RON LARSON

FUNDAMENTOS DE ÁLGEBRA LINEAL

SÉPTIMA EDICIÓN

Fundamentos de álgebra lineal

Fundamentos de álgebra lineal

Séptima edición

Ron Larson
The Pennsylvania State University
The Behrend College

Traducción
Oliver Davidson Véjar
Traductor profesional

Revisión técnica
Dr. Edmundo Palacios Pastrana
Universidad Iberoamericana

CENGAGE Learning®

Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur

CENGAGE Learning

Fundamentos de álgebra lineal
Séptima edición
Ron Larson

Presidente de Cengage Learning Latinoamérica:
Fernando Valenzuela Migoya

Director Editorial, de Producción y de Plataformas Digitales para Latinoamérica:
Ricardo H. Rodríguez

Editora de Adquisiciones para Latinoamérica:
Claudia C. Garay Castro

Gerente de Manufactura para Latinoamérica:
Raúl D. Zendejas Espejel

Gerente Editorial en Español para Latinoamérica:
Pilar Hernández Santamarina

Gerente de Proyectos Especiales:
Luciana Rabuffetti

Coordinador de Manufactura:
Rafael Pérez González

Editor:
Omegar Martínez

Diseño de portada:
Studio Dos www.studio2.com.mx

Imagen de portada:
Dreamstime.com

Composición tipográfica:
José Jaime Gutiérrez Aceves

Traducido del libro: *Elementary linear algebra*
Seventh Edition
Publicado en inglés por Cengage Learning
© 2013 ISBN: 978-1-133-11087-3

Datos para catalogación bibliográfica:
Larson, Ron
Fundamentos de álgebra lineal, séptima edición
ISBN: 978-607-519-804-0

Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com

Impreso en México
1 2 3 4 5 6 7 17 16 15 14

Contenido

Prefacio

Bienvenidos a la séptima edición de *Fundamentos de álgebra lineal*. Mi objetivo principal es presentar los principales conceptos del álgebra lineal de forma clara y concisa. Para ello, he seleccionado cuidadosamente los ejemplos y ejercicios para equilibrar la teoría con las aplicaciones y la intuición geométrica. El orden y la cobertura de los temas fueron elegidos para alcanzar niveles máximos de eficiencia, eficacia y equilibrio. El nuevo diseño está complementado con una multitud de características y aplicaciones que se encuentran a lo largo del volumen.

Novedades de esta séptima edición

- Aperturas de capítulo: Cada apertura de capítulo resalta cinco aplicaciones del álgebra lineal que se encuentran en el capítulo en la vida diaria. Muchas de estas aplicaciones resaltan las nuevas Aplicaciones de álgebra lineal.
- Aplicaciones de álgebra lineal: describe una aplicación, en la vida diaria, de los conceptos discutidos en la sección. Estas aplicaciones incluyen conceptos de biología y ciencias naturales, economía y negocios, ingeniería y tecnología, ciencias aplicadas y estadística y probabilidad.
- Ejercicios clave: En cada capítulo hay un problema o ejercicio que considero clave para comprender los conceptos presentados.
- Series de problemas: Las series de ejercicios y problemas han sido cuidadosa y extensivamente examinadas para asegurar que son rigurosas, relevantes y que cubren todos los temas sugeridos por nuestros usuarios. Los problemas se han reorganizado para que se puedan ver fácilmente las conexiones entre los ejemplos y los ejercicios. Muchos de los nuevos problemas implican desarrollo de habilidades y son desafiantes. Al igual que en ediciones anteriores, se incluyen los siguientes tipos de ejercicios probados pedagógicamente:
  - Verdadero o falso. Estos ejercicios piden a los estudiantes que den ejemplos o justificaciones para apoyar sus conclusiones.
  - Prueba de conceptos
  - Las pruebas guiadas conducen estudiante a través de los pasos iniciales de la construcción de pruebas y luego a la utilización de los resultados.
  - Ejercicios de escritura
  - Ejercicios con tecnología que se indican en el texto con .
  - Ejercicios que utilizan conjuntos de datos electrónicos y que se indican mediante . Estos se pueden encontrar en CengageBrain previa solicitud al editor por parte del instructor.

Advertencia sobre respuestas a problemas seleccionados

Las respuestas a los problemas seleccionados (problemas con número impar al final de cada capítulo) se pueden encontrar en el sitio www.CalcChat.com

Este sitio sólo está disponible en inglés y no es administrado por Cengage Learning Latinoamerica, por lo que ésta no es responsable de los cambios y actualizaciones del mismo.

Material de apoyo para el profesor

Este libro cuenta, además de con tres capítulos adicionales en CengageBrain, con una serie de recursos para el profesor, los cuales están disponibles únicamente en inglés y sólo se proporcionan a los docentes que lo adopten como texto en sus cursos. Para mayor información, póngase en contacto con el área de servicio al cliente en las siguientes direcciones de correo electrónico:

• Cengage Learning México y Centroamérica	clientes.mexicoca@cengage.com
• Cengage Learning Caribe	clientes.caribe@cengage.com
• Cengage Learning Cono Sur	clientes.conosur@cengage.com
• Cengage Learning Pacto Andino	clientes.pactoandino@cengage.com

Al igual que los recursos impresos adicionales, las direcciones de los sitios web señaladas a lo largo del texto, y que se incluyen a modo de referencia, no son administradas por Cengage Learning Latinoamerica, por lo que ésta no es responsable de los cambios y actualizaciones de las mismas.

Agradecimientos

Me gustaría agradecer a todas las personas que me han ayudado durante las diversas etapas de la escritura de esta nueva edición. En particular, agradezco los esfuerzos de los siguientes colegas que hicieron muchas sugerencias útiles en el camino:

Michael Brown, *San Diego Mesa College*

Nasser Dastrange, *Buena Vista University*

Mike Daven, *Mount Saint Mary College*

David Hemmer, *University of Buffalo, SUNY*

Wai Lau, *Seattle Pacific University*

Jorge Sarmiento, *County College of Morris*

Me gustaría agradecer particularmente a Bruce H. Edwards, *University of Florida*, y a David C. Falvo, *The Pennsylvania State University, The Behrend College*, por sus contribuciones a las ediciones anteriores de *Fundamentos de algebra lineal*.

A nivel personal, estoy profundamente agradecido con mi esposa, Deanna Gilbert Larson, por su amor, paciencia y apoyo. También, quisiera enviarle un reconocimiento especial a R. Scott O'Neil.

Dr. Ron Larson
Profesor de Matemáticas
Penn State University
www.RonLarson.com

1 Sistemas de ecuaciones lineales

Flujo vehicular (p. 28)

Análisis de redes eléctricas (p. 30)

Sistema de posicionamiento global (p. 16)

Velocidad del vuelo de un avión (p. 11)

Balance de ecuaciones químicas (p. 4)

En sentido de las manecillas del reloj, desde arriba a la izquierda: Rafal Olkis/www.shutterstock.com; michaeljung/www.shutterstock.com; Fernando Jose Vasconcelos Soares/www.shutterstock.com; Alexander Raths/Shutterstock.Com; edobric/www.shutterstock.com

1.1 Introducción a los sistemas de ecuaciones lineales

- Reconocer sistemas de ecuaciones lineales de *n* variables.
- Encontrar una representación paramétrica de un conjunto solución.
- Determinar cuándo un sistema de ecuaciones lineales es consistente o inconsistente.
- Utilizar la sustitución hacia atrás para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

ECUACIONES LINEALES EN *n* VARIABLES

El estudio del álgebra lineal requiere que el estudiante esté familiarizado con álgebra, geometría analítica y trigonometría. Ocasionalmente encontrará ejemplos y ejercicios que requieran conocimientos de cálculo; estos se señalan claramente en el texto.

Al comenzar con el estudio del álgebra lineal, descubrirá que muchos de los métodos implican docenas de pasos aritméticos, así que es esencial revisar constantemente su trabajo. Puede utilizar una computadora o calculadora para revisar su trabajo, así como para ejecutar muchos de los cálculos de rutina en el álgebra lineal.

Aunque algún material de este primer capítulo le resultará familiar, es recomendable que estudie cuidadosamente los métodos presentados aquí. Así, cultivará y aclarará su intuición para el material más abstracto que se presentará después.

Recuerde de su curso de geometría analítica que la ecuación de la recta en un espacio de dos dimensiones, tiene la forma

$$a_1x + a_2y = b, \quad a_1, a_2 \text{ y } b \text{ son constantes.}$$

Esta es una **ecuación lineal en dos variables** x y y. De la misma manera, la ecuación de un plano en un espacio de tres dimensiones tiene la forma

$$a_1x + a_2y + a_3z = b, \quad a_1, a_2, a_3 \text{ y } b \text{ son constantes.}$$

Esta ecuación se denomina **ecuación lineal en tres variables** x, y y z. En general, una ecuación lineal en n variables se define de la siguiente manera.

COMENTARIO

Para representar constantes se utilizan las primeras letras del alfabeto y las variables se representan con las últimas letras de éste.

Definición de una ecuación lineal en *n* variables

Una **ecuación lineal en *n* variables** $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ tiene la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdot \cdot \cdot + a_nx_n = b.$$

Los **coeficientes** $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ son números reales y el **término constante** b es un número real. El número a_1 es el **coeficiente principal** y x_1 es la **variable principal**.

Las ecuaciones lineales no tienen productos o raíces de variables; tampoco variables que aparezcan en funciones trigonométricas, exponenciales o logarítmicas. Las variables aparecen elevadas sólo a la primera potencia. El ejemplo 1 lista algunas ecuaciones lineales y algunas que no lo son.

EJEMPLO 1 **Ejemplos de ecuaciones lineales y no lineales**

Cada ecuación es lineal.

a) $3x + 2y = 7$ **b)** $\frac{1}{2}x + y - \pi z = \sqrt{2}$ **c)** $(\text{sen}\,\pi)x_1 - 4x_2 = e^2$

Las siguientes ecuaciones no son lineales.

a) $xy + z = 2$ **b)** $e^x - 2y = 4$ **c)** $\text{sen}\,x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$

SOLUCIONES Y CONJUNTOS SOLUCIÓN

Una **solución** de una ecuación lineal en n variables es una sucesión de n números reales $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$ ordenados de modo que la ecuación se cumple cuando los valores

$$x_1 = s_1, \quad x_2 = s_2, \quad x_3 = s_3, \quad \ldots, \quad x_n = s_n$$

se sustituyen en ésta. Por ejemplo, la ecuación $x_1 + 2x_2 = 4$. Se cumple cuando $x_1 = 2$ y $x_2 = 1$. Otras soluciones son $x_1 = -4$ y $x_2 = 4$, y también $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$, y $x_1 = -2$ y $x_2 = 3$.

El conjunto de *todas* las soluciones de la ecuación lineal se denomina **conjunto solución** y cuando se determina este conjunto, se dice que se ha resuelto la ecuación. Para describir todo el conjunto solución de una ecuación lineal, a menudo se utiliza la **representación paramétrica**, como se ilustra en los ejemplos 2 y 3.

EJEMPLO 2 Representación paramétrica de un conjunto solución

Resuelva la ecuación lineal $x_1 + 2x_2 = 4$.

SOLUCIÓN

Para determinar el conjunto solución de una ecuación en dos variables, resolvemos para una de las variables en términos de la otra. Si usted resuelve para x_1 en términos de x_2, obtiene

$$x_1 = 4 - 2x_2.$$

De esta manera, la variable x_2 es **libre**, lo cual significa que puede tomar cualquier valor real. La variable x_1 no es libre, ya que su valor dependerá del valor asignado a x_2. Para representar un número infinito de soluciones de esta ecuación es conveniente introducir una tercera variable t denominada **parámetro**. Así, con $x_2 = t$, se puede representar el conjunto solución como

$$x_1 = 4 - 2t,\ x_2 = t, \quad t \text{ es cualquier número real.}$$

Se pueden obtener soluciones particulares al asignar valores al parámetro t. Por ejemplo, $t = 1$ produce la solución $x_1 = 2$ y $x_2 = 1$ y $t = 4$ genera la solución $x_1 = -4$ y $x_2 = 4$.

El conjunto solución de una ecuación lineal puede representarse paramétricamente en más de una forma. En el ejemplo 2 usted pudo haber elegido x_1 como la variable libre. La representación paramétrica del conjunto solución habría entonces tomado la forma

$$x_1 = s, \quad x_2 = 2 - \tfrac{1}{2}s, \quad s \text{ es cualquier número real.}$$

Por conveniencia, elegiremos como variables libres aquellas que aparecen al final en la ecuación.

EJEMPLO 3 Representación paramétrica de un conjunto solución

Resuelva la ecuación lineal $3x + 2y - z = 3$.

SOLUCIÓN

Al elegir y y z como variables libres, empecemos a resolver para x para obtener

$$\begin{aligned} 3x &= 3 - 2y + z \\ x &= 1 - \tfrac{2}{3}y + \tfrac{1}{3}z. \end{aligned}$$

Haciendo $y = s$ y $z = t$, obtenemos la representación paramétrica

$$x = 1 - \tfrac{2}{3}s + \tfrac{1}{3}t, \quad y = s, \quad z = t$$

donde s y t son cualquier número real. Dos soluciones particulares son

$$x = 1, y = 0, z = 0 \quad \text{y} \quad x = 1, y = 1, z = 2.$$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Un **sistema de *m* ecuaciones lineales en *n* variables** es un conjunto de m ecuaciones, cada una de las cuales es lineal en las mismas n variables:

COMENTARIO

La notación con doble subíndice indica que a_{ij} es el coeficiente de x_j en la i-ésima ecuación.

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2\\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3\\
&\ \vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m.
\end{aligned}$$

La **solución** de un sistema de ecuaciones lineales es una sucesión de números s_1, s_2, $s_3, \ldots, s_n$ que es solución de cada una de las ecuaciones lineales del sistema. Por ejemplo, el sistema

$$\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 &= 3\\
-x_1 + x_2 &= 4
\end{aligned}$$

tiene a $x_1 = -1$ y $x_2 = 3$ como una solución debido a que *ambas* ecuaciones se cumplen cuando $x_1 = -1$ y $x_2 = 3$. Por otra parte, $x_1 = 1$ y $x_2 = 0$ no es una solución del sistema, ya que estos valores sólo satisfacen la primera ecuación.

DESCUBRIMIENTO

1. Grafique las dos rectas

$$\begin{aligned}
3x - y &= 1\\
2x - y &= 0
\end{aligned}$$

en el plano x-y. ¿En dónde se intersectan? ?Cuántas soluciones tiene este sistema de ecuaciones?

2. Repita este análisis para el par de rectas

$$\begin{aligned}
3x - y &= 1\\
3x - y &= 0
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
3x - y &= 1\\
6x - 2y &= 2.
\end{aligned}$$

3. En general, ?qué tipos básicos de conjunto solución son posibles para un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas?

ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

En una reacción química, los átomos se reorganizan en una o más sustancias. Por ejemplo, cuando el metano (CH_4) se combina con oxígeno (O_2) y se quema, se forman dióxido de carbono (CO_2) y agua (H_2O). Los químicos representan este proceso con una ecuación química de la forma

$$(x_1)CH_4 + (x_2)O_2 \rightarrow (x_3)CO_2 + (x_4)H_2O.$$

Puesto que una reacción química no puede crear o destruir átomos, todos los átomos representados a la izquierda de la flecha deben ser considerados también a la derecha. Esto se llama *balance* de la ecuación química. En el ejemplo dado, los químicos pueden usar un sistema de ecuaciones lineales para encontrar los valores de x_1, x_2, x_3 y x_4 que balanceen la ecuación química.

Elnur/www.shutterstock.com

Puede suceder que un sistema de ecuaciones lineales tenga exactamente una solución, un número infinito de soluciones o ninguna solución. Un sistema de ecuaciones lineales se denomina **consistente** si tiene por lo menos una solución e **inconsistente** si no tiene solución.

EJEMPLO 4 Sistemas de dos ecuaciones en dos variables

Resuelva y grafique cada sistema de ecuaciones lineales.

a) $\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x - y &= -1 \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 2x + 2y &= 6 \end{aligned}$ **c)** $\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + y &= 1 \end{aligned}$

SOLUCIÓN

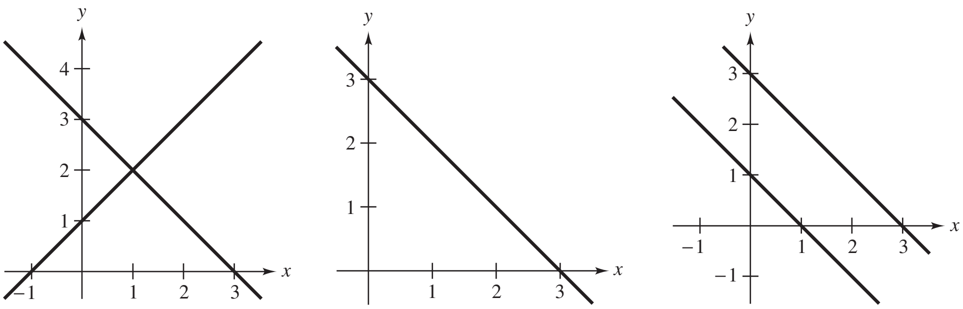
a) Este sistema tiene exactamente una solución, $x = 1$ y $y = 2$. Esta solución puede alcanzarse al sumar las dos ecuaciones para obtener $2x = 2$, lo cual implica que $x = 1$ y por tanto, $y = 2$. La gráfica de este sistema se representa mediante dos rectas que se *intersectan*, como se muestra en la Figura 1.1 (a).

b) Este sistema cuenta con un número infinito de soluciones, ya que la segunda solución es el resultado de multiplicar por 2 ambos miembros de la primera ecuación. Una representación paramétrica del conjunto solución es:

$$x = 3 - t, \quad y = t, \quad t \text{ es cualquier número real.}$$

La gráfica de este sistema se representa como dos rectas *coincidentes*, como se muestra en la figura 1.1 (b).

c) Este sistema no tiene solución porque es imposible que la suma de dos números sea 3 y 1 simultáneamente. La gráfica de este sistema se representa como dos rectas *paralelas*, como se muestra en la figura 1.1 (c).



a) Dos rectas que se cortan: $\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x - y &= -1 \end{aligned}$

b) Dos rectas coincidentes: $\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 2x + 2y &= 6 \end{aligned}$

c) Dos rectas paralelas: $\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x + y &= 1 \end{aligned}$

Figura 1.1

El ejemplo 4 ilustra los tres tipos básicos de conjuntos solución que son posibles para un sistema de ecuaciones lineales. Este resultado se enuncia aquí sin demostración. (Ésta se proporciona después en el Teorema 2.5)

Número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales

Para un sistema de ecuaciones lineales, necesariamente una de las siguientes afirmaciones es verdadera:

1. El sistema tiene exactamente una solución (sistema consistente).
2. El sistema tiene un número infinito de soluciones (sistema consistente).
3. El sistema no tiene solución (sistema inconsistente).

RESOLVIENDO UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

¿Cuál de los siguientes sistemas es más fácil de resolver algebraicamente?

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ -x + 3y &= -4 \\ 2x - 5y + 5z &= 17 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ y + 3z &= 5 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

El sistema de la derecha es el más fácil de resolver. Este sistema está en la **forma escalonada por renglones**, lo cual significa que sigue un patrón escalonado y que tiene coeficientes principales iguales a 1. Para resolver este sistema se aplica un procedimiento denominado **sustitución hacia atrás**.

EJEMPLO 5 Uso de la sustitución hacia atrás para resolver un sistema de forma escalonada por renglones

Utilice la sustitución hacia atrás para resolver el sistema.

$$\begin{aligned} x - 2y &= 5 && \text{Ecuación 1} \\ y &= -2 && \text{Ecuación 2} \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

De la Ecuación 2 usted sabe que $y = -2$. Al sustituir este valor en la Ecuación 1, obtiene

$$\begin{aligned} x - 2(-2) &= 5 && \text{Sustituya } -2 = y \\ x &= 1. && \text{Resuelva para } x \end{aligned}$$

Así, el sistema tiene exactamente una solución $x = 1$ y $y = -2$.

El término "sustitución hacia atrás" implica que se trabaja en *retrospectiva*. Así, en el Ejemplo 5, la segunda ecuación generó el valor de y. El Ejemplo 6 demuestra este procedimiento. Se sustituye entonces ese valor en la primera ecuación y se resuelve para x.

EJEMPLO 6 Uso de la sustitución hacia atrás para resolver un sistema de forma escalonada por renglones

Resuelva el siguiente sistema.

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 && \text{Ecuación 1} \\ y + 3z &= 5 && \text{Ecuación 2} \\ z &= 2 && \text{Ecuación 3} \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

De la Ecuación 3, conoce el valor de z. Para resolver para y, sustituya $z = 2$ en la ecuación 2 para obtener

$$\begin{aligned} y + 3(2) &= 5 && \text{Sustituya } z = 2 \\ y &= -1. && \text{Resuelva para } y \end{aligned}$$

Finalmente, sustituya $y = -1$ y $z = 2$ en la ecuación 1 para obtener

$$\begin{aligned} x - 2(-1) + 3(2) &= 9 && \text{Sustituya } y = -1, z = 2 \\ x &= 1. && \text{Resuelva para } x \end{aligned}$$

La solución es $x = 1$, $y = -1$ y $z = 2$.

Dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto solución. Para resolver un sistema que no esté en la forma escalonada por renglones, primero se transforma a un sistema *equivalente* que esté en la forma escalonada por renglones mediante las siguientes operaciones.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

El matemático alemán Carl Friedrich Gauss es reconocido, con Newton y Arquímedes, como unos de los tres matemáticos más importantes de la historia. Gauss usó una forma de lo que ahora se conoce como Eliminación Gaussiana en sus investigaciones. Aunque este método fue nombrado en honor a Gauss, los chinos usaban un método casi idéntico 2000 años antes que él.

Operaciones que conducen a sistemas de ecuaciones equivalentes

Cada una de las siguientes operaciones, aplicadas a un sistema de ecuaciones lineales, produce un sistema *equivalente*:

1. Intercambiar dos ecuaciones.
2. Multiplicar una ecuación por una constante diferente de cero.
3. Sumar el múltiplo de una ecuación a otra.

Reescribir un sistema de ecuaciones lineales en la forma escalonada por renglones, a menudo implica una *cadena* de sistemas equivalentes, cada uno de los cuales se obtiene mediante la aplicación de una de las tres operaciones básicas. Este proceso es denominado **Eliminación Gaussiana**, en honor del matemático alemán Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

EJEMPLO 7 Uso de la eliminación gaussiana para reescribir un sistema en la forma escalonada por renglones

Resuelva el sistema.

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ -x + 3y &= -4 \\ 2x - 5y + 5z &= 17 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Aunque existen varias maneras de empezar, es recomendable utilizar un procedimiento sistemático que pueda aplicarse fácilmente a sistemas grandes. Trabaje a partir de la esquina superior izquierda del sistema, mantenga x en la posición superior izquierda y elimine las demás x de la primera columna.

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ y + 3z &= 5 \\ 2x - 5y + 5z &= 17 \end{aligned}$$

Sumando la primera ecuación a la segunda, obtenemos una nueva segunda ecuación.

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ y + 3z &= 5 \\ -y - z &= -1 \end{aligned}$$

Sumando –2 veces la primera ecuación a la tercera, obtenemos una nueva tercera ecuación

Ahora que todo se ha eliminado de la primera columna, excepto la primera x, procedemos con la segunda.

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ y + 3z &= 5 \\ 2z &= 4 \end{aligned}$$

Sumando la segunda ecuación a la tercera, generamos una nueva tercera ecuación.

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ y + 3z &= 5 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

Multiplicando la tercera ecuación por $\frac{1}{2}$, obtenemos una nueva tercera ecuación.

Éste es el mismo sistema usado en el Ejemplo 6 y, como en ese caso, la solución es

$$x = 1, \quad y = -1, \quad z = 2.$$

Cada una de las tres ecuaciones en el Ejemplo 7 representa un plano en un sistema de coordenadas tridimensionales. Ya que la única solución del sistema es el punto

$$(x, y, z) = (1, -1, 2)$$

los tres planos se intersectan en el punto representado por estas coordenadas, como se muestra en la figura 1.2.

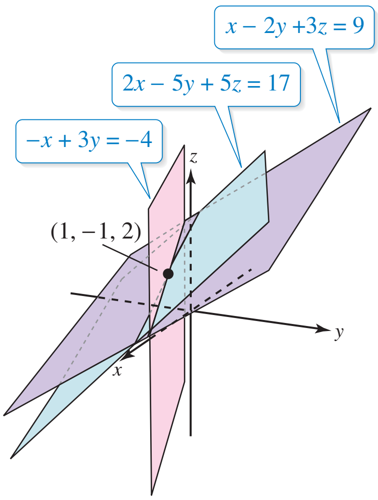


Figura 1.2

Debido a que se requieren muchos pasos para resolver un sistema de ecuaciones lineales, es muy fácil cometer errores aritméticos; es por ello que se sugiere fomentar el hábito de *comprobar la solución sustituyéndola en cada una de las ecuaciones del sistema original*. Así, en el ejemplo 7, puede comprobar la solución $x = 1$, $y = -1$ y $z = 2$ como sigue.

$$\begin{aligned}
&\text{Ecuación 1:} \quad (1) - 2(-1) + 3(2) = 9\\
&\text{Ecuación 2:} \quad -(1) + 3(-1) = -4\\
&\text{Ecuación 3:} \quad 2(1) - 5(-1) + 5(2) = 17
\end{aligned}$$

Sustituya la solución en cada ecuación del sistema original.

El siguiente ejemplo implica un sistema inconsistente, o que no tiene solución. La clave para identificar un sistema inconsistente es que, en algún punto del proceso de eliminación, se obtendrá un resultado sin sentido como $0 = -2$. Esto se demuestra en el ejemplo 8.

EJEMPLO 8 Un sistema inconsistente

Resuelva el sistema.

$$\begin{aligned}
x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1\\
2x_1 - x_2 - 2x_3 &= 2\\
x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -1
\end{aligned}$$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1\\
5x_2 - 4x_3 &= 0\\
x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= -1
\end{aligned}$$

Sumando –2 veces la primera ecuación a la segunda ecuación, generamos una nueva segunda ecuación.

$$\begin{aligned}
x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1\\
5x_2 - 4x_3 &= 0\\
5x_2 - 4x_3 &= -2
\end{aligned}$$

Sumando –1 veces la primera ecuación a la tercera ecuación, producimos una nueva tercera ecuación.

(Otra manera de describir esta operación es decir que de la tercera ecuación *se restó* la primera para obtener una nueva tercera ecuación.)

$$\begin{aligned}
x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1\\
5x_2 - 4x_3 &= 0\\
0 &= -2
\end{aligned}$$

Sumando –1 veces la segunda ecuación a la tercera ecuación, producimos una nueva tercera ecuación.

Ya que la tercera “ecuación” es falsa, este sistema no tiene solución. Además, debido a que es equivalente al sistema original, podemos concluir que éste tampoco tiene solución.

Como en el ejemplo 7, las tres ecuaciones del ejemplo 8 representan planos en un sistema coordenado tridimensional. En este ejemplo, sin embargo, el sistema es inconsistente. Así, los planos no tienen un punto en común, como se muestra en la Figura 1.3.

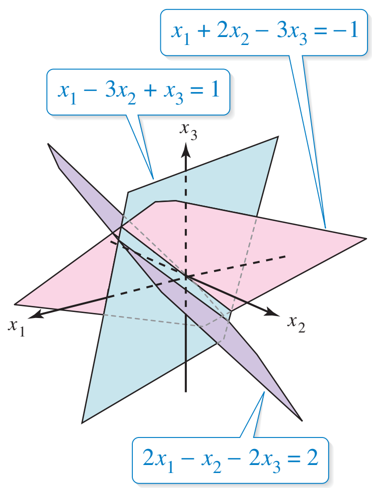


Figura 1.3

Esta sección termina con el análisis de un sistema de ecuaciones lineales que tiene un número infinito de soluciones. Puede representar el conjunto solución para este sistema de manera paramétrica como lo hizo en los Ejemplos 2 y 3.

EJEMPLO 9 Un sistema con un número infinito de soluciones

Resuelva el sistema.

$$\begin{aligned} x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 \qquad - 3x_3 &= -1 \\ -x_1 + 3x_2 \qquad &= 1 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Comience por reescribir el sistema en la forma escalonada por renglones, como se muestra enseguida.

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - 3x_3 &= -1 \\ x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 \qquad &= 1 \end{aligned}$$

Intercambiamos las dos primeras ecuaciones.

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - 3x_3 &= -1 \\ x_2 - x_3 &= 0 \\ 3x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Sumando la primera ecuación a la tercera ecuación, se genera una nueva tercera ecuación.

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - 3x_3 &= -1 \\ x_2 - x_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Sumando –3 veces la segunda ecuación a la tercera ecuación para eliminar la tercera ecuación.

Debido a que la tercera ecuación es innecesaria, la eliminamos para obtener el sistema mostrado abajo.

$$\begin{aligned} x_1 \qquad - 3x_3 &= -1 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Para representar las soluciones, se elige x_3 como la variable libre y se representa con el parámetro t. Dado que $x_2 = x_3$ y $x_1 = 3x_3 - 1$, se puede describir el conjunto solución como

$x_1 = 3t - 1, \quad x_2 = t, \quad x_3 = t,$ t es cualquier número real.

DESCUBRIMIENTO

1. Grafique las dos rectas representadas por el sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ -2x + 3y &= -3 \end{aligned}$$

2. Utilice la eliminación Gaussiana para resolver este sistema de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ -1y &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Grafique el sistema de ecuaciones que obtiene a cada paso de este proceso. ¿Qué puede observar acerca de estas rectas?

Se le pedirá repetir este análisis gráfico para otros sistemas en los ejercicios 89 y 90.

1.1 Ejercicios

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

Ecuaciones lineales En los ejercicios 1 a 6, determine si la ecuación dada es lineal en las variables x y y.

1. $2x - 3y = 4$

2. $3x - 4xy = 0$

3. $\dfrac{3}{y} + \dfrac{2}{x} - 1 = 0$

4. $x^2 + y^2 = 4$

5. $2 \operatorname{sen} x - y = 14$

6. $(\operatorname{sen} 2)x - y = 14$

Representación paramétrica En los ejercicios 7 a 10, encuentre la representación paramétrica del conjunto solución de la ecuación lineal.

7. $2x - 4y = 0$

8. $3x - \frac{1}{2}y = 9$

9. $x + y + z = 1$

10. $13x_1 - 26x_2 + 39x_3 = 13$

Análisis gráfico En los Ejercicios 11 a 24, grafique el sistema de ecuaciones lineales. Resuelva el sistema e interprete su respuesta.

11. $\begin{aligned} 2x + y &= 4 \\ x - y &= 2 \end{aligned}$

12. $\begin{aligned} x + 3y &= 2 \\ -x + 2y &= 3 \end{aligned}$

13. $\begin{aligned} x - y &= 1 \\ -2x + 2y &= 5 \end{aligned}$

14. $\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{3}y &= 1 \\ -2x + \tfrac{4}{3}y &= -4 \end{aligned}$

15. $\begin{aligned} 3x - 5y &= 7 \\ 2x + y &= 9 \end{aligned}$

16. $\begin{aligned} -x + 3y &= 17 \\ 4x + 3y &= 7 \end{aligned}$

17. $\begin{aligned} 2x - y &= 5 \\ 5x - y &= 11 \end{aligned}$

18. $\begin{aligned} x - 5y &= 21 \\ 6x + 5y &= 21 \end{aligned}$

19. $\begin{aligned} \frac{x+3}{4} + \frac{y-1}{3} &= 1 \\ 2x - y &= 12 \end{aligned}$

20. $\begin{aligned} \frac{x-1}{2} + \frac{y+2}{3} &= 4 \\ x - 2y &= 5 \end{aligned}$

21. $\begin{aligned} 0.05x - 0.03y &= 0.07 \\ 0.07x + 0.02y &= 0.16 \end{aligned}$

22. $\begin{aligned} 0.2x - 0.5y &= -27.8 \\ 0.3x + 0.4y &= 68.7 \end{aligned}$

23. $\begin{aligned} \frac{x}{4} + \frac{y}{6} &= 1 \\ x - y &= 3 \end{aligned}$

24. $\begin{aligned} \frac{2x}{3} + \frac{y}{6} &= \frac{2}{3} \\ 4x + y &= 4 \end{aligned}$

Sustitución hacia atrás En los Ejercicios 25-30, use el sistema de sustitución hacia atrás para resolver el sistema.

25. $\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 2 \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$

26. $\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 &= 6 \\ 3x_2 &= 9 \end{aligned}$

27. $\begin{aligned} -x + y - z &= 0 \\ 2y + z &= 3 \\ \tfrac{1}{2}z &= 0 \end{aligned}$

28. $\begin{aligned} x - y &= 4 \\ 2y + z &= 6 \\ 3z &= 6 \end{aligned}$

29. $\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$

30. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned}$

Análisis gráfico En los ejercicios 31 a 36, complete el siguiente conjunto de tareas para cada sistema de ecuaciones.

a) Utilice una aplicación gráfica para graficar las ecuaciones en el sistema.

b) Utilice las gráficas para determinar si el sistema es consistente o inconsistente.

c) Si el sistema es consistente, aproxime la solución.

d) Resuelva el sistema algebraicamente.

e) Compare la solución del inciso (d) con la aproximación del inciso (c). ¿Qué puede concluir?

31. $\begin{aligned} -3x - y &= 3 \\ 6x + 2y &= 1 \end{aligned}$

32. $\begin{aligned} 4x - 5y &= 3 \\ -8x + 10y &= 14 \end{aligned}$

33. $\begin{aligned} 2x - 8y &= 3 \\ \tfrac{1}{2}x + y &= 0 \end{aligned}$

34. $\begin{aligned} 9x - 4y &= 5 \\ \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}y &= 0 \end{aligned}$

35. $\begin{aligned} 4x - 8y &= 9 \\ 0.8x - 1.6y &= 1.8 \end{aligned}$

36. $\begin{aligned} -5.3x + 2.1y &= 1.25 \\ 15.9x - 6.3y &= -3.75 \end{aligned}$

Sistema de ecuaciones lineales En los ejercicios 37 a 56 resuelva el sistema de ecuaciones lineales.

37. $\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 &= -1 \end{aligned}$

38. $\begin{aligned} 3x + 2y &= 2 \\ 6x + 4y &= 14 \end{aligned}$

39. $\begin{aligned} 2u + v &= 120 \\ u + 2v &= 120 \end{aligned}$

40. $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 0 \\ 6x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$

41. $\begin{aligned} 9x - 3y &= -1 \\ \tfrac{1}{5}x + \tfrac{2}{5}y &= -\tfrac{1}{3} \end{aligned}$

42. $\begin{aligned} \tfrac{2}{3}x_1 + \tfrac{1}{6}x_2 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$

43. $\begin{aligned} \frac{x-2}{4} + \frac{y-1}{3} &= 2 \\ x - 3y &= 20 \end{aligned}$

44. $\begin{aligned} \frac{x_1+4}{3} + \frac{x_2+1}{2} &= 1 \\ 3x_1 - x_2 &= -2 \end{aligned}$

45. $\begin{aligned} 0.02x_1 - 0.05x_2 &= -0.19 \\ 0.03x_1 + 0.04x_2 &= 0.52 \end{aligned}$

46. $\begin{aligned} 0.05x_1 - 0.03x_2 &= 0.21 \\ 0.07x_1 + 0.02x_2 &= 0.17 \end{aligned}$

47. $\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 2x - y + z &= 3 \\ 3x - z &= 0 \end{aligned}$

48. $\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ -x + 3y + 2z &= 8 \\ 4x + y &= 4 \end{aligned}$

49. $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 &= 8 \end{aligned}$

50. $\begin{aligned} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= 7 \\ x_1 - 11x_2 + 4x_3 &= 3 \end{aligned}$

El símbolo indica un ejercicio en el cual puede utilizarse una aplicación gráfica o un programa de cómputo.

51.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 4 \\ 4x_1 \qquad + 2x_3 &= 10 \\ -2x_1 + 3x_2 - 13x_3 &= -8 \end{aligned}$$

52.
$$\begin{aligned} x_1 \qquad + 4x_3 &= 13 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 &= 7 \\ 2x_1 - 2x_2 - 7x_3 &= -19 \end{aligned}$$

53.
$$\begin{aligned} x - 3y + 2z &= 18 \\ 5x - 15y + 10z &= 18 \end{aligned}$$

54.
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -2 \end{aligned}$$

55.
$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 6 \\ 2x + 3y \qquad - w &= 0 \\ -3x + 4y + z + 2w &= 4 \\ x + 2y - z + w &= 0 \end{aligned}$$

56.
$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad + 3x_4 &= 4 \\ 2x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_2 \qquad - 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 \qquad &= 5 \end{aligned}$$

Sistema de ecuaciones lineales En los Ejercicios 57 a 60, utilice un programa de cómputo o una aplicación gráfica para resolver el sistema de ecuaciones lineales.

57.
$$\begin{aligned} x_1 + 0.5x_2 + 0.33x_3 + 0.25x_4 &= 1.1 \\ 0.5x_1 + 0.33x_2 + 0.25x_3 + 0.21x_4 &= 1.2 \\ 0.33x_1 + 0.25x_2 + 0.2x_3 + 0.17x_4 &= 1.3 \\ 0.25x_1 + 0.2x_2 + 0.17x_3 + 0.14x_4 &= 1.4 \end{aligned}$$

58.
$$\begin{aligned} 120.2x + 62.4y - 36.5z &= 258.64 \\ 56.8x - 42.8y + 27.3z &= -71.44 \\ 88.1x + 72.5y - 28.5z &= 225.88 \end{aligned}$$

59.
$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{3}{7}x_2 + \tfrac{2}{9}x_3 &= \tfrac{349}{630} \\ \tfrac{2}{3}x_1 + \tfrac{4}{9}x_2 - \tfrac{2}{5}x_3 &= -\tfrac{19}{45} \\ \tfrac{4}{5}x_1 - \tfrac{1}{8}x_2 + \tfrac{4}{3}x_3 &= \tfrac{139}{150} \end{aligned}$$

60.
$$\begin{aligned} \tfrac{1}{8}x - \tfrac{1}{7}y + \tfrac{1}{6}z - \tfrac{1}{5}w &= 1 \\ \tfrac{1}{7}x + \tfrac{1}{6}y - \tfrac{1}{5}z + \tfrac{1}{4}w &= 1 \\ \tfrac{1}{6}x - \tfrac{1}{5}y + \tfrac{1}{4}z - \tfrac{1}{3}w &= 1 \\ \tfrac{1}{5}x + \tfrac{1}{4}y - \tfrac{1}{3}z + \tfrac{1}{2}w &= 1 \end{aligned}$$

Número de Soluciones En los Ejercicios 61 a 64, indique por qué el sistema de ecuaciones debe tener al menos una solución. Después resuelva el sistema y determine si éste tiene exactamente una solución o un número infinito de soluciones.

61.
$$\begin{aligned} 4x + 3y + 17z &= 0 \\ 5x + 4y + 22z &= 0 \\ 4x + 2y + 19z &= 0 \end{aligned}$$

62.
$$\begin{aligned} 2x + 3y \qquad &= 0 \\ 4x + 3y - z &= 0 \\ 8x + 3y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

63.
$$\begin{aligned} 5x + 5y - z &= 0 \\ 10x + 5y + 2z &= 0 \\ 5x + 15y - 9z &= 0 \end{aligned}$$

64.
$$\begin{aligned} 12x + 5y + z &= 0 \\ 12x + 4y - z &= 0 \end{aligned}$$

65. Nutrición Un vaso de ocho onzas de jugo de manzana y un vaso de ocho onzas de jugo de naranja contienen un total de 177.4 miligramos de vitamina C. Dos vasos de ocho onzas de jugo de manzana y tres vasos de ocho onzas de jugo de naranja contienen un total de 436.7 miligramos de vitamina C. ¿Cuánta vitamina C hay en un vaso de ocho onzas de cada tipo de jugo?

66. Velocidad de vuelo Dos aviones parten del Aeropuerto Internacional de Los Ángeles y vuelan en direcciones opuestas. El segundo avión parte media hora después que el primero, pero su velocidad es 80 kilómetros por hora mayor. Encuentre la velocidad de vuelo de cada avión si 2 horas después de que partió el primer avión, ambos están a 3200 kilómetros de distancia uno del otro.

¿Verdadero o falso? En los Ejercicios 67 y 68, determine si cada una de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, proporcione una razón o cite una expresión adecuada a partir del texto. Si la expresión es falsa, proponga un ejemplo que demuestre que la expresión no es cierta en todos los casos o cite una expresión adecuada a partir del texto.

67. a) Un sistema de una ecuación lineal en dos variables es siempre consistente.

b) Un sistema de dos ecuaciones lineales en tres variables es siempre consistente.

c) Si un sistema lineal es consistente, entonces tiene un número infinito de soluciones.

68. a) Un sistema lineal puede tener exactamente dos soluciones.

b) Dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución.

c) Un sistema de tres ecuaciones lineales en dos variables siempre es inconsistente.

69. Encuentre un sistema de dos ecuaciones en dos variables, x_1 y x_2, que tengan un conjunto solución dado por la representación paramétrica $x_1 = t$ y $x_2 = 3t - 4$, donde t es cualquier número real. Entonces demuestre que las soluciones del sistema pueden escribirse como

$$x_1 = \frac{4}{3} + \frac{t}{3} \quad \text{y} \quad x_2 = t.$$

70. Encuentre un sistema de dos ecuaciones en tres variables, x_1, x_2 y x_3, que tengan el conjunto solución dado por la representación paramétrica

$$x_1 = t, \quad x_2 = s \quad \text{y} \quad x_3 = 3 + s - t,$$

donde s y t son cualquier número real. Después demuestre que las soluciones del sistema pueden escribirse como

$$x_1 = 3 + s - t, \quad x_2 = s \quad \text{y} \quad x_3 = t.$$

El símbolo indica que conjuntos electrónicos de datos están disponibles en college.cengage.com/pic/larsonELA6e. Estos conjuntos de datos son compatibles con cada una de las siguientes tecnologías: MATLAB, Mathematica, Maple, Derive, TI-83/TI-83 Plus, TI-86, TI-89, TI-92 y TI-92 Plus.

Sustitución En los Ejercicios 71 a 74, resuelva el sistema de ecuaciones haciendo $A = 1/x$, $B = 1/y$ y $C = 1/z$

71. $$\begin{aligned} \frac{12}{x} - \frac{12}{y} &= 7 \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} &= 0 \end{aligned}$$

72. $$\begin{aligned} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} &= 0 \\ \frac{3}{x} - \frac{4}{y} &= -\frac{25}{6} \end{aligned}$$

73. $$\begin{aligned} \frac{2}{x} + \frac{1}{y} - \frac{3}{z} &= 4 \\ \frac{4}{x} \phantom{+ \frac{1}{y}} + \frac{2}{z} &= 10 \\ -\frac{2}{x} + \frac{3}{y} - \frac{13}{z} &= -8 \end{aligned}$$

74. $$\begin{aligned} \frac{2}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{z} &= 5 \\ \frac{3}{x} - \frac{4}{y} \phantom{- \frac{2}{z}} &= -1 \\ \frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{z} &= 0 \end{aligned}$$

Coeficientes Trigonométricos En los Ejercicios 75 y 76, resuelva el sistema de ecuaciones lineales para x y y.

75. $$\begin{aligned} (\cos\theta)x + (\operatorname{sen}\theta)y &= 1 \\ (-\operatorname{sen}\theta)x + (\cos\theta)y &= 0 \end{aligned}$$

76. $$\begin{aligned} (\cos\theta)x + (\operatorname{sen}\theta)y &= 1 \\ (-\operatorname{sen}\theta)x + (\cos\theta)y &= 1 \end{aligned}$$

Diseño de Coeficiente En los Ejercicios 77 a 82, determine los valores de k de tal manera que el sistema tenga el número de soluciones que se indica.

77. Un número infinito de soluciones.
$$\begin{aligned} 4x + ky &= 6 \\ kx + y &= -3 \end{aligned}$$

78. Un número infinito de soluciones.
$$\begin{aligned} kx + y &= 4 \\ 2x - 3y &= -12 \end{aligned}$$

79. Exactamente una solución.
$$\begin{aligned} x + ky &= 0 \\ kx + y &= 0 \end{aligned}$$

80. Sin solución.
$$\begin{aligned} x + ky &= 2 \\ kx + y &= 4 \end{aligned}$$

81. Sin solución.
$$\begin{aligned} x + 2y + kz &= 6 \\ 3x + 6y + 8z &= 4 \end{aligned}$$

82. Exactamente una solución.
$$\begin{aligned} kx + 2ky + 3kz &= 4k \\ x + y + z &= 0 \\ 2x - y + z &= 1 \end{aligned}$$

83. Determine los valores de k tales que el sistema de ecuaciones lineales no tenga una solución única.
$$\begin{aligned} x + y + kz &= 3 \\ x + ky + z &= 2 \\ kx + y + z &= 1 \end{aligned}$$

84. REMATE Encuentre los valores de a, b y c tales que el sistema de ecuaciones lineales tenga (a) exactamente una solución, (b) un número infinito de soluciones y (c) no tenga solución. Explique su razonamiento.
$$\begin{aligned} x + 5y + z &= 0 \\ x + 6y - z &= 0 \\ 2x + ay + bz &= c \end{aligned}$$

85. **Escriba** Considere el sistema de ecuaciones lineales en x y y.
$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \\ a_3x + b_3y &= c_3 \end{aligned}$$
Describa las gráficas de estas tres ecuaciones en el plano x-y cuando el sistema tiene (a) exactamente una solución, (b) un número infinito de soluciones y (c) ninguna solución.

86. **Escriba** Explique por qué el sistema de ecuaciones lineales del Ejercicio 85 debe ser consistente, si los términos constantes c_1, c_2 y c_3 son todos cero.

87. Demuestre que si $ax^2 + bx + c = 0$ para toda x, entonces $a = b = c = 0$.

88. Considere el sistema de ecuaciones lineales en x y y.
$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$
¿Bajo qué condiciones el sistema tiene exactamente una solución?

