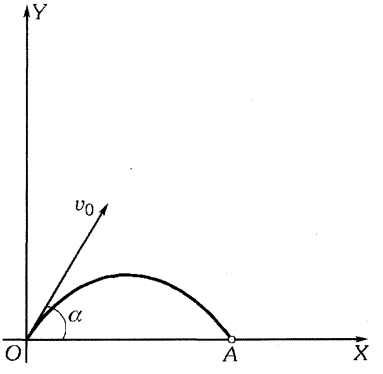


Fig. 4

95. La ley del movimiento de un punto material, lanzado en el plano vertical XOY (Fig. 4), formando un ángulo α respecto al horizonte, con una velocidad inicial v_0, viene dada por las fórmulas (sin tomar en consideración la resistencia del aire) $x = v_0 t \cos\alpha$, $y = v_0 t\, sen\alpha - \frac{gt^2}{2}$, donde t es el tiempo y g la aceleración de la fuerza de gravedad. Hallar la trayectoria del movimiento y su alcance. Determinar también la magnitud de la velocidad del movimiento y su dirección.

96. Un punto se mueve sobre la hipérbola $y = \frac{10}{x}$ de tal modo, que su abscisa x aumenta uniformemente con la velocidad de una unidad por segundo. ¿Con qué velocidad variará su ordenada, cuando el punto pase por la posición $(5\,;\,2)$?

97. ¿En qué punto de la parábola $y^2 = 18x$ la ordenada crece dos veces más de prisa que la abscisa?

98. Uno de los lados de un rectángulo tiene una magnitud constante $a = 10$ cm, mientras que el otro, b, es variable y aumenta a la velocidad constante de 4 cm/seg. ¿A qué velocidad crecerán la diagonal del rectángulo y su área en el instante en que $b = 30$ cm?

99. El radio de una esfera cree uniformemente con una velocidad de 5 cm/seg. ¿A qué velocidad crecerá el área de la superficie de dicha esfera y el volumen de la misma, cuando el radio sea igual a 50 cm?

100. Un punto se mueve sobre la espiral de Arquímedes $r = a\varphi$ $(a = 10$ cm$)$ de modo que la velocidad angular de rotación de su radio polar es constante e igual a $6°$ por segundo. Determinar la velocidad con que se alarga dicho radio polar r en el instante en que $r = 25$ cm.

101. Una barra heterogénea AB tiene 12 cm de longitud. La masa de la parte de AM de la misma crece proporcionalmente al cuadrado de la distancia del punto móvil M respecto al extremo A y es igual a 10 g cuando $AM = 2$ cm. Hallar la masa de toda la barra AB y la densidad lineal en cualquier punto M de la misma. ¿A qué es igual la distancia lineal de la barra en los puntos A y B?

A. DERIVADAS DE ÓRDENES SUPERIORES DE FUNCIONES EXPLÍCITAS.

Hallar las derivadas de segundo orden de las funciones siguientes:

102. $y = x^8 + 7x^6 - 5x + 5$ **103.** $y = e^{x^2}$ **104.** $y = \text{sen}^2 x$

105. $y = \ln\sqrt[3]{1+x^2}$ **106.** $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$

107. $f(x) = (1+x^2)\cdot \text{arctg}\, x$ **108.** $y = (\text{arcsen}\, x)^2$ **109.** $y = a\,\text{ch}\frac{x}{a}$

110. Demostrar, que la función $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{2}$ satisface a la ecuación diferencial $1 + y'^2 = 2yy''$.

111. Demostrar, que la función $y = \frac{1}{2}x^2 e^x$ satisface a la ecuación diferencial $y'' - 2y' + y = e^x$.

112. Demostrar, que la función $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$ para cualquier valor de las constantes C_1 y C_2 satisface a la ecuación $y'' + 3y' + 2y = 0$.

113. Demostrar, que la función $y = e^{2x}\operatorname{sen} 5x$ satisface a la ecuación $y'' - 4y' + 29y = 0$.

114. Hallar y''', si $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$.

115. Hallar $f'''(3)$, si $f(x) = (2x-3)^5$.

116. Hallar y^V para la función $y = \ln(1+x)$.

117. Hallar y^{VI} para la función $y = \operatorname{sen} 2x$.

118. Demostrar que la función $y = e^{-x}\cos x$ satisface a la ecuación diferencial $y^{VI} + 4y = 0$.

119. Hallar $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ y $f'''(0)$, si $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$.

120. La ecuación del movimiento de un punto sobre el eje OX es $x = 100 + 5t - 0{,}001t^3$. Hallar la velocidad y la aceleración de dicho punto para los instantes: $t_0 = 0$; $t_1 = 1$; $t_2 = 10$.

121. Por la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ se mueve un punto M con una velocidad angular constante ω. Hallar la ley del movimiento de su proyección M_1 sobre el eje OX, si en el momento $t = 0$ el punto ocupa la posición $M_0(a, 0)$ (Fig. 5).

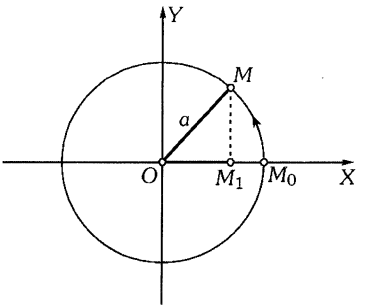


Fig. 5

Hallar la velocidad y la aceleración del movimiento del punto M_1. ¿A qué es igual la velocidad y la aceleración del punto M_1 en el momento inicial y en el momento en que pasa por el origen de coordenadas?. ¿Cuáles son los valores absolutos máximos de la velocidad y de la aceleración del punto M_1?

122. Hallar la derivada de orden n-ésimo de la función $y = (ax+b)^n$, donde n es un número entero.

123. Hallar las derivadas de orden n-ésimo de las funciones a) $y = \frac{1}{1-x}$; b) $y = \sqrt{x}$.

124. Hallar la derivada n-ésima de las funciones:

a) $y = \operatorname{sen} x$; b) $y = \cos 2x$; c) $y = e^{-3x}$;

d) $y = \ln(1 \pm x)$; e) $y = \frac{1}{1+x}$; f) $y = \frac{1+x}{1-x}$;

g) $y = \operatorname{sen}^2 x$; h) $y = \ln(ax+b)$.

125. Empleando la fórmula de Leibniz, hallar $y^{(n)}$, si:

a) $y = xe^x$; b) $y = x^2 e^{-2x}$; c) $y = (1-x^2)\cos x$;

d) $y = \frac{1+x}{\sqrt{x}}$; e) $y = x^3 \ln x$.

126. Hallar $f^{(n)}(0)$, si $f(x) = \ln \frac{1}{1-x}$

B. DERIVADAS DE ÓRDENES SUPERIORES, DE FUNCIONES DADAS EN FORMA PARAMÉTRICA Y DE FUNCIONES IMPLÍCITAS.

Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$ para las funciones siguientes:

127. a) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$ c) $\begin{cases} x = \operatorname{arcsen} t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$

128. a) $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\operatorname{sen} t \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\operatorname{sen}^3 t \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = a(t - \operatorname{sen} t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = a(\operatorname{sen} t - t\cos t) \\ y = a(\cos t + t\operatorname{sen} t) \end{cases}$

129. a) $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \operatorname{sen}^2 t \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = e^{-at} \\ y = e^{at} \end{cases}$

130. a) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t \\ y = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 t \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \frac{1}{1-t} \end{cases}$

131. Hallar $\frac{d^2x}{dy^2}$, si $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \operatorname{sen} t \end{cases}$

132. Hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$ para $t = 0$ si $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t^2 \end{cases}$

133. Demostrar que y, determinada como función de x por las ecuaciones $x = \operatorname{sen} t$ e $y = ae^{t\sqrt{2}} + be^{-t\sqrt{2}}$, satisface a la ecuación diferencial $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = 2y$ cualesquiera que sean las constantes a y b.

Hallar $y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$ para las siguientes funciones.

134. $\begin{cases} y = \sec t \\ y = \operatorname{tg} t \end{cases}$ **135.** $\begin{cases} x = e^{-t}\cos t \\ y = e^{-t}\operatorname{sen} t \end{cases}$ **136.** $\begin{cases} y = e^{-t} \\ y = t^3 \end{cases}$

137. Hallar $\frac{d^ny}{dx^n}$, si $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^m \end{cases}$

138. Conociendo la función $y = f(x)$, hallar las derivadas x^n y x''' de la función inversa $x = f^{-1}(y)$.

139. Hallar y'', si $x^2 + y^2 = 1$.

Solución: Aplicando la regla de derivación de funciones compuestas tenemos $2x + 2yy' = 0$; de donde $y' = -\frac{x}{y}$ e $y'' = -\left(\frac{x}{y}\right)'_x = -\frac{y - xy'}{y^2}$.

Poniendo en lugar de y' su valor, obtendremos en definitiva: $y'' = -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3}$.

Determinar las derivadas y'' de las siguientes funciones $y = f(x)$, dadas de forma implícita:

140. $y^2 = 2px$. **141.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ **142.** $y = x + \operatorname{arctg} y$

143. Dada la ecuación $y = x + \ln y$, hallar $\frac{d^2y}{dx^2}$ y $\frac{d^2x}{dy^2}$

144. Hallar y'' en el punto $(1;1)$, si $x^2+5xy+y^2-2x+y-6=0$

145. Hallar y'' en el punto $(0;1)$, si $x^4-xy+y^4=1$

146. a) La función y está dada implícitamente por la ecuación $x^2+2xy+y^2-4x+2y-2=0$. Hallar $\frac{d^3y}{dx^3}$ en el punto $(1;1)$.

b) Hallar $\frac{d^3y}{dx^3}$, si $x^2+y^2=a^2$.

RESPUESTAS GRUPO 02:

01. $(1+2x)(1+3x)+2(1+x)(1+3x)+3(x+1)(1+2x)$. **02.** $\frac{(x+2)(5x^2+19x+20)}{(x+1)^4(x+4)^5}$.

03. $\frac{x^2-4x+2}{2\sqrt{x(x-1)(x-2)^3}}$. **04.** $\frac{3x^2+5}{3(x^2+1)}\times\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}$. **05.** $\frac{(x-2)^8(x^2-7x+1)}{(x-1)(x-3)\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$.

06. $\frac{5x^2+x-24}{3(x-1)^{1/2}(x+2)^{5/3}(x+3)^{5/2}}$. **07.** $x^x(1+\ln x)$. **08.** $x^{x^2+1}\times(1+2\ln x)$. **09.** $\sqrt[x]{x}\,\frac{1-\ln x}{x^2}$.

10. $x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\ln x\right)$ **11.** $x^{xx}x^x\times\left(\frac{1}{x}+\ln x+\ln^2 x\right)$. **12.** $x^{\operatorname{sen}x}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}+\cos x\ln x\right)$.

13. $(\cos x)^{\operatorname{sen}x}\times(\cos x\ln\cos x-\operatorname{sen}x\operatorname{tg}x)$. **14.** $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]$.

15. $(\operatorname{arctg}x)^x\left[\ln\operatorname{arctg}x+\frac{x}{(1+x^2)\operatorname{arctg}x}\right]$. **16.** a) $x_y=\frac{1}{3(1+x^2)}$; b) $x_y=\frac{2}{2-\cos x}$;

c) $x_y=\frac{10}{1+5e^{\frac{x}{2}}}$. **17.** $\frac{3}{2}t^2$. **18.** $\frac{-2t}{t+1}$. **19.** $\frac{-2t}{1-t^2}$. **20.** $\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$. **21.** $\frac{2}{3\sqrt[6]{t}}$. **22.** $\frac{t+1}{t(t^2+1)}$. **23.** $\operatorname{tg}t$.

24. $-\frac{b}{a}$. **25.** $-\frac{b}{a}\operatorname{tg}t$. **26.** $-\operatorname{tg}3t$. **27.** $y_x=\begin{cases}-1 \text{ para } t<0\\ 1 \text{ para } t>0\end{cases}$. **28.** $-2e^{3t}$. **29.** $\operatorname{tg}t$. **31.** 1.

32. ∞. **34.** No. **35.** Si, ya que esta igualdad es una identidad. **36.** $\frac{2}{5}$. **37.** $-\frac{b^2x}{a^2y}$. **38.** $-\frac{x^2}{y^2}$.

39. $-\frac{x(3x+2y)}{x^2+2y}$. **40.** $-\sqrt{\frac{y}{x}}$. **41.** $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. **42.** $\frac{2y^2}{3(x^2-y^2)+2xy}=\frac{1-y^3}{1+3xy^2+4y^3}$. **43.** $\frac{10}{10-3\cos y}$.

44. -1. **45.** $\frac{y\cos^2 y}{1-x\cos^2 y}$. **46.** $\frac{y}{x}\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}$. **47.** $(x+y)^2$. **48.** $y'=\frac{1}{e^y-1}=\frac{1}{x+y-1}$. **49.** $\frac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}$.