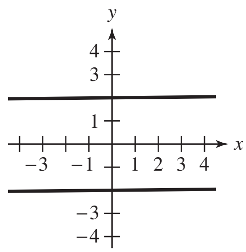
Descubrimiento En los Ejercicios 89 y 90, trace las rectas determinadas por el sistema de ecuaciones lineales. Entonces, aplique la eliminación gaussiana para resolver el sistema. En cada paso del proceso de eliminación, trace las rectas correspondientes. ¿Qué puede observar de estas rectas?

89. $$\begin{aligned} x - 4y &= -3 \\ 5x - 6y &= 13 \end{aligned}$$

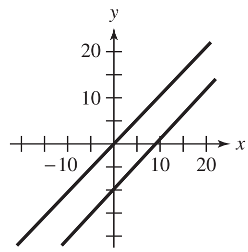
90. $$\begin{aligned} 2x - 3y &= 7 \\ -4x + 6y &= -14 \end{aligned}$$

Escriba En los Ejercicios 91 y 92, las gráficas de ambas ecuaciones parecen ser paralelas. Resuelva el sistema de ecuaciones algebraicamente. Explique por qué las gráficas confunden.

91. $$\begin{aligned} 100y - x &= 200 \\ 99y - x &= -198 \end{aligned}$$



92. $$\begin{aligned} 21x - 20y &= 0 \\ 13x - 12y &= 120 \end{aligned}$$



1.2 Eliminación gaussiana y eliminación de Gauss-Jordan

- Determine el tamaño de una matriz y escriba una matriz aumentada o por coeficientes a partir de un sistema de ecuaciones lineales.
- Use matrices y eliminación Gaussiana con sustitución hacia atrás para resolver el sistema de ecuaciones lineales.
- Use matrices y la eliminación Gauss-Jordan para resolver un sistema de ecuaciones lineales.
- Resuelva un sistema homogéneo de ecuaciones lineales.

MATRICES

En la sección 1.1 la eliminación Gaussiana fue introducida como un procedimiento para la solución de sistemas de ecuaciones lineales. En esta sección usted estudiará este procedimiento con mayor profundidad, empezando por algunas definiciones. La primera es la definición de **matriz**.

COMENTARIO

El plural de matriz es *matrices*. Si cada elemento de la matriz es un número *real*, entonces la matriz se denomina *matriz real*. A menos que se indique lo contrario, todas las matrices de este texto son reales.

Definición de matriz

Si m y n son enteros positivos, entonces una matriz $m \times n$ (que se lee como "m por n") es un arreglo rectangular

$$\begin{array}{c} \text{Renglón 1}\\ \text{Renglón 2}\\ \text{Renglón 3}\\ \vdots\\ \text{Renglón } m\end{array}
\overset{\begin{array}{ccccc}\text{Columna 1} & \text{Columna 2} & \text{Columna 3} & \cdots & \text{Columna } n\end{array}}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}}$$

en el cual cada elemento a_{ij} de la matriz es un número. Una matriz $m \times n$ tiene m renglones (líneas horizontales) y n columnas (líneas verticales). Las matrices usualmente se denotan con letras mayúsculas.

El elemento a_{ij} está ubicado en el i-ésimo renglón y en la j-ésima columna. i se denomina *subíndice del renglón* porque identifica la línea horizontal en la cual se ubica el elemento y el subíndice j se denomina *subíndice de la columna* porque identifica la línea vertical en la que se encuentra el elemento.

Se dice que una matriz con m renglones y n columnas es de **tamaño** $m \times n$. Si $m = n$, entonces la matriz se llama **cuadrada de orden** n. Los elementos $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$ se denominan elementos de la **diagonal principal**.

EJEMPLO 1 Tamaños de matrices

Cada matriz tiene indicado el tamaño.

a) Tamaño: 1×1 $[2]$ **b)** Tamaño: 2×2 $\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ **c)** Tamaño: 2×3 $\begin{bmatrix} e & 2 & -7\\ \pi & \sqrt{2} & 4\end{bmatrix}$

COMENTARIO

Comience alineando verticalmente las variables en las ecuaciones. Use 0 para indicar coeficientes de cero en la matriz. Considere la cuarta columna de términos constantes en la matriz aumentada.

El uso más común de las matrices es para representar un sistema de ecuaciones lineales. La matriz obtenida de los coeficientes y términos constantes de un sistema de ecuaciones lineales se denomina **matriz aumentada** del sistema. A la matriz que sólo contiene los coeficientes del sistema se le llama **matriz de coeficientes** del sistema. He aquí un ejemplo.

Sistema	Matriz aumentada	Matriz de coeficientes
$\begin{aligned} x - 4y + 3z &= 5\\ -x + 3y - z &= -3\\ 2x \qquad - 4z &= 6\end{aligned}$	$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 5\\ -1 & 3 & -1 & -3\\ 2 & 0 & -4 & 6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3\\ -1 & 3 & -1\\ 2 & 0 & -4\end{bmatrix}$

OPERACIONES ELEMENTALES POR RENGLÓN

En la sección anterior, usted estudió tres operaciones que producen sistemas equivalentes de ecuaciones lineales.

1. Intercambie dos ecuaciones.

2. Multiplique una ecuación por una constante diferente de cero.

3. Sume un múltiplo de una ecuación a otra ecuación.

En terminología de matrices, estas tres operaciones corresponden a **operaciones elementales por renglón**. Una operación elemental por renglón en una matriz aumentada produce una nueva matriz aumentada, correspondiente a un sistema de ecuaciones lineales nuevo (aunque equivalente). Dos matrices son **equivalentes por renglón** cuando una puede obtenerse a partir de otra por una a secuencia finita de operaciones elementales por renglón.

Operaciones elementales por renglón

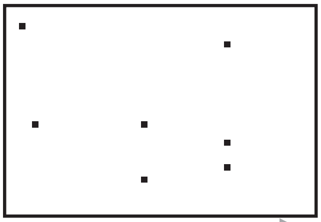
1. Intercambie dos renglones.
2. Multiplique un renglón por una constante diferente de cero.
3. Sume un múltiplo de un renglón a otro renglón.

Aunque es fácil efectuar las operaciones elementales en los renglones, esto implica muchas operaciones aritméticas. Ya que es fácil cometer un error, es recomendable anotar siempre la operación elemental realizada en cada paso, de modo que revisar el trabajo sea más fácil.

Debido a que resolver algunos sistemas implica muchos pasos, es de gran ayuda utilizar un método de notación abreviada, para tener seguimiento de cada operación elemental que usted efectúe. Esta notación se introduce en el siguiente ejemplo.

NOTA TECNOLÓGICA

Muchas aplicaciones gráficas y programas de cómputo pueden efectuar operaciones elementales en renglones de matrices. Si usted usa una aplicación gráfica, las pantallas para el ejemplo 2(c) pueden verse como las que aparecen abajo. Los comandos y sintaxis de programación para estas aplicaciones/programas para el ejemplo 2(c) se proporcionan en la **Online Technology Guide**, disponible en *college.cengage*.com/pic/larsonELA6e.



EJEMPLO 2 Operaciones elementales en los renglones

a) Intercambie el primero y segundo renglones.

Matriz original	Nueva matriz equivalente por renglones	Notación
$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$	$R_1 \leftrightarrow R_2$

b) Multiplique el primer renglón por $\frac{1}{2}$ para producir un nuevo primer renglón.

Matriz original	Nueva matriz equivalente por renglones	Notación
$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 & -2 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	$\left(\frac{1}{2}\right)R_1 \rightarrow R_1$

c) Sume -2 veces el primer renglón al tercero, para generar un nuevo tercer renglón.

Matriz original	Nueva matriz equivalente por renglones	Notación
$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & 13 & -8 \end{bmatrix}$	$R_3 + (-2)R_1 \rightarrow R_3$

Note que sumar —2 veces el renglón 1 al renglón 3 no cambia el renglón 1.

En el Ejemplo 7 de la Sección 1.1, aplicó la eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás para resolver un sistema de ecuaciones lineales. Ahora aprenderá la versión matricial de la eliminación gaussiana. Los dos métodos utilizados en el siguiente ejemplo son esencialmente iguales, la diferencia fundamental es que con el método matricial no es necesario escribir las variables una y otra vez.

EJEMPLO 3 Uso de las operaciones elementales en los renglones para resolver un sistema

Sistema lineal

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ -x + 3y &= -4 \\ 2x - 5y + 5z &= 17 \end{aligned}$$

Matriz asociada aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{bmatrix}$$

Sume la primera ecuación a la segunda.

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ y + 3z &= 5 \\ 2x - 5y + 5z &= 17 \end{aligned}$$

Sume el primer renglón al segundo para obtener un nuevo segundo renglón.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{bmatrix} \quad R_2 + R_1 \rightarrow R_2$$

Sume -2 veces la primera ecuación a la tercera.

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ y + 3z &= 5 \\ -y - z &= -1 \end{aligned}$$

Sume -2 veces el primer renglón al tercero para obtener un nuevo tercer renglón.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad R_3 + (-2)R_1 \rightarrow R_3$$

Sume la segunda ecuación a la tercera.

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ y + 3z &= 5 \\ 2z &= 4 \end{aligned}$$

Sume el segundo renglón al tercero para obtener un nuevo tercer renglón

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad R_3 + R_2 \rightarrow R_3$$

Multiplique la tercera ecuación por $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ y + 3z &= 5 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

Multiplique el tercer renglón por $\frac{1}{2}$ para obtener un nuevo tercer renglón.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \left(\tfrac{1}{2}\right)R_3 \rightarrow R_3$$

Ahora puede utilizar la sustitución hacia atrás para encontrar la solución, como en el ejemplo 6 de la sección 1.1. La solución es $x = 1$, $y = -2$ y $z = 2$.

Se dice que la última matriz del ejemplo 3 está en la **forma escalonada por renglones**. El término *escalonada* se refiere al patrón de escalera formado por los elementos no nulos de la matriz. Para que una matriz tenga esta forma debe tener las siguientes propiedades.

Forma Escalonada por Renglones y Forma Escalonada por Renglones Reducida

Una matriz en la **forma escalonada** por renglones tiene estas propiedades:

1. Todos los renglones que constan por completo de ceros se encuentran en la parte inferior de la matriz.
2. Por cada renglón que no consta completamente de ceros, el primer elemento no nulo es 1 (denominado 1 principal).
3. Para dos renglones consecutivos (no nulos), el 1 principal del renglón superior está más a la izquierda que el **1 principal** del renglón inmediato inferior.

Una matriz escalonada **por renglones** está en la **forma escalonada reducida** si toda columna con un 1 principal tiene ceros en todas las posiciones por arriba y por debajo de su 1 principal.

EJEMPLO 4 Forma escalonada por renglones

Determine si cada matriz está en forma escalonada por renglones. De estarlo, determine si está en forma reducida.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ **f)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

NOTA TECNOLÓGICA

Utilice una aplicación gráfica o un programa de cómputo para encontrar la forma escalonada por renglones reducida de la matriz del inciso (f) de la matriz en el Ejemplo 4 (b). Los comandos y la sintaxis de programación de esta aplicación/ programa para el ejemplo 4 se proporcionan en la **Online Technology Guide** disponible en *college.cengage.* com/pic/ larsonELA6e.

SOLUCIÓN

Las matrices en (a), ©,(d) y (f) están ahora en forma escalonada por renglones. Las matrices en (d) y (f) están en forma escalonada por renglones reducida porque cada columna que tiene un 1 principal tiene ceros en cada posición arriba y abajo de su 1 principal. La matriz en (b) no está en forma escalonada por renglones porque no hay un renglón de puros ceros hasta abajo de la matriz. La matriz en (e) no está en forma escalonada por renglón porque la primer entrada distinta a cero en el Renglón 2 no es un 1 principal.

Puede demostrarse que toda matriz es equivalente por renglones a una matriz en forma escalonada por renglones. De este modo, en el ejemplo 4 usted puede cambiar la matriz del inciso (e) a la forma escalonada por renglones al multiplicar por $\frac{1}{2}$ el segundo renglón de la matriz.

El procedimeinto para utilizar la eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás para resolver un sistema es el siguiente.

Eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás

1. Escriba la matriz aumentada del sistema de ecuaciones lineales.
2. Utilice operaciones elementales en los renglones para reescribir la matriz aumentada en la forma escalonada por renglones.
3. Escriba el sistema de ecuaciones lineales correspondiente a la matriz en la forma escalonada por renglones y aplique la sustitución hacia atrás para encontrar la solución.

La eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás funciona bien como método algorítmico para resolver sistemas de ecuaciones lineales ya sea a mano o a computadora. Para este algoritmo, el orden en el que las operaciones elementales en los reglones son efectuadas es importante. Muévase de *izquierda a derecha por columnas*, cambiando a cero todos los elementos directamente debajo de los 1 principales.

ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

El Sistema Posicionamiento Global (GPS, por sus siglas en inglés) es una red de 24 satélites originalmente desarrollado por el ejército de Estados Unidos como herramienta de navegación. En la actualidad, los receptores de GPS son usados en una gran variedad de aplicaciones civiles, como determinar direcciones, localizar botes a la deriva y monitorear terremotos. Un receptor de GPS funciona con lecturas satelitales para calcular su ubicación. En tres dimensiones, el receptor usa señales de al menos cuatro satélites para "trilaterizar" su posición. En un modelo matemático simplificado, se usa un sistema de tres ecuaciones lineales en cuatro incógnitas (tres dimensiones y tiempo) para determinar las coordenadas del receptor como funciones de tiempo.

edobric/www.shutterstock.com

EJEMPLO 5 **Eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás**

Resuelva el sistema.

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 - 2x_4 &= -3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 &= -2 \\ x_1 - 4x_2 - 7x_3 - x_4 &= -19 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

La matriz aumentada para este sistema es

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & -19 \end{bmatrix}.$$

Obteniendo un 1 principal en la esquina superior izquierda y ceros en los demás elementos de la primera columna.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & -19 \end{bmatrix}$$

Se intercambian los dos primeros renglones. $R_1 \leftrightarrow R_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 1 & -4 & -7 & -1 & -19 \end{bmatrix}$$

Se suma –2 veces el primer renglón al tercero para obtener un nuevo tercer renglón. $R_3 + (-2)R_1 \rightarrow R_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -6 & -1 & -21 \end{bmatrix}$$

Se suma –1 veces el primer renglón al cuarto, para obtener un nuevo cuarto renglón. $R_4 + (-1)R_1 \rightarrow R_4$

Ahora que la primera columna está en la forma deseada, puede modificar la segunda columna como sigue.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -39 \end{bmatrix}$$

Sume 6 veces el segundo renglón al cuarto, para obtener un nuevo cuarto renglón. $R_4 + (6)R_2 \rightarrow R_4$

Para escribir la tercera columna en la forma adecuada, multiplique el tercer renglón por $\frac{1}{3}$ y multiplique el cuarto renglón por $-\frac{1}{13}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Multiplique el tercer renglón por $\frac{1}{3}$ y el cuarto renglón por $-\frac{1}{13}$ para obtener un nuevo cuarto renglón. $\left(\frac{1}{3}\right)R_3 \rightarrow R_3$ $\left(-\frac{1}{13}\right)R_4 \rightarrow R_4$

La matriz está ahora en la forma escalonada por renglones y el sistema de ecuaciones lineales respectivo es el siguiente

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad &= 2 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 &= -3 \\ x_3 - x_4 &= -2 \\ x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Aplicando la sustitución hacia atrás, la solución es $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 3$.

Al resolver un sistema de ecuaciones lineales, recuerde que es posible que el sistema no tenga solución. Si durante el proceso de eliminación obtiene un renglón con ceros excepto en el último elemento, es innecesario continuar con el proceso de eliminación. Así, usted puede concluir simplemente que el sistema es *inconsistente* y no tiene solución.

EJEMPLO 6 Un sistema sin solución

Resuelva el sistema.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_1 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

La matriz aumentada de este sistema es

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando la eliminación gaussiana a la matriz aumentada tenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_2 + (-1)R_1 \rightarrow R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_3 + (-2)R_1 \rightarrow R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 5 & -7 & -11 \end{bmatrix} \qquad R_4 + (-3)R_1 \rightarrow R_4$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & -7 & -11 \end{bmatrix} \qquad R_3 + R_2 \rightarrow R_3$$

Observe que el tercer renglón de esta matriz consta de ceros, excepto el último elemento. Esto significa que el sistema de ecuaciones lineales original es inconsistente. Puede comprobarlo al regresar de nuevo a un sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_2 - x_3 &= 2 \\ 0 &= -2 \\ 5x_2 - 7x_3 &= -11 \end{aligned}$$

Debido a que la tercera ecuación es absurda, el sistema no tiene solución.

ELIMINACIÓN DE GAUSS-JORDAN

Con la eliminación gaussiana, usted aplica operaciones elementales en los renglones de una matriz para obtener una forma escalonada por renglones (equivalente por renglones). Un segundo método de eliminación, denominado **eliminación de Gauss-Jordan** en honor de Carl Gauss y Wilhem Jordan (1842-1899), continúa el proceso de reducción hasta que se obtiene una forma escalonada *reducida* por renglones. Este procedimiento se demuestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 7 Eliminación de Gauss-Jordan

Utilice la eliminación de Gauss-Jordan para resolver el sistema.

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 9 \\ -x + 3y &= -4 \\ 2x - 5y + 5z &= 17 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

En el ejemplo 3 usted utilizó la eliminación gaussiana para obtener la siguiente forma escalonada por renglones.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ahora, aplique soluciones elementales en los renglones hasta obtener ceros arriba de cada uno de los 1 principales, como se muestra a continuación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 19 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad R_1 + (2)R_2 \rightarrow R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 9 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad R_2 + (-3)R_3 \rightarrow R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad R_1 + (-9)R_3 \rightarrow R_1$$

La matriz está ahora en la forma escalonada reducida por renglones. Volviendo a un sistema de ecuaciones lineales tenemos

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= -1 \\ z &= 2. \end{aligned}$$

Los procedimientos de eliminación descritos en esta sección a veces resultan en coeficientes fraccionales. Por ejemplo, en el procedimiento de eliminación para el sistema

$$\begin{aligned} 2x - 5y + 5z &= 17 \\ 3x - 2y + 3z &= 11 \\ -3x + 3y &= -16 \end{aligned}$$

puede que quiera multiplicar el primer renglón por 1/2 para generar un 1 principal, lo que habría introducido fracciones en éste. Para cálculos manuales, en ocasiones podemos evitar las fracciones eligiendo prudentemente el orden en el que se aplican las operaciones elementales en los renglones.

COMENTARIO

No importa el orden que utilice, la forma escalonada por renglones reducida será la misma.

DESCUBRIMIENTO

1. Sin realizar ninguna operación en los renglones, explique por qué este sistema de ecuaciones lineales es consistente.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 0 \\ -5x_1 + 6x_2 - 17x_3 &= 0 \\ 7x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

2. El siguiente sistema tiene más variables que ecuaciones. ¿Por qué esto hace que tenga un número infinito de soluciones?

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 0 \\ -5x_1 + 6x_2 - 17x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 7x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 13x_4 &= 0 \end{aligned}$$

El siguiente ejemplo muestra cómo aplicar la eliminación de Gauss-Jordan para resolver un sistema que tiene un número infinito de soluciones.

EJEMPLO 8 Un sistema con un número infinito de soluciones

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_2 &= 1 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

La matriz aumentada del sistema de ecuaciones lineales es

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Utilizando una aplicación gráfica, un programa de cómputo o la eliminación de Gauss-Jordan, usted puede comprobar que la forma escalonada por renglones reducida de la matriz es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}.$$

El sistema de ecuaciones correspondiente es

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_3 &= 2 \\ x_2 - 3x_3 &= -1. \end{aligned}$$

Ahora, usando el parámetro t para representar x_3, tenemos

$$x_1 = 2 - 5t, \quad x_2 = -1 + 3t, \quad x_3 = t, \quad \text{donde } t \text{ es cualquier número real.}$$

Tome en cuenta que en el ejemplo se asignó un parámetro arbitrario a la variable no principal x_3. Después resolvemos para las variables principales x_1 y x_2 como funciones de t.

Ahora que ha considerado dos métodos de eliminación para resolver un sistema de ecuaciones lineales, ¿cuál es mejor? En cierta medida, la respuesta depende de la preferencia personal. En las aplicaciones del álgebra lineal a la vida real, los sistemas de ecuaciones lineales frecuentemente se resuelven por computadora. Muchos programas de cómputo utilizan la eliminación gaussiana, enfatizando las maneras de reducir los errores por redondeo y minimizando el almacenamiento de datos. Ya que los ejemplos y los ejercicios en este libro generalmente son más simples y centrados en los conceptos básicos, usted necesita conocer los dos métodos de eliminación.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES HOMOGÉNEOS

COMENTARIO

Un sistema homogéneo de tres ecuaciones en tres variables x_1, x_2 y x_3 debe tener como solución trivial $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$.

Como último tema de esta sección, usted estudiará sistemas de ecuaciones lineales en los que todos los términos constantes son iguales a cero. A estos sistemas les denominamos **homogéneos**. Por ejemplo un sistema homogéneo de m ecuaciones en n variables tiene la forma

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0\\
&\vdots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0.
\end{aligned}$$

Es fácil observar que un sistema homogéneo debe tener por lo menos una solución. Específicamente, si todas las variables de un sistema homogéneo son iguales a cero, entonces deben satisfacerse cada una de las ecuaciones. Tal solución se denomina **trivial** (u **obvia**).

EJEMPLO 9 Solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned}
x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0\\
2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0
\end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Aplicando la eliminación de Gauss-Jordan a la matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

obtenemos la siguiente matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0\\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \qquad R_2 + (-2)R_1 \rightarrow R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \left(\tfrac{1}{3}\right)R_2 \rightarrow R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad R_1 + R_2 \rightarrow R_1$$

El sistema de ecuaciones correspondientes a esta matriz es

$$\begin{aligned}
x_1 \qquad + 2x_3 &= 0\\
x_2 - x_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Utilizando el parámetro $t = x_3$, el conjunto solución es $x_1 = -2t$, $x_2 = t$, $x_3 = t$, t es cualquier número real.

El sistema de ecuaciones tiene un número infinito de soluciones, una de las cuales es la solución trivial (dada por $t = 0$).

Como ilustra el ejemplo 9, un sistema homogéneo con menos ecuaciones que variables tiene un número infinito de soluciones.

TEOREMA 1.1 Número de soluciones de un sistema homogéneo

Todo sistema de ecuaciones lineales homogéneo es consistente. Además, si el sistema tiene menos ecuaciones que variables, entonces debe tener un número infinito de soluciones.

Una demostración del teorema 1.1 puede efectuarse aplicando los mismos procedimientos que utilizó en el ejemplo 9, esta vez para una matriz general.

1.2 Ejercicios

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

Matrix Size En los ejercicios 1 a 6 determine el tamaño de la matriz.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **4.** $\begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -7 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -10 \end{bmatrix}$

Operaciones elementales por renglón En los Ejercicios 7-10, identifique la o las operaciones elementales por renglón realizadas para obtener la nueva matriz equivalente por renglones.

Matriz original — *Nueva matriz equivalente por renglones*

7. $\begin{bmatrix} -2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & -8 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 13 & 0 & -39 \\ 3 & -1 & -8 \end{bmatrix}$

Matriz original — *Nueva matriz equivalente por renglones*

8. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -4 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

Matriz original — *Nueva matriz equivalente por renglones*

9. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 & 5 \\ -1 & 3 & -7 & 6 \\ 4 & -5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -7 & 6 \\ 0 & -1 & -5 & 5 \\ 0 & 7 & -27 & 27 \end{bmatrix}$

Matriz original — *Nueva matriz equivalente por renglones*

10. $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -7 \\ 5 & 4 & -7 & 6 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -9 & 7 & -11 \\ 0 & -6 & 8 & -4 \end{bmatrix}$

Matriz aumentada En los ejercicios 11 a 18, encuentre el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales representado por la matriz aumentada.

11. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **12.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ **14.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ **16.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Forma escalonada por renglones En los ejercicios 19 a 24, determine si la matriz está en la forma escalonada por renglones. Si es así, determine también si está en la forma escalonada reducida.

19. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Sistema de ecuaciones lineales En los ejercicios 25 a 38, resuelva el sistema ya sea utilizando eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás o la eliminación de Gauss-Jordan.

25. $\begin{aligned} x + 2y &= 7 \\ 2x + y &= 8 \end{aligned}$ **26.** $\begin{aligned} 2x + 6y &= 16 \\ -2x - 6y &= -16 \end{aligned}$

27. $\begin{aligned} -x + 2y &= 1.5 \\ 2x - 4y &= 3 \end{aligned}$

28. $\begin{aligned} 2x - y &= -0.1 \\ 3x + 2y &= 1.6 \end{aligned}$

29. $\begin{aligned} -3x + 5y &= -22 \\ 3x + 4y &= 4 \\ 4x - 8y &= 32 \end{aligned}$

30. $\begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ x + y &= 6 \\ 3x - 2y &= 8 \end{aligned}$

31. $$\begin{aligned} x_1 - 3x_3 &= -2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

32. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 24 \\ 2x_2 - x_3 &= 14 \\ 7x_1 - 5x_2 &= 6 \end{aligned}$$

33. $$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_3 &= 3 \\ 4x_1 - 3x_2 + 7x_3 &= 5 \\ 8x_1 - 9x_2 + 15x_3 &= 10 \end{aligned}$$

34. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 5x_3 &= 3 \\ x_1 - 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

35. $$\begin{aligned} 4x + 12y - 7z - 20w &= 22 \\ 3x + 9y - 5z - 28w &= 30 \end{aligned}$$

36. $$\begin{aligned} x + 2y + z &= 8 \\ -3x - 6y - 3z &= -21 \end{aligned}$$

37. $$\begin{aligned} 3x + 3y + 12z &= 6 \\ x + y + 4z &= 2 \\ 2x + 5y + 20z &= 10 \\ -x + 2y + 8z &= 4 \end{aligned}$$

38. $$\begin{aligned} 2x + y - z + 2w &= -6 \\ 3x + 4y + w &= 1 \\ x + 5y + 2z + 6w &= -3 \\ 5x + 2y - z - w &= 3 \end{aligned}$$

Sistema de ecuaciones lineales En los ejercicios 39 y 40, utilice un programa de cómputo o una aplicación gráfica para resolver el sistema de ecuaciones lineales.

39. $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 12x_5 &= 14 \\ x_2 - x_3 - x_4 - 3x_5 &= -3 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 15x_5 &= 10 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 13x_5 &= 13 \end{aligned}$$

40. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 + 3x_6 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 3x_5 + 2x_6 &= 17 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 2x_5 - 3x_6 &= -5 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 - 2x_6 &= -1 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - 2x_5 + 3x_6 &= 10 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 + x_6 &= 11 \end{aligned}$$

Sistema homogéneo En los ejercicios 41 a 44, resuelva el sistema lineal homogéneo que corresponda a la matriz de coeficientes dada.

41. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

42. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

43. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

44. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

45. Finanzas Una pequeña corporación de software tomó un préstamo por \$500,000 para expandir su línea de software. Parte del préstamo fue a 9%, otra parte a 10%, y otra a 12% de interés. Use un sistema de ecuaciones para determinar cuánto se tomó en préstamo a cada tasa si el interés anual fue de \$52,000 y la cantidad prestada a 10% fue $2\frac{1}{2}$ veces la cantidad prestada a 9%. Resuelva el sistema usando matrices.

46. Propinas Un mesero examina la cantidad de dinero que ganó en propinas después de trabajar un turno de 8 horas. El mesero tiene un total de \$95 en billetes de \$1, \$5, \$10, y \$20. El número total de billetes es 26. El número de billetes de \$5 es 4 veces el número de billetes de \$10, y el número de billetes de \$1 es 1 menos que el doble del número de billetes de \$5. Escriba un sistema de ecuaciones lineales para representar la situación. Después use matrices para encontrar el número de cada denominación.

Representación de matrices En los ejercicios 47 y 48, asuma que la matriz *aumentada* de un sistema de ecuaciones lineales, y (a) determine el número de ecuaciones y el número de variables; (b) encuentre el valor o valores de k tal que el sistema sea consistente. Después asuma que la matriz es de *coeficientes* de un sistema de ecuaciones lineales *homogéneo*, y repita los incisos (a) y (b).

47. $A = \begin{bmatrix} 1 & k & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

48. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & k \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

Diseño de coeficientes En los ejercicios 49 y 50, encuentre los valores de a, b y c (si es posible) tales que el sistema de ecuaciones lineales tenga (a) una única solución, (b) no tenga solución y (c) un número infinito de soluciones.

49. $$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ y + z &= 2 \\ x + z &= 2 \\ ax + by + cz &= 0 \end{aligned}$$

50. $$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ y + z &= 0 \\ x + z &= 0 \\ ax + by + cz &= 0 \end{aligned}$$

51. El siguiente sistema tiene una solución: $x = 1$, $y = -1$ y $z = 2$.

$$\begin{aligned} 4x - 2y + 5z &= 16 \quad \text{Ecuación 1} \\ x + y &= 0 \quad \text{Ecuación 2} \\ -x - 3y + 2z &= 6 \quad \text{Ecuación 3} \end{aligned}$$

Resuelva el sistema propuesto por las (a) Ecuaciones 1 y 2, (b) Ecuaciones 1 y 3, (c) Ecuaciones 2 y 3. (d) ¿Cuántas soluciones tiene cada uno de estos sistemas?

52. Suponga que el siguiente sistema tiene una única solución.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \quad \text{Ecuación 1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \quad \text{Ecuación 2} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \quad \text{Ecuación 3} \end{aligned}$$

¿El sistema formado por las ecuaciones 1 y 2 tiene una única solución, no tiene solución o tiene un número infinito de soluciones?

Equivalencia por renglones En los ejercicios 53 y 54, encuentre la única matriz escalonada por renglones reducida que es equivalente por renglones a la matriz propuesta.

53. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ **54.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

55. Escriba Describa todas las posibles matrices escalonadas por renglones reducidas de 2×2. Respalde su respuesta con ejemplos.

56. Escriba Describa todas la posibles matrices escalonadas por renglones reducidas de 3×3. Respalde su respuesta con ejemplos.

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 57 y 58, determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, proporcione una razón o cite una expresión adecuada a partir del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que muestre que la expresión es falsa en todos los casos o cite una expresión adecuada a partir del texto.

57. (a) Una matriz de 6×3 tiene seis renglones.

(b) Toda matriz es equivalente por renglones a una matriz en la forma escalonada por renglones.

(c) Si la forma escalonada por renglones de una matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lineales contiene el renglón [1 0 0 0 0], entonces el sistema original es inconsistente.

(d) Un sistema de cuatro ecuaciones lineales homogéneo en seis variables tiene un número infinito de soluciones.

58. (a) Una matriz de 4×7 tiene cuatro columnas.

(b) Toda matriz tiene una forma escalonada por renglones reducida única.

(c) Un sistema de cuatro ecuaciones lineales homogéneo en cuatro variables siempre es consistente.

(d) Multiplicar un renglón de una matriz por una constante es una de las operaciones elementales con renglones.

59. Escriba ¿Es posible que un sistema de ecuaciones lineales con menos ecuaciones que variables no tenga solución? Si es así, proporcione un ejemplo.

60. Escriba ¿Puede tener una matriz una forma escalonada por renglones única? Ilustre su respuesta con ejemplos. ¿Es única la forma escalonada reducida por renglones?

Equivalencia por renglones En los ejercicios 61 y 62, determine las condiciones a, b, c y d tales que la matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

sea equivalente por renglones a la matriz dada.

61. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **62.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Sistema homogéneo En los ejercicios 63 y 64, encuentre todos los valores de λ (la letra griega lambda) tales que el sistema de ecuaciones lineales homogéneo tenga soluciones no triviales.

63. $$\begin{aligned} (\lambda - 2)x + y &= 0 \\ x + (\lambda - 2)y &= 0 \end{aligned}$$

64. $$\begin{aligned} (\lambda - 1)x + 2y &= 0 \\ x + \lambda y &= 0 \end{aligned}$$

65. Escriba Considere la matriz de 2×2 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Realice la sucesión de operaciones con renglones.

(a) Sume (-1) veces el segundo renglón al primero.

(b) Sume 1 veces el primer renglón al segundo.

(c) Sume (-1) veces el segundo renglón al primero.

(d) Multiplique el primer renglón por (-1).

¿Qué pasa con la matriz original? Describa, en general, cómo intercambiar dos renglones de una matriz utilizando solamente la segunda y la tercera operaciones elementales con renglones.

66. La matriz aumentada representa un sistema de ecuaciones lineales que ha sido reducida aplicando la eliminación de Gauss-Jordan. Escriba un sistema de ecuaciones con coeficientes distintos a cero que sea representado por la matriz reducida.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hay muchas respuestas correctas.

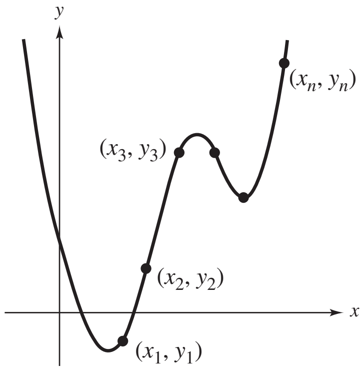
67. Escriba Describa la forma escalonada por renglones de una matriz aumentada que corresponde a un sistema de ecuaciones lineales que (a) es consistente y (b) tiene un número infinito de soluciones.

68. REMATE En sus propias palabras, describa la diferencia entre una matriz en la forma escalonada por renglones y una matriz en la forma escalonada por renglones reducida. Incluya un ejemplo de cada uno para respaldar su explicación.

1.3 Aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales

- Construir y resolver un sistema de ecuaciones para ajustar una función polinomial a un conjunto de datos.
- Construir y resolver un sistema de ecuaciones para representar una red.

Los sistemas de ecuaciones lineales se presentan en una amplia gama de aplicaciones y son uno de los temas principales del álgebra lineal. En esta sección usted verá dos de estas aplicaciones y muchas más en los siguientes capítulos. La primera aplicación muestra cómo ajustar una función polinomial a un conjunto de datos en el plano. La segunda aplicación se enfoca en redes y en las leyes de Kirchhoff para la electricidad.



Ajuste polinomial de curvas

Figura 1.4

AJUSTE POLINOMIAL DE CURVAS

Suponga que n puntos en el plano xy

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$$

representan un conjunto de datos y se le pide encontrar una función polinomial de grado $n - 1$

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$$

cuya gráfica pasa por los puntos dados. Este procedimiento se denomina **ajuste polinomial de curvas**. Si todas las coordenadas x de los puntos son distintas, entonces hay precisamente una función polinomial de grado $n - 1$ (o menor) que se ajusta a los n puntos, como se muestra en la figura 1.4.

Para determinar los n coeficientes de $p(x)$, sustituimos cada uno de los n puntos en la función polinomial para obtener n ecuaciones lineales en n variables $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$.

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \cdots + a_{n-1}x_1^{n-1} &= y_1 \\
a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_{n-1}x_2^{n-1} &= y_2 \\
&\vdots \\
a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \cdots + a_{n-1}x_n^{n-1} &= y_n
\end{aligned}$$

Este procedimiento se muestra con un polinomio de segundo grado en el ejemplo 1.

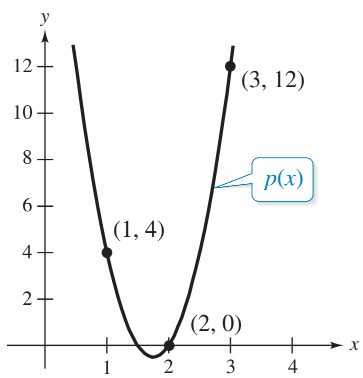


Figura 1.5

EJEMPLO 1 Ajuste polinomial de curvas

Determine el polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ cuya gráfica pasa por los puntos (1, 4), (2, 0) y (3, 12).

SOLUCIÓN

Sustituyendo $x = 1$, 2 y 3 en $p(x)$ e igualando los resultados con los valores respectivos de y, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales en las variables a_0, a_1 y a_2.

$$\begin{aligned}
p(1) &= a_0 + a_1(1) + a_2(1)^2 = a_0 + a_1 + a_2 = 4 \\
p(2) &= a_0 + a_1(2) + a_2(2)^2 = a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0 \\
p(3) &= a_0 + a_1(3) + a_2(3)^2 = a_0 + 3a_1 + 9a_2 = 12
\end{aligned}$$

La solución del sistema es

$$a_0 = 24,\ a_1 = -28 \text{ y } a_2 = 8,$$

lo cual significa que el polinomio es

$$p(x) = 24 - 28x + 8x^2.$$

La gráfica de p se muestra en la figura 1.5.

Simulación

Explore más este concepto con una simulación electrónica disponible en el sitio web *college.cengage. www.cengagebrain.com.*

EJEMPLO 2 Ajuste polinomial de curvas

Encuentre un polinomio que se ajuste a los puntos

$(-2, 3), (-1, 5), (0, 1), (1, 4)$ y $(2, 10)$.

SOLUCIÓN

Ya que tenemos cinco puntos, elegiremos un polinomio de cuarto grado.

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4.$$

Sustituyendo los puntos dados en $p(x)$ obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned}
a_0 - 2a_1 + 4a_2 - 8a_3 + 16a_4 &= 3\\
a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 &= 5\\
a_0 &= 1\\
a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 &= 4\\
a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 16a_4 &= 10
\end{aligned}$$

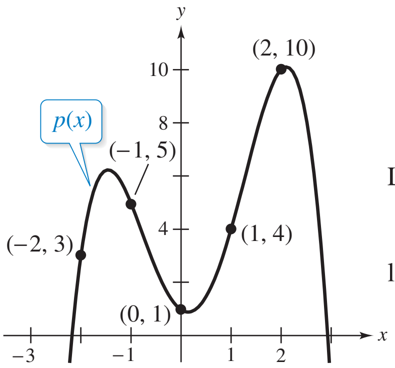


Figura 1.6

La solución de estas ecuaciones es

$$a_0 = 1,\quad a_1 = -\tfrac{30}{24},\quad a_2 = \tfrac{101}{24},\quad a_3 = \tfrac{18}{24},\quad a_4 = -\tfrac{17}{24}$$

lo cual significa que el polinomio es

$$\begin{aligned}
p(x) &= 1 - \tfrac{30}{24}x + \tfrac{101}{24}x^2 + \tfrac{18}{24}x^3 - \tfrac{17}{24}x^4\\
&= \tfrac{1}{24}(24 - 30x + 101x^2 + 18x^3 - 17x^4).
\end{aligned}$$

La gráfica de p se muestra en la figura 1.6.

El sistema de ecuaciones del ejemplo 2 es relativamente fácil de resolver debido que los valores de x son pequeños. Con un conjunto de valores grandes de x es mejor *trasladarlos* antes de proceder con el ajuste de la curva. Este método se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Traslación de valores grandes de x antes del ajuste de la curva

Encuentre un polinomio que se ajuste a los puntos

$$\overbrace{(2006, 3)}^{(x_1, y_1)},\quad \overbrace{(2007, 5)}^{(x_2, y_2)},\quad \overbrace{(2008, 1)}^{(x_3, y_3)},\quad \overbrace{(2009, 4)}^{(x_4, y_4)},\quad \overbrace{(2010, 10)}^{(x_5, y_5)}.$$

SOLUCIÓN

Debido a que los valores de x son grandes, se usa la traslación $z = x - 2008$ para obtener

$$\overbrace{(-2, 3)}^{(z_1, y_1)},\quad \overbrace{(-1, 5)}^{(z_2, y_2)},\quad \overbrace{(0, 1)}^{(z_3, y_3)},\quad \overbrace{(1, 4)}^{(z_4, y_4)},\quad \overbrace{(2, 10)}^{(z_5, y_5)}.$$

Este es el mismo conjunto de puntos dado en el ejemplo 2. Por consiguiente, el polinomio que se ajusta a estos puntos es

$$\begin{aligned}
p(z) &= \tfrac{1}{24}(24 - 30z + 101z^2 + 18z^3 - 17z^4)\\
&= 1 - \tfrac{5}{4}z + \tfrac{101}{24}z^2 + \tfrac{3}{4}z^3 - \tfrac{17}{24}z^4.
\end{aligned}$$

Haciendo $z = x - 2008$, tenemos

$$p(x) = 1 - \tfrac{5}{4}(x - 2008) + \tfrac{101}{24}(x - 2008)^2 + \tfrac{3}{4}(x - 2008)^3 - \tfrac{17}{24}(x - 2008)^4.$$

EJEMPLO 4 Una aplicación del ajuste de curvas

Encuentre un polinomio que relacione el periodo de los tres primeros planetas con su distancia media al Sol, como se muestra en la tabla. Después, verifique la exactitud del ajuste por medio del polinomio para calcular el periodo de Marte. (La distancia se mide en unidades astronómicas y el periodo en años.) (Fuente: *CRC Handbook of Chemistry and Physics*.)

Planeta	*Mercurio*	*Venus*	*Tierra*	*Marte*
Distancia media	0.387	0.723	1.000	1.524
Periodo	0.241	0.615	1.000	1.881

SOLUCIÓN

Comencemos por ajustar un polinomio cuadrático

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

a los puntos

$$(0.387, 0.241), (0.723, 0.615) \text{ y } (1, 1).$$

El sistema de ecuaciones lineales obtenido al sustituir estos puntos en $p(x)$ es

$$\begin{aligned} a_0 + 0.387a_1 + (0.387)^2a_2 &= 0.241 \\ a_0 + 0.723a_1 + (0.723)^2a_2 &= 0.615 \\ a_0 + \quad a_1 + \quad a_2 &= 1. \end{aligned}$$

La solución aproximada del sistema es

$$a_0 \approx -0.0634, \quad a_1 \approx 0.6119, \quad a_2 \approx 0.4515$$

lo cual significa que el polinomio puede ser aproximado por

$$p(x) = -0.0634 + 0.6119x + 0.4515x^2.$$

Usando $p(x)$ para evaluar el periodo de Marte, tenemos

$$p(1.524) \approx 1.918 \text{ años.}$$

Esta estimación se compara gráficamente con el periodo actual de Marte en la figura 1.7. Observe que el periodo actual (de la tabla 1.1) es de 1.881 años.

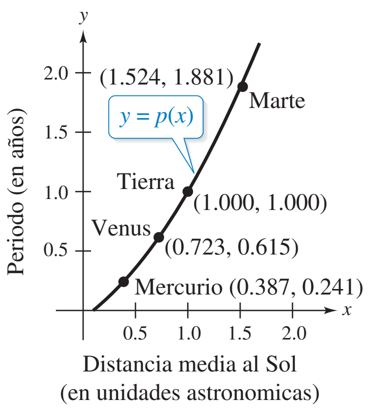


Figura 1.7

Una importante lección puede ser aprendida a partir de la aplicación mostrada en el ejemplo 4: el polinomio que se ajusta a los datos no necesariamente es un modelo exacto de la relación entre x y y para los valores de x que no sean los que corresponden a los puntos dados. Generalmente, mientras más lejos estén los puntos adicionales de los puntos dados, peor es el ajuste. Así, en el ejemplo 4 la distancia media de Júpiter es 5.203 unidades astronómicas. La aproximación polinomial correspondiente para el periodo es 15.343 años, una estimación deficiente del periodo real de Júpiter, que es 11.861 años.

El problema del ajuste de curvas puede ser difícil. A menudo otros tipos de funciones proporcionan mejores ajustes que los polinomios. Para ver esto, considere nuevamente el problema de ajuste de curvas del ejemplo 4. Tomando el logaritmo natural de cada una de las distancias y periodos de los primeros planetas obtenemos los resultados mostrados en la tabla 1.2 y en la figura 1.8.

Planeta	***Mercurio***	***Venus***	***Tierra***	***Marte***
Distancia media (x)	0.387	0.723	1.000	1.524
ln *x*	–0.949	–0.324	0.0	0.421
Periodo (y)	0.241	0.615	1.000	1.881
ln *y*	–1.423	–0.486	0.0	0.632

Ahora, al ajustar un polinomio a los logaritmos de las distancias y periodos obtenemos la siguiente *relación lineal* entre $\ln x$ y $\ln y$.

$$\ln y = \tfrac{3}{2} \ln x$$

se muestra en la figura 1.8.

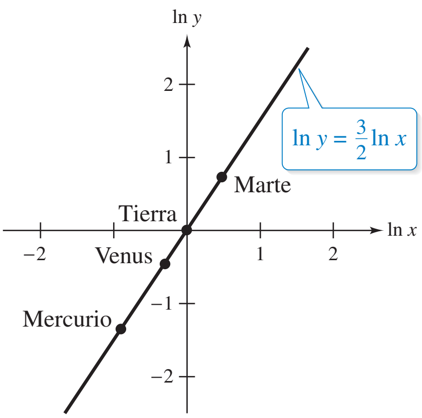
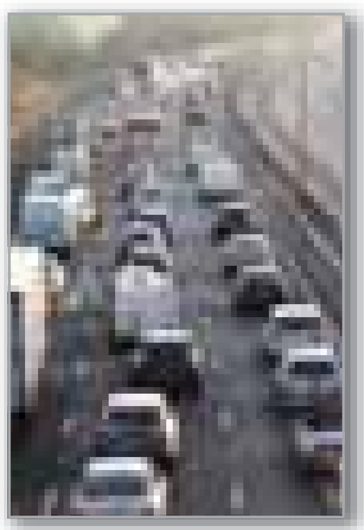


Figura 1.8

A partir de esta ecuación concluimos que $y = x^{3/2}$, o $y^2 = x^3$. En otras palabras, el cuadrado del periodo (en años) de cada planeta es igual al cubo de su distancia media (en unidades astronómicas) al Sol. El primero en descubrir esta relación fue Johannes Kepler en 1619.



ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

Usando un sistema de ecuaciones lineales para modelar el flujo vehicular en una agitada intersección de tres vías de un campus universitario, un grupo de investigadores en Italia estudian los niveles de ruido acústico del tráfico vehicular. Para formular el sistema de ecuaciones, los "operadores" se colocaron en diversas ubicaciones a lo largo de la intersección y contaron el número de vehículos que pasaban. *(Fuente: Acoustical Noise Analysis in Road Intersections: A Case Study, Guarnaccia, Claudio, Recent Advances in Acoustics & Music, Proceedings of the 11th WSEAS International Conference on Acoustics & Music: Theory & Applications, Junio, 2010)*

ANÁLISIS DE REDES

Las redes compuestas de ramas y nodos se utilizan como modelos en campos tan variados como la economía, el análisis de tránsito vehicular y la ingeniería eléctrica. En estos modelos asumimos que el flujo total hacia un nodo es igual al flujo que sale de él. Por ejemplo, ya que el nodo mostrado en la figura 1.9 tiene 25 unidades que llegan a él, debe haber 25 unidades que salen. Esto es representado por la ecuación

$$x_1 + y_2 = 25.$$

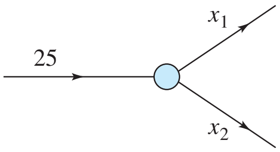


Figure 1.9

Dado que cada nodo en una red genera una ecuación lineal, el flujo puede ser analizado a través de una red compuesta por varios nodos al resolver un sistema de ecuaciones lineales. Este procedimiento se ilustra en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Análisis de una red

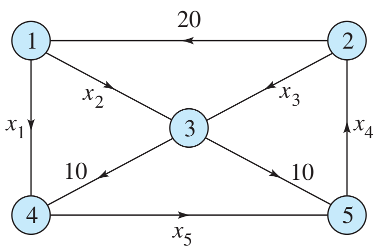


Figura 1.10

Establezca un sistema de ecuaciones lineales para representar la red mostrada en la figura 1.10 y resuelva el sistema.

SOLUCIÓN

Cada uno de los cinco nodos de la red genera una ecuación lineal, como se muestra a continuación.

$$\begin{array}{rcl l}
x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad & = & 20 & \text{Nodo 1} \\
x_3 - x_4 \qquad & = & -20 & \text{Nodo 2} \\
x_2 + x_3 \qquad\qquad & = & 20 & \text{Nodo 3} \\
x_1 \qquad\qquad\qquad - x_5 & = & -10 & \text{Nodo 4} \\
-x_4 + x_5 & = & -10 & \text{Nodo 5}
\end{array}$$

La matriz aumentada de este sistema es

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -20 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 20 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -10 \end{bmatrix}.$$

La eliminación Gauss-Jordan produce la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De la matriz anterior, usted puede ver que

$$x_1 - x_5 = -10, \quad x_2 + x_5 = 30, \quad x_3 - x_5 = -10, \quad \text{y} \quad x_4 - x_5 = 10.$$

Haciendo $t = x_5$, tenemos

$$x_1 = t - 10, \quad x_2 = -t + 30, \quad x_3 = t - 10, \quad x_4 = t + 10, \quad x_5 = t$$

donde t es cualquier número real. Por tanto, este sistema tiene un número infinito de soluciones.

En el ejemplo 5, suponga que puede controlar la cantidad de flujo a lo largo de la rama etiquetada como x_5. Empleando la solución dada en dicho ejemplo, entonces usted puede controlar el flujo representado para cada una de las demás variables. Por ejemplo, haciendo $t = 10$ puede reducir el flujo de x_1 y x_3 a cero, como se muestra en la figura 1.11.

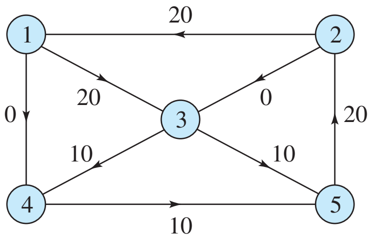


Figura 1.11

Puede ver cómo el tipo de análisis de red presentado en el ejemplo 5 puede utilizarse en problemas relacionados con el flujo vehicular por las calles de una ciudad o con el flujo de agua a través de un sistema de irrigación.

Otro tipo de red al que suele aplicarse este análisis de red es la eléctrica. En un análisis de este sistema se usan dos propiedades de las redes eléctricas conocidas como **Leyes de Kirchhoff**.

COMENTARIO

Una trayectoria *cerrada* es una sucesión de ramas tal que el punto inicial de la primera rama coincide con el punto terminal de la última.

1. Toda la corriente que fluye hacia una unión o nodo debe fluir hacia fuera de él.
2. La suma de los productos IR (I es la corriente y R la resistencia) alrededor de una trayectoria cerrada es igual al voltaje total en la trayectoria.

En una red eléctrica, la corriente se mide en amperes o amps (A), la resistencia en ohms (Ω) y el producto de la corriente y la resistencia en volts (V). Las baterías se representan por el símbolo . La barra vertical larga denota el flujo de corriente hacia fuera de la terminal. La resistencia se representa con el símbolo . La dirección de la corriente se indica con una flecha en la rama de la red.

EJEMPLO 6 Análisis de una red eléctrica

Determine las corrientes I_1, I_2 e I_3 para la red eléctrica mostrada en la figura 1.13.

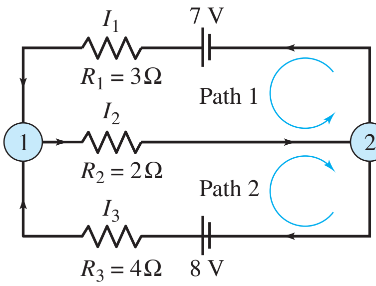


Figura 1.12

SOLUCIÓN

Aplicando la primera ley de Kirchhoff a cualquier nodo obtenemos

$$I_1 + I_3 = I_2 \qquad \text{Unión 1 o unión 2}$$

y aplicando la segunda ley a las dos trayectorias obtenemos

$$\begin{aligned} R_1I_1 + R_2I_2 &= 3I_1 + 2I_2 = 7 && \text{Path 1} \\ R_2I_2 + R_3I_3 &= 2I_2 + 4I_3 = 8. && \text{Path 2} \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos el siguiente sistema de tres ecuaciones lineales en las variables I_1, I_2 e I_3.

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 + I_3 &= 0 \\ 3I_1 + 2I_2 &= 7 \\ 2I_2 + 4I_3 &= 8 \end{aligned}$$

Aplicando la eliminación de Gauss-Jordan a la matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

obtenemos la forma escalonada por renglones reducida

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

lo que significa que $I_1 = 1$ amp, $I_2 = 2$ amps e $I_3 = 1$ amp.

EJEMPLO 7 Análisis de una red eléctrica

Determine las corrientes I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 e I_6 para la red eléctrica mostrada en la figura 1.13.

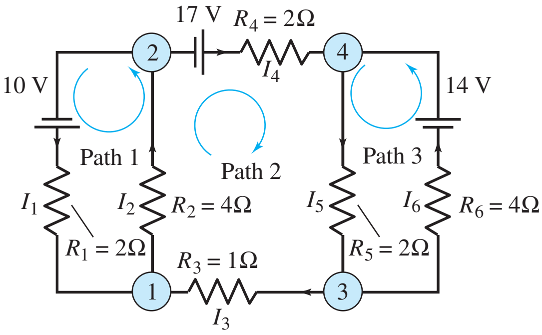


Figura 1.13

SOLUCIÓN

Aplicando la primera ley de Kirchhoff a los cuatro nodos se obtiene

$$\begin{array}{ll} I_1 + I_3 = I_2 & \text{Nodo 1} \\ I_1 + I_4 = I_2 & \text{Nodo 2} \\ I_3 + I_6 = I_5 & \text{Nodo 3} \\ I_4 + I_6 = I_5 & \text{Nodo 4} \end{array}$$

y aplicando la segunda ley de Kirchhoff a las tres trayectorias, obtenemos

$$\begin{array}{rcll} 2I_1 + 4I_2 & = & 10 & \text{Trayectoria 1} \\ 4I_2 + I_3 + 2I_4 + 2I_5 & = & 17 & \text{Trayectoria 2} \\ 2I_5 + 4I_6 & = & 14. & \text{Trayectoria 3} \end{array}$$

De este modo, obtenemos el siguiente sistema de siete ecuaciones lineales en las variables I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 e I_6.

$$\begin{array}{rcl} I_1 - I_2 + I_3 & = & 0 \\ I_1 - I_2 + I_4 & = & 0 \\ I_3 - I_5 + I_6 & = & 0 \\ I_4 - I_5 + I_6 & = & 0 \\ 2I_1 + 4I_2 & = & 10 \\ 4I_2 + I_3 + 2I_4 + 2I_5 & = & 17 \\ 2I_5 + 4I_6 & = & 14 \end{array}$$

La matriz aumentada para este sistema es

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 2 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 14 \end{bmatrix}.$$

Utilizando la eliminación de Gauss-Jordan, una aplicación gráfica o un programa de cómputo, usted puede resolver el sistema para obtener

$$I_1 = 1, \quad I_2 = 2, \quad I_3 = 1, \quad I_4 = 1, \quad I_5 = 3, \quad \text{y} \quad I_6 = 2$$

lo que significa $I_1 = 1$ amp, $I_2 = 2$ amps, $I_3 = 1$ amp, $I_4 = 1$ amp, $I_5 = 3$ amps e $I_6 = 2$ amps.

1.3 Ejercicios

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

Ajuste polinomial de curvas En los ejercicios 1 a 12, (a) determine el polinomio cuya gráfica pasa por los puntos dados y (b) dibuje la gráfica de la función, mostrando los puntos dados.

1. $(2, 5), (3, 2), (4, 5)$
2. $(0, 0), (2, -2), (4, 0)$
3. $(2, 4), (3, 6), (5, 10)$
4. $(2, 4), (3, 4), (4, 4)$
5. $(-1, 3), (0, 0), (1, 1), (4, 58)$
6. $(0, 42), (1, 0), (2, -40), (3, -72)$
7. $(-2, 28), (-1, 0), (0, -6), (1, -8), (2, 0)$
8. $(-4, 18), (0, 1), (4, 0), (6, 28), (8, 135)$
9. $(2006, 5), (2007, 7), (2008, 12)$
10. $(2005, 150), (2006, 180), (2007, 240), (2008, 360)$
11. $(0.072, 0.203), (0.120, 0.238), (0.148, 0.284)$
12. $(1, 1), (1.189, 1.587), (1.316, 2.080), (1.414, 2.520)$

13. Use $\operatorname{sen} 0 = 0$, $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ y $\operatorname{sen} \pi = 0$ para calcular $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

14. Use $\log_2 1 = 0$, $\log_2 2 = 1$ y $\log_2 4 = 2$ para calcular $\log_2 3$.

15. Encuentre la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(1, 3)$, $(-2, 6)$ y $(4, 2)$.

16. Encuentre la ecuación de la elipse que pasa por los puntos $(-5, 1)$, $(-3, 2)$, $(-1, 1)$ y $(-3, 0)$.

17. **Población** Según los datos del censo, la población de los Estados Unidos era de 249 millones en 1990, 281 millones en 2000 y 309 millones en 2010. Ajuste un polinomio de segundo grado que pase por estos tres puntos y utilice el resultado para predecir la población en 2020 y 2030. (Fuente: U.S. Census Bureau).

18. **Población** En la tabla mostrada a continuación aparecen los datos de la población de los Estados Unidos en 1940, 1950, 1960, y 1970. (Fuente: U.S. Census Bureau).

Año	1940	1950	1960	1970
Población (en millones)	132	151	179	203

(a) Encuentre un polinomio cúbico, es decir, de tercer grado, que se ajuste a estos datos y utilice el resultado para estimar la población en 1960.

(b) La población real en 1960 era de 179 millones, ¿Cómo se compara con su estimación?

19. **Ganancia neta** Las ganancias netas (en millones de dólares) de Microsoft de 2003 a 2010 se muestran en la siguiente tabla. (Fuente: Microsoft Corporación).

Año	2003	2004	2005	2006
Ganancias	10,526	11,330	12,715	12,599

Year	2007	2008	2009	2010
Ganancias	14,065	17,681	14,569	18,760

(a) Determine un sistema de ecuaciones para ajustar los datos de los años 2003, 2004, 2005 y 2006 a un modelo cúbico.

(b) Resuelva el sistema. ¿La solución genera un modelo razonable para predecir ganancias netas después de 2006?

20. **Ventas** Las ventas (en miles de millones de dólares) de los almacenes de Wal-Mart de 2002 a 2009 se muestran en la siguiente tabla. (Fuente: Wal-Mart).

Año	2002	2003	2004	2005
Venta	244.5	256.3	285.2	312.4

Año	2006	2007	2008	2009
Venta	345.0	374.5	401.2	405.0

(a) Determine un sistema de ecuaciones para ajustar los datos de los años 2002, 2003, 2004, 2005, y 2006 a un modelo cuártico.

(b) Resuelva el sistema. La solución genera un modelo razonable para predecir ventas después de 2006? Explique por qué.

21. **Demostración guiada** Demuestre que si un polinomio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ es cero para $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$ entonces $a_0 = a_1 = a_2 = 0$.

Comience escribiendo un sistema de ecuaciones lineales y resuélvalo para a_0, a_1 y a_2.

(i) Sustituya $x = -1$, 0 y 1 en $p(x)$.

(ii) Iguale el resultado a cero.

(iii) Resuelva el sistema de ecuaciones lineales resultante en las variables a_0, a_1 y a_2.

22. La afirmación del ejercicio 21 puede generalizarse: Si un polinomio

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$$

es cero para más de $n - 1$ valores de x, entonces

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0.$$

Utilice este resultado para demostrar que hay a lo sumo un polinomio de grado $n - 1$ (o menor) cuya gráfica pasa por n puntos del plano con diferentes coordenadas de x.

23. Cálculo La gráfica de un polinomio cúbico tiene tangentes horizontales en (1, –2) y (–1, 2). Encuentre la ecuación del polinomio cúbico y bosqueje su gráfica.

24. Cálculo La gráfica de una parábola pasa por los puntos (0, 1) y $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y tiene una tangente horizontal en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Encuentre la ecuación de la parábola y bosqueje su gráfica.

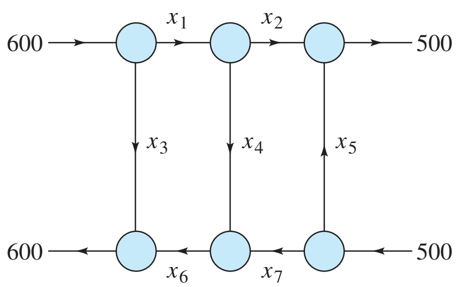
25. (a) La gráfica de una función pasa por los puntos (0, 1), $(2, \frac{1}{3})$ y $(4, \frac{1}{5})$. Determine una función cuadrática cuya gráfica pasa por estos puntos.

(b) Determine el polinomio p de grado 2 o menos que pasa por los puntos (0, 1),(2, 3) y (4, 5). Luego dibuje la gráfica de $y = 1/p(x)$ y compárela con la del polinomio encontrada en el ejercicio 8.

26. Escriba Intente ajustar la gráfica de un polinomio a los valores dados. ¿Qué pasa? ¿Por qué?

x	1	2	3	3	4
y	1	1	2	3	4

27. Análisis de redes Fluye agua por un acueducto (en miles de metros cúbicos por hora) como se muestra en la figura 1.15.

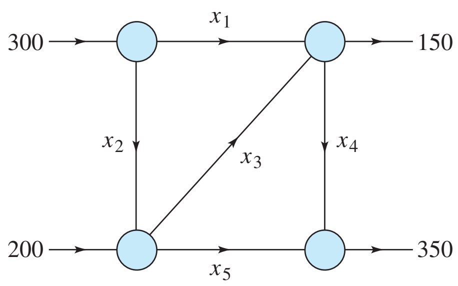


(a) Resuelva este sistema para el caudal representado por x_i, $i = 1, 2, \ldots, 7$.

(b) Encuentre el flujo de agua cuando $x_6 = x_7 = 0$.

(c) Determine el caudal de agua cuando $x_5 = 1000$ y $x_6 = 0$.

28. Análisis de redes El flujo de tráfico (en vehículos por hora) a través de una red de calles se muestra en la figura 1.16.

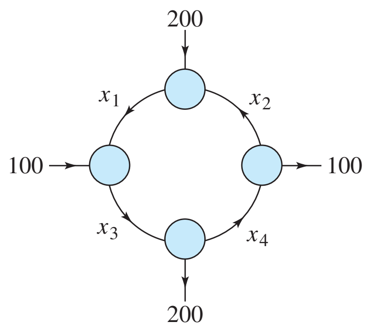


(a) Resuelva este sistema para x_i, $i = 1, 2, \ldots, 5$.

(b) Encuentre el flujo vehicular cuando $x_2 = 200$ y $x_3 = 50$.

(c) Encuentre el flujo vehicular cuando $x_2 = 150$ y $x_3 = 0$.

29. Análisis de redes El flujo de tráfico (en vehículos por hora) a través de una red de calles se muestra en la figura 1.17.

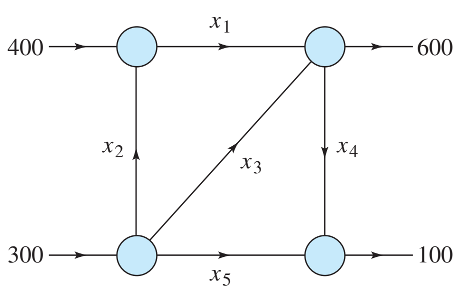


(a) Resuelva este sistema para x_i, $i = 1, 2, 3, 4$.

(b) Encuentre el flujo vehicular cuando $x_4 = 0$.

(c) Encuentre el flujo vehicular cuando $x_4 = 100$.

30. Análisis de redes El flujo de tráfico (en vehículos por hora) a través de una red de calles se muestra en la figura 1.18.

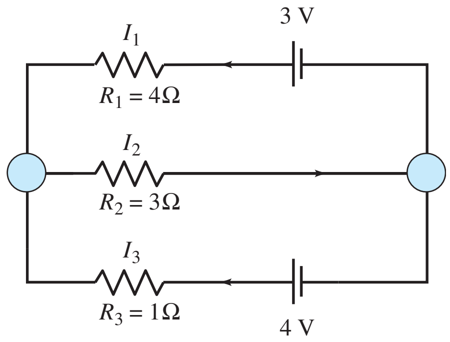


(a) Resuelva este sistema para x_i, $i = 1, 2, \ldots, 5$.

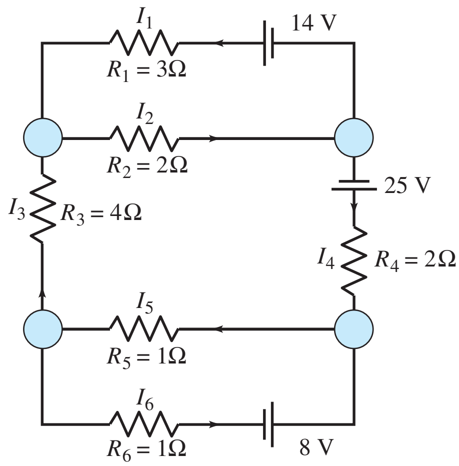
(b) Encuentre el flujo vehicular cuando $x_3 = 0$ y $x_5 = 100$.

(c) Encuentre el flujo vehicular cuando $x_3 = x_5 = 100$.

31. Análisis de redes Determine las corrientes I_1, I_2 e I_3 para el circuito eléctrico mostrado en la figura 1.19.



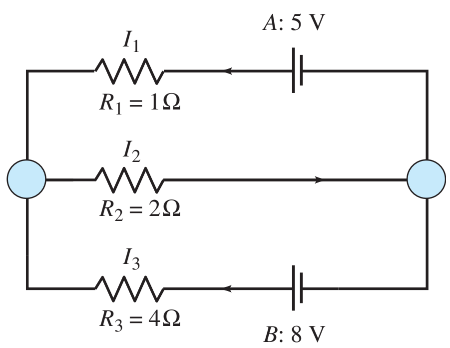
32. Análisis de redes Determine las corrientes I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 e I_6 para el circuito eléctrico mostrado en la figura 1.22.



33. Análisis de redes

(a) Determine las corrientes I_1, I_2 e I_3 para el circuito eléctrico mostrado en la figura 1.21.

(b) ¿Cómo se afecta el resultado cuando A cambia a 2 volts y B a 6 volts



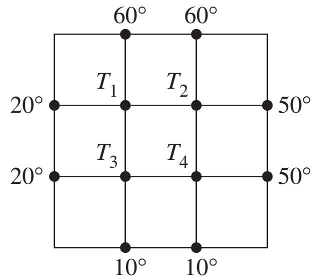
34. REMATE

(a) Explique cómo usar sistemas de ecuaciones lineales para el ajuste de curvas polinomiales.

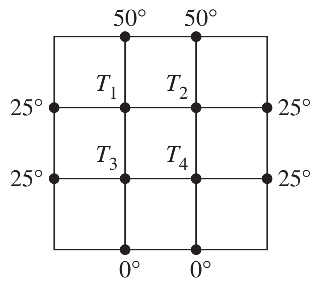
(b) Explique cómo usar use sistemas de ecuaciones lineales para realizar el análisis de redes.

Temperatura En los Ejercicios 35 y 36, la figura muestra las temperaturas límite (en grados Celsius) de una delgada placa de metal aislada. La temperatura estable en un nodo interior es aproximadamente igual que la media de las temperaturas en cuatro nodos circundantes. Use un sistema de ecuaciones lineales para aproximar las temperaturas interiores T_1, T_2, T_3 y T_4.

35.



36.



Descomposición en fracciones parciales En los Ejercicios 37 y 38, use un sistema de ecuaciones para escribir la descomposición en fracciones parciales de la expresión racional. Después resuelva el sistema usando matrices.

37. $\dfrac{4x^2}{(x+1)^2(x-1)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{C}{(x+1)^2}$

38. $\dfrac{3x^2 - 7x - 12}{(x+4)(x-4)^2} = \dfrac{A}{x+4} + \dfrac{B}{x-4} + \dfrac{C}{(x-4)^2}$

Cálculo En los ejercicios 39 y 40, encuentre los valores de x, y y λ tales que se satisfaga el sistema de ecuaciones. Tales sistemas se presentan en ciertos problemas de cálculo y λ es denominado multiplicador de Lagrange.

39.
$$\begin{aligned} 2x \qquad\quad + \lambda \qquad &= 0 \\ 2y + \lambda \qquad &= 0 \\ x + y \qquad - 4 &= 0 \end{aligned}$$

40.
$$\begin{aligned} 2y + 2\lambda + 2 &= 0 \\ 2x \qquad + \lambda + 1 &= 0 \\ 2x + y \qquad - 100 &= 0 \end{aligned}$$

1 Ejercicios de repaso

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

Ecuaciones lineales En los ejercicios 1 a 6, determine si la ecuación es lineal en x y y.

1. $2x - y^2 = 4$

2. $2xy - 6y = 0$

3. $(\text{sen } \pi)x + y = 2$

4. $e^{-2}x + 5y = 8$

5. $\dfrac{2}{x} + 4y = 3$

6. $\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{4} = 0$

Representación paramétrica En los ejercicios 7 y 8, determine la representación paramétrica del conjunto solución de la ecuación lineal.

7. $-4x + 2y - 6z = 1$

8. $3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0$

Sistema de ecuaciones lineales En los ejercicios 9 a 20, resuelva el sistema de ecuaciones lineales.

9. $\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 3x - y &= 0 \end{aligned}$

10. $\begin{aligned} x + y &= -1 \\ 3x + 2y &= 0 \end{aligned}$

11. $\begin{aligned} 3y &= 2x \\ y &= x + 4 \end{aligned}$

12. $\begin{aligned} x &= y + 3 \\ 4x &= y + 10 \end{aligned}$

13. $\begin{aligned} y + x &= 0 \\ 2x + y &= 0 \end{aligned}$

14. $\begin{aligned} y &= -4x \\ y &= x \end{aligned}$

15. $\begin{aligned} x - y &= 9 \\ -x + y &= 1 \end{aligned}$

16. $\begin{aligned} 40x_1 + 30x_2 &= 24 \\ 20x_1 + 15x_2 &= -14 \end{aligned}$

17. $\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{3}y &= 0 \\ 3x + 2(y + 5) &= 10 \end{aligned}$

18. $\begin{aligned} \tfrac{1}{3}x + \tfrac{4}{7}y &= 3 \\ 2x + 3y &= 15 \end{aligned}$

19. $\begin{aligned} 0.2x_1 + 0.3x_2 &= 0.14 \\ 0.4x_1 + 0.5x_2 &= 0.20 \end{aligned}$

20. $\begin{aligned} 0.2x - 0.1y &= 0.07 \\ 0.4x - 0.5y &= -0.01 \end{aligned}$

Tamaño de matriz En los ejercicios 21 y 22, determine el tamaño de la matriz.

21. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

Matriz aumentada En los ejercicios 23 y 24, encuentre el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales representado por la matriz aumentada.

23. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Forma escalonada por renglones En los ejercicios 25 a 28, determine si las matrices están en la forma escalonada por renglones. Si es así, determine si también está en la forma escalonada reducida.

25. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Sistema de ecuaciones lineales En los ejercicios 29 a 38, resuelva el sistema utilizando ya sea la eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás o con eliminación de Gauss-Jordan.

29. $\begin{aligned} -x + y + 2z &= 1 \\ 2x + 3y + z &= -2 \\ 5x + 4y + 2z &= 4 \end{aligned}$

30. $\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 10 \\ 2x - 3y - 3z &= 22 \\ 4x - 2y + 3z &= -2 \end{aligned}$

31. $\begin{aligned} 2x + 3y + 3z &= 3 \\ 6x + 6y + 12z &= 13 \\ 12x + 9y - z &= 2 \end{aligned}$

32. $\begin{aligned} 2x + y + 2z &= 4 \\ 2x + 2y &= 5 \\ 2x - y + 6z &= 2 \end{aligned}$

33. $\begin{aligned} x - 2y + z &= -6 \\ 2x - 3y &= -7 \\ -x + 3y - 3z &= 11 \end{aligned}$

34. $\begin{aligned} 2x + 6z &= -9 \\ 3x - 2y + 11z &= -16 \\ 3x - y + 7z &= -11 \end{aligned}$

35. $\begin{aligned} x + 2y + 6z &= 1 \\ 2x + 5y + 15z &= 4 \\ 3x + y + 3z &= -6 \end{aligned}$

36. $\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 - 19x_3 &= 34 \\ 3x_1 + 8x_2 - 31x_3 &= 54 \end{aligned}$

37. $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 &= -1 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 &= 12 \end{aligned}$

38. $\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 14 \\ 4x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 3 \\ 3x_3 + 8x_4 + 6x_5 &= 16 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_5 &= 0 \\ 2x_1 - x_3 &= 0 \end{aligned}$

Sistema de ecuaciones lineales En los Ejercicios 39–42, use una aplicación gráfica o un software computacional para resolver el sistema de ecuaciones lineales.

39. $$\begin{aligned} 3x + 3y + 12z &= 6 \\ x + y + 4z &= 2 \\ 2x + 5y + 20z &= 10 \\ -x + 2y + 8z &= 4 \end{aligned}$$

40. $$\begin{aligned} 2x + 10y + 2z &= 6 \\ x + 5y + 2z &= 6 \\ x + 5y + z &= 3 \\ -3x - 15y + 3z &= -9 \end{aligned}$$

41. $$\begin{aligned} 2x + y - z + 2w &= -6 \\ 3x + 4y + w &= 1 \\ x + 5y + 2z + 6w &= -3 \\ 5x + 2y - z - w &= 3 \end{aligned}$$

42. $$\begin{aligned} x + 2y + z + 3w &= 0 \\ x - y + w &= 0 \\ 5y - z + 2w &= 0 \end{aligned}$$

Sistema homogéneo En los ejercicios 43 a 46, resuelva el sistema de ecuaciones lineales homogéneo.

43. $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 8x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

44. $$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 7x_3 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 + 9x_3 &= 0 \end{aligned}$$

45. $$\begin{aligned} 2x_1 - 8x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 10x_2 + 7x_3 &= 0 \\ 10x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

46. $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 + \tfrac{1}{2}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

47. Determine el valor de k tal que el sistema de ecuaciones lineales sea inconsistente.
$$\begin{aligned} kx + y &= 0 \\ x + ky &= 1 \end{aligned}$$

48. Determine el valor de k tal que el sistema de ecuaciones lineales tenga exactamente una solución.
$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 0 \\ -x + y - z &= 0 \\ x + ky + z &= 0 \end{aligned}$$

49. Determine las condiciones de a y b tales que el sistema de ecuaciones lineales (a) no tenga solución, (b) tenga exactamente una solución y (c) tenga un número infinito de soluciones.
$$\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ ax + by &= -9 \end{aligned}$$

50. Determine (si es posible) las condiciones de a, b y c tales que el sistema de ecuaciones lineales (a) no tenga solución, (b) tenga exactamente una solución y (c) tenga un número infinito de soluciones.
$$\begin{aligned} 2x - y + z &= a \\ x + y + 2z &= b \\ 3y + 3z &= c \end{aligned}$$

51. Escriba Describa un método para demostrar que dos matrices son equivalentes por renglones. ¿Son las dos matrices siguientes equivalentes por renglones?
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 6 \\ 5 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

52. Escriba Describa todas las posibles matrices en forma escalonada reducida de 2×3. Respalde su respuesta con ejemplos.

53. Sea $n \geq 3$. Determine la forma escalonada por renglones reducida de la matriz $n \times n$.
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \cdots & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & n^2-n+3 & \cdots & n^2 \end{bmatrix}$$

54. Determine todos los valores de λ para los que el sistema de ecuaciones lineales homogéneo tenga soluciones no triviales.
$$\begin{aligned} (\lambda + 2)x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -2x_1 + (\lambda - 1)x_2 + 6x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + \lambda x_3 &= 0 \end{aligned}$$

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 55 y 56, determine si cada una de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, proporcione una razón o cite una expresión adecuada del texto. En caso contrario, proporcione un ejemplo que demuestre que la expresión es falsa en todos los casos o cite una expresión adecuada del texto.

55. (a) El conjunto solución de una ecuación lineal puede representarse paramétricamente sólo de una manera.
(b) Un sistema de ecuaciones lineales consistente puede tener un número infinito de soluciones.

56. (a) Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo debe tener al menos una solución.
(b) Un sistema de ecuaciones lineales con menos ecuaciones que variables siempre tiene al menos una solución.

57. Deportes En el Súper Tazón I, enero 15 de 1967, los Empacadores de Green Bay derrotaron a los Jefes de Kansas City por un marcador de 35 a 10. El total de puntos anotados provinieron de una combinación de touchdowns, patadas de punto extra y goles de campo con un valor de 6, 1 y 3 tres puntos, respectivamente. El número de anotaciones y de patadas de puntos extra fue el mismo. El número de anotaciones fue cuando mucho seis veces el de goles de campo. Encuentre el número de touchdowns, patadas de punto extra y goles de campo anotados. (Fuente: National Football League).

58. **Agricultura** Una mezcla de 6 galones del compuesto A, 8 galones del compuesto B y 13 galones del compuesto C es necesaria para matar una plaga de insectos. El aspersor comercial X contiene 1, 2 y 2 partes, respectivamente, de estos compuestos químicos. El aspersor comercial Y contiene sólo el compuesto C. El aspersor comercial Z contiene los compuestos A, B y C en las mismas cantidades. ¿Cuánto de cada tipo de aspersor comercial es necesario para obtener la mezcla deseada?

Descomposición en fracciones parciales En los ejercicios 59 y 60, utilice un sistema de ecuaciones para escribir la descomposición en fracciones parciales de la expresión racional. Después, resuelva el sistema usando matrices.

59. $\dfrac{8x^2}{(x-1)^2(x+1)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{(x-1)^2}$

60. $\dfrac{3x^2+3x-2}{(x+1)^2(x-1)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{(x+1)^2}$

Ajuste de curvas polinomiales En los ejercicios 61 y 62, (a) determine el polinomio cuya gráfica pasa por los puntos dados y (b) bosqueje la gráfica del polinomio, mostrando los puntos dados.

61. (2, 5), (3, 0), (4, 20)

62. (–1, –1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)

63. **Ventas** Una compañía tiene ventas (medidas en millones) de \$50, \$60 y \$75 durante tres años consecutivos. Determine una función cuadrática que se ajuste a estos datos y utilícela para predecir las ventas durante el cuarto año.

64. El polinomio

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

es cero cuando $x = 1, 2, 3$ y 4. ¿Cuáles son los valores de a_0, a_1, a_2 y a_3?

65. **Población de venados** Un equipo de administración de la vida silvestre estudió la población de venados en una pequeña extensión de la reserva para la vida silvestre. La población y el número de años desde que el estudio comenzó se muestran en la siguiente tabla.

Año	0	4	80
Población	80	68	30

(a) Determine un sistema de ecuaciones lineales para ajustar los datos a un polinomio cuadrático.

(b) Resuelva el sistema.

(c) Utilice una aplicación gráfica para ajustar un modelo cuadrático a los datos.

(d) Compare el polinomio cuadrático del inciso (b) con el modelo del inciso (c).

(e) Cite la expresión del texto que comprueba sus resultados.

66. **Movimiento vertical** Un objeto que se mueve verticalmente está a las alturas dadas en los tiempos específicos. Encuentre la ecuación de posición

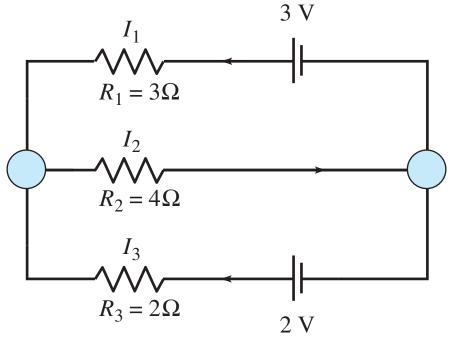
$$s = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$$

para el objeto.

(a) A $t = 1$ segundo, $s = 134$ pies
A $t = 2$ segundos, $s = 86$ pies
A $t = 3$ segundos, $s = 6$ pies

(b) A $t = 1$ segundo, $s = 184$ pies
A $t = 2$ segundos, $s = 116$ pies
A $t = 3$ segundos, $s = 16$ pies

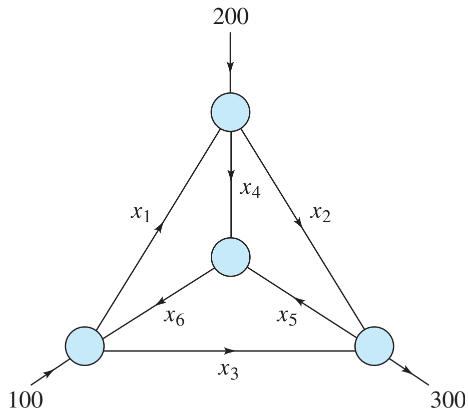
67. **Análisis de redes** Determine las corrientes I_1, I_2 e I_3 para el circuito eléctrico mostrado en la figura 1.23.



68. **Análisis de redes** El flujo a través de una red se muestra en la figura 1.24.

(a) Resuelva el sistema para x_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$.

(b) Determine el flujo cuando $x_3 = 100$, $x_5 = 50$, y $x_6 = 50$.



1 Proyectos

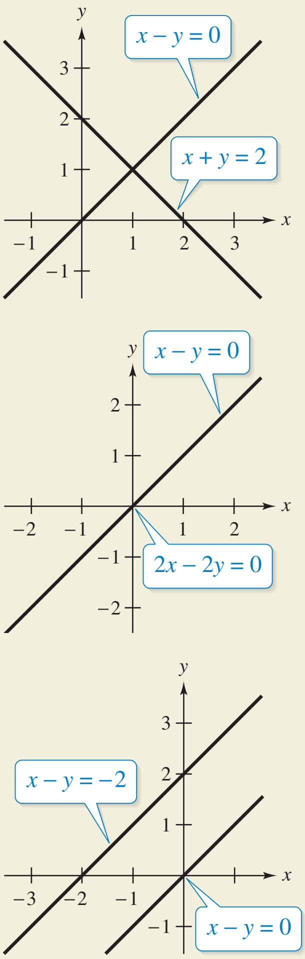
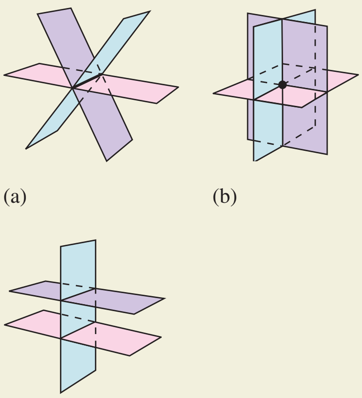


Figura 1.14



(a) (b)

(c)

Figura 1.15

1 Graficando Ecuaciones Lineales

Usted vio en la sección 1.1 que un sistema de dos ecuaciones lineales en dos variables x y y puede representarse geométricamente como dos líneas en el plano. Estas líneas pueden intersecarse en un punto, coincidir o bien ser paralelas, tal como se indica en la figura 1.14

1. Considere el siguiente sistema, donde a y b son constantes.

$$\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ ax + by &= 6 \end{aligned}$$

(a) Determine los valores de a y b para los cuales el sistema resultante tiene una única solución.

(b) Determine los valores de a y b para los cuales el sistema resultante tiene un número infinito de soluciones.

(c) Determine los valores de a y b para los cuales el sistema resultante no tiene solución.

(d) Grafique las líneas resultantes para cada uno de los sistemas en los incisos (a), (b) y (c).

2. Ahora considere un sistema de tres ecuaciones lineales en x, y y z. Cada ecuación representa un plano en un sistema coordenado tridimensional.

(a) Encuentre un ejemplo de un sistema representado por tres planos que se intersecan en una recta, como se muestra en la figura 1.15(a).

(b) Encuentre un ejemplo de un sistema representado por tres planos que se intersecan en un punto, como se muestra en la figura 1.15(b).

(c) Encuentre un ejemplo de un sistema representado por tres planos que no tienen una intersección común, como se muestra en la figura 1.15(c).

(d) ¿Existen otras configuraciones de tres planos no cubiertas por los tres ejemplos en los incisos (a), (b) y (c)?

2 Sistemas de ecuaciones subdeterminados y sobredeterminados

El siguiente sistema de ecuaciones se llama **subdeterminado**, ya que tiene más variables que ecuaciones.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= -3 \end{aligned}$$

De manera similar, el siguiente sistema se denomina **sobredeterminado**, pues contiene más ecuaciones que variables.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 5 \\ 2x_1 - 2x_2 &= -3 \\ -x_1 + 7x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Usted puede explorar si el número de variables y el número de ecuaciones tienen alguna relación con la consistencia de un sistema de ecuaciones lineales. Para los ejercicios 1-4, si la respuesta es afirmativa, proporcione un ejemplo. En caso contrario, explique por qué la respuesta es no.

1. ¿Puede plantear un sistema lineal consistente subdeterminado?
2. ¿Puede plantear un sistema lineal consistente sobredeterminado?
3. ¿Puede plantear un sistema lineal inconsistente subdeterminado?
4. ¿Puede plantear un sistema lineal inconsistente sobredeterminado?
5. Explique por qué esperaría que un sistema lineal sobredeterminado fuera inconsistente. ¿Este siempre debe ser el caso?
6. Explique por qué esperaría que un sistema lineal subdeterminado tuviera un número infinito de soluciones. ¿Este siempre debe ser el caso?

2 Matrices

Encriptación de datos (p. 87)

Dinámica de fluidos computacional (p. 79)

Deflexión de vigas (p. 64)

Recuperación de información (p. 58)

Calendarios de la tripulación de vuelo (p. 47)

2.1 Operaciones con matrices

- Determine si dos matrices son iguales.
- Sume y reste matrices y multiplique una matriz por una escalar.
- Multiplique dos matrices.
- Use matrices para resolver un sistema de ecuaciones lineales.
- Particione una matriz y escriba una combinación lineal de vectores columna.

OPERACIONES CON MATRICES

En la Sección 1.2 usted utilizó matrices para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Este capítulo introduce algunos fundamentos de teoría de matrices y aplicaciones adicionales de matrices.

Por un acuerdo matemático común, las matrices se pueden representar en alguna de las siguientes tres formas:

1. Una matriz puede denotarse por una letra mayúscula como A, B o C
2. Una matriz puede denotarse por un elemento representativo escrito entre corchetes $[a_{ij}]$, $[b_{ij}]$ o $[c_{ij}]$.
3. Una matriz puede denotarse como por un arreglo rectangular de números

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Como se mencionó en el capítulo 1, las matrices en este texto son fundamentalmente *matrices reales*. Es decir, sus elementos son números reales.

Decimos que dos matrices son *iguales* si sus elementos correspondientes son iguales.

Definición de la igualdad de matrices

Dos matrices $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ son iguales si tienen el mismo tamaño ($m \times n$) y $a_{ij} = b_{ij}$ para $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$.

COMENTARIO

La frase "si y sólo si" significa que la expresión es válida en ambas direcciones. Por ejemplo, "*p* si y sólo si *q*" quiere decir que *p* implica a *q* y *q* implica a *p*.

EJEMPLO 1 **Igualdad de matrices**

Considere las cuatro matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ x & 4 \end{bmatrix}.$$

Las matrices A y B **no** son iguales, ya que tienen diferente tamaño. De manera similar, B y C tampoco lo son. Las matrices A y D son iguales si y sólo si $x = 3$.

Una matriz que sólo tiene una columna, como la matriz B del Ejemplo 1, se denomina **matriz columna** o **vector columna**. De manera similar, una matriz que sólo tiene un renglón, como la matriz C del ejemplo 1, se denomina **matriz renglón** o **vector renglón**. A menudo se utilizan letras negritas minúsculas para designar matrices columna o renglón. En este caso, la matriz A del ejemplo 1 puede dividirse en dos matrices columna $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ de la siguiente manera.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{array}\right] = [\mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_2]$$

SUMA Y RESTA DE MATRICES Y MULTIPLICACIÓN ESCALAR

Usted puede **sumar** dos matrices (del mismo tamaño) sumando sus elementos correspondientes.

Definición de suma de matrices

Si $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ son matrices de tamaño $m \times n$, entonces su **suma** es la matriz $m \times n$ dada por $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$.

La suma de dos matrices de diferente tamaño no está definida.

EJEMPLO 2 Suma de matrices

a. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+1 & 2+3 \\ 0+(-1) & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ no está definida.

COMENTARIO

A menudo es conveniente reescribir una matriz B como cA, factorizando c de cada uno de los elementos de la matriz B. Por ejemplo, el escalar $\frac{1}{2}$ se ha factorizado de la siguiente matriz.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cuando trabajamos con matrices nos referimos a los números reales como **escalares**. Usted puede multiplicar una matriz A por un escalar c, multiplicando cada elemento de la matriz A por el escalar c.

Definición de la multiplicación por un escalar

Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz de tamaño $m \times n$ y c es un escalar, entonces el **múltiplo escalar** de A por c es la matriz de tamaño $m \times n$ dada por

$$cA = [ca_{ij}].$$

Podemos utilizar $-A$ para representar el producto escalar $(-1)A$. Si A y B son del mismo tamaño, entonces $A - B$ representa la suma de A y $(-1)B$. Es decir $A - B = A + (-1)B$.

EJEMPLO 3 Multiplicación por un escalar y resta de matrices

Para las matrices A y B, determine (a) $3A$, (b) $-B$ y (c) $3A - B$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

a. $3A = 3\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(1) & 3(2) & 3(4) \\ 3(-3) & 3(0) & 3(-1) \\ 3(2) & 3(1) & 3(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 12 \\ -9 & 0 & -3 \\ 6 & 3 & 6 \end{bmatrix}$

b. $-B = (-1)\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$

c. $3A - B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 12 \\ -9 & 0 & -3 \\ 6 & 3 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 12 \\ -10 & 4 & -6 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

La tercera operación básica es la **multiplicación de matrices**. Para ver lo utilizada que es esta operación, considere la siguiente aplicación, en la cual las matrices son de mucha utilidad para organizar información.

Un estadio de futbol tiene tres áreas concesionadas para locales comerciales, ubicadas en el sur, norte y oeste del mismo. Los artículos más vendidos son los cacahuates, los hot dogs y los refrescos. Las ventas para cierto día son registradas en la primera matriz abajo y los precios (en dólares) de los tres artículos aparecen en la segunda.

Número de artículos vendidos

$$\begin{array}{l} \\ \text{Local sur} \\ \text{Local norte} \\ \text{Local oeste} \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Cacahuates} & \text{Hot dogs} & \text{Refrescos} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 120 & 250 & 305 \\ 207 & 140 & 419 \\ 29 & 120 & 190 \end{bmatrix} \end{array}
\quad
\begin{array}{c} \text{Precio de venta} \\ \begin{bmatrix} 2.00 \\ 3.00 \\ 2.75 \end{bmatrix} \end{array}
\begin{array}{l} \\ \text{Cacahuates} \\ \text{Hot Dogs} \\ \text{Sodas} \end{array}$$

Para calcular el total de ventas de los tres productos más vendidos en el local sur, multiplique cada elemento en el primer renglón de la matriz de la izquierda por el precio correspondiente en la matriz columna de la derecha y sume los resultados. Las ventas del local sur son

$$(120)(2.00) + (250)(3.00) + (305)(2.75) = \$1828.75 \qquad \text{Ventas local sur}$$

De manera similar, calculamos las ventas de los otros dos locales de la siguiente forma.

$$(207)(2.00) + (140)(3.00) + (419)(2.75) = \$1986.25 \qquad \text{Ventas local norte}$$
$$(29)(2.00) + (120)(3.00) + (190)(2.75) = \$940.50 \qquad \text{Ventas local oeste}$$

Los cálculos anteriores son ejemplos de la multiplicación de matrices. Usted puede escribir el producto de la matriz de 3×3 indicando el número de artículos vendidos y la matriz de 3×1 indicando los precios de venta, de la siguiente manera.

$$\begin{bmatrix} 120 & 250 & 305 \\ 207 & 140 & 419 \\ 29 & 120 & 190 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2.00 \\ 3.00 \\ 2.75 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1828.75 \\ 1986.25 \\ 940.50 \end{bmatrix}$$

El producto de estas matrices es la matriz de 3×1, que nos da el total de las ventas por cada uno de los tres locales.

La definición general del producto de dos matrices mostrada abajo, se basa en las ideas recién desarrolladas. A primera vista esta definición puede parecer inusual, no obstante, usted verá más adelante que tiene muchas aplicaciones prácticas.