50. $\frac{y}{x-y}$. **51.** $\frac{x+y}{x-y}$. **52.** $\frac{cy+x\sqrt{x^2+y^2}}{cx-y\sqrt{x^2+y^2}}$. **53.** $\frac{x\ln y-y}{y\ln x-x}\cdot\frac{y}{x}$. **55.** a) 0; b) $\frac{1}{2}$; c) 0. **57.** 45°; $\operatorname{arctg}2\approx 63°26'$. **58.** 45°. **59.** $\operatorname{arctg}\frac{2}{e}\approx 36°21'$. **60.** $(0;20)$; $(1;15)$; $(-2;-12)$.

61. $(1;-3)$. **62.** $y=x^2-x+1$. **63.** $k=\frac{-1}{11}$. **64.** $\left(\frac{1}{8};-\frac{1}{16}\right)$. **66.** $y-5=0$; $x+2=0$.

67. $x-1=0$; $y=0$. **68.** a) $y=2x$; $y=-\frac{1}{2}x$; b) $x-2y-1=0$; $2x+y-2=0$; c) $6x+2y-\pi=0$; $2x-6y+3\pi=0$; d) $y=x-1$; $y=1-x$; e) $2x+y-3=0$; $x-2y+1=0$ para el punto $(1;1)$; $2x-y+3=0$; $x+2y-1=0$ para el punto $(-1;1)$. **69.** $7x-10y+6=0$, $10x+7y-34=0$. **70.** $y=0$; $(\pi+4)x+(\pi-4)y-\frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}=0$. **71.** $5x+6y-13=0$, $6x-5y+21=0$.

72. $x+y-2=0$. **73.** En el punto $(1;0)$: $y=2x-2$; $y=\frac{1-x}{2}$; en el punto $(2;0)$: $y=-x+2$; $y=x-2$; en el punto $(3;0)$: $y=2x-6$; $y=\frac{3-x}{2}$.

74. $14x-13y+12=0$; $13x+14y-41=0$. **75.** Indicación. La ecuación de la tangente es $\frac{x}{2x_0}+\frac{y}{2y_0}=1$. Por consiguiente, esta tangente corta al eje OX en el punto $A(2x_0,0)$ y al eje OY en el punto $B(0,2y_0)$. Buscando el punto medio del segmento AB, hallamos el punto (x_0,y_0). **78.** $40°36'$. **79.** En el punto $(0;0)$ las parábolas son tangentes entre sí; en el punto $(1;1)$ se cortan bajo ángulo de $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}\approx 8°8'$.

82. $S_t=S_n=2$; $t=n=2\sqrt{2}$. **83.** $\frac{1}{\ln 2}$. **87.** $T=2a\operatorname{sen}\frac{t}{2}\operatorname{tg}\frac{t}{2}$; $N=2a\operatorname{sen}\frac{t}{2}$; $S_t=2a\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}\operatorname{tg}\frac{t}{2}$; $S_n=a\operatorname{sen}t$. **88.** $\operatorname{arctg}\frac{1}{K}$. **89.** $\frac{\pi}{2}+2\varphi$. **90.** $S_t=4\pi^2a$; $S_n=a$; $t=2\pi a\sqrt{1+4\pi^2}$; $n=a\sqrt{1+4\pi^2}$; $\operatorname{tg}\mu=2\pi$. **91.** $S_t=a$; $S_n=\frac{a}{\varphi_0^2}$; $t=\sqrt{a^2+\rho_0^2}$; $n=\frac{\rho_0}{a}\sqrt{a^2+\rho_0^2}$; $\operatorname{tg}\mu=-\varphi_0$. **92.** 3 cm/seg; 0; −9 cm/seg. **93.** 15 cm/seg.

94. $-\frac{3}{2}$ m/seg. **95.** La ecuación de la trayectoria es $y=x\operatorname{tg}\alpha-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2$. El alcance es igual a $\frac{v_0^2\operatorname{sen}2\alpha}{g}$. La magnitud de la velocidad es $\sqrt{v_2^0-2v_0gt\operatorname{sen}\alpha+g^2t^2}$; el coeficiente angular del valor de la velocidad $\frac{v_0\operatorname{sen}\alpha-gt}{v_0\cos\alpha}$. Indicación: Para determinar la trayectoria hay que eliminar el parámetro t del sistema dado. El alcance es la abscisa del punto A (Fig. 4). Las proyecciones de la velocidad sobre los ejes: $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dy}{dt}$. La magnitud de la velocidad es $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$; el vector de la velocidad está dirigido por la tangente a la trayectoria. **96.** Decrece con una velocidad de 0,4. **97.** $\left(\frac{9}{8},\frac{9}{2}\right)$. **98.** La diagonal crece con una velocidad de ~ 3,8 cm/seg, el área con una velocidad

de $40\ \text{cm}^2/\text{seg}$. **99.** El área de la superficie crece con una velocidad de $0{,}2\pi\ \text{m}^2/\text{seg}$, el volumen, con una velocidad de $0{,}05\pi\ \text{m}^3/\text{seg}$. **100.** $\frac{\pi}{3}$ cm/seg. **101.** La masa total de la barra es de 360g, la densidad en el punto M es igual a $5x$ g/cm, la densidad en el punto A es igual a cero, la densidad en el punto B es de 60 g/cm. **102.** $56x^6 + 210x^4$. **103.** $e^{x^2}(4x^2+2)$. **104.** $2\cos 2x$. **105.** $\frac{2(1-x^2)}{3(1+x^2)^2}$. **106.** $\frac{-x}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$. **107.** $2\operatorname{arctg} x + \frac{2x}{1+x^3}$. **108.** $\frac{2}{1-x^2} + \frac{2x \operatorname{arcsen} x}{(1-x^2)^{3/2}}$. **109.** $\frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}$. **114.** $y''' = 6$. **115.** $f'''(3) = 4320$. **116.** $y^V = \frac{24}{(x+1)^5}$. **117.** $y^{VI} = -64\operatorname{sen} 2x$. **119.** 0; 1; 2; 2. **120.** La velocidad $v = 5$; 4,997; 4,7. La aceleración $a = 0$; $-0{,}006$; $-0{,}06$. **121.** La ley del movimiento del punto M_1 es $x = a\cos\omega t$; la velocidad en el momento t es igual a $-a\omega\operatorname{sen}\omega t$; la aceleración en el momento t: $-a\omega^2\cos\omega t$. La velocidad inicial es igual a 0; la aceleración inicial: $-a\omega^2$; la velocidad cuando $x = 0$: $\pm a\omega$; la aceleración cuándo $x = 0$: 0. El valor máximo de la magnitud absoluta de la velocidad: $a\omega$. El valor máximo de la magnitud absoluta de la aceleración: $a\omega^2$. **122.** $y^{(n)} = n!a^n$. **123.** a) $n!(1-x)^{-(n+1)}$,

b) $(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-3)}{2^n \cdot x^{n-\frac{1}{3}}}$. **124.** a) $\operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$; b) $2^n\cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$; c) $(-3)^n e^{-3x}$;

d) $(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$; e) $\frac{(-1)^{n+1}n!}{(1+x)^{n+1}}$; f) $\frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}$; g) $2^{n-1}\operatorname{sen}\left[2x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right]$;

h) $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!a^n}{(ax+b)^n}$. **125.** a) $x\cdot e^x + ne^x$;

b) $2^{n-1}e^{-2x}\left[2(-1)^n x^2 + 2n(-1)^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2}\right]$;

c) $(1-x^2)\times\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) - 2nx\cos\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right) - n(n-1)\cos\left(x+\frac{(n-2)\pi}{2}\right)$;

d) $\frac{(-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n x^{\frac{2n+1}{2}}}[y-(2n-1)]$; e) $\frac{(-1)^n 6(n-4)!}{x^{n-3}}$ cuando $n \geq 4$.

126. $y^{(n)}(0) = (n-1)!$. **127.** a) $9t^3$; b) $2t^2+2$; c) $-\sqrt{1-t^2}$. **128.** a) $\frac{-1}{a\operatorname{sen}^3 t}$;

b) $\frac{1}{3a\cos^4 t\operatorname{sen} t}$; c) $\frac{-1}{4a\operatorname{sen}^4\frac{t}{2}}$; d) $\frac{-1}{at\operatorname{sen}^3 t}$. **129.** a) 0; b) $2e^{3at}$. **130.** a) $(1+t^2)(1+3t^2)$;

b) $\frac{t(1+t)}{(1-t)^3}$. **131.** $\frac{-2e^{-t}}{(\cos t+\operatorname{sen} t)^5}$. **132.** $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{t=0} = 1$. **134.** $\frac{3\operatorname{ctg}^4 t}{\operatorname{sen} t}$. **135.** $\frac{4e^{2t}(2\operatorname{sen} t - \cos t)}{(\operatorname{sen} t+\cos t)^5}$.

136. $-6e^{3t}(1+3t+t^2)$. **137.** $m^n t^m$. **138.** $\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{-f''(x)}{[f'(x)]^3}$; $\frac{d^3x}{dy^3}=\frac{3[f''(x)]^2-f'(x)\,f'''(x)}{[f'(x)]^5}$.

140. $-\frac{p^2}{y^3}$. **141.** $-\frac{b^4}{a^2y^3}$. **142.** $-\frac{2y^2+2}{y^5}$. **143.** $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y}{(1-y)^2}$; $\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{1}{y^2}$. **144.** $\frac{111}{256}$. **145.** $-\frac{1}{16}$.

146. a) $\frac{1}{3}$; b) $-\frac{3a^2x}{y^5}$.

GRUPO 03.

FUNCIONES EXPONENCIALES.

En los ejercicios de este párrafo x, y, z, t, u, v, s son variables independientes, a, b, c, d, m, n, p, q son constantes.

01. Derivar la función:

1) $3x^2-5x+1$;
2) $x^4-\frac{1}{3}x^3+2{,}5x^2-0{,}3x+0{,}1$;
3) ax^2+bx+c;
4) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2}$;
5) $2\sqrt{x}-\frac{1}{x}+\sqrt[4]{3}$;
6) $0{,}8\sqrt[4]{y}-\frac{y^3}{0{,}3}+\frac{1}{5y^2}$;
7) $\frac{x}{n}+\frac{n}{z}+\frac{x^2}{m^2}+\frac{m^2}{x^2}$
8) $\frac{mx^2}{\sqrt{x}}+\frac{nx\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}-\frac{p\sqrt{x}}{x}$;
9) $\frac{mz^2+nz+4p}{p+q}$;
10) $0{,}1t^{-\frac{2}{3}}-\frac{5{,}2}{t^{1{,}4}}+\frac{2{,}5}{\sqrt[5]{t}}$;
11) $(x-0{,}5)^2$;
12) $\sqrt{x}(x^3-\sqrt{x}+1)$;
13) $(v+1)^2(v-1)$;
14) $0{,}5-3(a-x)^2$;
15) $\frac{ax^3+bz^2+c}{(a+b)x}$;
16) $\left(\frac{mu+n}{p}\right)^3$.

02. $f(x)=3x-2\sqrt{x}$. Hallar: $f(1)$; $f'(1)$; $f(4)$; $f'(4)$; $f(a^2)$; $f'(a^2)$.

03. $f(t)=\frac{t^2-5t-1}{t^3}$. Hallar: $f(-1)$; $f'(-1)$; $f'(2)$; $f'\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.

04. $f(x)=\frac{2z^3-3z+\sqrt{z}-1}{z}$. Hallar: $f'\left(\frac{1}{4}\right)$.

05. $f(x)=4-5x+2x^3-x^5$. Mostrar que $f'(a)=f'(-a)$.

En los ejercicios 06 - 24 derivar las funciones que se indican:

06. 1) $y=(x^2-3x+3)(x^2+2x-1)$;
2) $y=(x^3-3x+2)(x^4+x^2-1)$;
3) $y=(\sqrt{x}+1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$;
4) $y=\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-\sqrt{3}\right)\left(4x\sqrt[3]{x}+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{3x}\right)$;

5) $y=(\sqrt[3]{x}+2x)(1+\sqrt[3]{x^2}+3x)$; 6) $y=(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)$;

7) $y=(1+\sqrt{x})(1+\sqrt{2x})(1+\sqrt{3x})$.

07. $y=\frac{x+1}{x-1}$. **08.** $y=\frac{x}{x^2+1}$. **09.** $s=\frac{3t^2+1}{t-1}$.

10. $u=\frac{v^3-2v}{v^2+v+1}$. **11.** $y=\frac{ax+b}{cx+d}$. **12.** $z=\frac{x^2+1}{3(x^2-1)}+(x^2-1)(1-x)$.

13. $u=\frac{v^5}{v^3-2}$. **14.** $y=\frac{1-x^3}{1+x^3}$. **15.** $y=\frac{2}{x^3-1}$.

16. $u=\frac{v^2-v+1}{a^2-3}$. **17.** $y=\frac{1-x^3}{\sqrt{\pi}}$. **18.** $z=\frac{1}{t^2+t+1}$.

19. $s=\frac{1}{t^2-3t+6}$. **20.** $y=\frac{2x^4}{b^2-x^2}$. **21.** $y=\frac{x^2+x-1}{x^3+1}$.