Definición de la multiplicación de matrices

Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz de $m \times n$ y $B = [b_{ij}]$ es una matriz $n \times p$, entonces el **producto** AB es una matriz de $m \times p$

$$AB = [c_{ij}]$$

donde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdot\cdot\cdot + a_{in}b_{nj}.$$

Esta definición significa que el elemento en el i-ésimo renglón y en la j-ésima columna del producto AB se obtiene al multiplicar los elementos del i-ésimo renglón de A por los elementos correspondientes de la j-ésima columna de B y luego sumar los resultados. El siguiente ejemplo ilustra este proceso.

EJEMPLO 4 Determinación del producto de dos matrices

Encuentre el producto AB, donde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN

Primero, observe que el producto AB está definido porque el tamaño de A es 3×2 y el de B es 2×2. Además, el producto AB es de tamaño 3×2 y tiene la forma

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}.$$

Para determinar c_{11} (el elemento en el primer renglón y en la primera columna del producto), multiplique los elementos correspondientes en el primer renglón de A y la primera columna de B. Es decir

$$c_{11} = (-1)(-3) + (3)(-4) = -9$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}.$$

Similarmente, para determinar c_{12} multiplique los elementos correspondientes en el primer renglón de A y la segunda columna de B para obtener

$$c_{12} = (-1)(2) + (3)(1) = 1$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}.$$

Siguiendo este patrón obtenemos los siguientes resultados.

$$\begin{aligned} c_{21} &= (4)(-3) + (-2)(-4) = -4 \\ c_{22} &= (4)(2) + (-2)(1) = 6 \\ c_{31} &= (5)(-3) + (0)(-4) = -15 \\ c_{32} &= (5)(2) + (0)(1) = 10 \end{aligned}$$

El producto es

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ -4 & 6 \\ -15 & 10 \end{bmatrix}.$$

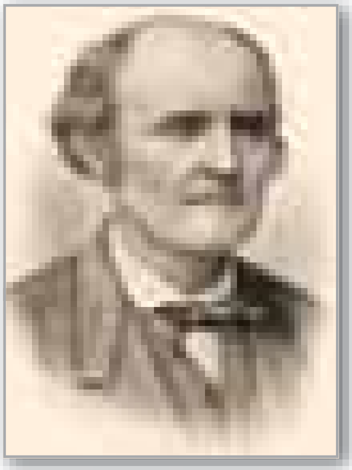
Asegúrese de entender que el producto de dos matrices está definido cuando el número de columnas de la primera matriz es igual al número de renglones de la segunda matriz; es decir,

$$\underset{m \times n}{A} \quad \underset{n \times p}{B} \quad = \quad \underset{m \times p}{AB.}$$

igual

tamaño de AB

Así, el producto BA de las matrices del ejemplo 4 no está definido.



Arthur Cayley (1821-1895)

El matemático inglés Arthur Cayley es reconocido por proporcionar una definición abstracta de una matriz. Cayley era egresado de la Universidad de Cambridge y era abogado de profesión. Comenzó su revolucionario trabajo en matrices mientras estudiaba la teoría de transformaciones. Cayley también fue fundamental para el desarrollo de los determinantes (mismos que se discuten en el Capítulo 3). Se reconoce a Cayley y dos matemáticos estadounidenses, Benjamin Peirce (1809-1880) y su hijo, Charles S. Peirce (1839-1914), por el desarrollo del "álgebra matricial."

Bettmann/CORBIS

El patrón general de la multiplicación de matrices es el siguiente. Para obtener el elemento del i-ésimo renglón y la j-ésima columna del producto AB, use el i-ésimo renglón de A y la j-ésima columna de B.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & \cdots & b_{3j} & \cdots & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = c_{ij}$$

DESCUBRIMIENTO

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Calcule $A + B$ y $B + A$. ¿La suma de una matriz es conmutativa?
2. Calcule AB y BA. ¿La multiplicación de matrices es conmutativa?

EJEMPLO 5 Multiplicación de matrices

a. $$\underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}} \underset{3\times 3}{\begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}} = \underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} -5 & 7 & -1 \\ -3 & 6 & 6 \end{bmatrix}}$$

b. $$\underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}} \underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}}$$

c. $$\underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} \underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}} = \underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

d. $$\underset{1\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}} \underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \underset{1\times 1}{\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}}$$

e. $$\underset{3\times 1}{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}} \underset{1\times 3}{\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}} = \underset{3\times 3}{\begin{bmatrix} 2 & -4 & -6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}}$$

Note la diferencia entre los dos productos en los incisos (d) y (e) del ejemplo 5. En general, la multiplicación de matrices no es conmutativa. Es decir, casi nunca se cumple que el producto AB sea igual al producto BA. (Véase la sección 2.2 para un análisis más profundo de la no conmutatividad de la multiplicación de matrices.)

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Una aplicación práctica de la multiplicación de matrices es la representación de un sistema de ecuaciones lineales. Observe cómo el sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

puede escribirse como la ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde A es la matriz de coeficientes del sistema y $\mathbf{x}$ y $\mathbf{b}$ son matrices columna.

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}} \underset{\mathbf{x}}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}} \underset{=}{=} \underset{\mathbf{b}}{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}}$$

EJEMPLO 6 Resolución de un sistema de ecuaciones lineales

Resuelva la ecuación matricial $A\mathbf{x} = 0$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN

Como un sistema de ecuaciones lineales, $A\mathbf{x} = 0$ lo representamos como

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Utilizando la eliminación de Gauss-Jordan en la matriz aumentada de este sistema, obtenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} & 0 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, el sistema tiene un número infinito de soluciones. En este caso, una elección conveniente de parámetro es $x_3 = 7t$, y puede escribir el conjunto solución como

$$x_1 = t, \quad x_2 = 4t, \quad x_3 = 7t, \quad t \text{ es cualquier número real.}$$

En términos de matrices, encontramos que la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tiene un número infinito de soluciones, representado por

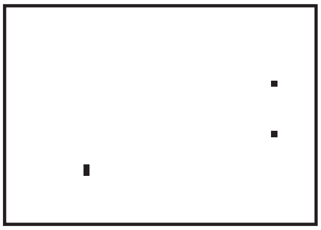
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 4t \\ 7t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad t \text{ es cualquier escalar.}$$

Esto es, cualquier múltiplo escalar de la matriz columna de la derecha es una solución. A continuación se muestran algunas soluciones:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 14 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ y } \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -7 \end{bmatrix}.$$

NOTA TECNOLÓGICA

Muchas aplicaciones gráficas y programas de cómputo pueden ejecutar la suma de matrices, multiplicación escalar y la multiplicación de matrices. Si usted utiliza una aplicación gráfica, sus pantallas para el Ejemplo 6 se verán como:



Los comandos y la sintaxis de programación para estas aplicaciones/programas del Ejemplo 6 están disponibles en **Online Technology Guide**, college.cengage.com/pic/larsonEL6e.

PARTICIÓN DE MATRICES

El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ puede representarse de una forma más conveniente, dividiendo las matrices A y $\mathbf{x}$ de la siguiente manera. Si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

son las matrices de coeficientes, la matriz columna de incógnitas y la matriz del lado derecho, respectivamente, del sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de tamaño $m \times n$, entonces podemos escribir

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \mathbf{b}.$$

En otras palabras

$$A\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

donde $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots,$ an son las columnas de la matriz A. La expresión

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Se llama **combinación lineal** de las matrices columna $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ con **coeficientes** $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Combinaciones lineales de vectores columna

La matriz producto $A\mathbf{x}$ es una combinación lineal de los vectores columna $a_1, a_2, \ldots$ a_n que forma la matriz coeficiente de A.

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Adicionalmente, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente si y sólo si $\mathbf{b}$ se puede expresar como una combinación lineal tal, en la que los coeficientes de la combinación lineal son una solución del sistema.

EJEMPLO 7 Resolución de un sistema de ecuaciones lineales

El sistema lineal

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 3 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 &= 6 \end{aligned}$$

puede reescribirse como una ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de la siguiente forma

$$x_1\begin{bmatrix}1\\4\\7\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}2\\5\\8\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}3\\6\\9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\3\\6\end{bmatrix}$$

Aplicando la eliminación gaussiana podemos demostrar que este sistema tiene un número infinito de soluciones, una de las cuales es $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ y $x_3 = -1$.

$$1\begin{bmatrix}1\\4\\7\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}2\\5\\8\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}3\\6\\9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\3\\6\end{bmatrix}$$

Es decir, $\mathbf{b}$ puede expresarse como una combinación lineal de las columnas de A. Esta representación de un vector columna en función de otros es un tema fundamental del álgebra lineal.

El dividir A en columnas y x en renglones, se emplea a menudo para reducir una matriz de tamaño $m \times n$ a matrices más pequeñas. Por ejemplo, la matriz abajo a la izquierda puede dividirse como se muestra en la matriz a la derecha.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 0\\ -1 & -2 & 2 & 1\end{bmatrix} \qquad \left[\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 0 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 0\\ \hline -1 & -2 & 2 & 1\end{array}\right]$$

La matriz también puede dividirse en matrices columna

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c}1 & 2 & 0 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 0\\ -1 & -2 & 2 & 1\end{array}\right] = [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3 \quad \mathbf{c}_4]$$

o matrices renglón

$$\left[\begin{array}{cccc}1 & 2 & 0 & 0\\ \hline 3 & 4 & 0 & 0\\ \hline -1 & -2 & 2 & 1\end{array}\right] = \begin{bmatrix}\mathbf{r}_1\\ \mathbf{r}_2\\ \mathbf{r}_3\end{bmatrix}.$$

ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

Muchas aplicaciones en la vida real de los sistemas lineales involucran enormes cantidades de ecuaciones y variables. Por ejemplo, un problema con los calendarios de la tripulación de vuelo de American Airlines requirió la manipulación de matrices con 837 renglones y más de 12,750,000 columnas. Esta aplicación de *programación lineal* exigía que el problema se dividiera en piezas más pequeñas y después se resolviera en una supercomputadora Cray. *(Fuente: Very Large-Scale Linear Programming. A Case Study in Combining Interior Point y Simplex Methods, Bixby, Robert E., et al., Operations Research, 40, no. 5)*

2.1 Ejercicios

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

Igualdad de matrices En los ejercicios 1-4, encuentre x y y

1. $\begin{bmatrix} x & -2 \\ 7 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 7 & 22 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} -5 & x \\ y & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 13 \\ 12 & 8 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 16 & 4 & 5 & 4 \\ -3 & 13 & 15 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 2x+1 & 4 \\ -3 & 13 & 15 & 3x \\ 0 & 2 & 3y-5 & 0 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} x+2 & 8 & -3 \\ 1 & 2y & 2x \\ 7 & -2 & y+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+6 & 8 & -3 \\ 1 & 18 & -8 \\ 7 & -2 & 11 \end{bmatrix}$

Operaciones con matrices En los ejercicios 5 a 12, determine (a) $A + B$, (b) $A - B$, (c) $2A$, (d) $2A - B$ y (e) $B + \frac{1}{2}A$.

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 4 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

9. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

11. $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

13. Encuentre (a) c_{21} y (b) c_{13}, donde $C = 2A - 3B$,
$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 0 & -5 & 1 \end{bmatrix}$.

14. Encuentre (a) c_{23} y (b) c_{32}, donde $C = 5A + 2B$,
$A = \begin{bmatrix} 4 & 11 & -9 \\ 0 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -4 & 6 & 11 \\ -6 & 4 & 9 \end{bmatrix}$.

15. Resuelva para x, y y z en la ecuación matricial
$$4\begin{bmatrix} x & y \\ z & -1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} y & z \\ -x & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 4 & x \\ 5 & -x \end{bmatrix}.$$

16. Resuelva para x, y, z y w en la ecuación matricial
$$\begin{bmatrix} w & x \\ y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} y & w \\ z & x \end{bmatrix}.$$

Determinación de los productos de dos matrices En los ejercicios 17 a 30, halle (a) AB y (b) BA (si están definidas).

17. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$

18. $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

19. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \\ -4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

20. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & -1 & 8 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

21. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 8 & -1 & 7 \end{bmatrix}$

22. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \\ 4 & -2 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

23. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

24. $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

25. $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

26. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

27. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 8 & -1 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

28. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

29. $A = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 10 & 12 \end{bmatrix}$

30. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 & 4 \\ 6 & 13 & 8 & -17 & 20 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

Tamaño de la matriz En los ejercicios 31 a 38, sean A, B, C, D y E matrices con el tamaño dado.

A: 3 × 4 B: 3 × 4 C: 4 × 2 D: 4 × 2 E: 4 × 3

Si está definida, determine el tamaño de la matriz. Si no lo está, proporcione una explicación.

31. $A + B$
32. $C + E$
33. $\frac{1}{2}D$
34. $-4A$
35. AC
36. BE
37. $E - 2A$
38. $2D + C$

Resolución de una ecuación matricial En los ejercicios 39 y 40, resuelva la ecuación matricial $Ax = 0$.

39. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

40. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Resolución de una sistema de ecuaciones lineales En los ejercicios 41 a 48, escriba el sistema de ecuaciones lineales en la forma $Ax = b$ y resuelva esta ecuación matricial para x.

41. $\begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 4 \\ -2x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$

42. $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 5 \\ x_1 + 4x_2 &= 10 \end{aligned}$

43. $\begin{aligned} -2x_1 - 3x_2 &= -4 \\ 6x_1 + x_2 &= -36 \end{aligned}$

44. $\begin{aligned} -4x_1 + 9x_2 &= -13 \\ x_1 - 3x_2 &= 12 \end{aligned}$

45. $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 &= -6 \\ 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 &= 17 \end{aligned}$

46. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 &= -1 \\ -x_1 + 2x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$

47. $\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= -20 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 &= 8 \\ -2x_2 + 5x_3 &= -16 \end{aligned}$

48. $\begin{aligned} x_1 - x_2 + 4x_3 &= 17 \\ x_1 + 3x_2 &= -11 \\ -6x_2 + 5x_3 &= 40 \end{aligned}$

Escribir una combinación lineal En los ejercicios 49 a 52, exprese la matriz columna b como una combinación lineal de las columnas de A.

49. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix}$

50. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

51. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

52. $A = \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 3 & 4 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -22 \\ 4 \\ 32 \end{bmatrix}$

Resolución de una ecuación matricial En los ejercicios 53 y 54, resuelva la ecuación matricial para A.

53. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

54. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Resolución de una ecuación matricial En los ejercicios 55 y 56, resuelva la ecuación matricial para a, b, c y d.

55. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 19 & 2 \end{bmatrix}$

56. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 17 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

Matriz diagonal En los ejercicios 57 y 58, encuentre el producto AA para la matriz diagonal. Una matriz cuadrada

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_{11}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a_{22}} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{a_{33}} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \boldsymbol{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

se llama matriz diagonal si todos los elementos que no están en la diagonal principal son cero.

57. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
58. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Determinación de los productos de matrices diagonal En los ejercicios 59 y 60, determine los productos AB y BA para las matrices diagonales.

59. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

60. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$

61. Demostración guiada. Pruebe que si A y B son matrices diagonales (del mismo tamaño), entonces $AB = BA$.

Inicio: Para demostrar que las matrices AB y BA son iguales, primero necesita demostrar que sus elementos correspondientes son iguales.

(i) Empiece su demostración haciendo que $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ sean dos matrices diagonales $n \times n$.

(ii) El ij-ésimo elemento del producto AB es $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$

(iii) Evalúe el elemento c_{ij} para los casos en los que $i \neq j$ e $i = j$.

(iv) Repita este análisis para el producto BA.

62. Escriba Sean A y B matrices de 3×3, donde A es diagonal.

(a) Describa el producto AB. Ilustre su respuesta con ejemplos.

(b) Describa el producto BA. Ilustre su respuesta con ejemplos.

(c) ¿Cómo cambian los resultados de los incisos (a) y (b) si los elementos de la diagonal de A son iguales?

Traza de una matriz En los ejercicios 63 a 66, determine la traza de la matriz. La traza de una matriz A de $n \times n$ es la suma de los elementos de la diagonal principal. Es decir $\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$.

63. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ **64.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

65. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ **66.** $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

67. Prueba Demuestre que cada una de las expresiones es verdadera si A y B son matrices cuadradas de tamaño n y c es un escalar.

(a) $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$

(b) $\text{Tr}(cA) = c\text{Tr}(A)$

68. Prueba Demuestre que si A y B son matrices cuadradas de tamaño n, entonces $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

69. Determine las condiciones en w, x, y y z tales que $AB = BA$ en las siguientes matrices.

$$A = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

70. Verifique $AB = BA$ para las siguientes matrices.

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

71. Demuestre que la ecuación matricial no tiene solución.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

72. Demuestre que no existen matrices de 2×2 que satisfagan la ecuación matricial

$$AB - BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

73. Exploración Sea $i = \sqrt{-1}$ y sea

$$A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine A^2, A^3 y A^4. (*Nota:* $A^2 = AA$, $A^3 = AAA = A^2A$, etc.) Identifique cualquier similitud entre i_2, i_3 e i_4.

(b) Determine e identifique B^2.

74. Demostración guiada. Pruebe que si el producto AB es una matriz cuadrada, entonces el producto BA está definido.

Inicio: Para probar que el producto BA está definido, necesita demostrar que el número de columnas de B es igual al número de renglones de A.

(i) Comience su demostración haciendo notar que el número de columnas de A es igual al número de renglones de B.

(ii) Después usted puede suponer que A es de tamaño $m \times n$ y B es de tamaño $n \times p$.

(iii) Utilice la hipótesis de que el producto AB es una matriz cuadrada.

75. Prueba Demuestre que si los productos AB y BA están definidos, entonces AB y BA son matrices cuadradas.

76. Sean A y B dos matrices tales que el producto AB está definido. Demuestre que si A tiene dos renglones idénticos, entonces los dos renglones correspondientes AB también son idénticos.

77. Sean A y B matrices de $n \times n$. Demuestre que si el i-ésimo renglón de A tiene todos sus elementos iguales a cero, entonces el i-ésimo renglón de AB tiene todos sus elementos iguales a cero. Proporcione un ejemplo utilizando matrices de 2×2 para demostrar que la conversión es falsa.

78. REMATE Sean A y B matrices de tamaño 3×2 y 2×2, respectivamente. Responda las siguientes preguntas y explique su razonamiento.

(a) ¿Es posible que $A = B$?

(b) ¿$A + B$ está definido?

(c) ¿AB está definido? Si es así, ¿es posible que $AB = BA$?

79. Agricultura Un agricultor tiene dos cosechas de fruta, manzanas y peras. Cada una de estas cosechas es enviada a tres diferentes mercados. El número de unidades de la cosecha i que es enviada al mercado j se representa por a_{ij} en la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 125 & 100 & 75 \\ 100 & 175 & 125 \end{bmatrix}$$

La ganancia por unidad es representada por la matriz

$B = [\$3.50 \quad \$6.00]$

Determine el producto BA y explique qué representa cada elemento de este producto.

80. Manufactura Una corporación tiene tres fábricas, cada una de las cuales produce guitarras acústicas y guitarras eléctricas. El número de guitarras del tipo i producidas en la fábrica j en un día se representa por a_{ij} en la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 70 & 50 & 25 \\ 35 & 100 & 70 \end{bmatrix}$$

Determine los niveles de producción de cada fábrica, si la producción se incrementa 20%.

81. Política La matriz

$$P = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\overbrace{\begin{array}{ccc} \text{R} & \text{D} & \text{I} \end{array}}^{\text{De}}$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \left.\begin{array}{l} \text{R} \\ \text{D} \\ \text{I} \end{array}\right\} \text{A}$$

representa la proporción de votantes que cambió del partido i al partido j en una elección dada. Es decir, p_{ij} ($i \neq j$) representa la proporción de votantes que cambiaron del partido i al partido j y p_{ii} representa la proporción que permanece leal al partido i de una elección a la siguiente. Determine el producto de P consigo mismo. ¿Qué representa este producto?

82. Población Las matrices muestran la población (en miles de personas) que vivía en diferentes regiones de Estados Unidos en 2009 y la población (en miles de personas) estimada que vivirá en estas regiones en 2015. Las poblaciones regionales se separaron en tres categorías de edad. (Fuente: U.S. Census Bureau)

2009

	0–17	18–64	65+
Noreste	12,399	35,137	7747
Medio oeste	16,047	41,902	8888
Sur	27,959	70,571	14,608
Montaña	5791	13,716	2616
Pacífico	12,352	31,381	5712

2015

	0–17	18–64	65+
Noreste	12,441	35,289	8835
Medio oeste	16,363	42,250	9955
Sur	29,373	73,496	17,572
Montaña	6015	14,231	3337
Pacífico	12,826	33,292	7086

(a) La población total en 2009 fue 307 000 000 y la población total estimada para 2015 es 322 000 000. Reescriba las matrices para obtener la información como porcentajes de la población total.

(b) Escriba una matriz que proporcione los porcentajes en cambios estimados de población por regiones y por grupos de edad de 2005 a 2015.

(c) Basado en el resultado del inciso (b), ¿qué grupo(s) de edad se estima mostrará(n) un crecimiento relativo de 2009 a 2015?

Multiplicación por bloques En los ejercicios 83 y 84, ejecute la multiplicación por bloques indicada de las matrices A y B. Si las matrices A y B se dividen en cuatro submatrices

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

entonces puede multiplicar por bloques A y B, asignando el tamaño de las submatrices para las cuales la suma y la multiplicación están definidas.

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

83. $A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$

84. $A = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}\right]$

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 85 y 86 determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, dé una razón o cite una expresión adecuada del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que demuestre que la expresión no es válida para todos los casos o cite del texto una expresión adecuada.

85. (a) Para que el producto de dos matrices esté definido, el número de columnas de la primera matriz debe ser igual al número de renglones de la segunda matriz.

(b) El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente si y sólo si $\mathbf{b}$ puede ser expresada como una combinación lineal, donde los coeficientes de la combinación lineal son una solución del sistema.

86. (a) Si A es una matriz de $m \times n$ y B es una matriz de $n \times r$, entonces el producto AB es una matriz de $m \times r$.

(b) La ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde A es la matriz de coeficientes y $\mathbf{x}$ y $\mathbf{b}$ son las matrices columna, puede utilizarse para representar un sistema de ecuaciones lineales.

87. Las columnas de la matriz T muestran las coordenadas de los vértices de un triángulo. La matriz A es una matriz de transformación.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Encuentre AT y AAT. Después dibuje el triángulo original y los dos triángulos transformados. ¿Qué transformación representa A?

(b) Un triángulo está determinado por AAT. Describa el proceso de transformación que produce el triángulo determinado por AT y luego el triángulo determinado por T.

2.2 Propiedades de las operaciones con matrices

- Use las propiedades de la suma de matrices, multiplicación escalar y matrices cero.
- Use las propiedades de multiplicación de matrices y matriz identidad.
- Encuentre la transpuesta de una matriz.

ÁLGEBRA DE MATRICES

En la sección 2.1 su atención se centró en la mecánica de las tres operaciones básicas con matrices: suma de matrices, multiplicación escalar y multiplicación de matrices. Esta sección comienza con el desarrollo del **álgebra de matrices**. Observará que esta álgebra comparte muchas (pero no todas) de las propiedades del álgebra de los números reales. Enseguida aparece una lista de algunas propiedades de la suma de matrices y de la multiplicación escalar.

TEOREMA 2.1 Propiedades de la suma de matrices y de la multiplicación por un escalar

Si A, B y C son matrices de $m \times n$ y c y d son escalares, entonces las siguientes propiedades son verdaderas.

1. $A + B = B + A$ — Propiedad conmutativa de la suma
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ — Propiedad asociativa de la suma
3. $(cd)A = c(dA)$ — Propiedad asociativa de la multiplicación
4. $1A = A$ — Identidad multiplicativa
5. $c(A + B) = cA + cB$ — Propiedad distributiva
6. $(c + d)A = cA + dA$ — Propiedad distributiva

DEMOSTRACIÓN

La demostración de estas seis propiedades se concluyen directamente a partir de las definiciones de suma de matrices y multiplicación por un escalar, así como de las propiedades correspondientes a los números reales. Por ejemplo, para demostrar la propiedad conmutativa de la *suma de matrices*, sean $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$. Entonces, aplicando la propiedad conmutativa de la *suma de números reales*, escribimos

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij}] = B + A.$$

De igual forma, para demostrar la propiedad 5, aplicamos la propiedad distributiva (de los números reales) de la multiplicación sobre la suma, para escribir

$$c(A + B) = [c(a_{ij} + b_{ij})] = [ca_{ij} + cb_{ij}] = cA + cB.$$

Las demostraciones de las cuatro propiedades restantes se dejan como ejercicios (véase los ejercicios 57 a 60).

En la sección anterior, la suma de matrices se definió como la suma de *dos* matrices, haciéndola así una operación binaria. La propiedad asociativa de la suma de matrices ahora permite escribir expresiones como $A + B + C$ como $(A + B) + C$ o como $A + (B + C)$. Este mismo razonamiento se aplica a la suma de cuatro o más matrices.

EJEMPLO 1 Suma de más de dos matrices

Sumando los elementos correspondientes, podemos obtener la siguiente suma de cuatro matrices.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Una propiedad importante de la suma de números reales es que el número 0 sirve como la identidad aditiva. Esto es, $c + 0 = c$ para cualquier número real c. Para las matrices se cumple una propiedad semejante. Específicamente, si A es una matriz de $m \times n$ y O_{mn} es la matriz de $m \times n$ consistente únicamente de ceros, entonces $A + O_{mn} = A$. La matriz O_{mn} se denomina **matriz cero** y sirve como la **identidad aditiva** para el conjunto de todas las matrices de $m \times n$. Por ejemplo, la siguiente matriz funciona como la identidad aditiva para el conjunto de todas las matrices de 2×3.

$$O_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cuando se sobreentiende el tamaño de la matriz, las matrices cero pueden denotarse simplemente por 0.

Las siguientes propiedades de las matrices cero son fáciles de probar, por lo que sus demostraciones se dejan como ejercicio. (Véase Ejercicio 61.)

COMENTARIO

La propiedad 2 puede describirse diciendo que la matriz $-A$ es el **inverso aditivo** de A.

TEOREMA 2.2 Propiedades de las matrices cero

Si A es una matriz de $m \times n$ y c es un escalar, entonces las siguientes propiedades son verdaderas.

1. $A + O_{mn} = A$
2. $A + (-A) = O_{mn}$
3. Si $cA = O_{mn}$, entonces $c = 0$ o $A = O_{mn}$

El álgebra de los números reales y el álgebra de matrices tienen numerosas similitudes. Por ejemplo, compare las siguientes soluciones.

Números reales (resolver para x)	Matrices de $m \times n$ (resolver para X)
$+ \quad =$	$X + A = B$
$x + a + (-a) = b + (-a)$	$X + A + (-A) = B + (-A)$
$x + 0 = b - a$	$X + O = B - A$
$x = b - a$	$X = B - A$

El proceso de resolución de una ecuación matricial se muestra en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Resolución de una ecuación matricial

Resuelva para X en la ecuación $3X + A = B$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN

Empecemos por resolver la ecuación para X, para obtener

$$3X = B - A$$
$$X = \tfrac{1}{3}(B - A).$$

Ahora, utilizando las matrices dadas tiene

$$X = \tfrac{1}{3}\left(\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right)$$
$$= \tfrac{1}{3}\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & 2 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

COMENTARIO

Observe que la propiedad conmutativa para la multiplicación de matrices no está en la lista que aparece en el teorema 2.3. Aunque el producto AB está definido, podemos ver fácilmente que A y B no tienen el tamaño adecuado que defina el producto BA. Por ejemplo, si A es de tamaño 2×3 y B es de 3×3, entonces el producto AB está definido, no así el producto BA. El siguiente ejemplo muestra que incluso si los productos AB y BA están definidos, éstos pueden no ser iguales.

PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

En el siguiente teorema, el álgebra de matrices se extiende para incluir algunas propiedades más utilizadas de la multiplicación de matrices. La demostración de la propiedad 2 se presenta abajo. Las demostraciones de las propiedades restantes se dejan como ejercicio. (Véase el Ejercicio 62.)

TEOREMA 2.3 Propiedades de la multiplicación de matrices

Si A, B y C son matrices (con tamaños tales que los productos matriciales dados están definidos) y c es un escalar, entonces las siguientes propiedades son verdaderas.

1. $A(BC) = (AB)C$ Propiedad asociativa de la multiplicación
2. $A(B + C) = AB + AC$ Propiedad distributiva
3. $(A + B)C = AC + BC$ Propiedad distributiva
4. $c(AB) = (cA)B = A(cB)$

DEMOSTRACIÓN

Para demostrar la propiedad 2, muestre que las matrices $A(B + C)$ y $AB + AC$ son iguales si sus elementos correspondientes son iguales. Suponga que A es de tamaño $m \times n$, B es de tamaño $n \times p$ y C es de tamaño $n \times p$. Aplicando la definición de la multiplicación de matrices, el elemento en el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de

$A(B + C)$ es $a_{i1}(b_{1j} + c_{1j}) + \ldots + a_{in}(b_{nj} + c_{nj})$.

Además, el elemento en el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de $AB + AC$ es

$$(a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}) + (a_{i1}c_{1j} + a_{i2}c_{2j} + \cdots + a_{in}c_{nj}).$$

Distribuyendo y reagrupando, puede ver que estos dos ij-ésimos elementos son iguales. Así

$$A(B + C) = AB + AC.$$

La propiedad asociativa de la multiplicación de matrices le permite escribir estos productos matriciales como ABC sin ambigüedad, como se muestra en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 **La multiplicación de matrices es asociativa**

Determine el producto matricial ABC agrupando primero los factores como $(AB)C$ y luego como $A(BC)$. Demuestre que se obtiene el mismo resultado con ambos procesos.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Agrupando los factores como $(AB)C$, obtiene

$$(AB)C = \left(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 4 \\ 13 & 14 \end{bmatrix}.$$

Agrupando los factores como $A(BC)$, obtiene el mismo resultado

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 4 \\ 13 & 14 \end{bmatrix}$$

El siguiente ejemplo muestra que aun cuando los productos de AB y BA estén definidos, podrían no ser iguales.

EJEMPLO 4 La multiplicación de matrices no es conmutativa

Demuestre que AB y BA no son iguales para las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}, \; BA = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$AB \neq BA$

A partir del ejemplo 4 no podemos concluir que los productos matriciales AB y BA *nunca* son iguales. Algunas veces sí lo son. Por ejemplo, intente multiplicar las siguientes matrices, primero en el orden AB y después del modo BA.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Usted puede ver que los dos productos son iguales. El punto es este: aunque AB y BA son en ocasiones iguales, a menudo no lo son.

Otra cualidad importante del álgebra matricial es que no existe la propiedad de cancelación para la multiplicación de matrices. Es decir, si $AC = BC$, no es necesariamente cierto que $A = B$. Esto se demuestra en el ejemplo 5. (En la siguiente sección verá que, para algunos tipos especiales de matrices, la cancelación es válida.)

EJEMPLO 5 Ejemplo en el cual la cancelación no es válida

Demuestre que $AC = BC$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \; BC = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$AC = BC$, aun cuando $A \neq B$.

Ahora verá un tipo especial de matriz cuadrada que tiene números 1 en la diagonal principal y números 0 en otro lugar.

$$I_n = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{n \times n}$$

Por ejemplo, si $n = 1$, 2 ó 3, tenemos

$$I_1 = [1], \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cuando se sobreentienda que el orden de la matriz es n, puede denotar I_n simplemente como I.

Como se establece en el teorema 2.4, en la siguiente página, la matriz I_n sirve como identidad para la multiplicación de matrices; recibe el nombre de **matriz identidad de orden n**. La demostración de este teorema se deja como ejercicio. (Véase el Ejercicio 63.)

COMENTARIO

Observe que si A es una matriz cuadrada de orden n, entonces $AI_n = I_nA = A$.

TEOREMA 2.4 Propiedades de la matriz identidad

Si A es una matriz de tamaño $m \times n$, entonces estas propiedades son verdaderas.

1. $AI_n = A$ **2.** $I_mA = A$

EJEMPLO 6 Multiplicación por una matriz identidad

a. $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

Para la multiplicación repetida de matrices cuadradas, puede utilizar la misma notación exponencial usada con los números reales. Es decir, $A^1 = A$, $A^2 = AA$, y para un entero positivo k, A^k es

$$A^k = \underbrace{AA \cdot \cdot \cdot A}_{k \text{ factores}}.$$

También esto es conveniente para definir $A^0 = I_n$ (donde A es una matriz cuadrada de orden n). Estas definiciones nos permiten establecer las propiedades (1) $A^jA^k = A^{j+k}$ y (2) $(A^j)^k = A^{jk}$ donde j y k son enteros no negativos.

EJEMPLO 7 Multiplicación repetida de una matriz cuadrada

Para la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$,

$$A^3 = \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}.$$

En la sección 1.1 usted vio que un sistema de ecuaciones lineales debe tener exactamente una solución, un número infinito de soluciones o bien, no tiene solución. Aplicando el álgebra matricial desarrollada antes, ahora puede demostrar que esto es cierto.

TEOREMA 2.5 Número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales

Para un sistema de ecuaciones lineales en n variables, precisamente una de las siguientes declaraciones es verdadera.

1. El sistema tiene exactamente una solución.
2. El sistema tiene un número infinito de soluciones.
3. El sistema no tiene solución.

DEMOSTRACIÓN

Represente el sistema por la matriz $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Si el sistema tiene exactamente una solución o no tiene solución, entonces no hay nada que demostrar. Así, puede suponer que el sistema tiene al menos dos soluciones diferentes $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$. La demostración puede completarse, si usted demuestra que esta suposición implica que el sistema tiene un número infinito de soluciones. Como $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ son soluciones, tiene que $A\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}$ y $A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = O$. Esto implica que la columna de la matriz distinta de cero $\mathbf{x}_h = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ es una solución del sistema de ecuaciones lineales homogéneo $A\mathbf{x} = O$. Con esto podemos decir que para cualquier escalar c,

$$A(\mathbf{x}_1 + c\mathbf{x}_h) = A\mathbf{x}_1 + A(c\mathbf{x}_h) = \mathbf{b} + c(A\mathbf{x}_h) = \mathbf{b} + cO = \mathbf{b}.$$

Así que $\mathbf{x}_1 + c\mathbf{x}_h$ es una solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para cualquier escalar c. Debido a que hay un número infinito de valores posibles de c y cada valor genera una solución diferente, puede concluir que el sistema tiene un número infinito de soluciones.

TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ

La **transpuesta** de una matriz se forma al escribir sus columnas como renglones. Por ejemplo, si A es la matriz de $m \times n$ dada por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Tamaño: $m \times n$

entonces la transpuesta, denotada por A^T, es la matriz de $n \times m$ de abajo

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Tamaño: $n \times m$

EJEMPLO 8 Transpuesta de una matriz

Encuentre la transpuesta de cada matriz.

a. $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$ **b.** $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ **c.** $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **d.** $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

SOLUCIÓN

a. $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 8 \end{bmatrix}$ **b.** $B^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

c. $C^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **d.** $D^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

TEOREMA 2.6 Propiedades de la transpuesta

Si A y B son matrices (de tamaño tal que las operaciones con matrices dadas están definidas) y c es un escalar, entonces las siguientes propiedades son verdaderas.

1. $(A^T)^T = A$ Transpuesta de la transpuesta
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$ Transpuesta de una suma
3. $(cA)^T = c(A^T)$ Transpuesta de la multiplicación por un escalar
4. $(AB)^T = B^TA^T$ Transpuesta de un producto

DEMOSTRACIÓN

Debido a que con la transposición de una matriz se intercambian renglones y columnas, la propiedad 1 parece tener sentido. Para demostrar la propiedad 1, sea A una matriz de $m \times n$. Observe que A^T tiene el tamaño $n \times m$ y $(A^T)^T$ es de $m \times n$, igual que A. Para demostrar que $(A^T)^T = A$ usted debe demostrar que el ij-ésimo elemento es el mismo. Sea a_{ij} el ij-ésimo elemento de A. Entonces a_{ij} es el ji-ésimo elemento de A^T y el ij-ésimo elemento de $(A^T)^T$. Esto demuestra la propiedad 1. La demostración de las demás propiedades se deja como ejercicio. (Véase el Ejercicio 64.)

DESCUBRIMIENTO

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

1. Calcule $(AB)^T$, A^TB^T y B^TA^T.
2. Haga una conjetura sobre la transpuesta del producto de dos matrices cuadradas.
3. Seleccione otras dos matrices cuadradas para verificar su conjetura.

COMENTARIO

Advierta que la matriz cuadrada en el inciso (c) del ejemplo 8 es igual a su transpuesta. Esta matriz se denomina **simétrica**. Una matriz A es simétrica si $A = A^T$. Partiendo de esta definición, es evidente que una matriz simétrica debe ser cuadrada. Además, si $A = [a_{ij}]$ es una matriz simétrica, entonces $a_{ij} = a_{ji}$ para toda $i \neq j$.

COMENTARIO

Recuerde que debe *invertir el orden* de la multiplicación al formar la transpuesta de un producto. Es decir, la transpuesta de AB es $(AB)^T = B^TA^T$ y normalmente *no* es igual a A^TB^T.

Las propiedades 2 y 4 pueden generalizarse para abarcar sumas o productos de cualquier número finito de matrices. Por ejemplo, la transpuesta de la suma de tres matrices es

$$(A + B + C)^T = A^T + B^T + C^T$$

y la transpuesta del producto de tres matrices es

$$(ABC)^T = C^TB^TA^T.$$

EJEMPLO 9 Transpuesta de un producto

Demuestre que $(AB)^T$ y B^TA^T son iguales.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^TA^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^T = B^TA^T$$

EJEMPLO 10 Producto de una matriz y su transpuesta

Para la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, encuentre el producto AA^T y demuestre que es simétrico.

SOLUCIÓN

Debido a que $AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -6 & -5 \\ -6 & 4 & 2 \\ -5 & 2 & 5 \end{bmatrix}$,

se tiene que $AA^T = (AA^T)^T$, así que AA^T es simétrica.

COMENTARIO

La propiedad demostrada en el ejemplo 10 es generalmente cierta. Es decir, para toda matriz A, la matriz AA^T es simétrica. La matriz A^TA también es simétrica. Se le pedirá que demuestre estos resultados en el ejercicio 65.

ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

Los sistemas de recuperación de información como los sistemas de búsqueda de Internet utilizan una teoría de matrices y álgebra lineal para llevar el registro de, por ejemplo, palabras clave que ocurren en una base de datos. Para ilustrar con un ejemplo simplificado, suponga que usted quisiera realizar una búsqueda en algunas de las palabras clave m disponibles en una base de datos de documentos n. Usted puede representar la búsqueda con la matriz columna de $\mathbf{x}$ $m \times 1$, en la cual un 1 representa una palabra clave que usted está buscando y 0 representa una palabra clave que no está buscando. Usted puede representar las apariciones de las palabras clave m en los documentos n con A, una matriz $m \times n$ en la cual una entrada es 1 si la palabra clave ocurre en el documento y 0 si no ocurre en el documento. Entonces, la matriz producto $A^T\mathbf{x}$ de $n \times 1$ representaría el número de palabras clave en su búsqueda que ocurren en cada uno de los documentos n.

2.2 Ejercicios

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

Evaluación de una expresión En los ejercicios 1–6, evalúe la expresión.

1. $\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 & -8 \\ 14 & 6 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -11 & -7 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

3. $4\left(\begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -6 & 0 \end{bmatrix}\right)$

4. $\frac{1}{2}([5 \quad -2 \quad 4 \quad 0] + [14 \quad 6 \quad -18 \quad 9])$

5. $-3\left(\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 3 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}\right) - 2\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}$

6. $-\begin{bmatrix} 4 & 11 \\ -2 & -1 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\left(\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & 4 \\ 0 & 13 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -9 & -1 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}\right)$

Operaciones con matrices En los ejercicios 7 a 12, realice las operaciones indicadas cuando $a = 3$, $b = -4$ y

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{bmatrix},\quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{bmatrix},\quad \mathbf{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

7. $aA + bB$ **8.** $A + B$

9. $ab(B)$ **10.** $(a + b)B$

11. $(a - b)(A - B)$ **12.** $(ab)O$

13. Resuelva para X cuando

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

(a) $3X + 2A = B$ (b) $2A - 5B = 3X$

(c) $X - 3A + 2B = O$ (d) $6X - 4A - 3B = O$

14. Resuelva para X cuando

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) $X = 3A - 2B$ (b) $2X = 2A - B$

(c) $2X + 3A = B$ (d) $2A + 4B = -2X$

Operaciones con matrices En los ejercicios 15 a 20, realice las operaciones indicadas siempre que $c = -2$ y

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

15. $B(CA)$ **16.** $C(BC)$

17. $(B + C)A$ **18.** $B(C + O)$

19. $(cB)(C + C)$ **20.** $B(cA)$

Asociatividad de la multiplicación de matrices En los ejercicios 21 y 22, encuentre la matriz producto ABC al (a) agrupar los factores como $(AB)C$ y (b) agrupar los factores como $A(BC)$. Demuestre que se obtiene el mismo resultado de ambos procesos.

21. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

22. $A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \end{bmatrix},$

$C = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

No conmutatividad de multiplicación de matrices En los ejercicios 23 y 24, muestre que AB y BA no son iguales para las matrices dadas.

23. $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

24. $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

Productos de matrices iguales En los ejercicios 25 y 26, muestre que $AC = BC$ a pesar de que $A \neq B$

25. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

26. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 5 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$

$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

Producto de matriz cero En los ejercicios 27 y 28, demuestre que si $AB = O$, aunque $A \neq 0$ o $B \neq 0$.

27. $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

28. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

Operaciones con matrices En los ejercicios 29 a 34, realice las operaciones indicadas cuando

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{bmatrix}.$$

29. IA **30.** AI

31. $A(I + A)$ **32.** $A + IA$

33. A^2 **34.** A^4

Escriba En los ejercicios 35 y 36, explique por qué la fórmula no es válida para matrices. Ilustre su razonamiento con ejemplos.

35. $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

36. $(A + B)(A + B) = A^2 + 2AB + B^2$

Encontrando la transpuesta de una matriz En los ejercicios 37 y 38, encuentre la transpuesta de la matriz.

37. $D = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ **38.** $D = \begin{bmatrix} 6 & -7 & 19 \\ -7 & 0 & 23 \\ 19 & 23 & -32 \end{bmatrix}$

Encontrando de la transpuesta del producto de dos matrices En los ejercicios 39-42, verifique que $(AB)^T = B^TA^T$.

39. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

40. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

41. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

42. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Multiplicación con la transpuesta de una matriz En los ejercicios 43-46, encuentre (a) A^TA y (b) AA^T. Muestre que cada uno de estos productos es simétrico.

43. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ **44.** $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

45. $A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

46. $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 11 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \\ 14 & -2 & 12 & -9 \\ 6 & 8 & -5 & 4 \end{bmatrix}$

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 47 y 48, determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, proporcione una razón o cite una expresión adecuada del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que muestre que la expresión no es cierta en todos los casos o cite del texto una expresión adecuada.

47. (a) La suma de matrices es conmutativa.

(b) La multiplicación de matrices es asociativa.

(c) La transpuesta del producto de dos matrices es igual al producto de sus transpuestas. Es decir, $(AB)^T = A^TB^T$.

(d) Para toda matriz C, la matriz CC^T es simétrica.

48. (a) La multiplicación de matrices es conmutativa.

(b) Toda matriz A tiene inversa aditiva.

(c) Si las matrices A, B y C satisfacen $AB = AC$, entonces $B = C$.

(d) La transpuesta de la suma de dos matrices es igual a la suma de sus transpuestas.

49. Considere las siguientes matrices.

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) Determine escalares a y b tales que $Z = aX + bY$.

(b) Demuestre que no existen escalares a y b tales que $W = aX + bY$

(c) Demuestre que si $aX + bY + cW = O$, entonces $a = b = c = 0$.

(d) Determine escalares a, b y c, no todos iguales a cero, tales que $aX + bY + cZ = O$.

50. REMATE En la ecuación matricial

$aX + A(bB) = b(AB + IB)$

X, A, B e I son matrices cuadradas, y a y b son escalares distintas de cero. Justifique cada paso en la solución dada a continuación.

$$\begin{aligned} aX + (Ab)B &= b(AB + B) \\ aX + bAB &= bAB + bB \\ aX + bAB + (-bAB) &= bAB + bB + (-bAB) \\ aX &= bAB + bB + (-bAB) \\ aX &= bAB + (-bAB) + bB \\ aX &= bB \\ X &= \frac{b}{a}B \end{aligned}$$

Determinación de una potencia de una matriz En los ejercicios 51 y 52, calcule la potencia de A para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

51. A^{19} **52.** A^{20}

Determinación de la *n*-ésima raíz de una matriz Una raíz n-ésima de una matriz B es una matriz A tal que $A^n = B$. En los ejercicios 53 y 54, encuentre la raíz n-ésima de la matriz B.

53. $B = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad n = 2$

54. $B = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}, \quad n = 3$

Función polinomial En los ejercicios 55 y 56, use la definición dada para determinar $f(A)$: si f es la función polinomial.

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$,

entonces para una matriz A de $n \times n$, $f(A)$ está definida así

$f(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \ldots + a_nA^n$.

55. $f(x) = x^2 - 5x + 2, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

56. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 10, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

57. Demostración guiada Demuestre la propiedad asociativa de la suma de matrices: $A + (B + C) = (A + B) + C$.

Inicio: Para probar que $A + (B + C)$ y $(A + B) + C$ son iguales, demuestre que sus elementos correspondientes son iguales.

(i) Comience su demostración haciendo que A, B y C sean matrices de $m \times n$.

(ii) Observe que el ij-ésimo elemento de $B + C$ es $b_{ij} + c_{ij}$.

(iii) Además, el ij-ésimo elemento de $A + (B + C)$ es $a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$.

(iv) Determine el ij-ésimo elemento de $(A + B) + C$.

58. Prueba Demuestre la propiedad asociativa de la multiplicación escalar: $(cd)A = c(dA)$

59. Prueba Demuestre que el escalar 1 es la identidad para la multiplicación por un escalar: $1A = A$

60. Prueba Demuestre la siguiente propiedad distributiva: $(c + d)A = cA + dA$.

61. Prueba Demuestre el teorema 2.2.

62. Prueba Complete la demostración del teorema 2.3.

(a) Demuestre la propiedad asociativa de la multiplicación: $A(BC) = (AB)C$

(b) Demuestre la propiedad distributiva:
$(A + B)C = AC + BC$

(c) Demuestre la propiedad: $c(AB) = (cA)B = A(cB)$

63. Prueba Demuestre el teorema 2.4

64. Prueba Demuestre las propiedades 2, 3 y 4 del teorema 2.6.

65. Demostración guiada Demuestre que si A es una matriz de $m \times n$, entonces AA^T y A^TA son matrices simétricas.

Inicio: para demostrar que AA^T es simétrica es necesario que demuestre que es igual a su transpuesta, $(AA^T)^T = AA^T$.

(i) Comience su demostración con la expresión matricial del lado izquierdo $(AA^T)^T$.

(ii) Aplique las propiedades de la transpuesta de un matriz para demostrar que se puede simplificar e igualar con la expresión del lado derecho, AA^T.

(iii) Repita este análisis para el producto A^TA.

66. Prueba Sean A y B dos matrices simétricas de $n \times n$.

(a) Proporcione un ejemplo que muestre que el producto AB no necesariamente es simétrico.

(b) Demuestre que AB es simétrica si y sólo si $AB = BA$.

Matrices simétricas y cuasi-simétricas En los ejercicios 67 a 70, determine cuál de las matrices es simétrica, cuasi-simétrica o ninguna de las dos. Una matriz cuadrada es denominada cuasi–simétrica si $A^T = -A$.

67. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

68. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

69. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

70. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

71. Prueba Demuestre que la diagonal principal de una matriz cuasi-simétrica consiste únicamente de ceros.

72. Prueba Demuestre que si A y B son dos matrices cuasi-simétricas de $n \times n$, entonces $A + B$ es cuasi-simétrica.

73. Prueba Sea A una matriz cuadrada de orden n.

(a) Demuestre que $\frac{1}{2}(A + A^T)$ es simétrica.

(b) Demuestre que $\frac{1}{2}(A - A^T)$ es cuasi-simétrica.

(c) Demuestre que A puede ser escrita como la suma de una matriz simétrica B y una matriz cuasi-simétrica C, $A = B + C$.

(d) Escriba la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -3 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

como la suma de una matriz cuasi-simétrica y una matriz simétrica.

74. Prueba Demuestre que si A es una matriz de $n \times n$, entonces $A - A^T$ es cuasi-simétrica.

75. Considere matrices de la forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Escriba una matriz de 2×2 y otra de 3×3 en la forma de A.

(b) Utilice una aplicación gráfica o un software computacional para elevar cada una de las matrices a potencias más altas. Describa el resultado.

(c) Utilice el resultado del inciso (b) para hacer una conjetura sobre las potencias de A si A es una matriz de 4×4. Use una aplicación gráfica para verificar su conjetura.

(d) Utilice los resultados de los incisos (b) y (c) para hacer una conjetura sobre las potencias de A si A es una matriz de $n \times n$.

2.3 Inversa de una matriz

- Encuentre la inversa de una matriz (si existe).
- Use las propiedades de matrices inversas.
- Use una matriz inversa para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

MATRICES Y SUS INVERSAS

La sección 2.2 analizó algunas de las semejanzas entre el álgebra de los números reales y el álgebra de matrices. Esta sección también desarrolla el álgebra de matrices para incluir las soluciones de ecuaciones matriciales que implican la multiplicación de matrices. Para empezar, considere la ecuación con números reales $ax = b$. Para resolver esta ecuación para x, multiplique ambos lados de la ecuación por a^{-1} (siempre que $a \neq 0$).

$$\begin{aligned} ax &= b \\ (a^{-1}a)x &= a^{-1}b \\ (1)x &= a^{-1}b \\ x &= a^{-1}b \end{aligned}$$

El número a^{-1} se denomina *inverso multiplicativo* de a, ya que $a^{-1}a$ da como resultado 1 (elemento identidad para la multiplicación). La definición del inverso multiplicativo de una matriz es similar.

Definición de la inversa de una matriz

Una matriz A de $n \times n$ es **invertible** (o **no singular**) si existe una matriz B de $n \times n$ tal que

$$AB = BA = I_n$$

donde I_n es la matriz identidad de orden n. La matriz B se denomina **inversa** (multiplicativa) de A. La matriz A que no tiene una inversa se denomina **no invertible** (o **singular**).

Las *matrices no cuadradas no tienen inversas*. Para ver esto, advierta que si A es de tamaño $m \times n$ y B es de tamaño $n \times m$ (donde $m \neq n$), entonces los productos AB y BA son de tamaño diferente y no pueden ser iguales entre sí. Efectivamente, no todas las matrices cuadradas poseen inversa. (Véase el ejemplo 4.) El siguiente teorema, sin embargo, nos dice que si una matriz tiene inversa, entonces ésta es única.

TEOREMA 2.7 Unicidad de la inversa de una matriz

Si A es una matriz invertible, entonces su inversa es única. La inversa de A se denota por A^{-1}.

DEMOSTRACIÓN

Ya que A es invertible, sabemos que al menos tiene una inversa B tal que

$$AB = I = BA.$$

Suponga que A tiene otra inversa C tal que

$$AC = I = CA.$$

Entonces usted puede demostrar que B y C son iguales, de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} AB &= I \\ C(AB) &= CI \\ (CA)B &= C \\ IB &= C \\ B &= C \end{aligned}$$

En consecuencia, $B = C$ y tenemos que la inversa de una matriz es única.

Debido a que la inversa A^{-1} de una matriz invertible A es única, podemos denominarla como la inversa de A y escribimos

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

EJEMPLO 1 Inversa de una matriz

Demuestre que B es la inversa de A, donde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

COMENTARIO

Recuerde que no siempre es verdad que $AB = BA$, incluso si ambos productos están definidos. Si A y B son matrices cuadradas y $AB = I_n$, entonces puede demostrar que $BA = I_n$. Aunque se omite la demostración de este hecho, esto implica que en el ejemplo 1 usted sólo necesita verificar que $AB = I_2$.

SOLUCIÓN

Usando la definición de matriz inversa, puede ver que B es la inversa de A para demostrar que $AB = I = BA$, de la siguiente manera

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+2 & 2-2 \\ -1+1 & 2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+2 & 2-2 \\ -1+1 & 2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El siguiente ejemplo muestra cómo utilizar un sistema de ecuaciones para determinar la inversa de una matriz.

EJEMPLO 2 Encontrar la inversa de una matriz

Determine la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN

Para determinar la inversa de A, resuelva la ecuación matricial $AX = I$ para X.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{11} + 4x_{21} & x_{12} + 4x_{22} \\ -x_{11} - 3x_{21} & -x_{12} - 3x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora, igualando los elementos correspondientes, obtiene los dos sistemas de ecuaciones que se muestran

$$\begin{aligned} x_{11} + 4x_{21} &= 1 \\ -x_{11} - 3x_{21} &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_{12} + 4x_{22} &= 0 \\ -x_{12} - 3x_{22} &= 1 \end{aligned}$$

Resolviendo el primer sistema, tenemos que la primera columna de X es $x_{11} = -3$ y $x_{21} = 1$. De manera similar, resolviendo el segundo sistema, tenemos que la segunda columna de X es $x_{12} = -4$ y $x_{22} = 1$. La inversa de A es

$$X = A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Utilice la multiplicación de matrices para verificar este resultado.

La generalización del método aplicado para resolver el ejemplo 2 proporciona un procedimiento conveniente para encontrar la inversa. Primero observe que los dos sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x_{11} + 4x_{21} &= 1 \\ -x_{11} - 3x_{21} &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_{12} + 4x_{22} &= 0 \\ -x_{12} - 3x_{22} &= 1 \end{aligned}$$

tienen la *misma matriz de coeficientes*. En lugar de resolver los dos sistemas representados por

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

separadamente, puede hacerlo de manera simultánea. Usted puede hacer esto **adjuntando** la matriz identidad a la matriz de coeficientes para obtener

$$\left[\begin{array}{rr:rr} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Aplicando la eliminación de Gauss-Jordan a esta matriz, puede resolver *ambos* sistemas con un sencillo proceso de eliminación, como el siguiente

$$\left[\begin{array}{rr:rr} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad R_2 + R_1 \to R_2$$

$$\left[\begin{array}{rr:rr} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad R_1 + (-4)R_2 \to R_1$$

Aplicando la eliminación de Gauss-Jordan a la matriz "doblemente aumentada" $[A \quad I]$, usted obtiene la matriz $[I \quad A^{-1}]$.

$$\underbrace{\left[\begin{array}{rr:rr} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]}_{A \qquad\quad I} \longrightarrow \underbrace{\left[\begin{array}{rr:rr} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]}_{I \qquad\quad A^{-1}}$$

Este procedimiento (o algoritmo) funciona para una matriz arbitraria de $n \times n$. Si A no puede reducirse por renglones a I_n, entonces A es no invertible (o singular). Este procedimiento se justificará formalmente en la siguiente sección, después de exponer el concepto de matriz elemental. Por el momento, el algoritmo se resume de la siguiente manera.

Determinación de la inversa de una matriz por eliminación de Gauss-Jordan

Sea A una matriz cuadrada de orden n.

1. Escriba la matriz de $n \times 2n$, que consta de la matriz A dada a la izquierda y la matriz identidad I de $n \times n$ a la derecha para obtener $[A \quad I]$. Observe que las matrices A e I están separadas por una línea punteada. Este proceso se denomina **adjuntar** la matriz I a la matriz A.
2. Si es posible, reduzca por renglones A a I utilizando operaciones elementales con renglones en toda la matriz $[A \quad I]$. El resultado puede ser la matriz $[A \quad I^{-1}]$. Si esto no es posible, entonces A es no invertible (singular).
3. Verifique su trabajo multiplicando por AA^{-1} y A^{-1} para ver que $AA^{-1} = I = A^{-1}A$.

ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

Recuerde la Ley de Hooke, que dice que para deformaciones relativamente pequeñas de un objeto elástico, la cantidad de deflexión es directamente proporcional a la fuerza que causa la deformación. En una viga elástica soportada de manera simple, sujeta a múltiples fuerzas, la deflexión **d** se relaciona con la fuerza **w** por la ecuación matricial

$$\mathbf{d} = F\mathbf{w}$$

donde F es una matriz de flexibilidad cuyas entradas dependen del material de la viga. La inversa de la matriz de flexibilidad, F^{-1}, se denomina la matriz de rigidez. En los ejercicios 61 y 62, se le pedirá que encuentre la matriz de rigidez F^{-1} y la matriz de fuerza **w** para un conjunto dado de matrices de flexibilidad y deflexión.

nostal6ie/www.shutterstock.com

EJEMPLO 3 Encontrar la inversa de una matriz

Determine la inversa de la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Empiece adjuntando la matriz identidad a A para formar la matriz

$$[A \quad I] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ahora, utilizando operaciones elementales con renglones, reescriba esta matriz en la forma

$$[I \quad A^{-1}]$$

de la siguiente manera.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_2 + (-1)R_1 \to R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_3 + (6)R_1 \to R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_3 + (4)R_2 \to R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} \qquad (-1)R_3 \to R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} \qquad R_2 + R_3 \to R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} \qquad R_1 + R_2 \to R_1$$

La matriz A es invertible y esta inversa es

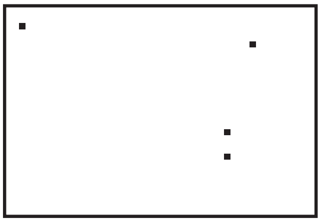
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & -1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Confirme esto demostrando que

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= I \\ &= A^{-1}A. \end{aligned}$$

NOTA TECNOLÓGICA

Muchas aplicaciones gráficas y programas de computadora pueden calcular la inversa de una matriz cuadrada. Si usted usa una aplicación gráfica, las pantallas para el ejemplo 3 se verán como las mostradas más abajo. Los comandos y la sintaxis de programación para estas aplicaciones/programas aplicables al ejemplo 3 se proporcionan en la **Online Technology Guide**, disponible en *college.cengage.com/pic/larsonELA6e*.



El proceso mostrado en el ejemplo 3 se aplica a cualquier matriz de $n \times n$ y permite hallar la inversa de la matriz A, si es posible. Si la matriz A no tiene inversa, el proceso puede decírselo también. En el siguiente ejemplo se aplica el proceso a una matriz singular (una que no tiene inversa).

EJEMPLO 4 Matriz singular

Demuestre que la matriz no tiene inversa.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Adjunte la matriz identidad a A para formar

$$[A \quad I] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y aplique la eliminación de Gauss-Jordan de la siguiente manera.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Debido a que la "parte A" de la matriz tiene un renglón de ceros, puede concluir que no es posible reescribir la matriz $[A \quad I]$ en la forma $[I \quad A^{-1}]$. Esto significa que A no tiene inversa o es no invertible (o singular).

Aplicar la eliminación de Gauss-Jordan para determinar la inversa de una matriz funciona bien (incluso como una técnica de computadora) para matrices de tamaño 3×3 o mayores. Sin embargo, para matrices de 2×2 puede utilizar una fórmula para determinar la inversa de una matriz en lugar de la eliminación de Gauss-Jordan.

Si A es una matriz de 2×2 representada por

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

entonces A es invertible si y sólo si $ad - bc \neq 0$. Además, si $ad - bd \neq 0$, entonces la inversa es representada por

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

COMENTARIO

El denominador $ad - bc$ se llama **determinante** de A. Usted podrá estudiar los determinantes con más detalles en el capítulo 3.

EJEMPLO 5 Determinar la inversa de una matriz de 2 × 2

Si es posible, determine la inversa de cada matriz.

a. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ **b.** $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$

SOLUCIÓN

a. Para la matriz A aplique la fórmula para la inversa de una matriz de 2×2 para obtener $ad - bc = (3)(2) - (-1)(-2) = 4$. Debido a que esta cantidad no es cero, la inversa se forma intercambiando los elementos en la diagonal principal y cambiando los signos de los otros dos elementos y multiplicando por la escalar $\frac{1}{4}$ como sigue.

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

b. Para la matriz B, tiene que $ad - bc = (3)(2) - (-1)(-6) = 0$, lo que significa que B es no invertible.

PROPIEDADES DE LAS MATRICES INVERSAS

Algunas propiedades importantes de las matrices inversas se listan enseguida.

TEOREMA 2.8 Propiedades de las matrices inversas

Si A es una matriz invertible, k es un entero positivo y c es un escalar diferente de cero, entonces A^{-1}1, A^k, cA y A^T son invertibles y se cumple lo siguiente.

1. $(A^{-1})^{-1} = A$

2. $(A^k)^{-1} = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \cdot \cdot \cdot A^{-1}}_{k \text{ factores}} = (A^{-1})^k$

3. $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$

4. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

DEMOSTRACIÓN

La clave de la demostración de las propiedades 1, 3 y 4 es el hecho de que la inversa de una matriz es única (teorema 2.7). Es decir, si $BC = CB = I$, entonces C es la inversa de B.

La propiedad 1 establece que la inversa de A^{-1} es A misma. Para probar esto, observe que $A^{-1}A = AA^{-1} = I$, lo que significa que A es la inversa de A^{-1}. Así, $A = (A^{-1})^{-1}$.

De manera similar, la propiedad 3 establece que $\frac{1}{c}A^{-1}$ es la inversa de (cA), $c \neq 0$. Para probar esto, utilice las propiedades de la multiplicación escalar dada en los teoremas 2.1 y 2.3 de la siguiente manera.

$$(cA)\left(\frac{1}{c}A^{-1}\right) = \left(c\frac{1}{c}\right)AA^{-1} = (1)I = I$$

$$\left(\frac{1}{c}A^{-1}\right)(cA) = \left(\frac{1}{c}c\right)A^{-1}A = (1)I = I$$

Así, $\frac{1}{c}A^{-1}$ es la inversa de (cA), lo cual implica que $\frac{1}{c}A^{-1} = (cA)^{-1}$. La demostración de las propiedades 2 y 4 se dejan como ejercicio. (Véanse los Ejercicios 65 y 66)

Para matrices no singulares, la notación exponencial utilizada para la multiplicación repetida de matrices *cuadradas* puede extenderse para incluir exponentes que sean enteros negativos. Esto puede lograrse si se define A^{-k} como sigue

$$A^{-k} = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \cdot \cdot \cdot A^{-1}}_{k \text{ factores}} = (A^{-1})^k.$$

Usando esta convención usted puede demostrar que las propiedades $A^jA^k = A^{j+k}$ y $(Aj)^k = A^{jk}$ son verdaderas para cualesquiera enteros j y k.

DESCUBRIMIENTO

Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

1. Calcule $(AB)^{-1}$, $A^{-1}B^{-1}$ y $B^{-1}A^{-1}$.
2. Haga una conjetura acerca de la inversa de un producto de dos matrices no singulares.
3. Elija otras dos matrices no singulares y vea si su conjetura es válida.

EJEMPLO 6 **Inversa de una matriz**

Calcule A^{-2} en dos formas diferentes y demuestre que los resultados son iguales.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Una forma de determinar A^{-2} es encontrando $(A^2)^{-1}$ al elevar la matriz A al cuadrado para obtener

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 10 & 18 \end{bmatrix}$$

y utilizando la fórmula para la inversa de una matriz de 2×2 para obtener

$$(A^2)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 18 & -5 \\ -10 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

Otro modo de determinar A^{-2} es encontrando $(A^{-1})^2$ después de hallar A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

y después elevando al cuadrado esta matriz para obtener

$$(A^{-1})^2 = \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -\frac{5}{4} \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}.$$

Observe que cada método produce el mismo resultado.

El siguiente teorema proporciona una fórmula para calcular la inversa del producto de dos matrices.

TEOREMA 2.9 La inversa de un producto

Si A y B son dos matrices invertibles de tamaño n, entonces AB es invertible y

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

DEMOSTRACIÓN

Para demostrar que $B^{-1}A^{-1}$ es la inversa de AB, usted sólo necesita mostrar que ésta cumple con la definición de la inversa de una matriz. Esto es

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A(I)A^{-1} = (AI)A^{-1} = AA^{-1} = I.$$

De una manera similar puede demostrar que $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$ y concluir que AB es invertible y que tiene la inversa indicada.

El teorema 2.9 establece que la inversa del producto de dos matrices invertibles es el producto de sus inversas tomado en el orden contrario. Esto puede generalizarse para incluir el producto de algunas matrices invertibles:

$$(A_1A_2A_3 \cdot \cdot \cdot A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdot \cdot \cdot A_3^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1}.$$

(Véase el ejemplo 4 en el Apéndice A.)

EJEMPLO 7 Inversa del producto de una matriz

Halle $(AB)^{-1}$ para las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

utilizando el hecho de que A^{-1} y B^{-1} están representadas por

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

COMENTARIO

Advierta que *invirtió el orden* de la multiplicación para encontrar la inversa de AB. Esto es, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ y la inversa de AB a menudo no es igual a $A^{-1}B^{-1}$.

SOLUCIÓN

Utilizando el teorema 2.9 obtenemos

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \overset{B^{-1}}{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}} \overset{A^{-1}}{\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & -5 & -2 \\ -8 & 4 & 3 \\ 5 & -2 & -\frac{7}{3} \end{bmatrix}.$$

Una propiedad importante en el álgebra de los números reales es la propiedad de cancelación. Es decir, si $ac = bc$ $(c \neq 0)$, entonces a $=$ b. Las matrices *invertibles* tienen una propiedad de cancelación similar.

TEOREMA 2.10 Propiedades de cancelación

Si C es una matriz invertible, entonces las siguientes propiedades son válidas.

1. Si $AC = BC$, entonces $A = B$. Propiedad de cancelación por la derecha

2. Si $CA = CB$, entonces $A = B$. Propiedad de cancelación por la izquierda

DEMOSTRACIÓN

Para demostrar la propiedad 1, utilice el hecho de que C es invertible y escriba

$$\begin{aligned} AC &= BC \\ (AC)C^{-1} &= (BC)C^{-1} \\ A(CC^{-1}) &= B(CC^{-1}) \\ AI &= BI \\ A &= B. \end{aligned}$$

La segunda propiedad puede demostrarse de forma semejante. (Véase el Ejercicio 68.)

Asegúrese de recordar que el teorema 2.10 puede aplicarse sólo si C es una matriz *invertible*. Si no lo es, entonces a menudo la cancelación no es válida. Así, en la sección 2.2 el ejemplo 5 proporciona el modelo de una ecuación matricial $AC = BC$ en la cual $A \neq B$, ya que C no es invertible en el ejemplo.

SISTEMAS DE ECUACIONES

Para sistemas *cuadrados* (los que tienen el mismo número de ecuaciones que de variables), puede utilizar el siguiente teorema para determinar cuál de los sistemas tiene una solución única.

TEOREMA 2.11 Sistemas de ecuaciones con una solución única

Si A es una matriz invertible, entonces el sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene
una solución única dada por $x = A^{-1}\mathbf{b}$.

DEMOSTRACIÓN

Puesto que A no es singular, los siguientes pasos son válidos.

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ A^{-1}A\mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} \\ I\mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

Esta solución es única, ya que si $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ son dos soluciones, usted podría aplicar la propiedad de cancelación para la ecuación $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b} = A\mathbf{x}_2$ para concluir que $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.

Reemplazar lo resaltado por "Un uso del Teorema 2.11 es resolviendo varios sistemas en los cuales todos tienen la misma matriz de coeficientes A. En este caso usted debe encontrar la matriz inversa y luego resolver cada sistema calculando el producto $A^{-1}\mathbf{b}$.

EJEMPLO 8 Solución de un sistema de ecuaciones utilizando una matriz inversa

Utilice una matriz inversa para resolver cada sistema.

a. $\begin{aligned} 2x + 3y + z &= -1 \\ 3x + 3y + z &= 1 \\ 2x + 4y + z &= -2 \end{aligned}$
b. $\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 4 \\ 3x + 3y + z &= 8 \\ 2x + 4y + z &= 5 \end{aligned}$
c. $\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 0 \\ 3x + 3y + z &= 0 \\ 2x + 4y + z &= 0 \end{aligned}$

SOLUCIÓN

Primero observe que la matriz de coeficientes de cada sistema es $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Utilizando la eliminación de Gauss-Jordan encontrará que $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}$.

a. $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ La solución es $x = 2$, $y = -1$, y $z = -2$.

b. $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix}$ La solución es $x = 4$, $y = 1$, y $z = -7$.

c. $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ La solución es trivial: $x = 0$, $y = 0$, y $z = 0$.

2.3 Ejercicios

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

La inversa de una matriz En los ejercicios 1 a 6, demuestre que B es la inversa de A.

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -4 & -5 & 3 \\ -4 & -8 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 2 & -17 & 11 \\ -1 & 11 & -7 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$

Determinación de la inversa de una matriz En los ejercicios 7 a 30, encuentre la inversa de la matriz (si ésta existe)

7. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} -7 & 33 \\ 4 & -19 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 9 \\ -1 & -4 & -7 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & -10 \\ 7 & 16 & -21 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 10 & 5 & -7 \\ -5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} & \frac{11}{6} \\ 0 & \frac{2}{3} & 2 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 0.6 & 0 & -0.3 \\ 0.7 & -1 & 0.2 \\ 1 & 0 & -0.9 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ -0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & -2 & -3 \\ 2 & -5 & -2 & -5 \\ -1 & 4 & 4 & 11 \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} 4 & 8 & -7 & 14 \\ 2 & 5 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & -7 \\ 3 & 6 & -5 & 10 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Determinación de la inversa de una matriz de 2 × 2 En los ejercicios 31-36, utilice la fórmula en la página 66 para encontrar la inversa de una matriz de 2 × 2 (si existe).

31. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

32. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

33. $\begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

34. $\begin{bmatrix} -12 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

35. $\begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$

36. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{9}{4} \\ \frac{5}{3} & \frac{8}{9} \end{bmatrix}$

Determinación de la inversa del cuadrado de una matriz En los ejercicios 37-40, calcule A^{-2} de dos maneras diferentes y muestre que los resultados son iguales.

37. $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

38. $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$

39. $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

40. $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 4 \\ -2 & 7 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Determinación de las inversas de productos y transpuestas En los ejercicios 41 a 44, utilice matrices invertidas para determinar (a) $(AB)^{-1}$, (b) $(A^T)^{-1}$ y (d) $(2A)^{-1}$.

41. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

42. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{3}{11} & -\frac{1}{11} \end{bmatrix}$

43. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{4} & 2 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$

44. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

Resolución de un sistema of ecuaciones usando una inversa En los ejercicios 45 a 48, utilice una matriz inversa para resolver cada sistema de ecuaciones lineales.

45. (a) $\begin{aligned} x + 2y &= -1 \\ x - 2y &= 3 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} x + 2y &= 10 \\ x - 2y &= -6 \end{aligned}$

46. (a) $\begin{aligned} 2x - y &= -3 \\ 2x + y &= 7 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 2x - y &= -1 \\ 2x + y &= -3 \end{aligned}$

47. (a) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= -2 \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= -3 \end{aligned}$

48. (a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= -1 \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$

Resolución de un sistema of ecuaciones usando una inversa En los ejercicios 49 a 52, utilice una aplicación gráfica o un programa de computadora con capacidad matricial para resolver el sistema de ecuaciones lineales usando una matriz inversa.

49. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 &= -3 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 &= -3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 &= 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 &= -3 \end{aligned}$

50. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 - x_5 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 &= 5 \end{aligned}$

51. $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 - 4x_6 &= 20 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 - x_5 + 2x_6 &= -16 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 - x_5 + 2x_6 &= -12 \\ -5x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 5x_5 + 3x_6 &= -2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 3x_5 + x_6 &= -15 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 - 6x_6 &= 25 \end{aligned}$

52. $\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 5x_5 - x_6 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 6x_4 + 3x_5 + 3x_6 &= -11 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 - 2x_6 &= 0 \\ -x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 6x_4 + 2x_5 + 4x_6 &= -9 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 - 3x_5 - 5x_6 &= 1 \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 6x_4 + x_5 + 2x_6 &= -12 \end{aligned}$

Matriz igual a su propia inversa En los ejercicios 53 a 54, determine el valor de x tal que la matriz sea igual a su inversa.

53. $A = \begin{bmatrix} 3 & x \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ **54.** $A = \begin{bmatrix} 2 & x \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

Matriz singular En los ejercicios 55 y 56, determine el valor de x tal que la matriz sea singular.

55. $A = \begin{bmatrix} 4 & x \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ **56.** $A = \begin{bmatrix} x & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

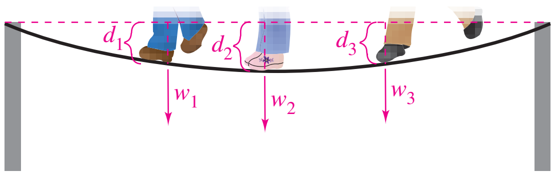
Resolución de una ecuación matricial En los ejercicios 57 y 58, determine el valor de A tal que

57. $(2A)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ **58.** $(4A)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

Determinación de la inversa de una matriz En los ejercicios 59 y 60, demuestre que la matriz es invertible y encuentre su inversa.

59. $A = \begin{bmatrix} \text{sen}\,\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \text{sen}\,\theta \end{bmatrix}$ **60.** $A = \begin{bmatrix} \sec\theta & \tan\theta \\ \tan\theta & \sec\theta \end{bmatrix}$

Deflexión de vigas En los ejercicios 61 y 62, las fuerzas w_1, w_2 y w_3 (en libras) actúan en una elástica soportada de manera simple, lo que resulta en las deflexiones d_1, d_2 y d_3 (en pulgadas) en la viga (véase la figura).



Utilice la ecuación matricial $d = F\mathbf{w}$ donde

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

y F es la *matriz de flexibilidad* 3×3 para la viga, para encontrar la matriz de rigidez F^{-1} y la matriz de fuerza $\mathbf{w}$. Las unidades de las entradas de F se presentan en pulgadas por libra.

61. $F = \begin{bmatrix} 0.008 & 0.004 & 0.003 \\ 0.004 & 0.006 & 0.004 \\ 0.003 & 0.004 & 0.008 \end{bmatrix}, \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0.585 \\ 0.640 \\ 0.835 \end{bmatrix}$

62. $F = \begin{bmatrix} 0.017 & 0.010 & 0.008 \\ 0.010 & 0.012 & 0.010 \\ 0.008 & 0.010 & 0.017 \end{bmatrix}, \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.15 \\ 0 \end{bmatrix}$

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 63 y 64, determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es cierta, proporcione una razón o cite una expresión adecuada a partir del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que muestre que la expresión no es cierta en todos los casos o cite una expresión apropiada a partir del texto.

63. (a) Si las matrices A, B y C satisfacen $BA = CA$ y A es invertible, entonces $B = C$.

(b) La inversa del producto de dos matrices es el producto de sus inversas, esto es $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

(c) Si A puede ser reducida por la matriz identidad, entonces A es no singular.

64. (a) La inversa de la inversa de una matriz no singular A, $(A^{-1})^{-1}$ es igual a A misma.

(b) La matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es invertible si $ab - dc \neq 0$.

(c) Si A es una matriz cuadrada, entonces el sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única.

65. Prueba Demuestre la propiedad 2 del teorema 2.8: si A es una matriz invertible y k un entero positivo, entonces

$$(A^k)^{-1} = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \cdot \cdot \cdot A^{-1}}_{k \text{ factor}} = (A^{-1})^k$$

66. Prueba Demuestre la propiedad 4 del teorema 2.8: si A es una matriz invertible, entonces $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

67. Demostración guiada Demuestre que la inversa de una matriz simétrica no singular es simétrica.

Inicio: para demostrar que la inversa de A es simétrica, necesita probar que $(A^{-1})^T = A^{-1}$

(i) Sea A una matriz simétrica no singular.

(ii) Esto significa que $A^T = A$ y A^{-1} existen.

(iii) Utilice las propiedades de la transpuesta para demostrar que $(A^{-1})^T$ es igual a A^{-1}.

68. Prueba Demuestre la propiedad 2 del teorema 2.10: si C es una matriz invertible tal que $CA = CB$, entonces $A = B$.

69. Prueba Demuestre que si $A^2 = A$, entonces

$I - 2A = (I - 2A)^{-1}$.

70. Prueba Demuestre que si A, B y C son matrices cuadradas y $ABC = I$, entonces B es invertible y $B^{-1} = CA$.

71. Prueba Demuestre que si A es invertible y $AB = O$, entonces $B = O$.

72. Demostración guiada Demuestre que si $A^2 = A$, entonces una de dos cosas: $A = I$ o A es singular.

Inicio: usted debe demostrar que A es singular o que A es igual a la matriz

(i) Comience su demostración observando que A es singular o no singular.

(ii) Si A es singular, la demostración está hecha.

(iii) Si A es no singular, entonces utilice la matriz inversa A^{-1} y la hipótesis de que $A^2 = A$ para demostrar que $A = I$.

73. Escriba ¿La suma de dos matrices invertibles es invertible? Explique por qué sí o por qué no. Ilustre su conclusión con un ejemplo apropiado.

74. Escriba ¿Bajo qué condiciones la matriz diagonal

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

es invertible? Si A es invertible, encuentre la inversa.

75. Use el resultado del ejercicio 74 para determinar A^{-1} para cada matriz.

(a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

76. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Demuestre que $A^2 - 2A + 5I = O$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

(b) Demuestre que $A^{-1} = \frac{1}{5}(2I - A)$.

(c) Demuestre que, en general, para cualquier matriz cuadrada que satisfaga la ecuación $A^2 - 2A + 5I = 0$, la inversa de A está dada por $A^{-1} = \frac{1}{5}(2I - A)$.

77. Prueba Sea $\mathbf{u}$ la matriz columna $n \times 1$ que satisface $\mathbf{u}^T\mathbf{u} = 1$. La matriz de $n \times n$, $H = I_n - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T$ se llama **matriz de Householder**.

(a) Demuestre que H es simétrica y no singular.

(b) Sea $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Demuestre que $\mathbf{u}^T\mathbf{u} = 1$ y calcule la matriz de Householder H.

78. Prueba Sean A y B matrices n x n. Demuestre que si la matriz $I - AB$ es no singular, entonces también lo es $I - BA$.

79. Sean A, D y P matrices de n $\times$ n que satisfacen $AP = PD$. Si P es no singular, resuelva esta ecuación para A. ¿Debe cumplirse que $A = D$?

80. Encuentre un ejemplo de una matriz singular de 2×2 que satisfaga $A^2 = A$.

81. Escriba Explique cómo determinar si la inversa de una matriz existe. Si es así, explique cómo encontrar la inversa.

82. REMATE Como se mencionó en la página 66, si A es una matriz de 2×2 dada por

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

entonces A es invertible si y sólo si $ad - cb \neq 0$. Verifique que la inversa de A esté dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

83. Escriba Explique en sus propias palabras cómo escribir un sistema de tres ecuaciones lineales en tres variables como una ecuación matricial, $AX = B$, así como la manera de resolver el sistema usando una matriz inversa.

2.4 Matrices elementales

- Factorice una matriz en un producto de matrices elementales.
- Encuentre y utilice una factorización *LU* de una matriz para resolver un sistema de ecuaciones lineales.

MATRICES ELEMENTALES Y OPERACIONES ELEMENTALES CON RENGLONES

En la sección 1.2 se presentaron las tres operaciones elementales sobre renglones aplicadas a las matrices; éstas son:

1. Intercambio de dos renglones.

2. Multiplicar un renglón por una constante diferente de cero.

3. Sumar el múltiplo de un renglón a otro renglón.

En esta sección, usted podrá ver cómo la multiplicación matricial puede emplearse para ejecutar estas operaciones.

COMENTARIO

De acuerdo con esta definición, la matriz identidad I_n es elemental, ya que puede obtenerse a partir de sí misma al multiplicar cualquiera de sus renglones por 1.

Definición de matriz elemental

Una matriz de $n \times n$ se denomina **matriz elemental** si puede obtenerse a partir de la matriz identidad I_n por una sencilla operación de renglón.

EJEMPLO 1 **Matrices elementales y no elementales**

¿Cuáles de las siguientes matrices son elementales? Para aquéllas que lo sean, describa la operación elemental de renglón.

a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **f.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

SOLUCIÓN

a. Esta matriz es elemental. Puede obtenerse multiplicando el segundo renglón de I_3 por 3.

b. Esta matriz *no* es elemental, ya que no es cuadrada.

c. Esta matriz *no* es elemental, ya que fue obtenida al multiplicar el tercer renglón de I_3 por 0 (la multiplicación de renglones debe ser por una constante diferente de cero).

d. Esta matriz *es* elemental. Puede obtenerse intercambiando el segundo y el tercer renglón de I_3.

e. Esta matriz *es* elemental. Puede obtenerse al multiplicar el primer renglón de I_2 por 2 y sumar el resultado al segundo renglón.

f. Esta matriz *no* es elemental, ya que se requieren dos operaciones con renglones para obtenerla a partir de I_3.

Las matrices elementales resultan útiles porque permiten usar la multiplicación matricial para realizar operaciones elementales con renglones, como se muestra en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Matrices elementales y operaciones elementales con renglones

a. En el siguiente producto de matrices, E es una matriz elemental en la cual los dos primeros renglones de I_3 se han intercambiado.

$$\overset{E}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \overset{A}{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Observe que los dos primeros renglones de A se han intercambiado en la multiplicación *por la izquierda* por E.

b. En el siguiente producto de matrices, E es la matriz elemental en la cual el segundo renglón de I_3 se ha multiplicado por $\frac{1}{2}$.

$$\overset{E}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Aquí el tamaño de A es 3×4. A puede, sin embargo, ser cualquier matriz de $3 \times n$ y multiplicarse por la izquierda por E y mantener el resultado de multiplicar el segundo renglón de A por $\frac{1}{2}$.

c. En el siguiente producto, E es la matriz elemental en la que se ha sumado dos veces el primer renglón de I_3 al segundo renglón.

$$\overset{E}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Note que en el producto EA se ha sumado dos veces el primer renglón al segundo.

COMENTARIO

Asegúrese de tener en mente que en el teorema 2.12 A es multiplicada por la *izquierda* por la matriz elemental E. La multiplicación por la derecha por matrices elementales, la cual implica operaciones con columnas, no se considera en este texto.

En cada uno de los tres productos del ejemplo 2, usted fue capaz de ejecutar operaciones elementales con renglones para multiplicar por la *izquierda* por una matriz elemental. Esta propiedad de las matrices elementales se generaliza en el siguiente teorema, el cual se enuncia sin demostrar.

TEOREMA 2.12 Representación de operaciones elementales con renglones

Sea E la matriz elemental obtenida al ejecutar una operación elemental con renglones en I_m. Si esta misma operación es realizada en una matriz A de $m \times n$, entonces el resultado está dado por el producto EA.

Muchas aplicaciones de las operaciones elementales con reglones requieren de una secuencia de operaciones. Por ejemplo, la eliminación gaussiana a menudo precisa de varias operaciones elementales con renglones para reducir una matriz. Para matrices elementales, esta secuencia se traduce en la multiplicación (por la izquierda) por varias matrices elementales. El orden de la multiplicación es importante; la matriz elemental inmediata para la izquierda de A corresponde a la operación con renglones ejecutada primero. Este proceso se demuestra en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Aplicación de matrices elementales

Encuentre una sucesión de matrices elementales que puedan utilizarse para escribir la matriz A en forma escalonada por renglones.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Matriz	Operación elemental con renglones	Matriz elemental
$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$	$R_1 \leftrightarrow R_2$	$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$	$R_3 + (-2)R_1 \rightarrow R_3$	$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$	$\left(\frac{1}{2}\right)R_3 \rightarrow R_3$	$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

Las tres matrices elementales E_1, E_2 y E_3 pueden utilizarse para ejecutar la misma eliminación.

$$B = E_3E_2E_1A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

COMENTARIO

El procedimiento demostrado en el ejemplo 3 es primordialmente de interés teórico. En otras palabras, este procedimiento no se recomienda como un método práctico para realizar la eliminación gaussiana.

Las dos matrices en el ejemplo 3

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & -6 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

son equivalentes por renglones, ya que usted puede obtener B al ejecutar una secuencia de operaciones con renglones en A. Es decir, $B = E_3E_2E_1A$.

La definición de matrices equivalentes por reglones puede ser reexpresada usando matrices elementales de la siguiente manera.

Definición de equivalencia por renglones

Sean A y B matrices de $m \times n$. La matriz B es **equivalente por renglones** con A si existe un número finito de matrices elementales $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tal que

$$B = E_kE_{k-1} \cdots E_2E_1A.$$

Usted sabe, de la sección 2.3, que no todas las matrices cuadradas son invertibles. Sin embargo, toda matriz elemental es invertible. Además, la inversa de una matriz elemental es en sí misma una matriz elemental.

TEOREMA 2.13 Las matrices elementales son invertibles

Si E es una matriz elemental, entonces E^{-1} existe y es una matriz elemental.

La inversa de una matriz elemental E es la matriz elemental que convierte E de nuevo en I_n. Por ejemplo, puede encontrar la inversa de cada una de la tres matrices elementales mostradas en el ejemplo 3 de la siguiente manera.

COMENTARIO

E_2^{-1} está como se muestra porque convertir E_2 a I_3, en E_2 se tendría que sumar dos veces el primer renglón al tercero.

Matriz elemental | Matriz inversa

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_1 \leftrightarrow R_2 \qquad E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_3 + (-2)R_1 \rightarrow R_3 \qquad E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_3 + (2)R_1 \rightarrow R_3$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \left(\tfrac{1}{2}\right)R_3 \rightarrow R_3 \qquad E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2)R_3 \rightarrow R_3$$

Intente utilizar la multiplicación de matrices para verificar estos resultados.

El siguiente teorema establece que toda matriz invertible puede ser escrita como el producto de dos matrices elementales.

TEOREMA 2.14 Propiedad de las matrices invertibles

Una matriz cuadrada es invertible si y sólo si puede ser escrita como el producto de matrices elementales.

DEMOSTRACIÓN

La frase "si y sólo si" significa que el teorema tiene dos partes. En una, usted debe demostrar que *si* A es invertible, *entonces* puede escribirse como el producto de matrices elementales. Luego debe demostrar que si A puede ser escrita como el producto de matrices elementales, *entonces* es invertible.

Para demostrar el teorema en la otra dirección, suponga que A es invertible. Del teorema 2.11 sabe que el sistema de ecuaciones lineales representado por $Ax = O$ tiene sólo la solución trivial. Pero esto implica que la matriz aumentada $[A \quad O]$ puede reescribirse en la forma $[I \quad O]$ (usando operaciones elementales con renglones correspondientes E_1, $E_2, \ldots$ y E_k). Ahora tenemos $E_k \ldots E_3E_2E_1A = I$ y esto seguido de $A = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} \ldots E_k^{-1}$. A puede escribirse como el producto de dos matrices elementales y la demostración está completa.

Para demostrar el teorema en la otra dirección, asuma que A es el producto de matrices elementales. Entonces, debido a que cada matriz elemental es invertible y el producto de matrices invertibles es invertible, se sigue que A es invertible. Esto completa la demostración.

La primera parte de esta demostración se ilustra en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 **Escritura de una matriz como el producto de matrices elementales**

Determine una sucesión de matrices elementales cuyo producto es la matriz no singular

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN

Empecemos por encontrar una sucesión de operaciones elementales con renglones que puedan utilizarse para reescribir A en la forma escalonada reducida.

Matriz	Operación elemental con renglones	Matriz elemental
$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$	$(-1)R_1 \rightarrow R_1$	$E_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	$R_2 + (-3)R_1 \rightarrow R_2$	$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\left(\frac{1}{2}\right)R_2 \rightarrow R_2$	$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$R_1 + (-2)R_2 \rightarrow R_1$	$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ahora, a partir del producto matricial $E_4E_3E_2E_1A = I$, resuelva para A para obtener $A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1}$. Esto implica que A es el producto de matrices elementales.

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_1^{-1}}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}}_{E_2^{-1}}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{E_3^{-1}}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_4^{-1}} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

En la sección 2.3 usted aprendió un proceso para encontrar la inversa de una matriz no singular A. Entonces empleó la eliminación de Gauss-Jordan para reducir la matriz aumentada $[A \quad I]$ a $[I \quad A^{-1}]$. Ahora puede utilizar el teorema 2.14 para justificar este procedimiento. Específicamente, la demostración del teorema 2.14 permite escribir el producto

$$I = E_k \cdot \cdot \cdot E_3E_2E_1A.$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación (por la derecha) por A^{-1}, podemos escribir $A^{-1} = E_k \ldots E_3E_2E_1I$. En otras palabras, una sucesión de matrices elementales que reducen A a la identidad pueden usarse para reducir también la identidad I a A^{-1}. Aplicando la sucesión correspondiente de operaciones elementales con renglones a las matrices A e I de manera simultánea, tenemos

$$E_k \cdot \cdot \cdot E_3E_2E_1[A \quad I] = [I \quad A^{-1}].$$

Por supuesto, si A es singular, entonces tal sucesión no puede ser determinada.

El siguiente teorema vincula algunas relaciones importantes entre matrices de $n \times n$ y sistemas de ecuaciones lineales. Las partes esenciales de este teorema ya han sido demostradas (véase los teoremas 2.11 y 2.14); se deja a usted completar el resto de la demostración.

TEOREMA 2.15 Condiciones equivalentes

Si A es una matriz de $n \times n$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

1. A es invertible.
2. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada matriz $\mathbf{b}$ columna de $n \times 1$.
3. $A\mathbf{x} = O$ sólo tiene solución trivial.
4. A es equivalente por renglones a I_n.
5. A puede escribirse como el producto de matrices elementales.

FACTORIZACIÓN *LU*

Como el corazón de muchos eficientes y modernos algoritmos para resolver sistemas lineales, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se llama también factorización LU, en la cual la matriz cuadrada A es expresada como un producto, $A = LU$. En este producto la matriz cuadrada L es *triangular inferior*, lo que significa que todos los elementos debajo de la diagonal principal son ceros. La matriz cuadrada U es **triangular superior**, lo cual significa que todos los elementos arriba de la diagonal principal son ceros.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

Matriz triangular inferior de 3×3 Matriz triangular superior de 3×3

Definición de la factorización *LU*

Si la matriz A de $n \times n$ puede ser escrita como el producto de una matriz triangular inferior L y una matriz triangular superior U, entonces $A = LU$ es una **factorización *LU*** de A.

EJEMPLO 5 Factorizaciones *LU*

a. $$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = LU$$

es una factorización LU de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

como el producto de la matriz triangular inferior

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y la matriz triangular superior

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

b. $$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -10 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix} = LU$$

es una factorización LU de la matriz A.

ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

Dinámica de fluidos computacional (CFD por sus siglas en inglés) es el análisis por computadora de fenómenos de la vida real como flujo de fluidos, transferencia de calor y reacciones químicas. Resolver ecuaciones de conservación de energía, masa y momento implicadas en un análisis de CFD puede involucrar grandes sistemas de ecuaciones lineales. Así, para mayor eficiencia en el cálculo, los análisis de CFD a menudo usan particionado de matrices y factorización *LU* en sus algoritmos. Las empresas aeroespaciales como Boeing y Airbus han usado el análisis CFD para el diseño de aeronaves. Por ejemplo, los ingenieros de Boeing usaron análisis de CFD para simular el flujo de aire alrededor de un modelo virtual del avión 787 para ayudar a producir un diseño más rápido y eficiente que los anteriores de Boeing.

Goncharuk/shutterstock.com

Si una matriz cuadrada A puede ser reducida a una matriz triangular superior U usando sólo la operación suma de renglón para sumar un múltiplo de un renglón a otro debajo de éste, entonces es fácil determinar una factorización LU de la matriz A. Todo lo que necesita hacer es mantener el registro de las operaciones con cada renglón, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 Determinación de las factorizaciones *LU* de una matriz

Determine la factorización LU de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -10 & 2 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

Comience por reducir A a la forma triangular superior mientras mantiene el registro de las matrices elementales utilizadas para cada operación con renglones.