22. $y=\frac{3}{(1-x^2)(1-2x^3)}$. **23.** $y=\frac{ax+bx^2}{a,im+bm^2}$. **24.** $y=\frac{a^2b^2c^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}$.

25. $f(x)=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$; hallar $f'(0)$ y $f'(1)$.

26. $F(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$; hallar $F'(0)$; $F'(1)$ y $F'(2)$.

27. $F(x)=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x^2+1}$; hallar $F'(0)$ y $F'(-1)$.

28. $s(t)=\frac{3}{5-t}+\frac{t^2}{5}$; hallar $s'(0)$ y $s'(2)$.

29. $y(x)=(1+x^3)\left(5-\frac{1}{x^2}\right)$; hallar $y'(1)$ y $y'(a)$.

30. $\rho(\varphi)=\frac{\varphi}{1-\varphi^2}$; hallar $\rho'(2)$ y $\rho'(0)$.

31. $\varphi(z)=\frac{a-z}{1+z}$; hallar $\varphi'(1)$.

32. $z(t)=(\sqrt{t^3}+1)t$; hallar $z'(0)$.

En los ejercicios 33 - 48 derivar las funciones que se indican.

33. 1) $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$; 2) $(x^2+1)^4$; 3) $(1-x)^{20}$; 4) $(1+2x)^{30}$;

5) $(1-x^2)^{10}$; 6) $(5x^3+x^2-4)^5$; 7) $(x^3-x)^6$; 8) $\left(7x^2-\frac{4}{x}+6\right)^6$;

9) $s=\left(t^3-\frac{1}{t^3}+3\right)^4$; 10) $y=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$; 11) $y=\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)^5$;

12) $y=(2x^3+3x^2+6x+1)^4$.

34. $v = \dfrac{(s+4)^2}{s+3}$.

35. $s = \dfrac{t^3}{(1-t)^2}$.

36. $y = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}$.

37. $y = \dfrac{1-\sqrt[3]{2x}}{1+\sqrt[3]{2x}}$.

38. $y = \sqrt{1-x^2}$.

39. $y = (1-2x^{\frac{1}{2}})^4$.

40. $u = \left(\dfrac{v}{1-v}\right)$.

41. $y = \dfrac{2}{(x^2-x+1)^2}$.

42. $y = \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

43. $y = 3\sqrt{\dfrac{1}{1+x^2}}$.

44. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^4-x^8}}$.

45. $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$.

46. $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

47. $u = \dfrac{1}{v-\sqrt{a^2+v^2}}$.

48. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2x-1}} + \dfrac{5}{\sqrt[4]{(x^2+2)^3}}$.

49. $u(v) = (v^2+v+2)^{\frac{3}{2}}$; hallar $u'(1)$.

50. $y(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$; hallar $y'(2)$.

51. $y(x) = \sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$; hallar $y'(0)$.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

En los ejercicios 52 - 81 derivar las funciones que se indican.

52. $y = \operatorname{sen} x + \cos x$.

53. $y = \dfrac{x}{1-\cos x}$.

54. $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$.

55. $\rho = \varphi \operatorname{sen}\varphi + \cos\varphi$.

56. $z = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} + \dfrac{\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$.

57. $s = \dfrac{\operatorname{sen} t}{1+\cos t}$.

58. $y = \dfrac{x}{\operatorname{sen} x + \cos x}$.

59. $y = \dfrac{x \operatorname{sen} x}{1+\operatorname{tg} x}$.

60. $y = \cos^2 x$.

61. $y = \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x$.

62. $y = \cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x$.

63. $y = 3\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^3 x$.

64. $y = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x$.

65. $y = x\sec^2 x - \operatorname{tg} x$.

66. $y = \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x$.

67. $y = \operatorname{sen} 3x$.

68. $y = a\cos\frac{x}{3}$.

69. $y = 3\operatorname{sen}(3x+5)$.

70. $y = \operatorname{tg}\dfrac{x+1}{2}$.

71. $y = \sqrt{1+2\operatorname{tg} x}$.

72. $y = \operatorname{sen}\frac{1}{x}$.

73. $y = \operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$.

74. $y = \cos^3 4x$.

75. $y = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.

76. $y = \operatorname{sen}\sqrt{1+x^2}$.

77. $y = \operatorname{ctg}\sqrt[3]{1+x^2}$.

78. $y = (1+\operatorname{sen}^2 x)^4$.

79. $y = \sqrt{1+\operatorname{tg}\left(x+\frac{1}{x}\right)}$.

80. $y = \cos^2\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

81. $y = \operatorname{sen}^2(\cos 3x)$.

82. Deducir las fórmulas:

$(\text{sen}^n x \cos nx)' = n \,\text{sen}^{n-1} x \cos(n+1)x$;

$(\text{sen}^n x \,\text{sen}\, nx)' = n \,\text{sen}^{n-1} x \,\text{sen}(n+1)x$;

$(\cos^n \text{sen}\, nx)' = n \cos^{n-1} x \cos(n+1)x$;

$(\cos^n x \cos nx)' = -n \cos^{n-1} x \,\text{sen}(n+1)x$.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS.

En los ejercicios 83 - 572 derivar las funciones que se indican.

83. $y = x \arcsen x$.

84. $y = \dfrac{\arcsen x}{\arccos x}$.

85. $y = (\arcsen x)^2$.

86. $y = x \arcsen x + \sqrt{x - 1^2}$.

87. $y = \dfrac{1}{\arcsen x}$.

88. $y = x \,\text{sen}\, x \operatorname{arctg} x$.

89. $y = \dfrac{\arccos x}{x}$.

90. $y = \sqrt{x} \cdot \operatorname{arctg} x$.

91. $y = (\arccos x - \arcsen x)^n$

92. $y = \arcsen x$.

93. $y = \dfrac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x$.

94. $y = \dfrac{\arcsen x}{\sqrt{1-x^2}}$.

95. $y = \dfrac{x^2}{\operatorname{arctg} x}$.

96. $y = \arcsen(x-1)$.

97. $y = \arccos \dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

98. $y = \operatorname{arctg} x^2$.

99. $y = \arcsen \frac{2}{x}$.

100. $y = \arcsen(\text{sen}\, x)$.

101. $y = \operatorname{arctg}^2 \frac{1}{x}$.

102. $y = \sqrt{1 - (\arccos x)^2}$.

103. $y = \arccos \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

104. $y = \frac{1}{2} \sqrt[4]{arcsen \sqrt{x^2 + 2x}}$.

105. $y = \arcsen \dfrac{\text{sen}\,\alpha \,\text{sen}\, x}{1 - \cos\alpha \,\text{sen}\, x}$.

106. $y = \arccos \dfrac{1 + a\cos x}{a + b\cos x}$.

107. $y = \operatorname{arctg}(x - \sqrt{1+x^2})$.

FUNCIONES LOGARÍTMICAS

En los ejercicios 108 - 132 derivar las funciones que se indican.

108. $y = x^2 \log_3 x$.

109. $y = \ln^2 x$.

110. $y = x \ln x$.

111. $y = \sqrt{\ln x}$.

112. $y = \dfrac{x-1}{\log_2 x}$.

113. $y = x \,\text{sen}\, x \ln x$.

114. $y = \dfrac{1}{\ln x}$.

115. $y = \dfrac{\ln x}{x^n}$.

116. $y = \dfrac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$.

117. $y = \frac{\ln x}{1+x^2}$.

118. $y = x^n \ln x$.

119. $y = \sqrt{1+\ln^2 x}$.

120. $y = \ln(1-2x)$.

121. $y = \ln(x^2 - 4x)$.

122. $y = \ln \operatorname{sen} x$.

123. $y = \log_3(x^2 - 1)$.

124. $y = \ln \operatorname{tg} x$.

125. $y = \ln \arccos 2x$.

126. $y = \ln^4 \operatorname{sen} x$.

127. $y = \operatorname{arctg}[\ln(ax+b)]$.

128. $y = (1+\ln \operatorname{sen} x)^n$.

129. $y = \log_2[\log_3(\log_5 x)]$.

130. $y = \ln \operatorname{arctg} \sqrt{1+x^2}$.

131. $y = \operatorname{arcsen}^2[\ln(a^3 + x^3)]$.

132. $y = \sqrt[3]{\ln \operatorname{sen} \frac{x+3}{4}}$.

FUNCIONES EXPONENCIALES

En los ejercicios 133 - 168 derivas las funciones que se indican.

133. $y = 2^x$.

134. $y = 2^x$.

135. $y = \frac{1}{3^x}$.

136. $y = \frac{x}{4^x}$.

137. $y = x \cdot 10^x$.

138. $y = xe^x$.

139. $y = \frac{x}{e^x}$.

140. $y = \frac{x^3 + 2^x}{e^x}$.

141. $y = e^x \cos x$.

142. $y = \frac{e^x}{\operatorname{sen} x}$.

143. $y = \frac{\cos x}{e^x}$.

144. $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$.

145. $y = x^3 - 3^x$.

146. $y = \sqrt{1+e^x}$.

147. $y = (x^2 - 2x + 3)e^x$.

148. $y = \frac{1+e^x}{1-e^x}$.

149. $y = \frac{1-10^x}{1+10^x}$.

150. $y = \frac{e^x}{1+x^2}$.

151. $y = xe^x(\cos x + \operatorname{sen} x)$.

152. $y = e^{-x}$.

153. $y = 10^{2x-3}$.

154. $y = e^{\sqrt{x+1}}$.

155. $y = \operatorname{sen}(2^x)$.

156. $y = 3^{\operatorname{sen} x}$.

157. $y = a^{\operatorname{sen}^3 x}$.

158. $y = e^{\operatorname{arcsen} 2x}$.

159. $y = 2^{3^x}$.

160. $y = e^{\sqrt{\ln x}}$.

161. $y = \operatorname{sen}(e^{x^2+3x-2})$.

162. $y = 10^{1-\operatorname{sen}^4 3x}$.

163. $y = e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}$.

164. $y = \ln \operatorname{sen} \sqrt[3]{\operatorname{arctg} e^{3x}}$.

165. $y = ae^{-b^2x^2}$.

166. $y = x^2 e^{-\frac{x^2}{a^2}}$.

167. $y = Ae^{-k^2x} \operatorname{sen}(\omega x + \alpha)$.

168. $y = a^x x^a$.

FUNCIONES HIPERBÓLICAS

En los ejercicios 169 - 184 derivar las funciones que se indican.

169. $y = \operatorname{sh}^3 x$.

170. $y = \ln \operatorname{ch} x$.

171. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{th} x)$.

172. $y = \operatorname{th}(1 - x^2)$.

173. $y = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x$.

174. $y = \operatorname{ch}(\operatorname{sh} x)$.

175. $y = \sqrt{\operatorname{ch} x}$.

176. $y = e^{\operatorname{ch}^2 x}$.

177. $y = \operatorname{th}(\ln x)$.

178. $y = x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x$.

179. $y = \sqrt[4]{(1 + \operatorname{th}^2 x)^3}$.

180. $y = \frac{1}{2}\operatorname{th}\frac{x}{2} - \frac{1}{6}\operatorname{th}^3\frac{x}{2}$.

181. $y = \sqrt[4]{\frac{1 + \operatorname{th} x}{1 - \operatorname{th} x}}$.

182. $y = \frac{1}{2}\operatorname{th} x + \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{1 + \sqrt{2}\operatorname{th} x}{1 - \sqrt{2}\operatorname{th} x}$.

183. $y = \frac{1}{x}\operatorname{ch} 2x + \sqrt{x}\operatorname{sh} 2x$.

184. $y = x^2 e^{3x} \operatorname{cosech} x$.

DERIVACIÓN LOGARÍTMICA

En los ejercicios 185 - 201 derivar las funciones que se indican aplicando la regla de la derivación logarítmica.

185. $y = x^{x^2}$.

186. $y = x^{x^x}$.

187. $y = (\operatorname{sen} x^{\cos x})$.

188. $y = (\ln x)^x$.

189. $y = (x + 1)^{2/x}$.

190. $y = x^3 e^{x^2} \operatorname{sen} 2x$.

191. $y = \frac{(x-2)^2\sqrt[3]{3+1}}{(x-5)^3}$.

192. $y = x^{\ln x}$.

193. $y = \frac{(x+1)^3\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$.

194. $y = \sqrt{x \operatorname{sen} x\sqrt{1 - e^x}}$.

195. $y = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{arcsen} x}{1 + \operatorname{arcsen} x}}$.

196. $y = x^{\frac{1}{x}}$.

197. $y = x^{\operatorname{sen} x}$.

198. $y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$.

199. $y = 2x^{\sqrt{x}}$.

200. $y = (x^2 + 1)^{\operatorname{sen} x}$.

201. $y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$.

FUNCIONES DIVERSAS

En los ejercicios 202 - 305 derivar las funciones que se indican.

202. $y = (1 + \sqrt[3]{x})^3$.

203. $y = a \operatorname{tg}\left(\frac{x}{k} + b\right)$.

204. $y = \sqrt{1 + \sqrt{2px}}$.