Matriz	Operación elemental con renglones	Matriz elemental
$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}$	$R_3 + (-2)R_1 \to R_3$	$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$	$R_3 + (4)R_2 \to R_3$	$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

La matriz reducida U a la izquierda es triangular superior, lo que conduce a $E_2E_1A = U$ o $A = E_1^{-1}E_2^{-1}\,U$. Como el producto de matrices triangulares inferiores

$$E_1^{-1}E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

es una matriz triangular inferior L, la factorización $A = LU$ está completa. Observe que esta es la misma factorización LU que se demostró en el ejemplo 5(b) al inicio de esta página.

En general, si A puede ser reducida a una matriz U triangular superior utilizando sólo la operación suma de un múltiplo de un renglón a otro, entonces A tiene una factorización LU.

$$E_k \cdots E_2E_1A = U$$
$$A = E_1^{-1}E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}U = LU$$

Aquí L es el producto de las inversas de matrices elementales utilizadas en la reducción.

Observe que los múltiplos en el ejemplo 6 son –2 y 4, es decir, los negativos de los elementos correspondientes en L. En general esto es cierto. Si U puede ser obtenida a partir de A usando sólo la operación de sumar un múltiplo de un renglón a otro renglón de abajo, entonces la matriz L es triangular inferior con números 1 a lo largo de la diagonal. Además, el negativo de cada múltiplo está en la misma posición que el cero correspondiente en la matriz U.

Una vez que haya obtenido una factorización LU de la matriz A, usted puede resolver entonces el sistema de n ecuaciones lineales en n variables $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ eficientemente en dos pasos.

1. Escriba $\mathbf{y} = U\mathbf{x}$ y resuelva $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ para $\mathbf{y}$.
2. Resuelva $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ para $\mathbf{x}$.

La matriz columna $\mathbf{x}$ es la solución del sistema original porque

$$A\mathbf{x} = LU\mathbf{x} = L\mathbf{y} = \mathbf{b}.$$

El segundo paso en este algoritmo es sólo una sustitución hacia atrás, ya que la matriz U es triangular superior. El primer paso es similar, excepto que comienza en la parte de arriba de la matriz, ya que L es triangular inferior. Por esta razón, el primer paso a menudo recibe el nombre de **sustitución hacia delante**.

EJEMPLO 7 Resolución de un sistema lineal usando factorización *LU*

Resuelva el sistema lineal.

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= -5 \\ x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 2x_1 - 10x_2 + 2x_3 &= -20 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Usted obtuvo la factorización LU de la matriz de coeficientes A en el ejemplo 6.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -10 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Primero, haga $\mathbf{y} = U\mathbf{x}$ y resuelva el sistema $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ para y.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ -20 \end{bmatrix}$$

Este sistema se resuelve fácilmente usando la sustitución hacia delante. Comenzando con la primera ecuación, tiene que

$$y_1 = 5.$$

La segunda ecuación da como resultado $y_2 = -1$. Finalmente, de la tercera ecuación,

$$\begin{aligned} 2y_1 - 4y_2 + y_3 &= -20 \\ y_3 &= -20 - 2y_1 + 4y_2 \\ y_3 &= -20 - 2(-5) + 4(-1) \\ y_3 &= -14. \end{aligned}$$

La solución de $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ es

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ -14 \end{bmatrix}.$$

Ahora, resolviendo el sistema $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ para $\mathbf{x}$, aplicando la sustitución hacia atrás

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ -14 \end{bmatrix}$$

De la última ecuación, $x_3 = -1$. Entonces, la segunda ecuación da

$$x_2 + 3(-1) = -1$$

o $x_2 = 2$. Finalmente, la primera ecuación es

$$x_1 - 3(2) = -5$$

o $x_1 = 1$. Así, la solución del sistema original de ecuaciones es

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

2.4 Ejercicios

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

Matrices elementales En los ejercicios 1 a 8 determine si las matrices son elementales. Si es así, establezca las operaciones elementales con renglones utilizadas para producirlas.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **4.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

Determinación de una matriz elemental En los ejercicios 9-12, sean A, B y C

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

9. Encuentre la matriz elemental E tal que $EA = B$.

10. Encuentre la matriz elemental E tal que $EA = C$.

11. Encuentre la matriz elemental E tal que $EB = A$.

12. Encuentre la matriz elemental E tal que $EC = A$.

Determinación de una secuencia de matrices elementales En los ejercicios 13–16, encuentre una secuencia de matrices elementales que se pueden usar para escribir la matriz en la forma escalonada por renglones.

13. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 5 & 10 & -5 \end{bmatrix}$ **14.** $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & -4 \\ -6 & 12 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ **16.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & -2 & -4 \end{bmatrix}$

Determinación de la inversa de una matriz elemental En los ejercicios 17 a 22, encuentre la inversa de la matriz elemental.

17. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **18.** $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **20.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **22.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$k \neq 0$

Determinación de la inversa de una matriz En los ejercicios 23 a 26, encuentre la inversa de la matriz aplicando matrices elementales.

23. $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **24.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ **26.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Determinación de una secuencia de matrices elementales En los ejercicios 27–34, encuentre una secuencia de matrices elementales cuyo producto sea la matriz no singular dada.

27. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **28.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ **30.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **32.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

33. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ **34.** $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 35 y 36, determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, proporcione una razón o cite una expresión adecuada del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que muestre que la expresión no es cierta en todos los casos o cite del texto una expresión adecuada.

35. (a) La matriz identidad es una matriz elemental.

(b) Si E es una matriz elemental, entonces $2E$ es una matriz elemental también.

(c) La inversa de una matriz elemental es una matriz elemental.

36. (a) La matriz nula es una matriz elemental.

(b) Una matriz cuadrada es no singular si puede escribirse como el producto de dos matrices elementales.

(c) $A\mathbf{x} = O$ sólo tiene solución trivial si y sólo si $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una única solución para toda matriz columna $\mathbf{b}$ de $n \times 1$.

37. Escriba ¿El producto de dos matrices elementales siempre es una matriz elemental? Explique por qué sí o por qué no y dé ejemplos que ilustren su conclusión.

38. Escriba E es la matriz elemental obtenida al intercambiar dos renglones en I_n. A es una matriz de $n \times n$.

(a) ¿Cómo se puede comparar EA con A? (b) Encuentre E^2.

39. Utilice matrices elementales para encontrar la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix},$$

$c \neq 0$.

40. Utilice matrices elementales para encontrar la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{bmatrix}, \quad c \neq 0.$$

Determinación de la factorización *LU* de una matriz En los ejercicios 41 a 44, encuentre la factorización LU de la matriz

41. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ **42.** $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$

43. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **44.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 10 & 12 & 3 \end{bmatrix}$

Resolución de un sistema lineal usando factorización *LU* En los ejercicios 45 y 46, resuelva el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de la siguiente manera:

(a) Encuentre la factorización LU de la matriz de coeficientes A,

(b) Resuelva el sistema triangular inferior $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$, y

(c) Resuelva el sistema triangular superior $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

45.
$$\begin{aligned} 2x + y \quad\;\; &= 1 \\ y - z &= 2 \\ -2x + y + z &= -2 \end{aligned}$$

46.
$$\begin{aligned} 2x_1 \qquad\qquad\qquad &= 4 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 \qquad &= -4 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad &= 15 \\ -x_4 &= -1 \end{aligned}$$

47. Escriba Suponga que necesita resolver varios sistemas de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_i$ que tienen la misma matriz de coeficientes A. Explique cómo podría aplicar la técnica de la factorización LU para facilitar la tarea, más que resolver cada sistema de manera individual utilizando la eliminación gaussiana.

48. REMATE Explique cada uno de los siguientes.

(a) Cómo encontrar una matriz elemental.

(b) Cómo usar matrices elementales para encontrar la factorización LU de una matriz.

(c) Cómo usar la factorización LU para resolver un sistema lineal

Matrices idempotentes En los ejercicios 49 a 52, determine cuál de las matrices es idempotente. Una matriz cuadrada A es idempotente si $A^2 = A$.

49. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **50.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

51. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **52.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

53. Determine a y b tales que A sea idempotente.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{bmatrix}$$

54. Demostración guiada Demuestre que A es idempotente si y sólo si A^T es idempotente.

Inicio: la frase "si y sólo si" significa que usted debe probar dos afirmaciones:

1. Si A es idempotente, entonces A^T es idempotente.

2. Si A^T es idempotente, entonces A es idempotente.

(i) Comience su demostración de la primera afirmación suponiendo que A es idempotente.

(ii) Esto quiere decir que $A^2 = A$.

(iii) Aplique las propiedades de la transpuesta para demostrar que A^2 es idempotente.

(iv) Comience su demostración de la segunda afirmación suponiendo que A^2 es idempotente.

55. Prueba Pruebe que si A es una matriz de $n \times n$ que es idempotente e invertible, entonces $A = I_n$.

56. Prueba Demuestre que si A y B son idempotentes y $AB = BA$, entonces AB es idempotente.

57. Demostración guiada Demuestre que si A es equivalente por renglones a B y B equivale por renglones a C, entonces A es equivalente por renglones a C.

Inicio: para demostrar que A es equivalente por renglones a C, usted debe encontrar matrices elementales $E_1, \ldots, E_k$ tales que $A = E_k \ldots E_1 C$.

(i) Comience su demostración observando que A es equivalente por renglones a B.

(ii) Esto quiere decir que existen matrices elementales $F_1, \ldots, F_n$ tales que $A = F_n, \ldots, F_1 B$

(iii) Existen matrices elementales $G_1, \ldots, G_m$ tales que $B = G_1, \ldots, G_m C$.

(iv) Combine las ecuaciones matriciales de los pasos (ii) y (iii).

58. Prueba Demuestre que si A es equivalente por renglones a B, entonces B es equivalente por renglones a A.

59. Prueba Demuestre que si A es equivalente por renglones a B y B equivale por renglones a C, entonces A es equivalente por renglones a C.

60. Demuestre que la matriz no tiene factorización LU.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.5 Aplicaciones de las operaciones con matrices

- Escriba y use una matriz estocástica.
- Use la multiplicación de matrices para codificar y decodificar mensajes.
- Use álgebra de matrices para analizar un sistema económico (modelo de entradas y salidas de Leontief).
- Encuentre la recta de regresión por mínimos cuadrados para un conjunto de datos.

MATRICES ESTOCÁSTICAS

Muchos tipos de aplicaciones implican un conjunto finito de *estados* $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ de una población dada. Por ejemplo, los residentes de una ciudad pueden vivir en el centro o en la periferia. Los electores pueden votar por los Demócratas, los Republicanos o un tercer partido. Consumidores de bebidas gaseosas pueden comprar Coca-Cola, Pepsi Cola u otra marca.

La probabilidad de que un miembro de la población cambie del j-ésimo estado al i-ésimo estado es representada por un número p_{ij}, donde $0 \leq p_{ij} \leq 1$. Una probabilidad de $p_{ij} = 0$ significa que el miembro no cambia del estado j-ésimo al i-ésimo, mientras que una probabilidad $p_{ij} = 1$ significa que el miembro cambia del estado j-ésimo al i-ésimo.

$$P = \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{cccc} S_1 & S_2 & \cdots & S_n \end{array}}^{\text{De}} \\ \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \end{array} \left. \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \end{array} \right\} \text{A}$$

P se llama **matriz de probabilidades de transición**, ya que proporciona las probabilidades de cada posible tipo de transición (o cambio) dentro de la población.

En cada transición, cada miembro dado debe permanecer en un estado cualquiera o cambiar a otro. Para probabilidades, esto significa que la suma de los elementos en cualquier columna de P es 1. Por ejemplo, en la primera columna tenemos

$$p_{11} + p_{21} + \ldots + p_{n1} = 1.$$

tal matriz se denomina **estocástica** (el término "estocástico" quiere decir "conjetura respecto a"). Esto es, una matriz P de $n \times n$ es llamada **matriz estocástica** si cada elemento es un número entre 0 y 1 y cada columna de P suma en total 1.

EJEMPLO 1 Ejemplos de matrices estocásticas y no estocásticas

Las matrices en los incisos (a) y (b) son estocásticas, pero la matriz en en los incisos (c) y (d) no lo son..

a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 0.3 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}$ **d.** $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$

El ejemplo 2 describe el uso de una matriz estocástica para medir las preferencias de un consumidor.

EJEMPLO 2 Modelo de preferencia del consumidor

Dos empresas competidoras ofrecen el servicio de televisión satelital para una ciudad de 100,000 residentes. Los cambios en las suscripciones cada año se muestran en la figura 2.1. La compañía A actualmente tiene 15,000 suscriptores y la compañía B tiene 20,000. ¿Cuántos suscriptores tendrá cada compañía dentro de 1 año a partir de ahora?

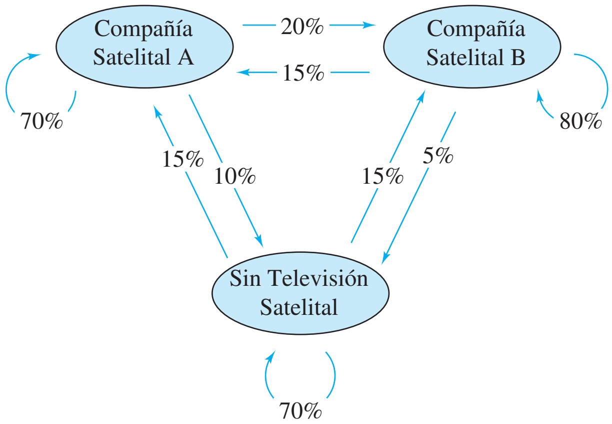


Figura 2.1

SOLUCIÓN

La matriz que representa las probabilidades de transición dadas es

$$
\begin{array}{cc}
 & \overbrace{\begin{array}{ccc} \text{A} & \text{B} & \text{Ninguno} \end{array}}^{\text{De}} \\
P = & \begin{bmatrix} 0.70 & 0.15 & 0.15 \\ 0.20 & 0.80 & 0.15 \\ 0.10 & 0.05 & 0.70 \end{bmatrix}
\end{array}
\left.\begin{array}{l} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{Ninguno} \end{array}\right\} \text{A}
$$

y la **matriz de estado** que representa la población actual en los tres estados es

$$X = \begin{bmatrix} 15{,}000 \\ 20{,}000 \\ 65{,}000 \end{bmatrix}. \qquad \begin{array}{l} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{Ninguno} \end{array}$$

Para determinar la matriz de estado que representa las poblaciones en los tres estados después de un año, multiplicamos P por X para obtener

$$
\begin{aligned}
PX &= \begin{bmatrix} 0.70 & 0.15 & 0.15 \\ 0.20 & 0.80 & 0.15 \\ 0.10 & 0.05 & 0.70 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15{,}000 \\ 20{,}000 \\ 65{,}000 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 23{,}250 \\ 28{,}750 \\ 48{,}000 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Después de un año, la compañía A tendrá 23,250 suscriptores y la compañía B tendrá 28,750.

Uno de los atractivos de la matriz solución en el ejemplo 2 es que una vez que se ha creado el modelo, éste vuelve fácil el determinar las matrices de estado que representen años futuros al multiplicar repetidamente por la matriz P. Este proceso se demuestra en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 **Modelo de preferencia del consumidor**

Suponiendo que la matriz de probabilidades de transición del ejemplo 2 permanece igual año tras año, determine el número de suscriptores de cada compañía de televisión satelital después de (a) 3 años, (b) 5 años y (c) 10 años. Redondee cada respuesta al número entero más cercano.

SOLUCIÓN

a. Del ejemplo 2 usted sabe que el número de suscriptores después de un año es

$$PX = \begin{bmatrix} 23{,}250 \\ 28{,}750 \\ 48{,}000 \end{bmatrix}. \quad \begin{matrix} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{Ninguno} \end{matrix} \quad \text{Después de 1 año}$$

Ya que la matriz de probabilidades de transición es la misma del primer al tercer año, el número de suscriptores después de 3 años es

$$P^3X \approx \begin{bmatrix} 30{,}283 \\ 39{,}042 \\ 30{,}675 \end{bmatrix}. \quad \begin{matrix} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{Ninguno} \end{matrix} \quad \text{Después de 3 años}$$

Después de 3 años, la compañía A tendrá 30,283 suscriptores y la compañía B 39,042.

b. El número de suscriptores después de 5 años es

$$P^5X \approx \begin{bmatrix} 32{,}411 \\ 43{,}812 \\ 23{,}777 \end{bmatrix}. \quad \begin{matrix} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{Ninguno} \end{matrix} \quad \text{Después de 5 años}$$

Después de 5 años, la compañía A tendrá 32,411 suscriptores y la compañía B 43,812.

c. El número de suscriptores después de 10 años es

$$P^{10}X \approx \begin{bmatrix} 33{,}287 \\ 47{,}147 \\ 19{,}566 \end{bmatrix}. \quad \begin{matrix} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{Ninguno} \end{matrix} \quad \text{Después de 10 años}$$

Después de 10 años, la compañía A tendrá 33,287 suscriptores y la compañía B 47,147.

En el ejemplo 3, observe que existe una pequeña diferencia entre el número de suscriptores después de 5 años y de 10 años. Si se continúa el proceso mostrado en este ejemplo, el número de suscriptores eventualmente alcanzará un **estado estable**. Esto es, en tanto la matriz P no cambie, la matriz producto P^nX se aproxima al límite $\overline{X}$. En este ejemplo en particular el límite es la matriz de estado estable

$$\overline{X} = \begin{bmatrix} 33{,}333 \\ 47{,}619 \\ 19{,}048 \end{bmatrix}. \quad \begin{matrix} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{Ninguno} \end{matrix} \quad \text{Estado estable}$$

Verifique que $P\overline{X} = \overline{X}$ como sigue

$$P\overline{X} = \begin{bmatrix} 0.70 & 0.15 & 0.15 \\ 0.20 & 0.80 & 0.15 \\ 0.10 & 0.05 & 0.70 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 33{,}333 \\ 47{,}619 \\ 19{,}048 \end{bmatrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} 33{,}333 \\ 47{,}619 \\ 19{,}048 \end{bmatrix} = \overline{X}$$

CRIPTOGRAFÍA

Un **criptograma** es un mensaje escrito de acuerdo con un código secreto (la palabra griega *kryptos* significa “oculto”). Esta sección describe un método para **codificar** y **decodificar** mensajes aplicando la multiplicación de matrices.

Comencemos por asignar un número a cada letra del alfabeto (el cero representa un espacio en blanco), de la siguiente manera

0 = __	14 = N
1 = A	15 = O
2 = B	16 = P
3 = C	17 = Q
4 = D	18 = R
5 = E	19 = S
6 = F	20 = T
7 = G	21 = U
8 = H	22 = V
9 = I	23 = W
10 = J	24 = X
11 = K	25 = Y
12 = L	26 = Z
13 = M	

Después, el mensaje es convertido a números y dividido en **matrices reglón sin codificar**, cada una con n elementos, como se demuestra en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Formación de matrices renglón sin codificar

Escriba la matriz reglón sin codificar de tamaño 1×3 para el mensaje MEET ME MONDAY.

SOLUCIÓN

Al dividir el mensaje (incluidos los espacios en blanco, pero ignorando la puntuación) en grupos de tres se producen las siguientes matrices renglón sin codificar.

$$\begin{array}{ccccc} [13 \quad 5 \quad 5] & [20 \quad 0 \quad 13] & [5 \quad 0 \quad 13] & [15 \quad 14 \quad 4] & [1 \quad 25 \quad 0] \\ M \quad E \quad E & T \quad \_ \quad M & E \quad \_ \quad M & O \quad N \quad D & A \quad Y \quad \_ \end{array}$$

Observe que el espacio en blanco se utiliza para completar la última matriz renglón sin codificar.

ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

Debido al uso intensivo de Internet para realizar negocios, la seguridad en internet es de capital importancia. Si un actor malicioso recibiera información confidencial como contraseñas, números de identificación personal, números de tarjetas de crédito, números de seguridad social, datos bancarios o secretos corporativos, los efectos podrían ser dañinos. Para proteger la confidencialidad e integridad de tal información, las formas más populares de seguridad en Internet utilizan *encriptación* de datos, el proceso de codificar información de modo que la única manera de decodificarla, además de un ataque de fuerza bruta “por desgaste,” es el uso de una *clave*. La tecnología de encriptación de datos utiliza algoritmos basados en el material que se presenta aquí, pero a un nivel mucho más sofisticado, para evitar que actores maliciosos descubran la clave.

Para **codificar** un mensaje, seleccione una matriz A invertible de $n \times n$ y multiplique las matrices renglón sin codificar (a la derecha) por A para obtener **matrices renglón codificadas**. Este proceso se demuestra en el ejemplo 5.

Andrea Danti/Shutterstock.com

EJEMPLO 5 Codificación de un mensaje

Utilice la siguiente matriz invertible

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

para codificar el mensaje MEET ME MONDAY.

SOLUCIÓN

Las matrices renglón codificadas se obtienen al multiplicar por la matriz A cada una de las matrices renglón sin codificar encontradas en el ejemplo 4, de la siguiente manera.

Matriz renglón sin codificar — Matriz codificada A — Matriz renglón codificada

$$[13 \quad 5 \quad 5]\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} = [13 \quad -26 \quad 21]$$

$$[20 \quad 0 \quad 13]\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} = [33 \quad -53 \quad -12]$$

$$[5 \quad 0 \quad 13]\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} = [18 \quad -23 \quad -42]$$

$$[15 \quad 14 \quad 4]\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} = [5 \quad -20 \quad 56]$$

$$[1 \quad 25 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} = [-24 \quad 23 \quad 77]$$

La sucesión de matrices renglón codificadas es

$$[13 \quad -26 \quad 21][33 \quad -53 \quad -12][18 \quad -23 \quad -42][5 \quad -20 \quad 56][-24 \quad 23 \quad 77].$$

Finalmente, quitando los corchetes se genera el siguiente criptograma.

$$13 \quad -26 \quad 21 \quad 33 \quad -53 \quad -12 \quad 18 \quad -23 \quad -42 \quad 5 \quad -20 \quad 56 \quad -24 \quad 23 \quad 77$$

Para quienes desconocen la matriz A, decodificar el criptograma encontrado en el ejemplo 5 es complicado, pero para un receptor autorizado que conoce la matriz A, decodificar es sencillo. El receptor sólo necesita multiplicar las matrices renglón codificadas por A^{-1} para recuperar las matrices sin codificar. En otras palabras, si

$$X = [x_1 \ \ x_2 \ \cdots \ x_n]$$

es una matriz de $1 \times n$ sin codificar, entonces $Y = XA$ es la matriz codificada correspondiente. El receptor de la matriz codificada puede decodificar Y multiplicando el lado derecho por A^{-1} para obtener

$$YA^{-1} = (XA)A^{-1} = X.$$

Este procedimiento se demuestra en el ejemplo 6.

EJEMPLO 6 Use la inversa de la matriz

Simulación
Explore este concepto más adelante con una simulación electrónica disponible en el sitio college. *cengage.com/pic/larsonELA6e*.

Use la inversa de la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

Para decodificar el criptograma

$$13 \quad -26 \quad 21 \quad 33 \quad -53 \quad -12 \quad 18 \quad -23 \quad -42 \quad 5 \quad -20 \quad 56 \quad -24 \quad 23 \quad 77.$$

SOLUCIÓN

Comience usando la eliminación de Gauss-Jordan para encontrar A^{-1}.

$$\overset{[A \quad I]}{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \longrightarrow \overset{[I \quad A^{-1}]}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -10 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}}$$

Ahora, para decodificar el mensaje, divídalo en grupos de tres para formar las matrices renglón codificadas

$$[13 \quad -26 \quad 21][33 \quad -53 \quad -12][18 \quad -23 \quad -42][5 \quad -20 \quad 56][-24 \quad 23 \quad 77].$$

Para obtener las matrices renglón decodificadas, multiplique cada una de las matrices renglón codificadas por A^{-1} (a la derecha).

Matriz renglón codificada — A^{-1} — Matriz decodificada — Matriz renglón decodificada

$$[13 \quad -26 \quad 21]\begin{bmatrix} -1 & -10 & -8 \\ -1 & -6 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = [13 \quad 5 \quad 5]$$

$$[33 \quad -53 \quad -12]\begin{bmatrix} -1 & -10 & -8 \\ -1 & -6 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = [20 \quad 0 \quad 13]$$

$$[18 \quad -23 \quad -42]\begin{bmatrix} -1 & -10 & -8 \\ -1 & -6 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = [5 \quad 0 \quad 13]$$

$$[5 \quad -20 \quad 56]\begin{bmatrix} -1 & -10 & -8 \\ -1 & -6 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = [15 \quad 14 \quad 4]$$

$$[-24 \quad 23 \quad 77]\begin{bmatrix} -1 & -10 & -8 \\ -1 & -6 & -5 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = [1 \quad 25 \quad 0]$$

La sucesión de las matrices renglón decodificadas es

$$[13 \quad 5 \quad 5][20 \quad 0 \quad 13][5 \quad 0 \quad 13][15 \quad 14 \quad 4][1 \quad 25 \quad 0]$$

y el mensaje es

13	5	5	20	0	13	5	0	13	15	14	4	1	25	0.
M	*E*	*E*	*T*	_	*M*	*E*	_	*M*	*O*	*N*	*D*	*A*	*Y*	_

MODELOS DE LEONTIEF DE ENTRADA–SALIDA

El modelo analizado aquí fue desarrollado por el economista estadounidense Wassily W. Leontief (1906–1999) y publicado por primera vez en 1936. En 1973 Leontief recibió el premio Nobel por su trabajo en economía. Sigue una breve discusión del modelo de Leontief.

Suponga que un sistema económico tiene n diferentes industrias $I_1, I_2, \ldots, I_n$, cada una de las cuales tiene requerimientos de **entrada** (materias primas, servicios, etc.) y una **salida** (producto terminado). En la producción de cada unidad de salida, una industria puede utilizar las salidas de otras industrias, incluyéndose a sí misma. Por ejemplo, el servicio eléctrico utiliza salidas de otras industrias, tales como carbón y agua, e incluso su propia electricidad.

Sea d_{ij} la cantidad de requerimientos de salida de la j-ésima industria para producir una unidad por año. La matriz de estos coeficientes se llama **matriz de entrada-salida**.

$$D = \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{cccc} I_1 & I_2 & \cdots & I_n \end{array}}^{\text{Usuario (salida)}} \\ \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix} \end{array} \left.\begin{array}{c} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_n \end{array}\right\} \text{Proveedor (entrada)}$$

Para entender cómo puede usar esta matriz, imagine $d_{12} = 0.4$. Esto significa que cada 0.4 unidades del producto de la Industria 1 deben emplearse para producir una unidad del producto de la Industria 2. Si $d_{33} = 0.2$, entonces 0.2 unidades del producto de la Industria 3 son requeridas para producir una unidad de su propio producto. Para que este modelo funcione, los valores de d_{ij} deben satisfacer $0 \le d_{ij} \le 1$ y la suma de los elementos en cada columna debe ser menor o igual a 1.

EJEMPLO 7 Formación de una matriz de entrada-salida

Considere un sistema económico simple consistente de tres industrias: electricidad, agua y carbón. La producción o salida de una unidad de electricidad requiere de 0.5 unidades de sí misma, 0.25 unidades de agua y 0.25 unidades de carbón. La producción o salida de una unidad de agua requiere de 0.1 unidades de electricidad, 0.6 unidades de sí misma y 0 unidades de carbón. La producción o salida de una unidad de carbón requiere de 0.2 unidades de electricidad, 0.15 unidades de agua y 0.5 unidades de sí misma. Determine la matriz de entrada-salida para este sistema.

SOLUCIÓN

La columna de elementos muestra las cantidades que cada industria requiere de las otras, también de sí misma, en el orden para producir una unidad de salida.

$$\begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{ccc} \text{E} & \text{W} & \text{C} \end{array}}^{\text{Usuario (salida)}} \\ \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 & 0.2 \\ 0.25 & 0.6 & 0.15 \\ 0.25 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array} \left.\begin{array}{c} \text{E} \\ \text{W} \\ \text{C} \end{array}\right\} \text{Proveedor (entrada)}$$

Los elementos de cada renglón muestran las cantidades que cada industria suministra a las otras, incluyéndose a sí misma, en el orden en que cada industria produce una unidad de producto o salida. Por ejemplo, la industria eléctrica suministra 0.5 unidades para sí misma, 0.1 unidades de agua y 0.2 unidades de carbón.

Para desarrollar el modelo de Leontief de entrada-salida, sea x_i la salida total de la industria i-ésima. Si el sistema económico es **cerrado** (es decir, sólo vende sus productos a las industrias dentro del sistema, como en el ejemplo anterior), entonces la salida total de la industria i-ésima está dada por la ecuación lineal

$$x_i = d_{i1}x_1 + d_{i2}x_2 + \cdots + d_{in}x_n. \qquad \text{Sistema cerrado}$$

Por otro lado, si las industrias dentro del sistema venden sus productos a grupos no productores (como gobiernos o instituciones de caridad) fuera del sistema, entonces el sistema se denomina **abierto** y la salida total de la industria i-ésima está dada por

$$x_i = d_{i1}x_1 + d_{i2}x_2 + \cdots + d_{in}x_n + e_i \qquad \text{Sistema abierto}$$

donde e_i representa la demanda externa para el producto de la industria i-ésima. El conjunto de salidas totales para un sistema abierto se representa por el siguiente sistema de n ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned} x_1 &= d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + \cdots + d_{1n}x_n + e_1 \\ x_2 &= d_{21}x_1 + d_{22}x_2 + \cdots + d_{2n}x_n + e_2 \\ &\vdots \\ x_n &= d_{n1}x_1 + d_{n2}x_2 + \cdots + d_{nn}x_n + e_n \end{aligned}$$

La forma matricial de este sistema es $X = DX + E$, donde X se llama **matriz de salida** y E, **matriz de demanda externa**.

EJEMPLO 8 Solución de una matriz de entrada-salida para un sistema abierto

Un sistema económico compuesto por tres industrias tiene la siguiente matriz de entrada-salida.

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\begin{array}{ccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} \end{array}}^{\text{Usuario (salida)}} \\ D = & \begin{bmatrix} 0.1 & 0.43 & 0 \\ 0.15 & 0 & 0.37 \\ 0.23 & 0.03 & 0.02 \end{bmatrix} \end{array} \left.\begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{array}\right\} \text{Proveedor (entrada)}$$

Determine la matriz de salida X si la demanda externa es

$$E = \begin{bmatrix} 20{,}000 \\ 30{,}000 \\ 25{,}000 \end{bmatrix}. \qquad \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{array}$$

Redondee cada respuesta a la unidad más cercana.

SOLUCIÓN

Sea I la matriz identidad, entonces escriba la ecuación $X = DX + E$ como $IX - DX = E$, lo que significa $(I - D)X = E$. Usando la matriz D arriba, se obtiene

$$I - D = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.43 & 0 \\ -0.15 & 1 & -0.37 \\ -0.23 & -0.03 & 0.98 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, aplicando la eliminación de Gauss-Jordan al sistema de ecuaciones lineales representado por $(I - D)X = E$ se produce

$$\begin{bmatrix} 0.9 & -0.43 & 0 & 20{,}000 \\ -0.15 & 1 & -0.37 & 30{,}000 \\ -0.23 & -0.03 & 0.98 & 25{,}000 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 46{,}616 \\ 0 & 1 & 0 & 51{,}058 \\ 0 & 0 & 1 & 38{,}014 \end{bmatrix}.$$

Así, la matriz de salida es

$$X = \begin{bmatrix} 46{,}616 \\ 51{,}058 \\ 38{,}014 \end{bmatrix}. \qquad \begin{array}{c} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{array}$$

Para producir la demanda externa hallada, las salidas de las tres industrias deben ser las siguientes: Salida para la industria A: 46,616 unidades, Salida para la industria B: 51,058 unidades y Salida para la industria C: 38,014 unidades.

COMENTARIO

Los sistemas económicos descritos en los ejemplos 7 y 8 son, por supuesto, sencillos. En el mundo real, un sistema económico puede incluir muchas industrias o grupos industriales. Un análisis más detallado fácilmente requiere de una matriz entrada-salida mayor que 100 × 100. Es claro que este tipo de análisis puede hacerse sólo con ayuda de una computadora.

ANÁLISIS DE REGRESIÓN CON MÍNIMOS CUADRADOS

Usted puede ahora observar un procedimiento que se utiliza en estadística para desarrollar modelos lineales. El siguiente ejemplo muestra un método visual para aproximar una línea de mejor ajuste para un conjunto de datos.

EJEMPLO 9 Aproximación visual en línea recta

Determine la línea recta que mejor ajuste los puntos (1, 1), (2, 2), (3, 4) (4, 4) y (5, 6).

SOLUCIÓN

Grafique los puntos, como se muestra en la figura 2.2. Puede parecer una buena elección una recta cuya pendiente es 1 y cuya intersección con el eje y es 0.5. La ecuación de esta recta es

$$y = 0.5 + x.$$

Una revisión de la recta mostrada en la figura 2.2 revela que se puede mejorar el ajuste rotando ligeramente la línea en el sentido de las manecillas del reloj, como se muestra en la figura 2.3. Claramente se ve que esta nueva recta, cuya ecuación es $y = 1.2x$, ajusta mejor los puntos que la recta original.

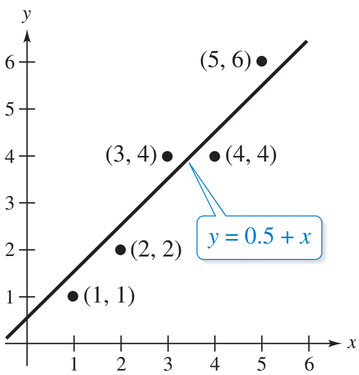


Figura 2.2

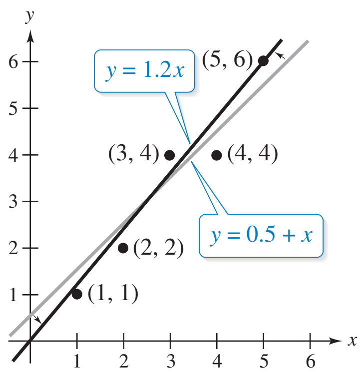


Figura 2.3

Una manera de medir qué tan bien una función $y = f(x)$) ajusta una serie de puntos

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$$

es calcular las diferencias entre los valores de la función $f(x_i)$ y los valores actuales y_i, como se muestra en la figura 2.4. Elevando al cuadrado estas diferencias y sumando los resultados, se obtiene una medida del error llamada suma del cuadrado del error. Las sumas de los cuadrados de los errores para nuestros dos modelos lineales se muestran abajo, en la tabla 2.1.

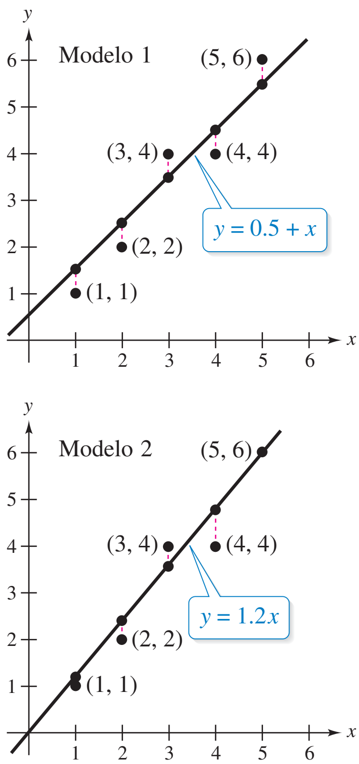


Figura 2.4

Modelo 1: $f(x) = 0.5 + x$				***Modelo 2: $f(x) = 1.2x$***			
x_i	y_i	$f(x_i)$	$[y_i - f(x_i)]^2$	x_i	y_i	$f(x_i)$	$[y_i - f(x_i)]^2$
1	1	1.5	$(-0.5)^2$	1	1	1.2	$(-0.2)^2$
2	2	2.5	$(-0.5)^2$	2	2	2.4	$(-0.4)^2$
3	4	3.5	$(+0.5)^2$	3	4	3.6	$(+0.4)^2$
4	4	4.5	$(-0.5)^2$	4	4	4.8	$(-0.8)^2$
5	6	5.5	$(+0.5)^2$	5	6	6.0	$(0.0)^2$
Total			1.25	Total			1.00

Las sumas de los cuadrados de los errores confirman que el segundo modelo se ajusta mejor que el primero a los puntos dados.

De todos los modelos lineales posibles para una serie de puntos, el modelo de mejor ajuste se define como el único que minimiza la suma del cuadrado del error. Este modelo se denomina **línea de regresión de mínimos cuadrados** y el procedimiento para determinarlo se denomina **método de mínimos cuadrados**.

Definición de la línea de regresión de mínimos cuadrados

Para una serie de puntos

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$$

la **línea de regresión de mínimos cuadrados** está dada por la función lineal

$$f(x) = a_0 + a_1 x$$

que minimiza la suma del cuadrado del error

$$[y_1 - f(x_1)]^2 + [y_2 - f(x_2)]^2 + \cdots + [y_n - f(x_n)]^2.$$

Para determinar la línea de regresión de mínimos cuadrados para una serie de puntos, comencemos formando un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} y_1 &= f(x_1) + [y_1 - f(x_1)] \\ y_2 &= f(x_2) + [y_2 - f(x_2)] \\ &\vdots \\ y_n &= f(x_n) + [y_n - f(x_n)] \end{aligned}$$

donde el término del lado derecho

$$[y_i - f(x_i)]$$

de cada ecuación es tomado como el error en la aproximación de y_i para $f(x_i)$. Entonces escribimos este error como

$$e_i = y_i - f(x_i)$$

tal que el sistema de ecuaciones tome la forma

$$\begin{aligned} y_1 &= (a_0 + a_1 x_1) + e_1 \\ y_2 &= (a_0 + a_1 x_2) + e_2 \\ &\vdots \\ y_n &= (a_0 + a_1 x_n) + e_n. \end{aligned}$$

Ahora, si definimos Y, X, A y E como

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

las n ecuaciones lineales pueden ser reemplazadas por la ecuación matricial

$$Y = XA + E.$$

Observe que la matriz X tiene dos columnas, una columna de números 1 (correspondiente a a_0) y una columna que contiene a las x_i. Esta ecuación matricial puede usarse para determinar los coeficientes de la línea de regresión de mínimos cuadrados, como sigue.

COMENTARIO

Aprenderá más sobre este procedimiento en la sección 5.4.

Forma matricial para una regresión lineal

Para el modelo de regresión $Y = XA + E$, los coeficientes de la línea de regresión de mínimos cuadrados están dados por la ecuación matricial

$$A = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

y la suma del cuadrado del error es

$$E^T E.$$

El ejemplo 10 muestra el uso de este procedimiento para determinar la línea de regresión de mínimos cuadrados para la serie de puntos del ejemplo 9.

EJEMPLO 10 Determinación de la línea de regresión de mínimos cuadrados

Determine la línea de regresión de mínimos cuadrados para los puntos (1, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 4) y (5, 6) (véase la figura 2.5).

SOLUCIÓN

Usando los cinco puntos abajo, las matrices X y Y son

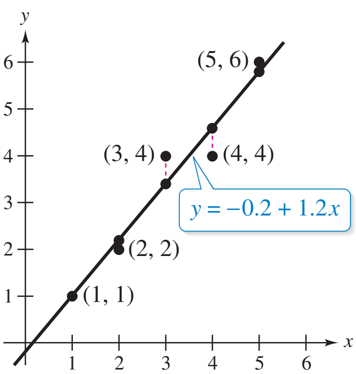
$$X = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Esto significa que

$$X^T X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{bmatrix}$$

y

$$X^T Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 63 \end{bmatrix}.$$



Línea de regresión de mínimos cuadrados

Figura 2.5

Ahora, utilizando $(X^T X)^{-1}$ para encontrar la matriz de coeficientes, tenemos

$$\begin{aligned} A &= (X^T X)^{-1} X^T Y \\ &= \tfrac{1}{50} \begin{bmatrix} 55 & -15 \\ -15 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 \\ 63 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -0.2 \\ 1.2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La línea de regresión de mínimos cuadrados es

$$y = -0.2 + 1.2x$$

como muestra la Figura 2.5. La suma del cuadrado del error para esta línea es 0.8 (verifique esto), lo que significa que esta línea se ajusta mucho mejor a los datos que cualquiera de los dos modelos experimentales que se determinaron anteriormente.

2.5 Ejercicios

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

Matrices estocásticas En los ejercicios 1 a 4, determine si la matriz es estocástica.

1. $\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{7}{5} \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.8 \\ 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 0.\overline{3} & 0.1\overline{6} & 0.25 \\ 0.\overline{3} & 0.\overline{6} & 0.25 \\ 0.\overline{3} & 0.1\overline{6} & 0.5 \end{bmatrix}$

5. **Compra de un producto** El departamento de investigación de mercados de una planta de manufactura determinó que 20% de la gente que compra los productos de la planta en algún mes puede no comprarlos en el mes siguiente. Por otro lado, 30% de la gente que no compra durante algún mes puede comprar el mes siguiente. En una población de 1000 personas, 100 compraron productos este mes. ¿Cuántos comprarán el mes próximo? ¿En dos meses?

6. **Propagación de un virus** Un investigador médico estudia la dispersión de un virus en una población de 1000 ratones de laboratorio. Durante alguna semana existe 80% de probabilidad que un ratón infectado supere el virus y durante la misma semana existe 10% de probabilidad de que un ratón sano se infecte. Cien ratones son infectados con el virus. ¿Cuántos se infectarán esta semana? ¿Y en dos semanas?

7. **Fumadores y no fumadores** Una población de 10 000 personas se agrupa de la siguiente manera: 5 000 no fumadores, 2 500 fumadores de un paquete o menos por día y 2 500 fumadores de más de un paquete al día. Durante algún mes existe 5% de probabilidad de que un no fumador pueda comenzar a fumar un paquete o menos por día y 2% de probabilidad de que un no fumador comience a fumar más de un paquete al día. Para fumadores que fuman un paquete o menos al día, existe 10% de probabilidad de que dejen de hacerlo y 10% de probabilidad de que incrementen la cantidad. Para fumadores que fuman más de un paquete al día, existe 5% de probabilidad de que dejen de hacerlo y 10% de probabilidad de que disminuyan a un paquete o menos por día. ¿Cuántas personas estarán en cada

8. **Consumo de televisión** El dormitorio universitario alberga 200 estudiantes. Aquéllos que miran televisión una hora o más al día, siempre ven una hora menos de televisión al día siguiente. Un cuarto de los que ven televisión menos de una hora al día, pueden mirar la televisión más de una hora al día siguiente. La mitad de los estudiantes ven televisión una hora o más hoy. ¿Cuántos pueden ver televisión por una hora o más mañana? ¿En dos días? ¿En 30 días?

9. **Preferencia de los consumidores** Una población de 100 000 consumidores es agrupada como sigue: 20 000 usuarios de la marca A, 30 000 usuarios de la marca B y 50 000 que utilizan cualquiera de las marcas. Durante un mes cualquiera un usuario de la marca A tiene una probabilidad de 20% de cambiarse a la marca B y 5% de probabilidad de no utilizar ninguna de estas dos marcas. Un usuario de la marca B tiene una probabilidad de 15% de cambiarse a la marca A y 10% de probabilidad de no usar ni una ni otra marca. Un no-usuario tiene una probabilidad de 10% de comprar la marca A y 15% de probabilidad de comprar la marca B. ¿Cuánta gente puede estar en cada grupo en un mes?¿En dos meses?¿En tres meses?

10. Para la matriz de probabilidades de transición

$$P = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

encuentre P^2X y P^3X para establecer la matriz

$$X = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 800 \end{bmatrix}.$$

Después, determine la matriz de estado estable para P.

Codificación de un mensaje En los ejercicios 11 a 14, encuentre la matriz renglón sin codificar, del tamaño indicado para los mensajes dados. Después codifique el mensaje utilizando la matriz A.

11. *Mensaje::* SELL CONSOLIDATED
Tamaño de la matriz renglón: 1×3
Matriz codificada $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

12. *Mensaje::* PLEASE SEND MONEY
Tamaño de la matriz renglón: 1×3
Matriz codificada $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

13. *Mensaje::* COME HOME SOON
Tamaño de la matriz renglón: 1×2
Matriz codificada $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

14. *Mensaje::* HELP IS COMING
Tamaño de la matriz renglón: 1×4
Matriz codificada $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$

Decodificación de un mensaje En los ejercicios 15 a 18, encuentre A^{-1} y úsela para descifrar el criptograma.

15. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$,

11 21 64 112 25 50 29 53 23 46 40 75 55 92

16. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$,

85 120 6 8 10 15 84 117 42 56 90 125 60 80 30 45 19 26

17. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 9 \\ -1 & -4 & -7 \end{bmatrix}$,

13 19 10 -1 -33 -77 3 -2 -14 4 1 -9 -5 -25 -47 4 1 -9

18. $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 3 \end{bmatrix}$,

112 -140 83 19 -25 13 72 -76 61 95 -118 71 20 21 38 35 -23 36 42 -48 32

19. Decodificación de un mensaje El siguiente criptograma fue codificado con una matriz de 2×2.

8 21 -15 -10 -13 -13 5 10 5 25 5 19 -1 6 20 40 -18 -18 1 16

La última palabra del mensaje es _RON. ¿Cuál es el mensaje?

20. Decodificación de un mensaje El siguiente criptograma fue codificado con una matriz de 2×2.

5 2 25 11 -2 -7 -15 -15 32 14 -8 -13 38 19 -19 -19 37 16

La última palabra del mensaje es _SUE. ¿Cuál es el mensaje?

21. Decodificación de un mensaje Utilice una aplicación gráfica o algún software de computadora con capacidad matricial para descifrar el criptograma.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

38 -14 29 56 -15 62 17 3 38 18 20 76 18 -5 21 29 -7 32 32 9 77 36 -8 48 33 -5 51 41 3 79 12 1 26 58 -22 49 63 -19 69 28 8 67 31 -11 27 41 -18 28

22. Decodificación de un mensaje Un descifrador interceptó el siguiente mensaje codificado.

45 -35 38 -30 18 -18 35 -30 81 -60 42 -28 75 -55 2 -2 22 -21 15 -10

La inversa de la matriz codificada siendo

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}.$$

(a) Usted sabe que $[45 \ -35]A^{-1} = [10 \ 15]$ y $[38 \ -30]A^{-1} = [8 \ 14]$. Escriba y resuelva los dos sistemas de ecuaciones para encontrar w, x, y y z.