205. $y = \operatorname{arctg}(x^2 - 3x + 2)$.

206. $y = \lg(x - \cos x)$.

207. $y = 3\cos^2 x - \cos^3 x$.

208. $y = 5\,\mathrm{tg}\frac{x}{5} + \mathrm{tg}\frac{\pi}{8}$.

209. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$.

210. $y = \mathrm{sen}\frac{x}{2}\mathrm{sen}\,2x$.

211. $y = \mathrm{sen}\,x \cdot e^{\cos x}$.

212. $y = y^5\sqrt[3]{x^6 - 8}$.

213. $y = e^{-x^2}\ln x$.

214. $y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$.

215. $y = \mathrm{arctg}\frac{x+1}{x-1}$.

216. $y = e^{2x+3}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)$.

217. $y = \frac{2\,\mathrm{sen}^2 x}{\cos 2x}$.

218. $y = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$.

219. $y = \frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2} + \mathrm{ctg}\frac{x}{2}}{x}$.

220. $y = \mathrm{sen}^2\frac{\pi}{3}\mathrm{ctg}\frac{\pi}{2}$.

221. $y = \frac{\sqrt[9]{4x^5 + 2}}{3x^4}$.

222. $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$.

223. $y = x\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}$.

224. $y = \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}^4 x}$.

225. $y = \cos 2x \ln x$.

226. $y = \frac{2}{3}\mathrm{arctg}\,x + \frac{1}{3}\mathrm{arctg}\frac{x}{1-x^2}$.

227. $y = \mathrm{arcsen}(n\,\mathrm{sen}\,x)$.

228. $y = \mathrm{arcsen}\sqrt{\mathrm{sen}\,x}$.

229. $y = \frac{1}{18}\mathrm{sen}^6 3x - \frac{1}{24}\mathrm{sen}^8 3x$.

230. $y = x - \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{arcsen}\,x$.

231. $y = \cos\frac{\mathrm{arcsen}\,x}{2}$.

232. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

233. $\mathrm{arccos}\sqrt{1 - 3x}$.

234. $y = \mathrm{sen}^2\left(\frac{1 - \ln x}{x}\right)$.

235. $y = \log_3(x^2 - \mathrm{sen}\,x)$.

236. $y = \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

237. $y = \ln\frac{x + \sqrt{1 - x^2}}{x}$.

238. $y = x\,\mathrm{arcsen}(\ln x)$.

239. $y = \mathrm{tg}\frac{1 - e^x}{1 + e^x}$.

240. $y = \cos x\sqrt{1 + \mathrm{sen}^2 x}$.

241. $y = 0{,}4\left(\cos\frac{2x+1}{2} - \mathrm{sen}\,0{,}8x\right)^2$.

242. $y = x \cdot 10^{\sqrt{x}}$.

243. $y = \frac{1}{\mathrm{tg}^2 2x}$.

244. $y = \ln\mathrm{arctg}\frac{1}{1+x}$.

245. $y = \ln\frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$.

246. $y = \sqrt[3]{1 + x\sqrt{x+3}}$.

247. $y = x^2\sqrt{1 + \sqrt{x}}$.

248. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}$.

249. $y = x^3 \operatorname{arctg} x^3$.

250. $y = \dfrac{\ln \operatorname{sen} x}{\ln \cos x}$.

251. $y = \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2}$.

252. $y = \dfrac{\operatorname{arcsen} 4x}{1-4x}$.

253. $y = e^{\frac{1}{e^{\ln x}}}$.

254. $y = \ln \dfrac{1-e^x}{e^x}$.

255. $y = 10^x \operatorname{tg} x$.

256. $y = \operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{sen} x^2$.

257. $y = \dfrac{2\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$.

258. $y = x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$.

259. $y = \frac{1}{4}\ln \dfrac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$.

260. $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$.

261. $y = \sqrt{(a-x)(x-b)} - (a-b)\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{a-x}{x-b}}$

262. $y = \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{2\operatorname{sen}^2 x \cos x}$.

263. $y = e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$.

264. $y = \sqrt{a^2 - x^2} - a \arccos \frac{x}{a}$.

265. $y = \sqrt{x^2+1} - \ln\left(\frac{1}{2} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)$.

266. $y = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\operatorname{ctg} x} + \dfrac{\cos^2 x}{1+\operatorname{tg} x}$.

267. $y = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) - \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

268. $y = e^{ax}(a\operatorname{sen} x - \cos x)$.

269. $y = x e^{1-\cos x}$.

270. $y = \dfrac{1}{\operatorname{arctg} e^{-2x}}$.

271. $y = e^x(\operatorname{sen} 3x - 3\cos 3x)$.

272. $y = 3x^3 \operatorname{arcsen} x + (x^2+2)\sqrt{1-x^2}$.

273. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1+e^{-\sqrt{x}}}}$.

274. $y = 2\operatorname{arcsen}\dfrac{x-2}{\sqrt{6}} - \sqrt{2+4x-x^2}$.

275. $y = \ln(e^x \cos x + e^{-x}\operatorname{sen} x)$.

276. $y = \dfrac{1+x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}$.

277. $y = \dfrac{1}{\cos(x-\cos x)}$.

278. $y = e^x \operatorname{sen} x \cos^3 x$.

279. $y = \sqrt[11]{9+6\sqrt[5]{x^9}}$.

280. $y = x - \ln(2e^x + 1 + \sqrt{e^{2x} + 4e^x + 1})$.

281. $y = e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$.

282. $y = \dfrac{e^{x^2}}{e^x + e^{-x}}$.

283. $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} x \ln(1+\operatorname{sen} x) - x$.

284. $y = 2\ln(2x - 3\sqrt{1-4x^2}) - 6\operatorname{arcsen} 2x$.

285. $y = \frac{3x^2-1}{3x^3} + \ln\sqrt{1+x^2} + \operatorname{arctg} x$.

286. $y = \frac{1}{2}(3-x)\sqrt{1-2x-x^2} + 2\operatorname{arcsen}\frac{x+1}{\sqrt{2}}$.

287. $y = \ln(x \operatorname{sen} x\sqrt{1-x^2})$.

288. $y = x\sqrt{1+x^2}\operatorname{sen} x$.

289. $y = \frac{\sqrt{x+2}(x-x)^4}{(x+1)^5}$.

290. $y = \sqrt[5]{(1+xe^{\sqrt{x}})^3}$.

291. $y = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{x^2 - \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}\ln x + 1}$.

292. $y = \frac{\operatorname{sen} x}{4\cos^4 x} + \frac{3\operatorname{sen} x}{8\cos^2 x} + \frac{3}{8}\ln\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.

293. $y = \frac{xe^x \operatorname{arctg} x}{\ln^5 x}$.

294. $y = \frac{(1-x^2)e^{3x-1}\cos x}{(\arccos x)^3}$.

295. $y = x\sqrt{(x^2+a^2)^3} + \frac{3a^2x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{3a^4}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$.

296. $y = x(\operatorname{arcsen} x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\operatorname{arcsen} x$.

297. $y = \ln\cos\operatorname{arctg}\frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

298. $y = \frac{1}{m\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(e^{mx}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$.

299. $y = \frac{1}{3}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} \ln\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

300. $y = \ln\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

301. $y = (\operatorname{tg} 2x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}$.

302. $y = 3\sqrt{\frac{x-5}{\sqrt[5]{x^2+4}}}$.

303. $y = \ln\sqrt[4]{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$.

304. $y = \arccos\frac{x^{2n-1}}{x^{2n+1}}$.

305. $y = -\frac{x}{1+8x^3} + \frac{1}{12}\ln\frac{(1+2x)^2}{1-2x+4x^2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\operatorname{arctg}\frac{4x-1}{\sqrt{3}}$.

306. Demostrar que la función $y = \ln\frac{1}{1+x}$ satisface la relación $xy' + 1 = e^y$.

307. Demostrar que la función $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \ln\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$ satisface la relación $2y = xy' + \ln y'$.

308. Demostrar que la función $y = \frac{\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}$ satisface la relación $(1-x^2)y' - xy = 1$.

309. Calcular las sumas: a) $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}$

b) $2+2\cdot 3x+3\cdot 4x^2+\ldots+n(n-1)x^{n-2}$.

FUNCIONES INVERSAS

310. Supongamos que la regla para derivar la función potencial fue establecida sólo para un exponente entero positivo. Deducir la fórmula para derivar la raíz, explicando la regla para derivar la función inversa.

311. $x=e^{\operatorname{arcsen} y}$; hallar la expresión para $\frac{dy}{dx}$ mediante y, mediante x.

312. $t=2-3s+s^3$; expresar $\frac{ds}{dt}$ mediante s.

313. $u=\frac{1}{2}\ln\frac{1+v}{1-v}$; comprobar la relación $\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{du}=1$.

314. Teniendo en cuenta que las funciones $\operatorname{arcsen}\sqrt{x}$ y $\operatorname{sen}^2 x$ son recíprocamente inversas y que $(\operatorname{sen}^2 x)'=\operatorname{sen} 2x$, hallar $(\operatorname{arcsen}\sqrt{x})'$.

315. Designemos la función, inversa a la función potencial exponencial $y=x^x$, por el símbolo $\alpha(x)$, es decir, supongamos que de $y=x^x$ se deduce $x=\alpha(y)$. Hallar la fórmula para la derivada de la función $y=\alpha(x)$.

316. Las funciones que son inversas a las funciones hiperbólicas son designadas por los símbolos $\operatorname{Arsh} x$, $\operatorname{Arch} x$, $\operatorname{Arth} x$. Hallar las derivadas de estas funciones.

317. $s=te^{-t}$; hallar $\frac{dt}{ds}$.

318. $y=\frac{1-x^4}{1+x^4}$. Expresar $\frac{dx}{dy}$ mediante x, mediante y. Mostrar que es válida la relación $\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=1$.

319. $x=y^3-4y+1$. Hallar $\frac{dx}{dy}$.

320. $t=\operatorname{arcsen} 2^s$. Hallar la expresión para $\frac{ds}{dt}$ mediante s, mediante t.

321. Comprobar la validez de la relación $\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dy}=1$, si x e y se relacionan por medio de la dependencia.

1) $y=x^2+ax+b$; 2) $y=x^{-n}$; 3) $y=\ln(x^2-1)$.

FUNCIONES DADAS EN FORMA IMPLÍCITA

322. Aplicando la derivación mostrar que las derivadas de los dos miembros de la igualdad $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ son idénticamente iguales entre sí.

323. Aplicando la derivación mostrar que las derivadas de los dos miembros de la igualdad $\frac{2\operatorname{sen}^2 x - 1}{\cos x} + \frac{\cos x(2\operatorname{sen} x + 1)}{1 + \operatorname{sen} x} = \operatorname{tg} x$ son idénticas entre sí.

324. ¿A qué es igual al coeficiente angular de la tangente a la elipse $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ en el punto $(1, \sqrt{2})$?

325. ¿A qué es igual el coeficiente angular de la tangente a la hipérbola $xy = a$ $(a = 0)$ en el punto $(a, 1)$?

326. ¿A qué es igual el coeficiente angular de la tangente a la circunferencia $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 17$ en el punto $(2, 1)$?

En los ejercicios 327 - 347 hallar las derivadas de las funciones y dadas en forma implícita.

327. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

328. $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$.

329. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

330. $y^2 \cos x = a^2 \operatorname{sen} 3x$.

331. $y^3 - 3y + 2ax = 0$.

332. $y^2 - 2xy + b^2 = 0$.

333. $x^4 + y^4 = x^2 y^2$.

334. $x^3 + ax^2 y + bxy^2 + y^3 = 0$.

335. $\operatorname{sen}(xy) + \cos(xy) = \operatorname{tg}(x + y)$.

336. $2^x + 2^y = 2^{x+y}$.

337. $2y \ln y = x$.

338. $x - y = \operatorname{arcsen} x - \operatorname{arcsen} y$.

339. $x^y = y^x$.

340. $y = \cos(x + y)$.

341. $\cos(xy) = x$.

342. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

343. $y = 1 + xe^y$.

344. $x \operatorname{sen} y - \cos y + \cos 2y = 0$.

345. $\operatorname{tg} \frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

346. $y \operatorname{sen} x - \cos(x - y) = 0$.

347. $y = x + \operatorname{arctg} y$.

348. Mostrar que la función y definida por la ecuación $xy - \ln y = 1$, satisface también la relación $y^2 + (xy - 1)\frac{dy}{dx} = 0$.

APLICACIONES DE LA DERIVADA

349. En la parábola $y = x^2$ se han marcado dos puntos cuyas abscisas son $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Por estos puntos pasa la secante. ¿En qué punto de la parábola la tangente a está es paralela a la secante trazada?

350. Una cuerda está trazada de manera que pasa por el foco de la parábola y es perpendicular al je de ésta. Por los puntos de intersección de la cuerda y la parábola pasan tangentes. Demostrar que estas se cortan en ángulo recto.

351. Escribir la ecuación de la tangente y de la normal a la hipérbola $y = 1/x$ en el punto cuya abscisa es $x = -1/2$. Hallar la subtangente y la subnormal.

352. Mostrar que el segmento de la tangente a la hipérbola $y = \frac{a}{x}$ comprendido entre los ejes de coordenadas está dividido en dos partes iguales por el punto de contacto.

353. Mostrar que respecto a la hipérbola $xy = a$ el área del triángulo formado por cualquier tangente y los ejes de coordenadas es igual al cuadrado del semieje de la hipérbola.

354. Un punto móvil se desplaza sobre una recta de modo que su distancia s del punto inicial al cabo de t s es igual $s = -\frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$.

a) ¿En qué momento se encontró en el punto inicial el punto referido?
b) ¿En qué momentos fue igual a cero su velocidad?

355. Un cuerpo cuya masa es de 5kg efectúa movimiento rectilíneo de acuerdo con la ley $s = 1 + t + t^2$, s viene expresada en centímetros, t, en segundos. Determinar la energía cinética $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ del cuerpo al cabo de 5 s al iniciar el movimiento.

356. El ángulo α de giro de una polea en función del tiempo t viene expresado por la función $\alpha = t^2 + 3t - 5$. Hallar la velocidad angular para $t = 5$ s.

357. Una rueda gira de modo que el ángulo de giro es proporcional al cuadrado de tiempo. La primera vuelta ha sido realizada en 8 s. Hallar la velocidad angular ω al cabo de 32 s al comenzar el movimiento.

358. El ángulo θ, que se forma al dar una vuelta una rueda, al cabo de t segundos, es igual a $\theta = at^2 - bt + c$, donde a, b, c son constantes positivas. Hallar la velocidad angular ω de la rotación de la rueda. ¿En qué momento es igual a cero de la velocidad angular?

359. La cantidad de electricidad que pasa por un conductor a partir del momento de tiempo $t = 0$, se calcula con la fórmula siguiente $Q = 2t^2 + 3t + 1$ (colombios). Hallar la intensidad de corriente al final del quinto segundo.

360. En la línea $y = x^2(x-2)^2$ hallar los puntos en los cuales las tangentes sean paralelas al eje de abscisas.

361. Mostrar que la línea $y = x^5 + 5x - 12$ en todos sus puntos está inclinada hacia el eje Ox, formándose entre ellos un ángulo agudo.

362. ¿En qué puntos de la línea $y = x^3 + x - 2$ la tangente a ella es paralela a la recta $y = 4x - 1$?

363. Formar las ecuaciones de las tangentes a la línea $y = x - \frac{1}{x}$ en los puntos de su intersección con el eje de abscisas.

364. Formar la ecuación de la tangente a la línea $y = x^3 + 3x^2 - 5$, perpendicular a la recta $2x - 6y + 1 = 0$.

En los ejercicios 365 - 368 formar las ecuaciones de la tangente y de la normal a las líneas que se indican.

365. $y = \operatorname{sen} x$ en el punto $M(x_0, y_0)$.

366. $y = \ln x$ en el punto $M(x_0, y_0)$.

367. $y = \frac{8a^3}{4a^2 + x^2}$ en el punto cuya abscisa es $x = 2a$.

368. $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ (cisoide) en el punto $M(x_0, y_0)$.

369. Mostrar que la subtangente a una parábola de n-ésimo orden $y = x^n$ es igual a $\frac{1}{n}$ parte de la abscisa del punto de contacto. Indicar el modo de construir la tangente a la línea $y = x^n$.

370. Hallar las subtangentes y las subnormales a la línea $y = x^3$, $y^2 = x^3$, $xy^2 = 1$. Indicar el modo de construir las tangentes a las líneas indicadas.

371. Formas las ecuaciones de la tangente y de la normal a la parábola $x^2 = 4ay$ en su punto (x_0, y_0). Mostrar que la tangente en el punto cuya abscisa es $x_0 = 2am$ tiene la siguiente ecuación $y = \frac{y}{m} + am$.

372. La cuerda de la parábola $y = x^2 - 2x + 5$ une los puntos cuyas abscisas son $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Formar la ecuación de la tangente a la parábola paralela a la cuerda.

373. Formar la ecuación de la normal a la línea $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2}$ en el punto cuya abscisa es $x = 3$.

374. Formar la ecuación de la normal a la línea $y = -\sqrt{x} + 2$ en el punto de su intersección con la bisectriz del primer ángulo coordenado.

375. Formar la ecuación de la normal a la parábola $y = x^2 - 6x + 6$ perpendicular a la recta que une el origen de coordenadas con el vértice de la parábola.

376. Mostrar que las normales a la línea $y = x^2 - x + 1$, trazadas en los puntos cuyas abscisas son $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 5/2$ se cortan en un solo punto.

377. En los puntos de intersección de la recta $x - y + 1 = 0$ y la parábola $y = x^2 - 4x + 5$ están trazadas las normales a la parábola. Hallar el área del triángulo engendrado por las normales y la cuerda que subtiende los referidos puntos de intersección.

378. Mostrar que las tangentes a la hipérbola $y = \frac{x-4}{x-2}$ en los puntos de su intersección con los ejes de coordenadas son paralelas entre sí.

379. Trazar la tangente a la hipérbola $y = \frac{x+9}{x+5}$ de modo que atraviese el origen de coordenadas.

380. En la línea $y = \frac{1}{1+x^2}$ hallar el punto en el cual la tangente sea paralela al eje de abscisas.

381. Hallar la ecuación de la tangente a la línea $x^2(x+y) = a^2(x-y)$ en el origen de coordenadas.

382. Demostrar que las tangentes a la línea $y = \frac{1+3x^2}{3+x^2}$ trazadas en los puntos en los cuales $y = 1$, se cortan en el origen de coordenadas.

383. Trazar la normal a la línea $y = x \ln x$ que sea paralela a la recta $2x - 2y + 3 = 0$.

384. Hallar la distancia que media entre el origen de coordenadas y la normal a la línea $y = e^{2x} + x^2$, trazadas en el punto $x = 0$.

385. Construir la gráfica de la función $y = \operatorname{sen}(2x - \pi/3)$ y hallar el punto de intersección de las tangentes a la gráfica, trazadas en los puntos cuyas abscisas son $x_1 = 0$ y $x_2 = 5\pi/12$.

386. Mostrar que la subtangente a la línea $y = ae^{bx}$ (donde a y b son constantes) tiene longitud constante en todos los puntos.

387. Mostrar que la subnormal a la línea $y = x \ln(cx)$ (donde c es cualquier constante) en cualquier punto de la línea referida es la cuarta proporcional a la abscisa, a la ordenada y a la suma de la abscisa y de la ordenada del punto referido.

388. Mostrar que cualquier tangente a la línea $y = \frac{1}{2}\sqrt{x - 4x^2}$ se corta con el eje de ordenadas en un punto equidistante entre el punto de contacto y el origen de coordenadas.

389. Mostrar que la tangente a la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en el punto $M(x_0, y_0)$ tiene la siguiente ecuación $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

390. Mostrar que la tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ en el punto $M(x_0, y_0)$ tiene la siguiente ecuación $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

391. Demostrar que la normal a la elipse en cualquier punto que le pertenezca divide en dos el ángulo entre los radios focales de este punto (véase la fig. 6). Deducir el procedimiento para construir la tangente y la normal a la elipse.

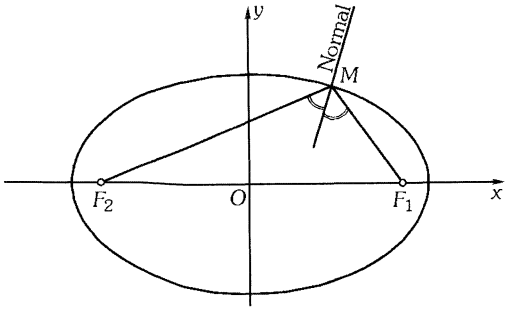


Fig. 6

392. Formar las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{7} = 1$ que sean perpendiculares a la recta $2x + 4y - 3 = 0$.

393. Una recta pasa por el origen de coordenadas y es paralela a la tangente trazada a una curva en un punto cualquiera M de la misma. Hallar el lugar geométrico P de los puntos de intersección de la recta referida con una recta que sea paralela al eje de ordenadas y que pase por el punto M. Hallar tales lugares geométricos para:

a) La parábola $y^2 = 2px$,

b) La logarítmica $y = \log_b x$,

c) La circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$,

d) La directriz $y = \sqrt{a^2 - x^2} - a\ln\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}$

En los ejercicios 394 - 399 hallar los ángulos que se forman al cortarse las líneas que se indican.

394. 1) $y=\frac{x+1}{x+2}$ e $y=\frac{x^2+4x+8}{16}$; 2) $y=(x-2)^2$ e $y=4x-x^2+4$.

395. 1) $x^2+y^2=8$ e $y^2=2x$; 2) $x^2+y^2-4x=1$ y $x^2+y^2+2y=9$.

396. $x^2-y^2=5$ y $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$.

397. $x^2+y^2=8ax$ e $y^2=\frac{x}{2a-x}$.

398. $x^2=4ay$ e $y=\frac{8a^3}{x^2+4a^2}$.

399. $y=\operatorname{sen} x$ e $y=\cos x$ $(0\le x\le\pi)$.

400. Formar la ecuación de la tangente y de la normal a la línea $\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=2$ en el punto cuya abscisa es a.

401. Demostrar que la suma de los segmentos formados en los ejes de coordenadas por la tangente a la curva $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ es igual a a para todos sus puntos.

402. Mostrar que el segmento de la tangente a la astroide $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ limitado por los ejes de coordenadas tiene longitud constante e igual a a.

403. Demostrar que el segmento de la tangente a la tractriz $y=\frac{a}{2}\ln\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}}-\sqrt{a^2-x^2}$ limitado por los ejes de ordenadas y el punto de contacto, tiene longitud constante.

404. Mostrar que para cualquier punto $M(x_0,y_0)$ de la hipérbola equilátera $x^2-y^2=a^2$ el segmento de la normal desde el punto M hasta el punto de intersección con el eje de abscisas es igual al radio polar del punto M.

405. Mostrar que el segmento cortado por el eje de abscisas por la tangente en un punto cualquiera de la curva $\frac{a}{x^2}+\frac{b}{y^2}=1$, es proporcional al cubo de la abscisa del punto de contacto.

406. Demostrar que la ordenada de cualquier punto de la línea $2x^2y^2-x^4=c$ (donde c es una constante) es una media proporcional entre la abscisa y la subnormal trazada a la línea en el mismo punto.

407. Dadas las elipses $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ cuyo eje $2a$ es común, mientras que los ejes $2b$ son diferentes (Fig. 7), demostrar que las tangentes trazadas en los puntos cuyas abscisas son las mismas, se cortan en un mismo punto que pertenece al eje de abscisas.

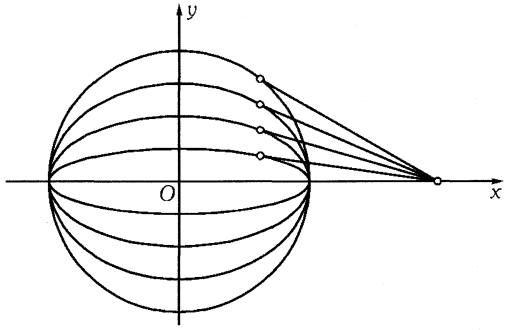


Fig. 7

Valiéndose de ello, señalar un procedimiento sencillo para construir la tangente a la elipse.

408. Mostrar que la línea $y = e^{hx} \operatorname{sen} mx$ toca cada una de las líneas $y = e^{hx}$, $y = -e^{hx}$ en todos los puntos que son comunes para ellas.

409. Para construir la tangente a la catenaria $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{2}$ se procede de la manera siguiente: en la ordenada *MN* del punto *M*, que sirve de diámetro, se traza una semicircunferencia (Fig. 8) y se marca la cuerda $NP = a$; la recta *MP* será la tangente buscada. Demostrarlo.