(b) Descifre el mensaje.

23. Sistema industrial Un sistema compuesto por dos industrias, carbón y acero, tienen los siguientes requerimientos de entrada.

(a) Para producir \$1.00 de ganancia a la salida, la industria del carbón necesita \$0.10 de su producto y \$0.80 de acero.

(b) Para producir \$1.00 de ganancia a la salida, la industria del acero necesita \$0.10 de su producto y \$0.20 de carbón.

Determine D, la de matriz de entrada-salida para este sistema. Después, resuelva para la matriz X de salida en la ecuación $X = DX + E$, donde la demanda externa es

$$E = \begin{bmatrix} 10{,}000 \\ 20{,}000 \end{bmatrix}.$$

24. Sistema industrial Un sistema tiene dos industrias, con los siguientes requerimientos de entrada.

(a) Para producir \$1.00 de ganancia a la salida, la industria A necesita \$0.30 de su propio producto y \$0.40 del producto de la industria B.

(b) Para producir \$1.00 de ganancia a la salida, la industria B necesita \$0.20 de su propio producto y \$0.40 del producto de la industria A.

Determine D, la matriz de entrada-salida para este sistema. Después, resuelva para la matriz X de salida en la ecuación $X = DX + E$, donde la demanda externa es

$$E = \begin{bmatrix} 10{,}000 \\ 20{,}000 \end{bmatrix}.$$

25. Solución para una matriz de salida Una pequeña comunidad incluye un granjero, un panadero y un tendero y tiene la matriz D de entrada-salida y la matriz E de demanda externa mostradas abajo.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{Granjero} & \text{Panadero} & \text{Tendero} \end{array} \\ D = & \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.0 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0.0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Granjero} \\ \text{Panadero} \\ \text{Tendero} \end{array} \quad \text{y} \quad E = \begin{bmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{bmatrix}$$

Resuelva para la matriz X de salida en la ecuación $X = DX + E$.

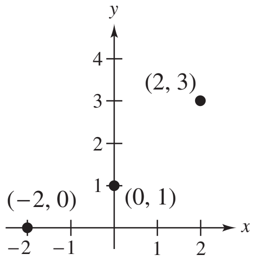
26. Solución para una matriz de salida Un sistema industrial tiene tres industrias y la matriz de entrada-salida y la matriz E de demanda externa mostradas abajo.

$$D = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.4 & 0.2 & 0.2 \\ 0.0 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad E = \begin{bmatrix} 5000 \\ 2000 \\ 8000 \end{bmatrix}$$

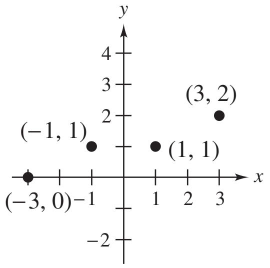
Resuelva para la matriz X de salida en la ecuación $X = DX + E$.

Análisis de regresión por mínimos cuadrados En los ejercicios 27 a 30, (a) bosqueje la línea que parece ser la de mejor ajuste para los puntos dados, (b) use el método de mínimos cuadrados para encontrar la línea de regresión de mínimos cuadrados y (c) calcule la suma del cuadrado del error.

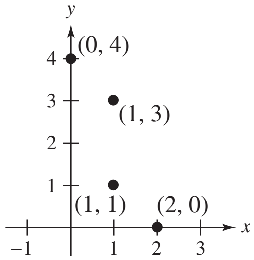
27.



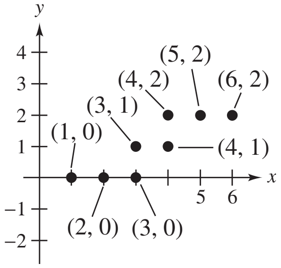
28.



29.



30.



Determinación de la recta de regresión por mínimos cuadrados En los ejercicios 31 a 38, encuentre la línea de regresión de mínimos cuadrados.

31. $(0, 0), (1, 1), (2, 4)$ **32.** $(1, 0), (3, 3), (5, 6)$

33. $(-2, 0), (-1, 1), (0, 1), (1, 2)$

34. $(-4, -1), (-2, 0), (2, 4), (4, 5)$

35. $(-5, 1), (1, 3), (2, 3), (2, 5)$

36. $(-3, 4), (-1, 2), (1, 1), (3, 0)$

37. $(-5, 10), (-1, 8), (3, 6), (7, 4), (5, 5)$

38. $(0, 6), (4, 3), (5, 0), (8, -4), (10, -5)$

39. Demanda Un refinador de combustible desea saber la demanda de cierto tipo de gasolina como una función de su precio. Las ventas diarias y (en galones) para tres diferentes precios de producto se muestran en la siguiente tabla.

Precio, x	\$3.00	\$3.25	\$3.50
Demanda, y	4500	3750	3300

(a) Determine la línea de regresión de mínimos cuadrados para estos datos.

(b) Estime la demanda cuando el precio es \$3.40.

40. Demanda Un vendedor de herramientas desea saber la demanda de un taladro recargable como una función del precio. Las ventas mensuales para cuatro precios diferentes se muestran en la siguiente tabla.

Precio, x	\$25	\$30	\$35	\$40
Demanda, y	82	75	67	55

(a) Determine la línea de regresión de mínimos cuadrados para estos datos.

(b) Calcule la demanda cuando el precio es \$32.95.

41. Registro de vehículos automotores La siguiente tabla muestra los números y de registros de vehículos de motor (en millones) en los Estados Unidos para los años 2004 a 2008. (Fuente: U.S. Federal Highway Administration)

Año	2004	2005	2006	2007	2008
Número, y	237.2	241.2	244.2	247.3	248.2

(a) Use el método de mínimos cuadrados para determinar la línea de regresión de mínimos cuadrados para estos datos. Sea t el año, con $t = 4$ el año 2004.

(b) Utilice las capacidades de regresión lineal de una aplicación gráfica para determinar un modelo lineal para los datos. Sea t el año, con $t = 4$ el año 2004.

42. Vida salvaje Un equipo de administración de la vida salvaje estudió la tasa de reproducción de venados en tres extensiones de una reserva de la vida salvaje. El equipo registró el número de hembras x y el porcentaje y de las mismas que tuvieron crías al año siguiente. Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

Número, x	100	120	140
Porcentaje, y	75	68	55

(a) Utilice el método de mínimos cuadrados para determinar la línea de regresión de mínimos cuadrados que modele los datos.

(b) Use una aplicación gráfica para graficar el modelo y los datos en la misma ventana.

(c) Utilice el modelo para crear una tabla de valores estimados de y. Compare los valores estimados con los datos actuales.

(d) Use el modelo para estimar el porcentaje de hembras que tuvieron crías cuando existían 170 de éstas.

(e) Utilice el modelo para estimar el número de hembras cuando 40% de ellas tenían crías.

43. Use su biblioteca escolar, Internet o alguna otra fuente de consulta para derivar la forma matricial para la regresión lineal dada en la parte superior de la página 94.

44. REMATE Explique cada uno de los siguientes.

(a) Cómo escribir y usar una matriz estocástica.

(b) Cómo usar la multiplicación de matrices para codificar y decodificar mensajes.

(c) Cómo usar un modelo de entradas y salidas de Leontief para analizar un sistema económico.

(d) Cómo usar matrices para encontrar la recta de regresión por mínimos cuadrados para un conjunto de datos.

45. Prueba Demuestre que el producto de dos matrices estocásticas de 2×2 es estocástico.

46. Prueba Sea P una matriz estocástica de 2×2. Demuestre que existe una matriz X de estado con elementos no negativos, tal que $PX = X$.

2 Ejercicios de repaso

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

Operaciones con matrices En los ejercicios 1 a 6, realice las operaciones matriciales que se indican.

1. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 5 & 3 & -6 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

2. $-2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} + 8\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & -2 & 8 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & -2 & 8 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

Resolución de un sistema de ecuaciones lineales En los ejercicios 7-10, escriba el sistema de ecuaciones lineales en la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Después use eliminación Gaussiana para resolver esta ecuación matricial para $\mathbf{x}$.

7. $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= -8 \\ x_1 + 4x_2 &= -4 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 5 \\ 3x_1 + 2x_2 &= -4 \end{aligned}$

9. $\begin{aligned} -3x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= -3 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$

10. $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 10 \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 &= 22 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -2 \end{aligned}$

Determinación y multiplicación con una transpuesta En los ejercicios 11 a 14, determine A^T, A^TA y AA^T.

11. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

Determinación de la inversa de una matriz En los ejercicios 15 a 18, encuentre la inversa de la matriz (si existe).

15. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -8 & 2 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Uso de la inversa de una matriz En los ejercicios 19 a 26, escriba el sistema de ecuaciones lineales representadas por la ecuación matricial.

19. $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ -6 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -7 \end{bmatrix}$

23. $\begin{aligned} 5x_1 + 4x_2 &= 2 \\ -x_1 + x_2 &= -22 \end{aligned}$

24. $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 &= -3 \end{aligned}$

25. $\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= -2 \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$

26. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$

Resolución de una ecuación matricial En los ejercicios 27 y 28, encuentre A.

27. $(3A)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

28. $(2A)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matriz no singular En los ejercicios 29 y 30, determine x tal que la matriz A es no singular.

29. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ x & -1 \end{bmatrix}$

30. $A = \begin{bmatrix} 2 & x \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

Determinación de la inversa de una matriz elemental En los ejercicios 31 y 32, encuentre la inversa de la matriz elemental.

31. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

32. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Determinación de una secuencia de matrices elementales En los ejercicios 33–36, encuentre una secuencia de matrices elementales cuyo producto sea la matriz no singular dada.

33. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

34. $\begin{bmatrix} -3 & 13 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

35. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

36. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

37. Determine dos matrices de 2×2 tales que $A^2 = I$.

38. Encuentre dos matrices de 2×2 tales que $A^2 = O$.

39. Encuentre tres matrices idempotentes de 2×2 (recuerde que una matriz cuadrada A es idempotente cuando $A^2 = A$.)

40. Encuentre dos matrices de 2×2 A y B tales que $AB = O$ pero $BA \neq O$.

41. Considere las siguientes matrices

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(a) Determine los escalares a, b y c tales que $W = aX + bY + cZ$.

(b) Muestre que no existen escalares tales que $Z = aX + bY$.

(c) Demuestre que si $aX + bY + cZ = O$, entonces $a = b = c = 0$.

42. Prueba Sean A, B y $A + B$ matrices no singulares. Pruebe que $A^{-1} + B^{-1}$ es no singular por demostración de que $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B$.

Determinación de una factorización *LU* de una matriz En los ejercicios 43 y 44, determine la factorización LU de la matriz.

43. $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$

44. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Resolución de un sistema lineal usando factorización *LU* En los ejercicios 45 y 46, use la factorización LU de la matriz de coeficientes para resolver el sistema lineal.

45.
$$\begin{aligned} x \phantom{{}+2y} + z &= 3 \\ 2x + y + 2z &= 7 \\ 3x + 2y + 6z &= 8 \end{aligned}$$

46.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 7 \\ 3x_2 + x_3 - x_4 &= -3 \\ -2x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 8 \end{aligned}$$

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 47-50, determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, proporcione una razón o cite una expresión adecuada del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que muestre que la expresión no es cierta en todos los casos o cite del texto una expresión adecuada.

47. (a) La suma de matrices no es conmutativa.

(b) La transpuesta de la suma de matrices es igual a la suma de las transpuestas de las matrices.

48. (a) El producto de una matriz de 2×3 y otra de 3×5 es una matriz de 5×2.

(b) La transpuesta de un producto es igual al producto de las transpuestas en orden invertido.

49. (a) Todas las matrices de $n \times n$ son invertibles.

(b) Si una matriz A de $n \times n$ es no simétrica, entonces A^TA es no simétrica.

50. (a) Si A y B son matrices de $n \times n$ y A es invertible, entonces $(ABA^{-1})^2 = AB^2A^{-1}$

(b) Si A y B son matrices no singulares de $n \times n$, entonces $A + B$ es una matriz no singular.

51. Manufactura Una corporación tiene cuatro fábricas, cuada una de las cuales fabrica camionetas deportivas y de carga. En la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 100 & 90 & 70 & 30 \\ 40 & 20 & 60 & 60 \end{bmatrix}$$

a_{ij} representa el número de vehículos de tipo i producidos en la fábrica j en un día. Encuentre los niveles de producción cuando la producción incrementa en 10%.

52. Manufactura Una compañía produce mesas y sillas en dos fábricas. La matriz C muestra los costos de fabricación en cada fábrica.

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Locación 1} & \text{Locación 2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 627 & 681 \\ 135 & 150 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Mesas} \\ \text{Sillas} \end{array}$$

(a) Si la mano de obra constituye $\frac{2}{3}$ del costo, determine la matriz L que arroja los costos de mano de obra en cada fábrica.

(b) Encuentre la matriz M que arroja los costos de material en cada fábrica (asuma que sólo hay costos de mano de obra y material).

53. Ventas de gasolina En una estación de gasolina, el número de galones de gasolina de 87, 89 y 93 octanos vendidos durante el fin de semana

$$A = \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{ccc} 87 & 89 & 93 \end{array}}^{\text{Octano}} \\ \begin{bmatrix} 580 & 840 & 320 \\ 560 & 420 & 160 \\ 860 & 1020 & 540 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Viernes} \\ \text{Sábado} \\ \text{Domingo} \end{array}$$

Una segunda matriz proporciona los precios de venta y las ganancias (ambas en dólares por galón por los tres tipos de gasolina vendidos en la estación de gasolina.

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Precio de venta} & \text{Ganancias} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3.05 & 0.05 \\ 3.15 & 0.08 \\ 3.25 & 0.10 \end{bmatrix} \end{array} \left.\begin{array}{l} \\ 87 \\ 89 \\ 93 \end{array}\right\} \text{Octano}$$

(a) Encuentre AB. ¿Cuál es el significado de AB en el contexto de esta situación?

(b) Determine las ganancias por la venta de gasolina en la estación expendedora en el fin de semana.

54. Calificaciones finales Los resultados finales de un curso de álgebra lineal en una escuela de artes están determinados por los resultados en dos exámenes parciales y un examen final. Los resultados para seis estudiantes en dos posibles sistemas de graduación se muestran en las siguientes matrices.

$$\begin{array}{cc} & \text{Exámenes} \\ & \begin{array}{ccc}\text{Parcial} & \text{Parcial} & \text{Final}\end{array} \\ A = & \begin{bmatrix} 78 & 82 & 80 \\ 84 & 88 & 85 \\ 92 & 93 & 90 \\ 88 & 86 & 90 \\ 74 & 78 & 80 \\ 96 & 95 & 98 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \text{Estudiante 1} \\ \text{Estudiante 2} \\ \text{Estudiante 3} \\ \text{Estudiante 4} \\ \text{Estudiante 5} \\ \text{Estudiante 6} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\text{Sistema de graduación 1} & \text{Sistema de graduación 2}\end{array} \\ B = & \begin{bmatrix} 0.25 & 0.20 \\ 0.25 & 0.20 \\ 0.50 & 0.60 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Examen parcial 1} \\ \text{Examen parcial 2} \\ \text{Examen Final} \end{array}$$

(a) Describa cada sistema de graduación en la matriz B y cómo se aplican éstos.

(b) Calcule los resultados numéricos para los seis estudiantes usando los dos sistemas de graduación.

(c) Asigne a cada estudiante una letra para cada sistema de graduación usando la escala alfabética mostrada en la siguiente tabla.

Rango numérico	*Calificación con letra*
90-100	A
80-89	B
70-79	C
60-69	D
0-59	F

Función polinomial En los ejercicios 55 y 56, use la definición dada para encontrar $f(A)$: si f es la función polinomial

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$

entonces para una matriz cuadrada A, $f(A)$ se define como

$f(A) = a_0I + a_0A + a_2A^2 + \ldots + a_nx^n$.

55. $f(x) = x^2 - 7x + 6, \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

56. $f(x) = x^3 - 3x + 2, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

Matrices estocásticas En los ejercicios 57 y 58, determine si la matriz es estocástica.

57. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0.5 \end{bmatrix}$

58. $\begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.5 \\ 0.5 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$

Determinación de matrices de estado En los ejercicios 59 y 60, use la matriz P de probabilidades de transición dada y establezca una matriz X para encontrar las matrices de estado PX, P^2X y P^3X.

59. $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 128 \\ 64 \end{bmatrix}$

60. $P = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.0 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{bmatrix}$

61. Migración de población Un país esta divido en tres regiones. Cada año, 10% de los residentes de la región 1 se mueven a la región 2 y 5% se mudan a la región 3; 15% de los residentes de la región 2 se mueven a la región 1 y 5% se mudan a la región 3; y 10% de los residentes de la región 3 se mueven a la región 1 y 10% se mudan a la región 2. Este año cada región tiene una población de 100 000. Determine la población de cada región (a) en 1 año y (b) en 3 años.

62. Migración de población Encuentre la matriz de estado estable para las poblaciones descritas en el ejercicio 61.

Codificación de un mensaje En los ejercicios 63 y 64, determine las matrices renglón sin codificar del tamaño indicado para el mensaje dado. Después codifique el mensaje utilizando la matriz A.

63. *Mensaje:* ONE IF BY LAND
Tamaño de la matriz renglón: 1×2
Matriz codificada: $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

64. *Mensaje:* BEAM ME UP SCOTTY
Tamaño de la matriz renglón: 1×3
Matriz codificada: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

Decodificación de un mensaje En los ejercicios 65 a 68, encuentre A^{-1} para decodificar el criptograma.

65. $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix},$

−45 34 36 −24 −43 37 −23 22 −37 29 57 −38 −39 31

66. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix},$

11 52 −8 −9 −13 −39 5 20 12 56 5 20 −2 7 9 41 25 100

67. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -5 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \end{bmatrix},$

58 −3 −25 −48 28 19 −40 13 13 −98 39 39 118 −25 −48 28 −14 −14

68. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$,

23 20 132 54 128 102 32 21 203 6 10 23 21 15
129 36 46 173 29 72 45

Decodificación de un mensaje En los ejercicios 69 y 70, utilice una aplicación gráfica o un software de computadora con capacidades matriciales para encontrar A^{-1} y descifrar el criptograma.

69. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$

-2 2 5 39 -53 -72 -6 -9 93 4 -12 27 31
-49 -16 19 -24 -46 -8 -7 99

70. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

66 27 -31 37 5 -9 61 46 -73 46 -14 9 94
21 -49 32 -4 12 66 31 -53 47 33 -67

71. Sistema industrial Un sistema industrial tiene dos industrias con los requerimientos de entrada mostrados enseguida.

(a) Para producir \$1.00 de ganancia de salida, la industria A requiere de \$0.20 de su propio producto y \$0.30 del producto de la industria B.

(b) Para producir \$1.00 de ganancia de salida, la industria B requiere de \$0.10 de su propio producto y de \$0.50 del producto de la industria A.

Encuentre D, la matriz de entrada-salida para este sistema. Después resuelva para la matriz de salida X en la ecuación $X = DX + E$, donde la demanda externa es

$$E = \begin{bmatrix} 40{,}000 \\ 80{,}000 \end{bmatrix}.$$

72. Sistema industrial Un sistema con tres industrias tiene la matriz D de entrada-salida y la matriz de demanda externa E mostradas abajo.

$$D = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.2 \\ 0.0 & 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad E = \begin{bmatrix} 3000 \\ 3500 \\ 8500 \end{bmatrix}$$

Resuelva para la matriz de salida X en la ecuación $X = DX + E$.

Determinación de la recta de regresión por mínimos cuadrados En los ejercicios 73 a 76, encuentre la línea de regresión de mínimos cuadrados para los siguientes puntos.

73. (1, 5), (2, 4), (3, 2)

74. (2, 1), (3, 3), (4, 2), (5, 4), (6, 4)

75. (1, 1), (1, 3), (1, 2), (1, 4), (2, 5)

76. $(-2, 4)$, $(-1, 2)$, $(0, 1)$, $(1, -2)$, $(2, -3)$

77. Agricultura Un granjero utiliza cuatro gráficas de prueba para determinar la relación entre el trigo producido (en kilogramos) por kilómetro cuadrado y la cantidad de fertilizante (en cientos de kilogramos por kilómetro cuadrado). Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

Fertilizante, x	1.0	1.5	2.0	2.5
Producción, y	32	41	48	53

(a) Encuentre la línea de regresión de mínimos cuadrados para estos datos.

(b) Estime la producción para una aplicación de 160 kilogramos de fertilizante por kilómetro cuadrado.

78. Suscriptores a la telefonía celular La tabla muestra el número de suscriptores de teléfono celular y (en millones) en los Estados Unidos para los años 2004 a 2009. (Fuente: Cellular Telecommunications and Internet Association).

Año	2004	2005	2006
Suscriptores, y	182.1	207.9	233.0

Año	2007	2008	2009
Suscriptores, y	255.4	270.3	285.6

(a) Utilice el método de mínimos cuadrados para determinar la línea de regresión de mínimos cuadrados para los datos. Sea x el año, con $x = 0$ correspondiendo al año 2004.

(b) Utilice las capacidades de regresión lineal de una aplicación gráfica para determinar un modelo lineal para los datos. ¿Cómo se compara este modelo con el obtenido en el inciso (a)?

(c) Use el modelo lineal para crear una tabla de valores estimados para y. Compare los valores estimados con los datos reales.

79. Sueldos de la Liga Mayor de Béisbol La tabla muestra los salarios promedio y (en millones de dólares) de los jugadores de la Liga Mayor de Beisbol en los Estados Unidos para los años 2005 a 2010. (Fuente: Major League Baseball).

Año	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Salario, y	2.6	2.9	2.9	3.2	3.2	3.3

(a) Encuentre la línea de regresión de mínimos cuadrados para los datos. Sea x el año, con $x = 5$ correspondiendo al año 2005.

(b) Utilice las capacidades de regresión lineal de una aplicación gráfica para determinar un modelo lineal para los datos. ¿Cómo se compara este modelo con el obtenido en el inciso (a)?

(c) Use el modelo lineal para crear una tabla de valores estimados para y. Compare los valores estimados con los datos reales.

2 Proyectos

	Examen 1	*Examen 2*
Ana	84	96
Bruno	56	72
Cris-tóbal	78	83
David	82	91

1 Explorando la multiplicación de matrices

Las dos primeras calificaciones de los exámenes de Ana, Bruno, Cristóbal y David se muestran en la tabla. Utilícela para generar una matriz M que represente los datos. Ingrese esta matriz en una aplicación gráfica o un programa de computadora y úsela para responder a las siguientes preguntas.

1. ¿Cuál de estos exámenes es más difícil? ¿Cuál es más fácil? Explique por qué.

2. ¿Cómo clasificaría el desempeño de los cuatro estudiantes?

3. Describa el significado de las matrices producto $M\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ y $M\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$.

4. Describa el significado de las matrices producto $[1\quad 0\quad 0\quad 0]$ y $M\,[0\quad 0\quad 1\quad 0]\,M$.

5. Describa el significado de las matrices producto $M\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ y $\frac{1}{2}M\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$.

6. Describa el significado de las matrices producto $[1\quad 1\quad 1\quad 1]\,M$ y $\frac{1}{4}[1\quad 1\quad 1\quad 1]\,M$.

7. Describa el significado de las matrices producto $[1\quad 1\quad 1\quad 1]M\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$.

8. Utilice la multiplicación de matrices para expresar el promedio total combinado de las calificaciones de los dos exámenes.

9. ¿Cómo utilizaría la multiplicación de matrices para escalar las calificaciones del examen 1 por un factor de 1.1?

2 Matrices nilpotentes

Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$ diferente de cero. ¿Es posible que exista un entero k tal que $A^k = 0$? Por ejemplo, encuentre A^3 para la matriz

$$A = \begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Se dice que una matriz A es **nilpotente de índice k** si $A \neq 0$, $A^2 \neq 0, \ldots, A^{k-1} \neq 0$, pero $A^k = 0$. En este proyecto usted explorará el mundo de las matrices nilpotentes.

1. ¿Cuál es el índice de la matriz nilpotente A?

2. Utilice una aplicación gráfica o un software de computadora para determinar cuáles de las siguientes matrices son nilpotentes y encontrar sus índices.

(a) $\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\end{bmatrix}$

3. Determine las matrices nilpotentes de 3×3 con índices 2 y 3.

4. Determine las matrices nilpotentes de 4×4 con índices 2, 3 y 4.

5. Encuentre la matriz nilpotente de orden 5.

6. ¿Las matrices nilpotentes son invertibles? Demuestre su respuesta.

7. Si A es nilpotente, ¿qué puede usted decir de A^T? Demuestre su respuesta.

8. Si A es nilpotente, demuestre que $I - A$ es invertible.

Supri Suharjoto/Shutterstock.com

3 Determinantes

Órbitas planetarias (p. 135)

Publicación de libros de texto (p. 137)

Ingeniería y control (p. 124)

Sudoku (p. 114)

Volumen de un sólido (p. 108)

En sentido de las manecillas del reloj, desde arriba a la izquierda: Orla/www.shutterstock.com; Dirk Ercken/Shutterstock.com; viviamo/www.shutterstock.com; RTimages/Shutterstock.com; rgerhardt/Shutterstock.com

3.1 Determinante de una matriz

- Encuentre el determinante de una matriz.
- Encontrar los menores y los cofactores de una matriz.
- Utilizar la expansión por cofactores para encontrar el determinante de una matriz.
- Encuentre el determinante de una matriz triangular.

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ

Toda *matriz cuadrada* puede ser asociada con un número real llamado su *determinante*. Históricamente, el uso de determinantes surge del reconocimiento de patrones especiales que ocurren en las soluciones de sistemas de ecuaciones. Por ejemplo, la solución general del sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

puede mostrarse como

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

siempre que $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$. (Véase el ejercicio 69.) Observe que las dos fracciones tienen el mismo denominador, $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$. Esta cantidad se llama *determinante* de la matriz de coeficientes del sistema.

COMENTARIO

En este texto, $\det(A)$ y $|A|$ se utilizan de modo intercambiable para representar el determinante de una matriz. Las barras verticales también se usan para denotar el valor absoluto de un número real; el contexto en el que se mostrará su uso es deliberado. Además, es práctica común eliminar los corchetes de una matriz y escribir

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

en lugar de

$$\left|\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right|.$$

Definición del determinante de una matriz de 2 × 2

El **determinante** de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

está dado por $\det(A) = |A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

Un método conveniente para recordar la fórmula de un determinante de una matriz de 2 × 2 se muestra en el siguiente diagrama.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

El determinante es la diferencia de los productos de dos diagonales de la matriz. Observe que el orden es importante, como se demuestra a continuación.

COMENTARIO

El determinante de una matriz puede ser positivo, negativo o cero.

EJEMPLO 1 Determinante de una matriz de orden 2

a. Para $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2) - 1(-3) = 4 + 3 = 7.$

b. Para $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2(2) - 4(1) = 4 - 4 = 0.$

c. Para $C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $|C| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0(4) - 2\left(\frac{3}{2}\right) = 0 - 3 = -3.$

MENORES Y COFACTORES

Para definir el determinante de matriz cuadrada de orden mayor que 2 es conveniente la aplicación de las nociones de *menores* y *cofactores*.

Definición de menores y cofactores de una matriz

Si A es una matriz cuadrada, entonces el **menor** M_{ij} del elemento a_{ij} es el determinante de la matriz obtenida al suprimir el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de A. El cofactor C_{ij} está dado por $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

Por ejemplo, si A es una matriz de 3×3, entonces los menores y los cofactores de a_{21} y a_{22} son como se muestra en el diagrama presentado a continuación.

Menor de a_{21}

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Suprima el renglón 2 y la columna 1

Cofactor de a_{21}

$$C_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = -M_{21}$$

Menor de a_{22}

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Suprima el renglón 2 y la columna 2

Cofactor de a_{22}

$$C_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = M_{22}$$

Como puede ver, los menores y cofactores de una matriz pueden diferir sólo por el signo. Para obtener los cofactores de una matriz, primero encuentre los menores y después aplique el patrón ajedrezado de $+$ y $-$ como se muestra a la izquierda. Observe que las posiciones *impares* (donde $i + j$ es impar) tienen signos negativos y las pares (donde $i + j$ es par) signos positivos.

Patrón de signos para los cofactores

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Matriz de 3×3

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}$$

Matriz de 4×4

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

Matriz de $n \times n$

EJEMPLO 2 Menores y cofactores de una matriz

Determine todos los menores y los cofactores de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN

Para encontrar el menor M_{11}, suprima el primer renglón y la primera columna de A y evalúe el determinante de la matriz resultante.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1(1) - 0(2) = -1$$

Verifique que los menores son

$$\begin{array}{lll} M_{11} = -1 & M_{12} = -5 & M_{13} = 4 \\ M_{21} = 2 & M_{22} = -4 & M_{23} = -8 \\ M_{31} = 5 & M_{32} = -3 & M_{33} = -6. \end{array}$$

Ahora, para encontrar los cofactores, combine el patrón de los signos con estos menores para obtener

$$\begin{array}{lll} C_{11} = -1 & C_{12} = 5 & C_{13} = 4 \\ C_{21} = -2 & C_{22} = -4 & C_{23} = 8 \\ C_{31} = 5 & C_{32} = 3 & C_{33} = -6 \end{array}$$

EL DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA

La siguiente definición es llamada **inductiva**, porque utiliza determinantes de matrices de orden $n - 1$ para definir el determinante de una matriz de orden n.

Definición del determinante de una matriz

Si A es una matriz cuadrada de orden $n \geq 2$, entonces el determinante de A es la suma de los elementos en el primer renglón de A multiplicados por sus cofactores. Esto es

$$\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}C_{1j} = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1n}C_{1n}.$$

COMENTARIO

El determinante de una matriz de orden 1 se define simplemente como la entrada de la matriz. Por ejemplo, si $A = [-2]$, entonces

$$\det(A) = -2.$$

Intente verificar que, para matrices de 2×2, esta definición da como resultado

$$|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

como lo habíamos definido previamente.

Cuando utilice esta definición para evaluar un determinante, use la **expansión por cofactores en el primer renglón**. Este procedimiento se demuestra en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Determinante de una matriz de orden 3×3

Encuentre el determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN

Esta matriz es la misma del ejemplo 2. Ahí determinó que los cofactores de los elementos del primer renglón son

$$C_{11} = -1, \quad C_{12} = 5, \quad C_{13} = 4.$$

Por la definición de determinante, tiene

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} && \text{Expansión del primer renglón} \\ &= 0(-1) + 2(5) + 1(4) \\ &= 14. \end{aligned}$$

Aunque el determinante se define como una expansión por cofactores del primer renglón, puede demostrarse que el determinante puede ser evaluado por la expansión de cualquier renglón o columna. Por ejemplo, usted puede expandir la matriz de 3×3 del ejemplo 3 por el segundo renglón para obtener

$$\begin{aligned} |A| &= a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23} && \text{Expansión del segundo renglón} \\ &= 3(-2) + (-1)(-4) + 2(8) \\ &= 14 \end{aligned}$$

o por la primera columna para obtener

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31} && \text{Expansión de la primera columna} \\ &= 0(-1) + 3(-2) + 4(5) \\ &= 14. \end{aligned}$$

Intente otras posibilidades para confirmar que el determinante de A puede evaluarse por la expansión de *cualquier* renglón o columna. Esto se establece en el siguiente teorema, Expansión de Laplace de un determinante, nombrado así en honor del matemático francés Pierre Simon de Laplace (1749–1827).

TEOREMA 3.1 Expansión por cofactores

Sea A una matriz cuadrada de orden n. Entonces el determinante de A está dado por

$$\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij} = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdot\cdot\cdot + a_{in}C_{in}$$ Expansión del i-ésimo renglón

o

$$\det(A) = |A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}C_{ij} = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdot\cdot\cdot + a_{nj}C_{nj}.$$ Expansión de la j-ésima columna

Cuando expanda por cofactores no necesita evaluar los cofactores de los elementos nulos debido a que el cofactor de un elemento nulo siempre es cero.

$$\begin{aligned} a_{ij}C_{ij} &= (0)C_{ij} \\ &= 0 \end{aligned}$$

El renglón (o columna) que contiene más ceros es a menudo la mejor elección para la expansión por cofactores. Esto es demostrado en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 Determinante de una matriz de orden 4

Encuentre el determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN

Por inspección de esta matriz puede verse que tres de los elementos en la tercera columna son ceros. Puede evitar algo de trabajo en la expansión utilizando la tercera columna.

$$|A| = 3(C_{13}) + 0(C_{23}) + 0(C_{33}) + 0(C_{43})$$

Como C_{23}, C_{33} y C_{43} tienen coeficientes cero, usted sólo necesita encontrar el cofactor C_{13}. Para hacer esto, suprima el primer renglón y la tercera columna de A y evalúe el determinante de la matriz resultante.

$$C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$ Elimine la primera y tercera columna.

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$ Simplifique.

Expandiendo por cofactores el segundo renglón da como resultado

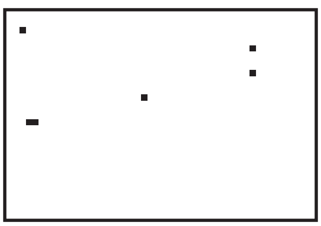
$$\begin{aligned} C_{13} &= (0)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + (2)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + (3)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 0 + 2(1)(-4) + 3(-1)(-7) \\ &= 13. \end{aligned}$$

Usted obtiene

$$\begin{aligned} |A| &= 3(13) \\ &= 39. \end{aligned}$$

NOTA TECNOLÓGICA

Muchas de las aplicaciones gráficas y programas de computadora tienen la capacidad de calcular el determinante de una matriz cuadrada. Si utiliza una aplicación gráfica, entonces podría ver algo similar a lo siguiente para el Ejemplo 4. en la **Online Technology Guide**, disponible en college.cengage.com/pic/larsonELA6e.



Hay un método alternativo usado comúnmente para evaluar el determinante de una matriz A de 3×3. Para aplicar este método, copie la primera y la segunda columna de A para formar la cuarta y la quinta columna. El determinante de A se obtiene después sumando (o restando) los productos de las seis diagonales, como se muestra en el siguiente diagrama.

Reste estos tres productos.

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Sume estos tres productos.

Intente confirmar que el determinante de A es

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

EJEMPLO 5 Determinante de una matriz de orden 3

Encuentre el determinante de $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -4 & 1 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

Comience copiando las primeras dos columnas y luego calcule los seis productos de la diagonal como sigue.

$$\begin{array}{ccccc} & & -4 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 1 & 4 & -4 \\ & & 0 & 16 & -12 \end{array}$$

$\leftarrow$ Reste estos productos

$\leftarrow$ Sume estos productos

Ahora, sumando los tres productos de abajo y restando los tres de arriba, usted puede encontrar que el determinante de

$$|A| = 0 + 16 + (-12) - (-4) - 0 - 6 = 2.$$

El proceso de diagonalización ilustrado en el ejemplo 5 *sólo* es válido para matrices de orden 3. Para matrices de orden mayor debe usarse otro método.

Simulación
Para explorar este concepto por medio de una simulación electrónica y para comandos y sintaxis de programación, revise las aplicaciones y programas de computadora implicados en el ejemplo 5. Visite *college.cengage.com/pic/larsonELA6e*. Ejemplos y ejercicios similares están disponibles en este sitio.

ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

Si x, y y z son funciones continuas de u, v y w con primeras derivadas parciales continuas, entonces las **Jacobianos** $J(u, v)$ y $J(u, v, w)$ se definen como los determinantes

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Un uso práctico de los Jacobianos es la determinación del volumen de una región sólida. En la Sección 3.4, usted estudiará una fórmula, que también utiliza determinantes, para encontrar el volumen de un tetraedro. En el Repaso del Capítulo 3, se le pedirá determinar el Jacobiano de un conjunto dado de funciones (Véanse los Ejercicios de Repaso 49–52).

Demonnew/Shutterstock.com

Matriz triangular superior

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz triangular inferior

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

MATRICES TRIANGULARES

Recuerde de la sección 2.4 que una matriz cuadrada es llamada *triangular superior* si todos sus elementos sobre la diagonal principal son cero y *triangular inferior* si todos sus elementos debajo de la diagonal principal son cero. Una matriz que tiene ambas características es denominada **diagonal**. Es decir, una matriz diagonal es aquella en la que todos los elementos arriba y abajo de la diagonal principal son cero.

Para encontrar el determinante de una matriz diagonal, simplemente formamos el producto de la diagonal principal. Esto es fácil de observar, es fácil observar que el procedimiento es válido para una matriz de orden 2 ó 3. Por ejemplo, el determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

puede determinarse por la expansión del tercer renglón para obtener

$$\begin{aligned} |A| &= 0(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 0(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 3(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 3(1)(-2) = -6 \end{aligned}$$

que es el producto de las entradas de la diagonal principal.

TEOREMA 3.2 Determinante de una matriz triangular

Si A es una matriz triangular de orden n, entonces su determinante es el producto de los elementos en la diagonal principal, esto es

$$\det(A) = |A| = a_{11}a_{22}a_{33} \cdot \cdot \cdot a_{nn}.$$

DEMOSTRACIÓN

Puede utilizar *inducción matemática** para demostrar este teorema para el caso en el que A es una matriz triangular superior. El caso en el que A es una matriz triangular inferior se demuestra de manera similar. Si A es de orden 1, entonces $|A| = [a_{11}]$ y el determinante es $|A| = a_{11}$. Suponiendo que el teorema es válido para cualquier matriz triangular superior de orden $k - 1$, considere una matriz triangular superior de orden k. Expandiendo el k-ésimo renglón, obtiene

$$|A| = 0C_{k1} + 0C_{k2} + \cdot \cdot \cdot + 0C_{k(k-1)} + a_{kk}C_{kk} = a_{kk}C_{kk}.$$

Ahora, observe que $C_{kk} = (-1)^{2k}M_{kk}$, donde M_{kk} es el determinante de la matriz triangular superior formada por la supresión del k-ésimo renglón y la k-ésima columna de A. Ya que esta matriz es de orden $k - 1$, usted puede aplicar la inducción para escribir

$$|A| = a_{kk}M_{kk} = a_{kk}(a_{11}a_{22}a_{33} \cdot \cdot \cdot a_{k-1\,k-1}) = a_{11}a_{22}a_{33} \cdot \cdot \cdot a_{kk}.$$

EJEMPLO 6 Determinante de una matriz triangular

Encuentre el determinante de cada matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ -5 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

es

$$|A| = (2)(-2)(1)(3) = -12.$$

*En el apéndice A está disponible un análisis de la inducción matemática.

3.1 Ejercicios

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

El determinante de una matriz En los ejercicios 1 a 12, encuentre el determinante de la matriz.

1. $\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} -3 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} -7 & 6 \\ \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 5 \\ 4 & -9 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} \lambda - 3 & 2 \\ 4 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} \lambda - 2 & 0 \\ 4 & \lambda - 4 \end{bmatrix}$

Encontrar los menores y cofactores de una matriz En los ejercicios 13 a 16, encuentre (a) los menores y (b) los cofactores de la matriz.

13. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & -8 \end{bmatrix}$

17. Encuentre el determinante de la matriz del ejercicio 15 aplicando el método de expansión por cofactores. (a) Use el segundo renglón y (b) la segunda columna.

18. Encuentre el determinante de la matriz del ejercicio 16, aplicando el método de expansión por cofactores. Use (a) el tercer renglón y (b) la tercera columna.

Encontrar un determinante En los ejercicios 19 a 32, use expansión por cofactores para encontrar el determinante de la matriz.

19. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 7 & 11 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} -0.4 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ -0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.5 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 4 & 12 \\ 0 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 7 & 0 \\ 2 & 6 & 11 & 12 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 10 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} w & x & y & z \\ 21 & -15 & 24 & 30 \\ -10 & 24 & -32 & 18 \\ -40 & 22 & 32 & -35 \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} w & x & y & z \\ 10 & 15 & -25 & 30 \\ -30 & 20 & -15 & -10 \\ 30 & 35 & -25 & -40 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

32. $\begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -7 & 13 & 12 \\ 6 & -2 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

Encontrar un determinante En los Ejercicios 33 y 34, use el método demostrado en el Ejemplo 5 para encontrar el determinante de la matriz.

33. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

34. $\begin{bmatrix} 3 & 8 & -7 \\ 0 & -5 & 4 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$

Encontrar un determinante En los ejercicios 35 a 38, utilice una aplicación gráfica o un software de computadora con capacidades matriciales para encontrar el determinante de la matriz.

35. $\begin{bmatrix} 0.25 & -1 & 0.6 \\ 0.50 & 0.8 & -0.2 \\ 0.75 & 0.9 & -0.4 \end{bmatrix}$

36. $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

37. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

38. $\begin{bmatrix} 8 & 5 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 7 & 1 & 6 \\ 0 & 8 & 6 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & 5 & -8 & 4 \\ 2 & 6 & -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

Encontrar el determinante de una matriz triangular En los ejercicios 39 a 42, encuentre el determinante de la matriz triangular.

39. $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ -3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$ **40.** $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

41. $\begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ **42.** $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 3 & 0 \\ -8 & 7 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 43 y 44, determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, proporcione una razón o cite una expresión adecuada del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que muestre que la expresión no es cierta en todos los casos o cite del texto una expresión adecuada.

43. (a) El determinante de la matriz A de 2×2 es $a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}$.
(b) El determinante de una matriz de orden 1 es el elemento de la matriz.
(c) El cofactor ij de una matriz cuadrada A es la matriz definida por la cancelación del i-ésimo renglón y la j-ésima columna de A.

44. (a) Para encontrar el determinante de una matriz triangular, sume los elementos de la diagonal principal.
(b) El determinante de una matriz puede ser evaluado aplicando expansión por cofactores en cualquier renglón o columna.
(c) Cuando se expande por cofactores no es necesario evaluar los cofactores de los elementos nulos.

Resolución de una ecuación En los ejercicios 45 a 48, resuelva para x.

45. $\begin{vmatrix} x+3 & 2 \\ 1 & x+2 \end{vmatrix} = 0$ **46.** $\begin{vmatrix} x+1 & -2 \\ 1 & x-2 \end{vmatrix} = 0$

47. $\begin{vmatrix} x-1 & 2 \\ 3 & x-2 \end{vmatrix} = 0$ **48.** $\begin{vmatrix} x+3 & 1 \\ -4 & x-1 \end{vmatrix} = 0$

Resolución de una ecuación En los ejercicios 49 a 52, encuentre los valores de l para los que el determinante es cero.

49. $\begin{vmatrix} \lambda+2 & 2 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}$ **50.** $\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 \\ 4 & \lambda-3 \end{vmatrix}$

51. $\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$ **52.** $\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 3 \\ 2 & 2 & \lambda-2 \end{vmatrix}$

Entradas que involucran expresiones En los ejercicios 53 a 58, evalúe el determinante en donde los elementos son funciones. Determinantes de este tipo ocurren cuando se hacen cambios de variables en cálculo.

53. $\begin{vmatrix} 4u & -1 \\ -1 & 2v \end{vmatrix}$ **54.** $\begin{vmatrix} 3x^2 & -3y^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

55. $\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix}$ **56.** $\begin{vmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & (1-x)e^{-x} \end{vmatrix}$

57. $\begin{vmatrix} x & \ln x \\ 1 & 1/x \end{vmatrix}$ **58.** $\begin{vmatrix} x & x \ln x \\ 1 & 1 + \ln x \end{vmatrix}$

59. El determinante de una matriz de 2×2 implica dos productos. El determinante de una matriz de 3×3 implica seis productos triples. Demuestre que el determinante de una matriz de 4×4 implica 24 productos cuádruples.

60. Demuestre que el sistema de ecuaciones lineales

$$ax + by = e$$
$$cx + dy = f$$

tiene una única solución si y sólo si el determinante de la matriz es diferente de cero.

Verificación de una ecuación En los ejercicios 61 a 66, evalúe los determinantes que hacen válida la ecuación.

61. $\begin{vmatrix} w & x \\ y & z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} y & z \\ w & x \end{vmatrix}$

62. $\begin{vmatrix} w & cx \\ y & cz \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} w & x \\ y & z \end{vmatrix}$

63. $\begin{vmatrix} w & x \\ y & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w & x+cw \\ y & z+cy \end{vmatrix}$ **64.** $\begin{vmatrix} w & x \\ cw & cx \end{vmatrix} = 0$

65. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y)$

66. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

67. Dada la ecuación

$$\begin{vmatrix} x & 0 & c \\ -1 & x & b \\ 0 & -1 & a \end{vmatrix} = ax^2 + bx + c.$$

(a) Verifique la ecuación.
(b) Use la ecuación como un modelo para encontrar un determinante que sea igual a $ax^3 + bx^2 + cx + d$.

68. **REMATE** Si A es una matriz de $n \times n$, explique cómo encontrar lo siguiente.
(a) l menor M_{ij} de la entrada a_{ij}.
(b) El cofactor C_{ij} de la entrada a_{ij}.
(c) El determinante de A.

69. Demuestre que el sistema de ecuaciones lineales

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

tiene la solución

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

cuando $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$.

3.2 Determinantes y operaciones elementales

- Utilice operaciones elementales por renglón para evaluar un determinante.
- Utilice operaciones elementales por columna para evaluar un determinante.
- Reconozca las condiciones que generan determinantes cero.

DETERMINANTES Y OPERACIONES ELEMENTALES POR RENGLÓN

¿Cuál de los siguientes determinantes es más fácil de evaluar?