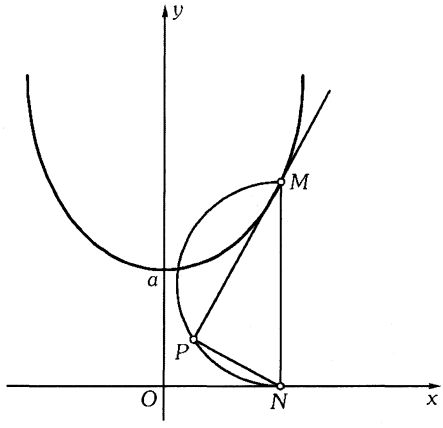


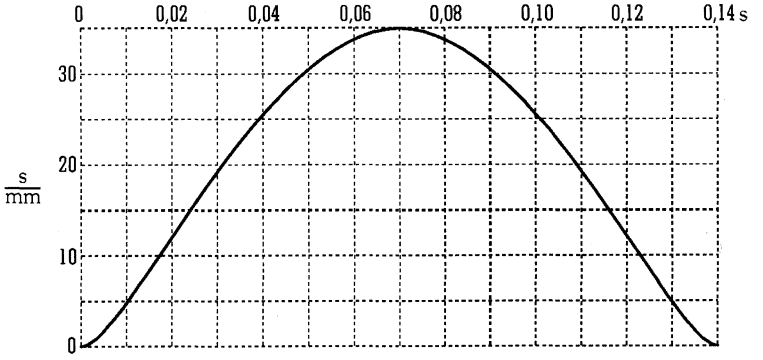
Fig. 8

DERIVACIÓN GRÁFICA

410. Al pasar la corriente eléctrica por el devanado del electroimán de un motor ha sido medida la temperatura, lo cual ha dado los siguientes resultados:

Tiempo t (en min.)	0	5	10	15	20	25
Temperatura θ °C	20	26	32,5	41	46	49
Tiempo t (en min.)	30	35	40	45	50	55
Temperatura θ °C	52,5	54,5	56,5	58	59,5	61

Construir una gráfica aproximada de la dependencia continua de la temperatura en función del tiempo. Después de haber efectuado la derivación de la gráfica, construir la gráfica que muestre a qué velocidad varía la temperatura en función del tiempo.



411. La figura adjunta presenta la curva de la subida que efectúa la válvula de admisión del cilindro de una máquina de vapor (de baja presión). Construir la curva de velocidad aplicando la derivación gráfica.

RESPUESTAS GRUPO 03:

01. 1) $6x-5$; 2) $4x^3-x^2+5x-0{,}3$; 3) $2ax+b$; 4) $\frac{1}{3\sqrt[2]{x^2}}$; 5) $\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}$;

6) $\frac{0{,}2}{\sqrt{y^3}}-10y^2-\frac{0{,}4}{y^3}$; 7) $\frac{1}{n}-\frac{n}{x^2}+\frac{2x}{m^2}-\frac{2m^2}{x^3}$; 8) $\frac{3}{2}m\sqrt{x}+\frac{7}{6}n\sqrt[6]{x}+\frac{1}{2}+p\frac{1}{\sqrt{x^3}}$; 9) $\frac{2mz+n}{p+q}$

10) $-\frac{1}{15}t^{-\frac{5}{3}}+7{,}28t^{-2{,}4}-\frac{0{,}5}{t\sqrt[5]{t}}$; 11) $2x-1$; 12) $3{,}5x^2\sqrt{x}-1+\frac{1}{2\sqrt{x}}$; 13) $3v^2+2c-1$

14) $6(a-x)$; 15) $\frac{2ax}{a+b}+\frac{b}{a+b}-\frac{c}{(a+b)x^2}$; 16) $\frac{3m(mu+n)^2}{p^3}$. **02.** $f(1)=1$; $f'(1)=2$;

$f(4)=8$; $f'(4)=2{,}5$; $f(a^2)=3a^2-2|a|$; $f'(a^2)=3-\frac{1}{|a|}$. **03.** $f(-1)=-5$; $f'(-1)=-8$

$f'(2)=\frac{19}{16}$; $f'\left(\frac{1}{a}\right)=3a^4+10a^3-a^2$, **04.** 13. **06.** 1) $4x^3-3x^2-8x+9$;

2) $7x^6-10x^4+8x^3-12x^2+4x+3$; 3) $-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)$;

4) $\frac{1}{9}\left(\frac{60}{\sqrt[6]{6}}-\frac{5}{x\sqrt[6]{x^5}}+\frac{\sqrt{3}}{x\sqrt[3]{x}}-48\sqrt[6]{27x^2}\right)$; 5) $\frac{1+12x}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{9\sqrt[3]{x^2}+10x\sqrt[3]{x}+36x\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{x^2}}$;

6) $2x(3x^4-28x^2+49)$; 7) $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{2x}+2\sqrt{3x}+2\sqrt{6x}+2x\sqrt{6}}{2\sqrt{x}}$. **07.** $\frac{2}{(x-1)^2}$.

08. $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$. **09.** $\frac{3t^2-6t-1}{(t-1)^2}$. **10.** $\frac{v^4+2v^3+5v^2-2}{(v^2+v+1)^2}$. **11.** $\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

12. $-\frac{4x}{3(x^2-1)^2}+1+2x-3x^2$. **13.** $\frac{2v^4(v^3-5)}{(v^3-2)^2}$. **14.** $-\frac{6x^2}{(x^3+1)^2}$. **15.** $\frac{6x^2}{(x^3-1)^2}$. **16.** $\frac{2v-1}{a^2-3}$.

17. $-\frac{3x^2}{\sqrt{\pi}}$. **18.** $\frac{2t+1}{(t^2+t+1)^2}$. **19.** $\frac{3-2t}{(t^2-3t+6)^2}$. **20.** $\frac{4x^3(2b^2-x^2)}{(b^2-x^2)^2}$. **21.** $\frac{1+2x+3x^2-2x^3-x^4}{(1+x^3)^2}$.

22. $\frac{6x(1+3x-5x^3)}{(1-x^2)^2(1-2x^3)^2}$. **23.** $\frac{a+2bx}{m(a+bm)}$. **24.** $-\frac{a^2b^2c^2[(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)+(x-a)(x-b)}{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}$.

25. $f'(0)=0$; $f'(1)=6$. **26.** $F'(0)=11$; $F'(1)=2$; $F'(2)=-1$. **27.** $F'(0)=-\frac{1}{4}$;

$F'(-1)=\frac{1}{2}$. **28.** $s'(0)=\frac{3}{25}$; $s'(2)=\frac{17}{15}$. **29.** $y'(1)=16$; $y'(a)=15a^2+\frac{2}{a^3}-1$. **30.** $\rho'(2)-\frac{5}{9}$

; $\rho'(0)=1$. **31.** $\varphi'(1)=-\frac{a+1}{4}$. **32.** $x'(0)=1$. **33.** 1) $4x^3-3x^2(a+b+c+$

$+d)+2x(ab+ac+ad+bc+db+cd)-(abc+abd+acd+bcd)$; 2) $8x(x^2+1)^3$;

3) $-20(1-x)^{19}$; 4) $60(1+2x)^{29}$; 5) $-20x(1-x^2)^9$; 6) $5(15x^2+2x)(5x^3+x^2-4)^4$

7) $6(3x^2-1)(x^3-x)^5$; 8) $6\left(14x+\frac{4}{x^2}\right)\left(7x^2-\frac{4}{x}+6\right)^5$; 9) $4\left(3t^2+\frac{3}{t^4}\right)\left(t^3-\frac{1}{t^3}+3\right)^3$;

10) $-\frac{4(x+1)}{(x-1)^3}$; 11) $\frac{5(x^2+2x-1)(1+x^2)^4}{(1+x)^6}$. 12) $24(x^2+x+1)\times(2x^3+3x^2+6x+1)^3$.

34. $\frac{(s+2)(s+4)}{(s+3)^2}$. **35.** $\frac{(3-t)t^2}{(1-t)^3}$. **36.** $\frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{x}\,(1+\sqrt{2x})^2}$. **37.** $-\frac{4}{3\sqrt[3]{4x^2}\,(1+\sqrt[3]{2x})^2}$. **38.** $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

39. $-\frac{4(1-2\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}$. **40.** $\frac{mv^{m-1}}{(1-v)^{m+1}}$. **41.** $-\frac{4(2x-1)}{(x^2-x+1)^3}$. **42.** $y=\frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$. **43.** $-\frac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^4}}$.

44. $\frac{2x^3+4x^7}{\sqrt{(1-x^4-x^8)^3}}$. **45.** $\frac{3-x}{2\sqrt{(1-x)^3}}$ **46.** $\frac{x(x^2+2a^2)}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$. **47.** $-\frac{v+\sqrt{a^2+v^2}}{a^2\sqrt{a^2+v^2}}$. **48.** $-\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^4}}-$

$-\frac{15x}{2\sqrt[4]{(x^2+2)^7}}$. **49.** $u'(1)=9$. **50.** $y'(2)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **51.** 0. **52.** $\cos x-\operatorname{sen} x$. **53.** $\frac{1-\cos x-x\operatorname{sen} x}{(1-\cos x)^2}$

54. $\frac{x-\operatorname{sen} x\cdot\cos x}{x^2\cos^2 x}$. **55.** $\varphi\cos\varphi$. **56.** $(\alpha\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha)\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}\right)$. **57.** $\frac{1}{1+\cos t}$.

58. $\frac{\operatorname{sen} x+\cos x+x(\operatorname{sen} x-\cos x)}{1+\operatorname{sen} 2x}$. **59.** $\frac{(1+\operatorname{tg} x)(\operatorname{sen} x+x\cos x)-x\operatorname{sen} x\sec^2 x}{(1+\operatorname{tg} x)^2}$. **60.** $-\operatorname{sen} 2x$.

61. $\operatorname{tg}^3 x\sec^2 x$. **62.** $-\operatorname{sen}^3 x$. **63.** $\frac{3}{2}\operatorname{sen} 2x(2-\operatorname{sen} x)$. **64.** $\operatorname{tg}^4 x$. **65.** $2x\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}$.

66. $-\frac{16\cos 2x}{\operatorname{sen}^3 2x}$. **67.** $3\cos 3x$ **68.** $-\frac{a}{3}\operatorname{sen}\frac{x}{3}$. **69.** $9\cos(3x+5)$. **70.** $\frac{1}{2\cos^2\frac{x+1}{2}}$.

71. $\frac{1}{\sqrt{1+2\operatorname{tg} x\cdot\cos^2 x}}$. **72.** $-\frac{\cos\frac{1}{x}}{x^2}$. **73.** $\cos(\operatorname{sen} x)\cdot\cos x$. **74.** $-12\cos^2 4x\operatorname{sen} 4x$.

75. $\frac{1}{4\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}}}$. **76.** $\frac{x\cos\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$. **77.** $-\frac{2x}{3\operatorname{sen}^2\sqrt[3]{1+x^2}\cdot\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}$. **78.** $4(1+\operatorname{sen}^2 x)^2\operatorname{sen} 2x$.

79. $\frac{x^2-1}{2x^2\cos^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\sqrt{1+\operatorname{tg}\left(x+\frac{1}{x}\right)}}$. **80.** $\frac{\operatorname{sen}\left(2\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\,(1+\sqrt{x})^2}$. **81.** $-3\operatorname{sen} 3x\operatorname{sen}(2\cos 3x)$.

83. $\operatorname{arcsen} x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. **84.** $\frac{\pi}{1(\arccos x)^2\sqrt{1-x^2}}$. **85.** $\frac{2\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}$. **86.** $\operatorname{arcsen} x$.

87. $-\frac{1}{(\operatorname{arcsen} x)^2\sqrt{1-x^2}}$. **88.** $\operatorname{sen} x\cdot\operatorname{arctg} x+x\cos x\cdot\operatorname{arctg} x+\frac{x\operatorname{sen} x}{1+x^2}$.

89. $-\frac{x+\arccos x\sqrt{1-x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}}$. **90.** $\frac{\operatorname{arctg} x}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$. **91.** 0. **92.** $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$. **93.** $-\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$.

94. $\frac{\sqrt{1-x^2}+x\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$. **95.** $\frac{2x}{\operatorname{arctg} x}-\frac{x^2}{(1+x^2)(\operatorname{arctg} x)^2}$. **96.** $\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$. **97.** $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+2x-2x^2}}$.

98. $\frac{2x}{1+x^4}$. **99.** $-\frac{2}{|x|\sqrt{x^2-4}}$. **100.** $\frac{\cos x}{|\cos x|}$. **101.** $-\frac{2\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{1+x^2}$. **102.** $\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-(\arccos x)^2}}$.

103. $-\frac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}$. **104.** $\frac{x+1}{8\sqrt[4]{(\operatorname{arcsen}\sqrt{x^2+2x})^3}\sqrt{(1-2x-x^2)(x^2+2x)}}$. **105.** $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1-\cos\alpha\cos x}$.

106. $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x}$. **107.** $\frac{1}{2(1+x^2)}$. **108.** $2x\log_3 x+\frac{x}{\ln 3}$. **109.** $\frac{2\ln x}{x}$. **110.** $\frac{\ln x+1}{\ln 10}$. **111.** $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$.

112. $\frac{x\ln x-x+1}{x\ln^2 x}$. **113.** $\operatorname{sen}x\ln x+x\cos x\ln x+\operatorname{sen}x$. **114.** $-\frac{1}{x\ln^2 x}$. **115.** $\frac{1-n\ln x}{x^{n+1}}$.

116. $-\frac{2}{x(1+\ln x)^2}$. **117.** $\frac{1+x^2-2x^2\ln x}{x(1+x^2)^2}$. **118.** $x^{n-1}(n\ln x+1)$. **119.** $\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$. **120.** $-\frac{2}{1-2x}$.

121. $\frac{2x-4}{x^2-4x}$. **122.** $\operatorname{ctg}x$. **123.** $\frac{2x}{(x^2-1)\ln 3}$. **124.** $\frac{2}{\operatorname{sen}2x}$. **125.** $-\frac{2}{\arccos 2x\sqrt{1-4x^2}}$.

126. $4\ln^3\operatorname{sen}x\cdot\operatorname{ctg}x$. **127.** $\frac{a}{(ax+b)[1+\ln^2(ax+b)]}$. **128.** $n(1+\ln\operatorname{sen}x)^{n-1}\operatorname{ctg}x$.

129. $\frac{1}{x\log_5 x\log_3(\log_5 x)\ln 2\ln 3\ln 5}$. **130.** $\frac{x}{\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}\,(2+x^2)\sqrt{1+x^2}}$. **131.** $\frac{6x^2\operatorname{arcsen}[\ln(a^3+x^3)]}{(a^3+x^3)\sqrt{1-\ln^2(a^3+x^3)}}$.

132. $\frac{\operatorname{ctg}\frac{x+3}{4}}{12\sqrt[3]{\ln^2\operatorname{sen}\frac{x+3}{4}}}$. **133.** $2^x\ln 2$. **134.** $10^x\ln 10$. **135.** $-\frac{\ln 3}{3^x}$. **136.** $4^{-x}(1-x\ln 4)$.

137. $10^x(1+x\ln 10)$. **138.** $e^x(1+x)$. **139.** $\frac{1-x}{e^x}$. **140.** $\frac{2^x(\ln 2-1)+3x^2-x^3}{a^x}$.

141. $e^x(\cos x-\operatorname{sen}x)$. **142.** $\frac{e^x}{\operatorname{sen}^2 x}(\operatorname{sen}x-\cos x)$. **143.** $-\frac{\operatorname{sen}x+\cos x}{e^x}$. **144.** $\frac{(\ln x-1)\ln 2}{\ln^2 x}2^{\frac{x}{\ln x}}$.

145. $3x^2-3^x\ln 3$. **146.** $\frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}$. **147.** $e^x(x^2+1)$. **148.** $\frac{2e^x}{(1-e^x)^2}$. **149.** $-\frac{2\cdot 10^x\ln 10}{(1+10^x)^2}$.

150. $\frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$. **151.** $e^x(\cos x+\operatorname{sen}x+2x\cos x)$. **152.** $-e^{-x}$. **153.** $2\cdot 10^{2x-3}\ln 10$.

154. $\frac{e^{\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x+1}}$. **155.** $2^x\ln 2\cdot\cos(2^x)$. **156.** $3^{\operatorname{sen}x}\cos x\cdot\ln 3$. **157.** $3\operatorname{sen}^2 x\cos x\cdot a^{\operatorname{sen}^3 x}\ln a$.

158. $\frac{2e^{\operatorname{arcsen}x}}{\sqrt{1-4x^2}}$. **159.** $2^{3x}\cdot 3^x\ln 2\cdot\ln 3$. **160.** $\frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}}$.

161. $\cos(e^{x^2+3x-2})e^{x^2+3x-2}(2x+3)$. **162.** $-12\cdot 10^{1-\operatorname{sen}^4 3x}\ln 10\cdot\operatorname{sen}^3 3x\cos 3x$.

163. $\frac{(2ax+b)e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}}{2(ax^2+bx+c)\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}$. **164.** $\frac{\operatorname{ctg}\sqrt[3]{\operatorname{arctg}(e^{3x})}\cdot e^{3x}}{(1+e^{6x})\sqrt[3]{[\operatorname{arctg}(e^{3x})]^2}}$. **165.** $-2ab^2xe^{-b^2x^2}$.

166. $\frac{2}{a^2}xe^{\frac{-x^2}{a^2}}(a^2-x^2)$. **167.** $Ae^{-k^2x}[\omega\cos(\omega x+\alpha)-k^2\operatorname{sen}(\omega x+\alpha)]$.

168. $a^x x^a\left(\frac{a}{x}+\ln a\right)$. **169.** $3\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch} x$. **170.** $\operatorname{th} x$. **171.** $\frac{1}{\operatorname{ch} 2x}$. **172.** $-\frac{2x}{\operatorname{ch}^2(1-x^2)}$.

173. $2\operatorname{sh} 2x$. **174.** $\operatorname{sh}(\operatorname{sh} x)\operatorname{ch} x$. **175.** $\frac{\operatorname{sh} x}{2\sqrt{\operatorname{ch} x}}$. **176.** $e^{\operatorname{ch}^2 x}\operatorname{sh} 2x$. **177.** $\frac{1}{x\operatorname{ch}^2(\ln x)}$. **178.** $x\operatorname{ch} x$.

179. $\frac{3\operatorname{th} x}{2\operatorname{ch}^2 x\sqrt[4]{1+\operatorname{th}^2 x}}$. **180.** $\frac{1}{4\operatorname{ch}^4\frac{x}{2}}$. **181.** $\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x}}$. **182.** $\frac{1}{1-\operatorname{sh}^4 x}$.

183. $\frac{x(4+\sqrt{x})\operatorname{sh} 2x+2(2x^2\sqrt{x}-1)\operatorname{ch} 2x}{2x^2}$. **184.** $\frac{xe^{3x}}{\operatorname{sh}^2 x}[(3x+2)\operatorname{sh} x-x\operatorname{ch} x]$.

185. $x^{x^2+1}(2\ln x+1)$. **186.** $x^{x^x\cdot x^x}\left(\ln^2 x+\ln x+\frac{1}{x}\right)$.

187. $(\operatorname{sen} x)^{\cos x}\left(\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}-\operatorname{sen} x\ln\operatorname{sen} x\right)$. **188.** $(\ln x)^x\left(\frac{1}{\ln x}+\ln\ln x\right)$.

189. $2\sqrt[x]{(x+1)^2}\left[\frac{1}{x(x+1)}-\frac{\ln(x+1)}{x^2}\right]$. **190.** $x^2e^{x^2}\operatorname{sen} 2x(3+2x^2+2x\operatorname{ctg} 2x)$.

191. $-\frac{2(x-2)(x^2+11x+1)}{3(x-5)^4\sqrt[3]{(x+1)^3}}$. **192.** $2x^{\ln x-1}\ln x$. **193.** $\frac{57x^2-302x+361}{20(x-2)(x-3)}\cdot\frac{(x+1)^2\sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$.

194. $\frac{1}{2}\sqrt{x\operatorname{sen} x\sqrt{1-e^x}}\left(\frac{1}{x}+\operatorname{ctg} x-\frac{1}{2}\cdot\frac{e^x}{1-e^x}\right)$. **195.** $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,[(\operatorname{arcsen} x)^2-1]}\sqrt{\frac{1-\operatorname{arcsen} x}{1+\operatorname{arcsen} x}}$.

196. $x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$. **197.** $x^{\operatorname{sen} x}\left(\cos x\ln x+\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)$. **198.** $\left(\frac{x}{x+1}\right)^x\left(\frac{1}{x+1}+\ln\frac{1}{x+1}\right)$.

199. $x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}(2+\ln x)$. **200.** $(x^2+1)^{\operatorname{sen} x}\left[\frac{2x\operatorname{sen} x}{x^2+1}+\cos x\ln(x^2+1)\right]$.

201. $\frac{x^4+6x^2+1}{3x(1-x^4)}\sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$. **202.** $\frac{(1+\sqrt[3]{x})^2}{\sqrt[3]{x^2}}$. **203.** $\frac{a}{k\cos^2\left(\frac{x}{k}+b\right)}$. **204.** $\frac{p}{2\sqrt{1+\sqrt{2px}}\sqrt{2px}}$.

205. $\frac{2x-3}{1+(x^2-3x+2)^2}$. **206.** $\frac{1+\operatorname{sen} x}{(x-\cos x)\ln 10}$. **207.** $\frac{3}{2}\operatorname{sen} 2x(\cos x-2)$. **208.** $\sec^2\frac{x}{5}$.

209. $-\frac{1+2\sqrt{x}}{6\sqrt{x}\sqrt[3]{(x+\sqrt{x})^4}}$. **210.** $2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\operatorname{sen} 2x$. **211.** $e^{\cos x}(\cos x-\operatorname{sen}^2 x)$.

212. $\frac{x^4(7x^6-40)}{\sqrt[3]{(x^6-8)^2}}$. **213.** $e^{-x^2}\left(\frac{1}{x}-2x\ln x\right)$. **214.** $\frac{5(x-1)}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^9$. **215.** $-\frac{1}{1+x^2}$.

216. $2x^2e^{2x+3}$. **217.** $\frac{2\operatorname{sen} 2x}{\cos^2 2x}$. **218.** $\frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}$. **219.** $-\frac{2(x\cos x+\operatorname{sen} x)}{x^2\operatorname{sen}^2 x}$.

220. $\frac{1}{3}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\frac{2x}{3}-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\frac{x}{3}\operatorname{cosec}^2\frac{x}{2}$. **221.** $-\frac{4(31x^5+18)}{27x^5\sqrt[9]{(4x^5+2)^8}}$. **222.** $\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

223. $\operatorname{arctg}\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$. **224.** $\frac{\operatorname{tg} x(1+2\operatorname{tg}^2 x)}{\cos^2 x\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x}}$. **225.** $\frac{\cos 2x}{x}-2\operatorname{sen} 2x\ln x$. **226.** $\frac{1+x^4}{1+x^6}$.

227. $\frac{n\cos x}{\sqrt{1-n^2\operatorname{sen}^2 x}}$. **228.** $\frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x-\operatorname{sen}^2 x}}$. **229.** $\operatorname{sen}^5 3x\cos^3 3x$. **230.** $\frac{x\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{1-x^2}}$.

231. $-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{\operatorname{arcsen} x}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. **232.** $\frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$. **233.** $\frac{3}{2\sqrt{3x-9x^2}}$.

234. $\frac{\ln x-2}{x^2}\operatorname{sen}\left[2\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)\right]$. **235.** $\frac{2x-\cos x}{(x^2-\operatorname{sen} x)\ln 3}$. **236.** $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$. **237.** $-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}\,(x+\sqrt{1-x^2})}$.

238. $\operatorname{arcsen}(\ln x)+\frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}$. **239.** $-\frac{2e^x}{(1+e^x)^2}\sec^2\left(\frac{1-e^x}{1+e^x}\right)$. **240.** $-\frac{2\operatorname{sen}^3 x}{\sqrt{1+\operatorname{sen}^2 x}}$.

241. $-0{,}8\left(\cos\frac{2x+1}{2}-\operatorname{sen} 0{,}8x\right)\left(\operatorname{sen}\frac{2x+1}{2}+0{,}8\cos 0{,}8x\right)$. **242.** $10^{\sqrt{x}}\left(1+\frac{\sqrt{x}}{2}\ln 10\right)$.

243. $-\frac{4}{\operatorname{tg} 2x\operatorname{sen}^2 2x}$. **244.** $-\frac{1}{(x^2+2x+2)\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x}}$. **245.** $-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$. **246.** $\frac{x+2}{2\sqrt{x+3}\sqrt[3]{(1+x\sqrt{x+3})^2}}$.

247. $\frac{x(8+9\sqrt{x})}{4\sqrt{1+\sqrt{x}}}$. **248.** $-\frac{\operatorname{sen} 2x}{2\sqrt{(1+\operatorname{sen}^2 x)^3}}$. **249.** $3x^2\operatorname{arctg} x^3+\frac{3x^5}{1+x^6}$. **250.** $\frac{\operatorname{ctg} x\ln\cos x+\operatorname{tg} x\ln\operatorname{sen} x}{\ln^2\cos x}$.

251. $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. **252.** $\frac{4}{(1-4x)^2}\left(\sqrt{\frac{1-4x}{1+4x}}+\operatorname{arcsen} 4x\right)$. **253.** $-\frac{e^{\frac{1}{\ln x}}}{x\ln^2 x}$. **254.** $\frac{1}{e^x-1}$.

255. $10^{x\operatorname{tg} x}\ln 10\left(\operatorname{tg} x+\frac{x}{\cos^2 x}\right)$. **256.** $2\operatorname{sen} x(x\operatorname{sen} x\cos x^2+\cos x\operatorname{sen} x^2)$.

257. $\frac{2\operatorname{sen} x}{\cos 2x\sqrt{\cos 2x}}$. **258.** $\frac{2-3x-x^3}{2(1-x)(1+x^2)}\sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$. **259.** $\frac{x^2}{1-x^4}$. **260.** $2^{\frac{x}{\ln x}}\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}\ln 2$. **261.** $\sqrt{\frac{a-x}{x-b}}$

. **262.** $-\frac{2(2\cos^2 x+1)}{\operatorname{sen}^2 2x}$. **263.** $-\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$. **264.** $\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$. **265.** $\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$. **266.** $-\cos 2x$.

267. $\frac{x^2}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$. **268.** $(a^2+1)\operatorname{sen} x e^{ax}$. **269.** $e^{1-\cos x}(1+x\operatorname{sen} x)$. **270.** $\frac{2e^{-2x}}{(1+e^{-4x})(\operatorname{arctg} e^{-2x})^2}$

. **271.** $10e^x sen 3x$. **272.** $9x^2\operatorname{arcsen} x$ **273.** $\frac{e^{-\sqrt{x}}}{4\sqrt{x}\sqrt{(1+e^{-\sqrt{x}})^3}}$. **274.** $\frac{x}{\sqrt{2+4x-x^2}}$.

275. $\frac{(\cos x-\operatorname{sen} x)(e^x+e^{-x})}{e^x\cos x+e^{-x}\operatorname{sen} x}$. **276.** $\frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$. **277.** $\frac{\operatorname{sen}(x-\cos x)(1+\operatorname{sen} x)}{\cos^2(x-\cos x)}$.

278. $e^x\operatorname{sen} x\cos^3 x(1+\operatorname{ctg} x-3\operatorname{tg} x)$. **279.** $\frac{54\sqrt[5]{x^4}}{55\sqrt[11]{(9+6\sqrt[5]{x^9})^{10}}}$. **280.** $\frac{1}{\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}}$.

281. $\frac{e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\ln(2x+3)}}}{(2x+3)[2+\ln(2x+3)]\sqrt{1+\ln(2x+3)}}$. **282.** $\frac{e^{x^2}}{(e^x+e^{-x})^2}[2x(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})]$.

283. $\frac{\ln(1+\operatorname{sen} x)}{\operatorname{sen}^2 x}$. **284.** $\frac{40}{2x-3\sqrt{1-4x^2}}$. **285.** $\frac{x^5+1}{x^4(x^2+1)}$. **286.** $\frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.

287. $\frac{1}{x}-\frac{x}{1-x^2}+\operatorname{ctg}x$. **288.** $\frac{(1+2x^2)\operatorname{sen}x+x(1+x^2)\cos x}{\sqrt{1+x^2}}$. **289.** $\frac{(x^2-32x-73)(3-x)^3}{2(x+1)^6\sqrt{x+2}}$.

290. $\frac{3e^{\sqrt{x}}(2+\sqrt{x})}{10\sqrt[5]{(1+xe^{\sqrt{x}})^2}}$. **291.** $\left(2x-\frac{1}{1+x^2}\right)\frac{e^{x^2-\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln x+1}}{\sqrt{x}}$. **292.** $\frac{1}{\cos^5 x}$.

293. $\frac{e^x\operatorname{arctg}x}{\ln^5 x}\left[1+x+\frac{x}{(1+x^2)\operatorname{arctg}x}-\frac{5}{\ln x}\right]$.

294. $\frac{(1-x^2)e^{3x-1}\cos x}{(\arccos x)^3}\left[\frac{3-2x-3x^2}{1-x^2}-\operatorname{tg}x+\frac{3}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}\right]$. **295.** $4\sqrt{(x^2+a^2)^3}$.

296. $(\operatorname{arcsen}x)^2$. **297.** $\frac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x}$. **298.** $\frac{1}{ae^{mx}+be^{-mx}}$. **299.** $\frac{1}{x^3+1}$. **300.** $\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

301. $(\operatorname{tg}2x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}\left(\frac{4\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{\operatorname{sen}4x}-\frac{\ln\operatorname{tg}2x}{2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}\right)$. **302.** $\frac{3x^2+10x+20}{15(x^2+4)\sqrt[3]{(x-5)^2}\sqrt[5]{x^2+4}}$. **303.** $\frac{1}{x^4+x^2+1}$.

304. $-\frac{2nx^{n-1}}{x^{2n}+1}$, si n es un número par, y $-\frac{2nx^n}{|x|(x^{2n}+1)}$, si n es un número impar.

305. $\frac{24x^3}{(1+8x^3)^2}$. **309.** a) $\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$; b) $\frac{2-n(n+1)x^{n-1}+2(n^2-1)x^n-n(n-1)x^{n+1}}{(1-x)^3}$. [Indicación: aplicar el valor de la suma $x+x^2+\ldots+x^n$. **311.** $\sqrt{1-y^2}\,e^{\operatorname{arcsen}y}$ y $\frac{\cos\ln x}{x}$.

312. $\frac{1}{3(s^2-1)}$. **314** $\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$. **315.** $\alpha'(x)=\frac{1}{x[1+\ln\alpha(x)]}$. **316.** $(\operatorname{Arsh}x)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

$(\operatorname{Arch}x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; $(\operatorname{Arth}x)'=\frac{1}{1-x^2}$. **317.** $\frac{e^t}{1-t}$. **318.** $\frac{-(1+x^4)^2}{8x^3}$; $-\frac{1}{2\sqrt[4]{(1-y)^3(1+y)^5}}$.

319. $\frac{1}{3y^2-4}$. **320.** $\frac{1}{2^s\ln 2}\sqrt{1-2^{2s}}$, $\frac{1}{\ln 2}\operatorname{ctg}t$. **324.** $\sqrt{2}$. **325.** $-\frac{1}{a}$. **326.** $-\frac{1}{4}$. **327.** $-\frac{b^2x}{a^2y}$.

328. $\sqrt{\frac{y}{x}}$. **329.** $\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$. **330.** $\frac{3a^2\cos 3x+y^2\operatorname{sen}x}{2y\cos x}$. **331.** $\frac{2a}{3(1-y^2)}$. **332.** $\frac{y}{y-x}$. **333.** $-\frac{x}{y}\cdot\frac{y^2-2x^2}{2y^2-x^2}$

334. $-\frac{3x^2+2axy+by^2}{ax^2+2bxy+3y^2}$. **335.** $-\frac{y\cos^2(x+y)(\cos(xy)-\operatorname{sen}(xy))-1}{x\cos^2(x+y)(\cos(xy)-\operatorname{sen}(xy))-1}$. **336.** $2^{x-y}\frac{2^y-1}{1-2^x}$.

337. $\frac{1}{2(1+\ln y)}$. **338.** $\frac{\sqrt{1-y^2}(1-\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}(1-\sqrt{1-y^2})}$. **339.** $\frac{y^2-xy\ln y}{x^2-xy\ln x}$. **340.** $-\frac{\operatorname{sen}(x+y)}{1+\operatorname{sen}(x+y)}$.

341. $-\frac{1+y\operatorname{sen}(xy)}{x\operatorname{sen}(xy)}$. **342.** $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. **343.** $\frac{e^y}{2-y}$. **344.** $\frac{\operatorname{sen}y}{2\operatorname{sen}2y-\operatorname{sen}y-x\cos y}$. **345.** $\frac{\sqrt{1-k^2}}{1+k\cos x}$.

346. $\frac{y\cos x+\operatorname{sen}(x-y)}{\operatorname{sen}(x-y)-\operatorname{sen}x}$. **347.** $\frac{1+y^2}{y^2}$. **349.** (2,4). **351.** $y+4x+4=0$; $8y-2x+15=0$; la subtangente es igual a 1/2; la subnormal es igual a -8. **354.** a) $t_1=0$, $t_2=8$; b) $t_1=0$, $t_2=4$, $t_3=8$. **355.** $181{,}5\cdot10^3$ erg. **356.** $\omega=13\frac{\text{rd}}{\text{s}}$. **357.** $\omega=2\pi\frac{\text{rd}}{\text{s}}$. **358.** $\omega=(2at-b)\frac{\text{rd}}{\text{s}}$; la velocidad se reduce a cero cuando $t=\frac{b}{2a}$s. **359.** 23*A*. **360.** (0,0); (2,0). **362.** (1,0); (–1;–4). **363.** $y=2x-2$; $y=2x+2$. **364.** $3x+y+6=0$. **365.** La tangente es $y-y_0=(x-x_0)\cos x_0$; la normal es $y-y_0=-(x-x_0)\sec x_0$. **366.** La tangente es $x_0(y-y_0)=x-x_0$; la normal es $(y-y_0)+x_0(x-x_0)=0$. **367.** La tangente es $x+2y=4a$; la normal es $y=2x-3a$. **368.** La tangente es $y-y_0=\frac{x_0^2(3a-x_0)}{y_0(2a-x_0)}(x-x_0)$; la normal es $y-y_0=-\frac{y_0(2a-x_0)^2}{x_0^2(3a-x_0)}(x-x_0)$. **370.** Las subtangentes son iguales a $-3x^5$; $-3x^2/2$ y $1/2x^2$, respectivamente. **371.** $y=\frac{x_0}{2a}\left(x-\frac{x_0}{2}\right)$; $y-y_0=\frac{2a}{x_0}(x-x_0)$.

372. $2x-y+1=0$. **373.** $27x-3y-79=0$. **374.** $2x-y-1=0$. **375.** $4x-4y-21=0$. **377.** 3,75. **379.** $x+25y=0$; $x+y=0$. **380.** (0,1). **381.** $y=x$. **383.** $x-y-3e^{-2}=0$. **384.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$. **385.** $\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}};1\right)$. **392.** $2x-y\pm1=0$. **393.** Si $y=f(x)$ es la ecuación de la curva dada, la ecuación del lugar geométrico buscado es $y=xf'(x)$. a) La parábola $y^2=\frac{1}{2}px$; b) la recta paralela al eje *OX* $y=\frac{1}{\ln b}$; c) la curva "kappa" $y\sqrt{a^2-x^2}+x^2=0$; d) la circunferencia $x^2+y^2=a$. **394.** 1) $\varphi_1=0$, $\varphi_2=\operatorname{arctg}\frac{18}{31}$; 2) $\operatorname{arctg}\frac{8}{15}$. **395.** 1) $\operatorname{arctg}3$, 2) 45°. **396.** 90°. **397.** 45° y 90°. **398.** arctg 3. **399.** $\operatorname{arctg}(2\sqrt{2})$. **400.** Cuando *n* es impar la tangente es $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$, la normal es $ax-by=a^2-b^2$. Cuando *n* es par las tangentes son $\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=2$, las normales son $ax\pm by=a^2-b^2$.

Esta obra
se terminó de imprimir en los
talleres gráficos de:
Distribuidora - Imprenta - Editorial - Librería
MOSHERA S.R.L.
en el mes de Marzo del 2014
con un tiraje de 500 ejemplares
Lima - Perú

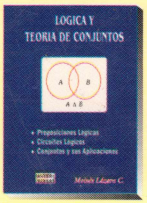


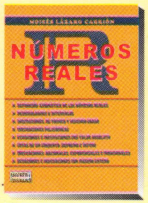
Distribuidora, Imprenta, Editorial, Librería
MOSHERA S.R.L.
e-mail: editorialmoshera@hotmail.com
Jr. Tacna 2975 - Lima 31
Telefax: 567-9299

COLECCIÓN MOSHERA

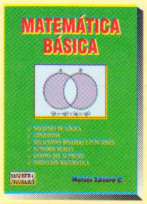
UNIVERSITARIOS

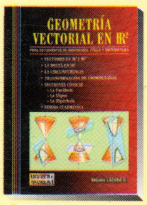


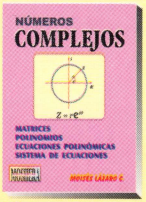


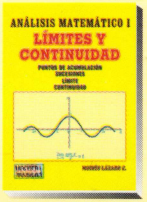


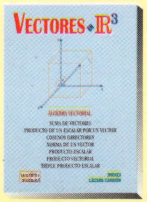




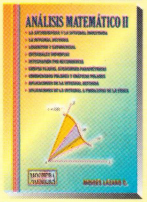




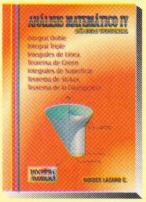




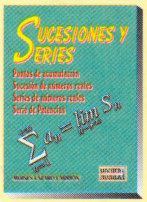


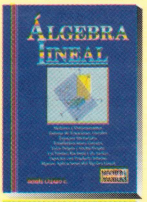


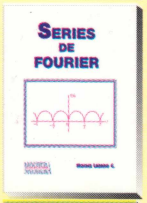










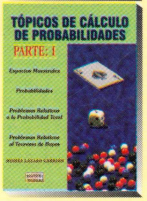


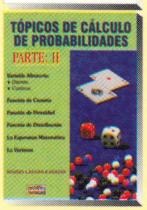






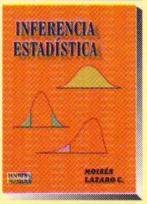


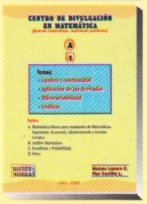




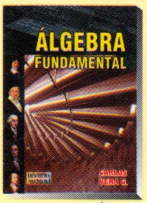


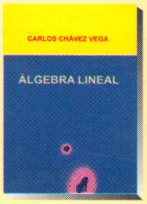


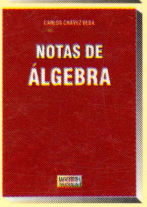


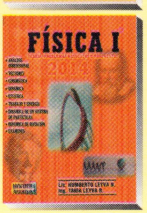


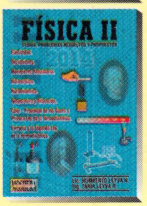














FL
FreeLibros

PEDIDOS AL POR MAYOR
Telefax: 567-9299
e-mail: editorialmoshera@hotmail.com

ISBN: 978-9972-813-81-8