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & -6 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & -9 & -3 \\ 3 & -6 & 9 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{o} \quad |B| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -9 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Puesto que usted ya sabe acerca del determinante de una matriz triangular, está claro que el segundo determinante es *mucho* más fácil de evaluar. Este determinante es simplemente el producto de los elementos de la diagonal principal, es decir, $|B| = (1)(2)(-3)(-1) = 6$. Por otra parte, usar expansión por cofactores (la única técnica aplicada antes) para evaluar el primer determinante es confuso. Por ejemplo, si expande por cofactores a lo largo del primer renglón, tiene

$$|A| = 1\begin{vmatrix} -6 & 3 & 2 \\ 4 & -9 & -3 \\ -6 & 9 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -2 & -9 & -3 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -2 & 4 & -3 \\ 3 & -6 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 4 & -6 & 3 \\ -2 & 4 & -9 \\ 3 & -6 & 9 \end{vmatrix}.$$

Evaluando los determinantes de estas cuatro matrices de 3×3 se obtiene

$$|A| = (1)(-60) + (2)(39) + (3)(-10) - (1)(-18) = 6.$$

Note que $|A|$ y $|B|$ tienen el mismo valor De hecho, usted puede obtener la matriz B al realizar operaciones elementales con renglones en la matriz A. En esta sección, verá los efectos de operaciones elementales con renglones (o columnas) en el valor de un determinante.

EJEMPLO 1 Efectos de las operaciones elementales con renglones en un determinante

a. La matriz B fue obtenida a partir de A por intercambio de los renglones de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 11 \quad \text{y} \quad |B| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -11$$

b. La matriz B fue obtenida a partir de A al sumar -2 veces el primer renglón de A al segundo renglón de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 2 \quad \text{y} \quad |B| = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

c. La matriz B fue obtenida a partir de A al multiplicar el primer renglón de A por $\frac{1}{2}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -8 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} = 2 \quad \text{y} \quad |B| = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} = 1$$

En el ejemplo 1, puede observar que al intercambiar dos renglones de una matriz cambia el signo de su determinante. Sumar un múltiplo de un renglón a otro no cambia el determinante. Finalmente, multiplicar un renglón por una constante diferente de cero, multiplica el determinante por la misma constante. El siguiente teorema generaliza estas observaciones.

TEOREMA 3.3 Determinantes y operaciones elementales con renglones

Sean A y B matrices cuadradas.

1. Si B es obtenida a partir de A al intercambiar dos renglones, entonces $\det(B) = -\det(A)$.
2. Si B es obtenida a partir de A al sumar un múltiplo de un renglón de A a otro renglón de A, entonces $\det(B) = \det(A)$.
3. Si B es obtenida a partir de A al multiplicar un renglón de A por una constante c diferente de cero, entonces $\det(B) = c \det(A)$.

COMENTARIO

Observe que la tercera propiedad del teorema 3.3 le permite dividir un renglón entre un factor común. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Factor 2 del primer renglón.

DEMOSTRACIÓN

Para probar la propiedad 1, utilice inducción matemática como sigue. Las demostraciones de las otras dos propiedades se dejan como ejercicios (Véanse los ejercicios 47 y 48). Suponga que A y B son matrices cuadradas de 2×2 tales que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}.$$

Entonces, usted tiene $|A| = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ y $|B| = a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}$, así que $|B| = -|A|$. Ahora suponga que la propiedad es cierta para matrices de orden $(n - 1)$. Sea A una matriz de $n \times n$ tal que B se obtiene a partir del intercambio de dos renglones de A. Entonces, para encontrar $|A|$ y $|B|$, expanda otro renglón junto con los dos renglones intercambiados. Por inducción, los cofactores de B pueden ser los negativos de los cofactores de A, ya que las matrices correspondientes de $(n - 1) \times (n - 1)$ tienen dos renglones intercambiados. Finalmente, $|B| = -|A|$ y la demostración está completa.

El teorema 3.3 proporciona una manera práctica para evaluar determinantes. Para encontrar el determinante de una matriz A, aplique operaciones elementales con renglones para obtener una matriz B triangular equivalente por renglones a A. Para cada paso en el proceso de eliminación, utilice el teorema 3.3 para determinar el efecto de la operación elemental con renglones en el determinante. Finalmente, encuentre el determinante de B multiplicando los elementos de su diagonal principal. Este proceso se demuestra en el siguiente ejemplo.

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857)

Las contribuciones de Cauchy al estudio de las matemáticas fueron revolucionarias, y a menudo se le reconoce por imponerles rigor a las matemáticas modernas. Por ejemplo, fue el primero en definir rigorosamente límites, continuidad y la convergencia de una serie infinita. Además de ser conocido por su trabajo en análisis complejo, contribuyó a las teorías de determinantes y ecuaciones diferenciales. Es interesante considerar que el trabajo de Cauchy con determinantes antecedió al desarrollo de matrices de Cayley.

EJEMPLO 2 Evaluación de un determinante utilizando operaciones elementales con renglones

Encuentre el determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 10 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN

Aplicando operaciones elementales con renglones, reescriba A en la forma triangular de la siguiente manera.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 10 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

Intercambie los dos primeros renglones

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -7 & 14 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

Sume –2 veces el primer renglón al segundo para producir un nuevo segundo renglón

$$= -21\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Factorice –7 fuera del segundo renglón
Factor –3 fuera del tercer renglón

Ahora, debido a que la matriz final es triangular, puede concluir que el determinante es

$$|A| = -21(1)(1)(1) = -21.$$

DETERMINANTES Y OPERACIONES ELEMENTALES CON COLUMNAS

Aunque el teorema 3.3 se establece en términos de operaciones elementales con *renglones*, se mantiene válido si la palabra “columna” reemplaza al término “renglón”. Las operaciones realizadas en las columnas (más que en los renglones) de una matriz se denominan **operaciones elementales con columnas** y dos matrices son llamadas **equivalentes por columnas** si una puede ser obtenida a partir de la otra por operaciones elementales con columnas. La versión del teorema 3.3 para el caso de operaciones con columnas se ilustra enseguida.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Intercambie las primeras dos columnas

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

Factorice 2 fuera de la primera columna

Al evaluar un determinante a mano, ocasionalmente convendrá usar operaciones elementales con columnas, como se muestra en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Evaluación de un determinante usando operaciones elementales con columnas

Encuentre el determinante de

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & 4 \\ 5 & -10 & -3 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN

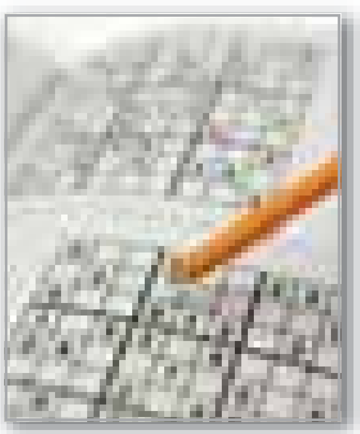
Como las dos primeras columnas de A son múltiplos una de otra, usted puede obtener una columna de ceros sumando dos veces la primera columna a la segunda, de la siguiente manera.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & 4 \\ 5 & -10 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

Hasta este punto, no es necesario que reescriba la matriz en forma triangular. Como existe una columna completa de ceros, concluimos que el determinante es cero. La validez de esta conclusión proviene del teorema 3.1. Específicamente, al expandir por cofactores a lo largo de la segunda columna, tiene

$$\begin{aligned} |A| &= (0)C_{12} + (0)C_{22} + (0)C_{32} \\ &= 0. \end{aligned}$$

ÁLGEBRA LINEAL APLICADA



En el juego de colocación de números Sudoku, la finalidad es llenar una retícula parcialmente completada de 9×9 recuadros con números del 1 al 9 de manera que cada columna, renglón y subretícula de 3×3 contenga cada uno de estos números sin repetición. Para que una retícula de Sudoku completa sea válida, dos renglones (o columnas) no pueden tener los números en el mismo orden. Si esto pasara en un renglón o columna, entonces el determinante de la matriz formada por los números en la retícula será cero. Ése es un resultado directo de la condición 2 del Teorema 3.4 en la siguiente página.

Pinon Road/Shutterstock.COM

MATRICES Y DETERMINANTES CERO

El ejemplo 3 muestra que una de las columnas de la matriz es un múltiplo escalar de otra columna, por lo que puede concluir de inmediato que el determinante de la matriz es cero. Esta es una de tres condiciones, listadas enseguida, que generan un determinante cero.

TEOREMA 3.4 Condiciones que generan un determinante cero

Si A es una matriz cuadrada y una de las siguientes condiciones es cierta, entonces $\det(A) = 0$.

1. Un renglón (o columna) consta completamente de ceros.
2. Dos renglones (o columnas) son iguales.
3. Un renglón (o columna) es un múltiplo de otro renglón (o columna).

DEMOSTRACIÓN

Verifique cada parte de este teorema aplicando operaciones elementales con renglones y expansión por cofactores. Por ejemplo, si un renglón o una columna están formados completamente de ceros, entonces cada cofactor en la expansión es multiplicado por cero. Si la condición 2 ó 3 es cierta, puede aplicar operaciones elementales con renglones o columnas para crear un renglón o columna formados completamente de ceros.

Reconociendo las condiciones listadas en el teorema 3.4 podemos evaluar un determinante más fácilmente. Por ejemplo.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -6 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

El primer renglón consta completamente de ceros

El primer y el tercer renglones son iguales

La tercera columna es múltiplo de la primera

No podemos concluir, sin embargo, que el teorema 3.4 proporciona las *únicas* condiciones que producen un determinante cero. A menudo, este teorema se usa indirectamente. Es decir, usted puede comenzar con una matriz que no satisfaga ninguna de las condiciones del teorema 3.4 y, por medio de operaciones elementales con renglones o columnas, obtener una matriz que cumpla una de las condiciones. Este proceso se muestra en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Matriz con determinante cero

Encuentre el determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 18 & 4 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN

Sumando –2 veces el primer renglón al segundo se produce

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 18 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -9 & -2 \\ 0 & 18 & 4 \end{vmatrix}.$$

Ahora, ya que el segundo y el tercer renglones son múltiplos uno de otro, puede concluir que el determinante es cero.

En el ejemplo 4, usted pudo obtener una matriz con un renglón completo de ceros al realizar una operación elemental con renglones adicional (sumar 2 veces el segundo renglón al tercero). Esto en general es cierto, es decir, una matriz cuadrada tiene un determinante cero si y sólo si uno de estos renglones (o columnas) son equivalentes a una matriz que tiene al menos un renglón (o columna) formado completamente de ceros. Esto se demostrará en la siguiente sección.

Usted tiene ahora dos métodos de reconocimiento para evaluar determinantes. De ellos, el método de aplicar operaciones elementales con renglones o columnas para reducir una matriz a la forma triangular es más rápido que el de expansión por cofactores a lo largo de un renglón o una columna. Si la matriz es grande, entonces el número de operaciones necesarias para una expansión por cofactores puede volverse extremadamente grande. Por esta razón, muchos algoritmos de computadora y de calculadora usan el método que aplica operaciones elementales con reglones o columnas. La siguiente tabla muestra el número de sumas (más restas) y las multiplicaciones (más divisiones) necesarias para cada uno de estos dos métodos para matrices de orden 3, 5 y 10.

	Expansión por cofactores		*Reducción de renglones*	
Orden n	*Sumas*	*Multiplicaciones*	*Sumas*	*Multiplicaciones*
3	5	9	5	10
5	119	205	30	45
10	3,628,799	6,235,300	285	339

De hecho, el número de operaciones para la expansión por cofactores de una matriz de una matriz $n \times n$ es $n!$ Como $30! \approx 2.65 \times 10^{32}$, incluso una matriz relativamente pequeña de 30×30 puede requerir de más de 10^{32} operaciones. Si una computadora puede realizar un billón de operaciones por segundo, le tomaría más de un billón de años calcular el determinante de esta matriz aplicando expansión por cofactores. Sin embargo, la reducción de renglones sólo toma algunos segundos.

Cuando evalúa un determinante *a mano*, usted puede ahorrarse algunos pasos aplicando operaciones elementales con renglones (o columnas) para formar un renglón (o columna) completamente de ceros excepto en una posición y entonces usar expansión por cofactores para reducir el orden de la matriz *a* 1. Este planteamiento se ilustra en los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 5 Evaluación de un determinante

Encuentre el determinante de

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & -1 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN

Observe que la matriz A tiene un cero en el tercer renglón. Usted puede crear otro cero en el tercer renglón al sumar dos veces la primera columna a la tercera, como sigue.

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & -1 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Expandiendo por cofactores a lo largo del tercer renglón se produce

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3(-1)^4 \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -3(1)(-1) = 3.$$

EJEMPLO 6 Evaluación de un determinante

Evalúe el determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN

Ya que la segunda columna de esta matriz tiene dos ceros, se elige para expansión por cofactores. Dos ceros adicionales pueden generarse en la segunda columna al sumar el segundo renglón al cuarto y después sumando –1 vez el segundo renglón al quinto.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 5 & 6 & -4 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (1)(-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 & -4 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Como ya tiene dos ceros en el cuarto renglón, lo elige para la siguiente expansión por cofactores. Sume –3 veces la cuarta columna a la primera para producir lo siguiente

$$\begin{aligned} |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 6 & -4 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 8 & 1 & 3 & -2 \\ -8 & -1 & 2 & 3 \\ 13 & 5 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (1)(-1)^8 \begin{vmatrix} 8 & 1 & 3 \\ -8 & -1 & 2 \\ 13 & 5 & 6 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Sume el segundo renglón al primero y luego expanda por cofactores a lo largo del primer renglón.

$$\begin{aligned} |A| = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 3 \\ -8 & -1 & 2 \\ 13 & 5 & 6 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ -8 & -1 & 2 \\ 13 & 5 & 6 \end{vmatrix} \\ &= 5(-1)^4 \begin{vmatrix} -8 & -1 \\ 13 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 5(1)(-27) \\ &= -135 \end{aligned}$$

3.2 Ejercicios

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

Propiedades de determinantes En los ejercicios 1 a 20, ¿cuál propiedad de los determinantes es ilustrada por la ecuación?

1. $\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$

2. $\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 12 & -15 \end{vmatrix} = 0$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & -7 \end{vmatrix} = 0$

4. $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 8 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$

5. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -7 & 2 & -5 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -7 & -5 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 6 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -7 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 3 & -12 & 6 \\ 7 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 12\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -8 & 6 \\ 5 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 25 & -30 & 40 \\ -15 & 5 & 20 \end{vmatrix} = 5^3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & -6 & 8 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 6^4\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 19 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 17 & -11 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 5 \\ 5 & -7 & -20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -6 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -7 & 15 \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -4 & 3 & -4 \\ 7 & 6 & 3 \end{vmatrix}$

18. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 8 & 5 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$

20. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 9 & 9 \\ 9 & -1 & 2 & 3 & -3 \\ 3 & 4 & 6 & 9 & 12 \\ 5 & 2 & 0 & 6 & 6 \\ 6 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

Encontrar un determinante En los ejercicios 21 a 24, use cualquier operación elemental con renglones o columnas, o expansión por cofactores, para evaluar el determinante a mano. Después, utilice una aplicación gráfica o un programa de computadora para verificar su respuesta.

21. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

23. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

24. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

Encontrar un determinante En los ejercicios 25 a 36, utilice operaciones elementales con renglones o columnas para evaluar el determinante.

25. $\begin{vmatrix} 1 & 7 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 8 & 1 \end{vmatrix}$

26. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$

27. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -6 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

28. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$

29. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

30. $\begin{vmatrix} 3 & 8 & -7 \\ 0 & -5 & 4 \\ 6 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

31. $\begin{vmatrix} 4 & -7 & 9 & 1 \\ 6 & 2 & 7 & 0 \\ 3 & 6 & -3 & 3 \\ 0 & 7 & 4 & -1 \end{vmatrix}$

32. $\begin{vmatrix} 9 & -4 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 6 & -5 \\ 4 & 1 & -2 & 0 \\ 7 & 3 & 4 & 10 \end{vmatrix}$

33. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 & 9 \\ 3 & -4 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

34. $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 8 & 2 \\ 8 & 1 & -1 & 6 \\ -4 & 6 & 0 & 9 \\ -7 & 0 & 0 & 14 \end{vmatrix}$

35. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 8 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 0 & -4 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

36. $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & -8 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 37 y 38, determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, proporcione una razón o cite una expresión adecuada del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que muestre que la expresión no es cierta en todos los casos o cite del texto una expresión adecuada.

37. (a) Intercambiar dos renglones de una matriz dada cambia el signo de su determinante.
(b) Multiplicar un renglón de una matriz por una constante diferente de cero da como resultado el determinante multiplicado por la misma constante diferente de cero.
(c) Si dos renglones de una matriz cuadrada son iguales, entonces su determinante es 0.

38. (a) Sumar un múltiplo de un renglón de una matriz a otro renglón sólo cambia el signo del determinante.
(b) Dos matrices son equivalentes por columnas si una matriz puede ser obtenida al realizar en la otra operaciones elementales con columnas.
(c) Si un renglón de una matriz cuadrada es un múltiplo de otro renglón, entonces el determinante es 0.

Encontrar el determinante de una matriz elemental En los ejercicios 39 a 42, encuentre el determinante de la matriz elemental. (Suponga $k \neq 0$.)

39. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **40.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

41. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **42.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{bmatrix}$

43. Prueba Demuestre la propiedad.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a_{11}+b_{11}) & a_{12} & a_{13} \\ (a_{21}+b_{21}) & a_{22} & a_{23} \\ (a_{31}+b_{31}) & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

44. Prueba Demuestre la propiedad.

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right),$$

$a \neq 0, \quad b \neq 0, \quad c \neq 0$

45. Encuentre cada determinante.

(a) $\begin{vmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} \operatorname{sen}\theta & 1 \\ 1 & \operatorname{sen}\theta \end{vmatrix}$

46. REMATE Evalúe cada determinante cuando $a = 1$, $b = 4$, y $c = -3$.

(a) $\begin{vmatrix} 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & -16 \end{vmatrix}$

47. Demostración guiada Demuestre la propiedad 2 del teorema 3.3: si B es obtenida a partir de A al sumar un múltiplo de un renglón de A a otro renglón de A, entonces $\det(B) = \det(A)$.

Inicio: para demostrar que el determinante de B es igual al determinante de A, usted necesita demostrar que sus respectivas expansiones por cofactores son iguales.

(i) Comience su demostración haciendo que B sea la matriz obtenida al sumar c veces el j-ésimo renglón de A al i-ésimo renglón de A.
(ii) Encuentre el determinante de B por expansión a lo largo de este i-ésimo renglón de A.
(iii) Distribuya y después agrupe los términos que contengan un coeficiente de c y aquellos que no lo contengan.
(iv) Demuestre que la suma de los términos que no contienen un coeficiente de c es el determinante de A y la suma de los términos que contienen un coeficiente de c es igual a cero.

48. Demostración guiada Demuestre la propiedad 3 del teorema 3.3: si B es obtenida a partir de A por la multiplicación de un renglón de A por una constante c diferente de cero, entonces $\det(B) = c\det(A)$.

Inicio: para demostrar que el determinante de B es igual a c veces el determinante de A, usted necesita demostrar que el determinante de B es igual a c veces la expansión por cofactores del determinante de A.

(i) Comience su demostración haciendo que B sea la matriz obtenida al multiplicar c veces el i-ésimo renglón de A.
(ii) Encuentre el determinante de B por expansión a lo largo de este i-ésimo renglón.
(iii) Obtenga el factor común c.
(iv) Demuestre que este resultado es c veces el determinante de A.

3.3 Propiedades de los determinantes

- Encuentre el determinante de una matriz producto y un múltiplo escalar de una matriz.
- Encuentre el determinante de una matriz inversa y reconozca las condiciones equivalentes para una matriz no singular.
- Encuentre el determinante de la transpuesta de una matriz.

MATRIZ PRODUCTO ESCALARES MÚLTIPLES

En esta sección aprenderá algunas propiedades importantes de los determinantes. Empezaremos considerando el determinante del producto de dos matrices.

EJEMPLO 1 Determinante de una matriz producto

Encuentre $|A|$, $|B|$ y $|AB|$ para las siguentes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN

Utilizando las técnicas descritas en las secciones anteriores, usted puede demostrar que $|A|$ y $|B|$ tienen los valores

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -7 \quad \text{y} \quad |B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 11.$$

La matriz producto AB es

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & -10 \\ 5 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando las mismas técnicas, puede demostrar que $|AB| = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 6 & -1 & -10 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -77.$

COMENTARIO

El teorema 3.5 puede extenderse para incluir el producto de cualquier número finito de matrices. Esto es,

$$|A_1A_2A_3 \cdot \cdot \cdot A_k| = |A_1||A_2||A_3| \cdot \cdot \cdot |A_k|.$$

En el ejemplo 1, observe que $|AB| = |A||B|$, o $-77 = (-7)(11)$. Esto es cierto en general, como se indica en el siguiente teorema.

> **TEOREMA 3.5 Determinante de una matriz producto**
>
> Si A y B son matrices cuadradas de orden n, entonces $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

DEMOSTRACIÓN

Para empezar, observe que si E es una matriz elemental, entonces, por el teorema 3.3 las siguientes afirmaciones son ciertas. Si E es obtenida a partir de I por intercambio de dos renglones, entonces $|E| = -1$. Si E es obtenida por la multiplicación de un renglón de I por una constante c diferente de cero, entonces $|E| = c$. Si E es obtenida por la suma del múltiplo de un renglón de I con otro renglón de I, entonces $|E| = 1$. Adicionalmente, por el teorema 2.12, si E es el resultado de efectuar una operación elemental con un renglón de I y la misma operación elemental se ejecuta con un renglón de B, entonces resulta la matriz EB. Así tenemos que $|EB| = |E|\,|B|$.

Esto puede generalizarse para concluir que $|E_k \ldots E_2E_1B| = |E_k| \ldots |E_2|\,|E_1|\,|B|$, donde E_i es una matriz elemental. Ahora considere la matriz AB. Si A es *no singular*, entonces, por el teorema 2.14, puede escribirse como el producto de matrices elementales $A = E_k \ldots E_2E_1$ y usted puede escribir como

$$\begin{aligned}|AB| &= |E_k \cdots E_2E_1B| \\ &= |E_k| \cdots |E_2|\,|E_1|\,|B| = |E_k \cdots E_2E_1|\,|B| = |A|\,|B|.\end{aligned}$$

Si A es *singular*, entonces es equivalente por renglones a una matriz con un renglón entero formado de ceros. A partir del teorema 3.4, usted puede concluir que $|A| = 0$. Más aún, como A es singular, se tiene que AB también es singular. (Si AB fuera no singular, entonces $A[B(AB)^{-1}] = I$ implicaría que A es no singular.) Así, $|AB| = 0$ y puede concluir que $|AB| = |A|\,|B|$.

La relación entre $|A|$ y $|cA|$ se muestra en el siguiente teorema.

TEOREMA 3.6 Determinante de un escalar múltiplo de una matriz

Si A es una matriz de $n \times n$ y c es un escalar, entonces el determinante de cA está dado por

$$\det(cA) = c^n \det(A).$$

DEMOSTRACIÓN

Esta fórmula puede obtenerse por la repetida aplicación de la propiedad 3 del teorema 3.3. Factorice el escalar c de los n renglones de $|cA|$ para obtener

$$|cA| = c^n|A|.$$

EJEMPLO 2 Determinante de un escalar múltiplo de una matriz

Encuentre el determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -20 & 40 \\ 30 & 0 & 50 \\ -20 & -30 & 10 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Como

$$A = 10\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 5,$$

usted puede aplicar el teorema 3.6 para concluir que

$$|A| = 10^3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1000(5) = 5000.$$

Los teoremas 3.5 y 3.6 proporcionan fórmulas para evaluar los determinantes del producto de dos matrices y un múltiplo escalar de una matriz. Sin embargo, estos teoremas no incluyen la fórmula para el determinante de la suma de dos matrices. Es importante observar que la suma de los determinantes de dos matrices a menudo no es igual al determinante de la suma. En general, esto es $|A| + |B| \neq |A + B|$. Por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

entonces $|A| = 2$ y $|B| = -3$, pero $A + B = \begin{bmatrix} 9 & 9 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ y $|A + B| = -18$.

DETERMINANTES Y LA INVERSA DE UNA MATRIZ

Usted ya vio en el capítulo 2 que algunas matrices cuadradas no son invertibles. También resulta difícil decir simplemente por inspección si una matriz tiene o no inversa. ¿Podría decir cuál de las siguientes matrices es invertible?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

El siguiente teorema muestra que los determinantes son útiles para clasificar las matrices cuadradas invertibles.

TEOREMA 3.7 Determinante de una matriz invertible

Una matriz cuadrada A es invertible (no singular) si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

DESCUBRIMIENTO

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Utilice una aplicación gráfica o un programa de computadora para encontrar A^{-1}.
2. Compare $\det(A^{-1})$ con $\det(A)$
3. Haga una conjetura sobre el determinante de la inversa de una matriz.

DEMOSTRACIÓN

Para demostrar el teorema en una dirección, suponga que A es invertible. Entonces $AA^{-1} = I$, y por el teorema 3.5 puede escribir $|A|\,|A^{-1}| = |I|$. Ahora, como $|I| = 1$, usted sabe que tampoco el determinante de la izquierda es cero. Específicamente, $|A| \neq 0$.

Para demostrar el teorema en otra dirección, suponga que el determinante de A es diferente de cero. Entonces, aplicando la eliminación de Gauss-Jordan, encuentre una matriz B en la forma escalonada-reducida por renglones que sea equivalente por renglones a A. Como B está en la forma escalonada-reducida por renglones, esta debe ser la matriz identidad o debe contener al menos un renglón formado por ceros. Pero si B tiene un renglón completo de ceros, entonces por el teorema 3.4 usted sabe que $|B| = 0$, lo cual puede implicar que $|A| = 0$. Debido a que supuso que $|A|$ es diferente de cero, puede concluir que $B = I$. A es por tanto, equivalente por renglones a la matriz identidad y por el teorema 2.15 usted sabe que A es invertible.

EJEMPLO 3 Clasificación de matrices cuadradas como singulares o no singulares

¿Cuál de las siguientes matrices tiene inversa?

a. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ **b.** $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

SOLUCIÓN

a. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$

puede concluir que esta matriz no tiene inversa (es singular).

b. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$

puede concluir que esta matriz tiene una inversa (es no singular).

En el terorema siguiente se brinda una forma práctica de hallar el determinante de la inversa de una matriz.

TEOREMA 3.8 Determinante de la inversa de una matriz

Si A es invertible, entonces $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

DEMOSTRACIÓN

Debido a que A es invertible, $AA^{-1} = I$, y usted puede aplicar el teorema 3.5 para concluir que $|A|\,|A^{-1}| = |I| = 1$. Como A es invertible, también sabe que $|A| \neq 0$ y puede dividir cada lado entre |A| para obtener

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

EJEMPLO 4 Determinante de la inversa de una matriz

Encuentre $|A^{-1}|$ para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

COMENTARIO

En el ejemplo 4, la inversa de A es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Intente evaluar el determinante de esta matriz directamente. Después compare su respuesta con la obtenida en el ejemplo 4.

SOLUCIÓN

Una manera de resolver este problema es encontrar A^{-1} y después evaluar su determinante. Sin embargo, es más fácil aplicar el teorema 3.8 como sigue. Encuentre el determinante de A,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

y luego aplique la fórmula $|A^{-1}| = 1/|A|$ para concluir que $|A^{-1}| = \frac{1}{4}$.

Observe que el teorema 3.7 proporciona otra condición de equivalencia que puede ser agregada a la lista del teorema 2.15. Las seis condiciones se resumen a continuación.

COMENTARIO

En la sección 3.2 usted vio que una matriz cuadrada A puede tener un determinante cero si es equivalente por renglones a una matriz que por lo menos tenga un reglón que conste completamente de ceros. La validez de esta afirmación surge a partir de la equivalencia de las propiedades 4 y 6.

Condiciones de equivalencia para una matriz no singular

Si A es una matriz de $n \times n$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. A es invertible.
2. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una única solución para toda matriz columna $\mathbf{b}$ de $n \times 1$.
3. $A\mathbf{x} = O$ tiene sólo la solución trivial.
4. A es equivalente por renglones a I_n.
5. A puede ser escrita como el producto de dos matrices elementales.
6. $\det(A) \neq 0$.

EJEMPLO 5 Sistemas de ecuaciones lineales

¿Cuál de los siguientes sistemas tiene una única solución?

a.
$$\begin{aligned} 2x_2 - x_3 &= -1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -4 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} 2x_2 - x_3 &= -1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= -4 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Del ejemplo 3, usted sabe que las matrices de coeficientes para estos dos sistemas de ecuaciones tienen los siguientes determinantes.

a. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$ **b.** $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -12$

Utilizando la lista de condiciones de equivalencia anterior, puede concluir que sólo el segundo sistema tiene una única solución.

DETERMINANTES Y LA TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ

El siguiente teorema nos dice que el determinante de la transpuesta de una matriz cuadrada es igual al determinante de la matriz original. Este teorema se puede demostrar utilizando inducción matemática y el teorema 3.1, el cual establece que un determinante puede evaluarse aplicando expansión por cofactores a lo largo de un renglón o de una columna. Los detalles de esta demostración se le dejan a usted. (Véase el ejercicio 64.)

TEOREMA 3.9 Determinante de una transpuesta

Si A es una matriz cuadrada, entonces

$$\det(A) = \det(A^T).$$

EJEMPLO 6 **Determinante de una transpuesta**

Demuestre que $|A| = |A^T|$ para la siguiente matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Para encontrar el determinante de A, expanda por cofactores a lo largo del segundo renglón para obtener

$$\begin{aligned} |A| &= 2(-1)^3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \\ &= (2)(-1)(3) \\ &= -6. \end{aligned}$$

Para encontrar el determinante de

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

expanda por cofactores bajo la *segunda columna* para obtener

$$\begin{aligned} |A^T| &= 2(-1)^3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= (2)(-1)(3) \\ &= -6. \end{aligned}$$

Entonces $|A| = |A^T|$.

ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

Los sistemas de ecuaciones lineales diferenciales se presentan a menudo en ingeniería y teoría de control. Para una función $f(t)$ que está definida por todos los valores positivos de t, la **transformada de Laplace** de $f(t)$ está dada por

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt.$$

Las transformadas de Laplace y la Regla de Cramer, que utiliza determinantes para resolver un sistema de ecuaciones lineales, pueden usarse a menudo para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales. Usted estudiará la Regla de Cramer en la siguiente sección.

William Perugini/Shutterstock.com

3.3 Ejercicios

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

El determinante de una matriz producto En los ejercicios 1 a 6, encuentre (a) $|A|$, (b) $|B|$, (c) AB y (d) $|AB|$. Luego verifique que $|A|\,|B| = |AB|$.

1. $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,

$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

El determinante de un múltiplo escalar de una matriz En los ejercicios 7 a 12, use el hecho de que $|cA| = c^n|A|$ para evaluar el determinante de una matriz de $n \times n$.

7. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & -8 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ 10 & -20 \end{bmatrix}$

9. $A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 9 \\ 6 & 9 & 12 \\ 9 & 12 & 15 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 4 & 16 & 0 \\ 12 & -8 & 8 \\ 16 & 20 & -4 \end{bmatrix}$

11. $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ -4 & 6 & -8 \\ 6 & -8 & 10 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 40 & 25 & 10 \\ 30 & 5 & 20 \\ 15 & 35 & 45 \end{bmatrix}$

El determinante de una suma matricial En los ejercicios 13 a 16, encuentre (a) $|A|$, (b) $|B|$, (c) $|A + B|$. Luego verifique que $|A| + |B| \neq |A + B|$.

13. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

14. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

15. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

16. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Clasificación de matrices como singulares o no singulares En los ejercicios 17 a 24, use un determinante para decidir qué matriz es singular o no singular.

17. $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 14 & 5 & 7 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & -5 & -10 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & 8 \\ 1 & -\frac{1}{4} & 4 \\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 8 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 & 2 \\ 0 & 8 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & -0.6 & 0.1 \\ -1.2 & 0.6 & 0.6 & 0 \\ 0.7 & -0.3 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & -0.3 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}$

El determinante de la inversa de una matriz En los ejercicios 25 a 30, encuentre $|A^{-1}|$. Comience hallando A^{-1} y después evalúe su determinante. Verifique su resultado encontrando $|A|$ y luego aplicando la fórmula del teorema 3.8, $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$.

25. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

26. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

27. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

28. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

29. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

30. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

Sistema de ecuaciones lineales En los ejercicios 31 a 36, use el determinante de la matriz de coeficientes para determinar qué sistema de ecuaciones lineales tiene una única solución.

31. $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$

32. $\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 &= 2 \\ \tfrac{2}{3}x_1 - \tfrac{8}{9}x_2 &= 1 \end{aligned}$

33. $\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$

34. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$

35. $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 &= 5 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= -1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= 2 \\ x_1 + 5x_2 - 6x_3 &= 3 \end{aligned}$

36. $\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \end{aligned}$

Encontrar determinantes En los ejercicios 37 a 44, encuentre (a) $|A^T|$, (b) $|A^2|$, (c) $|AA^T|$, (d) $|2A|$ y (e) $|A^{-1}|$.

37. $A = \begin{bmatrix} 6 & -11 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$

38. $A = \begin{bmatrix} -4 & 10 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

39. $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

40. $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

41. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

42. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 9 \\ -1 & 0 & -2 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

43. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

44. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Encontrar determinantes En los ejercicios 45 a 50, utilice una aplicación gráfica o un programa de computadora con capacidades matriciales para encontrar (a) $|A|$, (b) $|A^T|$, (c) $|A^2|$, (d) $|2A|$ y (e) $|A^{-1}|$.

45. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

46. $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

47. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

48. $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$

49. $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 2 & -1 \\ 6 & 8 & 9 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

50. $A = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & -4 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

51. Sean A y B matrices cuadradas de orden 4 tales que $|A| = -5$ y $|B| = 3$. Encuentre (a) $|A^2|$, (b) $|B^2|$, (c) $|A^3|$ y (d) $|B^4|$.

52. **REMATE** Sean A y B matrices cuadradas de orden 3 tales que $|A| = 4$ y $|B| = 5$.

(a) Encuentre $|AB|$.

(b) Encuentre $|2A|$.

(c) ¿A y B son singulares o no singulares? Explique.

(d) Si A y B son no singulares, encuentre $|A^{-1}|$ y $|B^{-1}|$.

(e) Encuentre $|(AB)^T|$.

Matrices Singulares En los ejercicios 53 a 56, encuentre el valor(es) de k tal que A sea singular.

53. $A = \begin{bmatrix} k-1 & 3 \\ 2 & k-2 \end{bmatrix}$

54. $A = \begin{bmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & k+2 \end{bmatrix}$

55. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & k \end{bmatrix}$

56. $A = \begin{bmatrix} 1 & k & 2 \\ -2 & 0 & -k \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

57. **Prueba** Sean A y B matrices de $n \times n$ tales que $AB = I$. Demuestre que $|A| \neq 0$ y $|B| \neq 0$.

58. **Prueba** Sean A y B matrices de $n \times n$ tales que AB es singular. Demuestre que cualquiera de las dos A o B es singular.

59. Encuentre dos matrices de 2×2 tales que

$$|A| + |B| = |A + B|.$$

60. Verifique la ecuación.

$$\begin{vmatrix} a+b & a & a \\ a & a+b & a \\ a & a & a+b \end{vmatrix} = b^2(3a+b)$$

61. Sea A una matriz de $n \times n$ en la que los elementos de cada renglón suman más de cero. Encuentre $|A|$.

62. Ilustre el resultado del ejercicio 61 con la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

63. Demostración guiada Demuestre que el determinante de una matriz invertible A es igual a ±1 si todos los elementos de A y A^{-1} son enteros.

Inicio: denote $\det(A)$ con x y $\det(A^{-1})$ con y. Observe que x y y son números reales. Para demostrar que det(A) es igual a ± 1, debe demostrar que x y y son enteros tales que su producto xy es igual a 1.

(i) Utilice la propiedad del determinante de una matriz producto para demostrar que $xy = 1$.

(ii) Use la definición de determinante y el hecho de que los elementos de A y A^{-1} son enteros para demostrar que $x = \det(A)$ y $y = \det(A^{-1})$ son enteros.

(iii) Concluya que $x = \det(A)$ debe ser 1 o –1 debido a que estas son las únicas soluciones enteras para la ecuación $xy = 1$.

64. Demostración guiada Demuestre el teorema 3.9: si A es una matriz cuadrada, entonces $\det(A) = \det(AT)$.

Inicio: para demostrar que los determinantes de A y A^T son iguales, usted necesita demostrar que sus expansiones por cofactores son iguales. Debido a que los cofactores son determinantes $\pm$ de matrices pequeñas, es necesario utilizar la inducción matemática.

(i) Paso inicial para la inducción: si A es de orden 1, entonces $A = [a_{11}] = A^T$,
así
$\det(A) = \det(A^T) = a_{11}$.

(ii) Considere la hipótesis inductiva sostenida para todas las matrices de orden $n - 1$. Sea A una matriz cuadrada de orden n. Escriba una expresión para el determinante de A por expansión del primer renglón.

(iii) Escriba una expresión para el determinante de A^T por expansión de la primera columna.

(iv) Compare las expansiones en (ii) y (iii). Los elementos del primer renglón de A son los mismos que los elementos de la primera columna de AT. Compare cofactores (estos son los determinantes ± de matrices más pequeñas que son las transpuestas de otras) y utilice la hipótesis inductiva para concluir que estos también son iguales.

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 65 y 66, determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, proporcione una razón o cite una expresión adecuada del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que muestre que la expresión no es cierta en todos los casos o cite del texto una expresión adecuada.

65. (a) Si A es una matriz de $n \times n$ y c es un escalar diferente de cero, entonces el determinante de la matriz cA está dado por $nc \cdot \det(A)$.

(b) Si A es una matriz invertible, entonces el determinante de A^{-1} es igual al recíproco del determinante de A.

(c) Si A es una matriz invertible de $n \times n$, entonces $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una única solución para cada $\mathbf{b}$.

66. (a) En general, el determinante de la suma de dos matrices es igual a la suma de sus determinantes.

(b) (b) Si A y B son matrices cuadradas de orden n, y $\det(A) = \det(B)$, entonces $\det(AB) = \det(A^2)$.

(c) Si el determinante de una matriz A de $n \times n$ es diferente de cero, entonces $A\mathbf{x} = 0$ tiene sólo la solución trivial.

67. Escriba Sean A y P matrices de n $\times$ n, donde P es invertible. ¿Es posible que $P^{-1}AP = A$? Ilustre su conclusión con ejemplos apropiados. ¿Qué puede decir sobre los dos determinantes $|P^{-1}AP|$ y $|A|$?

68. Escriba Sea A una matriz de $n \times n$ diferente de cero que satisface $A^{10} = O$. Explique por qué A debe ser singular. ¿Qué propiedades de los determinantes utilizaría en sus argumentos?

69. Prueba Una matriz cuadrada es llamada cuasi-simétrica si $A^T = -A$. Demuestre que si A es una matriz cuasi-simétrica de n $\times$ n, entonces $|A| = (-1)^n|A|$.

70. Prueba Sea A una matriz cuasi-simétrica de orden impar. Utilice el resultado del ejercicio 69 para demostrar que $|A| = 0$.

Matrices ortogonales En los ejercicios 71 a 76, determine qué matriz es ortogonal. Una matriz cuadrada invertible A es llamada ortogonal si $A^{-1} = A^T$.

71. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **72.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

73. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ **74.** $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

75. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **76.** $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

77. Prueba Demuestre que si A es una matriz ortogonal, entonces $|A| = \pm 1$.

Matrices ortogonales En los ejercicios 78 y 79, utilice una aplicación gráfica con capacidades matriciales para determinar cuál A es ortogonal. Para probar la ortogonalidad, encuentre (a) A^{-1}, (b) A^T (c) $|A|$ y verifique que $A^{-1} = A^T$ y $|A| = \pm 1$.

78. $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$ **79.** $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

80. Prueba Si A es una matriz idempotente ($A^2 = A$), entonces demuestre que el determinante de A puede ser 0 o 1.

81. Prueba Sea S una matriz singular de $n \times n$. Demuestre que para cualquier matriz B de $n \times n$, la matriz SB también es singular.

3.4 Aplicaciones de los determinantes

- Encuentre la adjunta de una matriz y úsela para encontrar la inversa de la matriz.
- Use Regla de Cramer para resolver un sistema de ecuaciones lineales en variables.
- Use determinantes para encontrar área, volumen y las ecuaciones de las rectas y planos.

ADJUNTA DE UNA MATRIZ

Hasta ahora, en este capítulo ha estudiado procedimientos para evaluar —y las propiedades de— determinantes. En esta sección aprenderá una fórmula explícita para obtener la inversa de una matriz no singular y luego la usará para deducir un teorema conocido como regla de Cramer. Después resolverá algunas aplicaciones de los determinantes con ella.

Recuerde de la sección 3.1 que el cofactor C_{ij} de la matriz A está definido como $(-1)^{i+j}$ veces el determinante de la matriz obtenida al suprimir el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de A. Si A es una matriz cuadrada, entonces la **matriz de cofactores** de A tiene la forma

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}.$$

La transpuesta de esta matriz se llama **adjunta** de A y se denota como adj(A), es decir

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}.$$

EJEMPLO 1 Determinación de la adjunta de una matriz cuadrada

Encuentre la adjunta de $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

El cofactor C_{11} está dado por

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow C_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4.$$

Continuando con este proceso, tenemos la siguiente matriz de cofactores de A.

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

La transpuesta de esta matriz es la adjunta de A. Esto es, $\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

La adjunta de la matriz A puede utilizarse para encontrar la inversa de A, como se indica en el siguiente teorema.

COMENTARIO

El teorema 3.10 no es particularmente eficiente para calcular inversas. El método de Gauss-Jordan estudiado en la sección 2.3 es mucho mejor. El teorema 3.10 es, sin embargo, muy utilizado teóricamente debido a que proporciona una fórmula concisa para la inversa de una matriz.

TEOREMA 3.10 Inversa de una matriz dada por su adjunta

Si A es una matriz invertible de $n \times n$, entonces $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)$.

DEMOSTRACIÓN

Comience por probar que el producto de A y su adjunta es igual al producto del determinante de A e I_n. Considere el producto

$$A[\operatorname{adj}(A)] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{j1} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{j2} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{jn} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}.$$

El elemento en el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de este producto es

$$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn}.$$

Si $i = j$, entonces la suma es simplemente la expansión por cofactores de A a lo largo de su i-ésimo renglón, lo que significa que la suma es el determinante de A. Por otra parte, si $i \neq j$, entonces la suma es cero.

$$A[\operatorname{adj}(A)] = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A)I$$

Como A es invertible, $\det(A) \neq 0$ y usted puede escribir

$$\frac{1}{\det(A)}A[\operatorname{adj}(A)] = I \quad \text{o} \quad A\left[\frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A)\right] = I.$$

Por el Teorema 2.7 y la definición de la inversa de una matriz, se sigue que

$$\frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A) = A^{-1}.$$

COMENTARIO

Si A es una matriz de 2×2, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, entonces la adjunta de A es simplemente

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Más aún, si A es invertible, entonces, por el teorema 3.10 se tiene

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj}(A) = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

lo que concuerda con el resultado en la sección 2.3.

EJEMPLO 2 Uso de la adjunta de una matriz para hallar su inversa

Use la adjunta para hallar A^{-1}, donde $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

El determinante de esta matriz es 3. Utilizando la adjunta de A (encontrada en el ejemplo 1), puede encontrar que la inversa de A es

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj}(A) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 2 & \frac{7}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Puede verificar que esta matriz es la inversa de A al multiplicar para obtener $AA^{-1} = I = A^{-1}A$.

REGLA DE CRAMER

La regla de Cramer, nombrada así en honor de Gabriel Cramer (1704–1752), es una fórmula que utiliza determinantes para resolver un sistema de n ecuaciones lineales con n variables. Esta regla sólo puede ser aplicada a sistemas de ecuaciones lineales que tienen una única solución. Para ver cómo funciona la regla de Cramer, dé otro vistazo a la solución descrita al principio de la sección 3.1. Ahí se muestra que el sistema.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

tiene la solución

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

cuando $a_{11}a_{22} \neq a_{21}b_{12} \neq 0$. Cada numerador y denominador en esta solución se puede representar como un determinante, como sigue

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$$

El denominador para x_1 y x_2 es simplemente el determinante de la matriz de coeficientes A. Los numeradores para x_1 y x_2 se forman al usar la columna de constantes como remplazos para los coeficientes de x_1 y x_2 en $|A|$. Estos dos determinantes son denotados por $|A_1|$ y $|A_2|$ como sigue.

$$|A_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad |A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

Usted tiene $x_1 = \dfrac{|A_1|}{|A|}$ y $x_2 = \dfrac{|A_2|}{|A|}$. Esta forma de solución por determinante se llama **regla de Cramer**.

EJEMPLO 3 Uso de la regla de Cramer

Utilice la Regla de Cramer para resolver el sistema lineal de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 &= 10 \\ 3x_1 - 5x_2 &= 11 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Primero encuentre el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -14$$

Como $|A| \neq 0$, usted sabe que el sistema tiene una única solución y aplicando la regla de Cramer obtiene

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -2 \\ 11 & -5 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{-28}{-14} = 2$$

y

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 10 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{14}{-14} = -1.$$

La solución es $x_1 = 2$ y $x_2 = -1$.

La regla de Cramer se generaliza fácilmente a sistemas de n ecuaciones lineales con n variables. El valor de cada variable es el cociente de dos determinantes. El denominador es el determinante de la matriz de coeficientes y el numerador es el determinante de la matriz formada a partir del reemplazo de la columna correspondiente a la variable resuelta para la columna que representa las constantes. Por ejemplo, la solución para x_3 en el sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \quad \text{is} \quad x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

TEOREMA 3.11 Regla de Cramer

Si un sistema de n ecuaciones lineales con n variables tiene una matriz de coeficientes con un determinante $|A|$ diferente de cero, entonces la solución del sistema está dada por

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

donde la i-ésima columna de A_i corresponde a la columna de constantes en el sistema de ecuaciones.

DEMOSTRACIÓN

Sea el sistema representado por $AX = B$. Como $|A|$ es diferente de cero, puede escribir

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj}(A)B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Si los elementos de B son $b_1, b_2, \ldots, b_n$, entonces $x_i = \dfrac{1}{|A|}(b_1C_{1i} + b_2C_{2i} + \cdots + b_nC_{ni})$,

pero la suma (en el paréntesis) es precisamente la expansión del cofactor de A_i, lo que significa que $x_i = |A_i|/|A|$ y la demostración está completa.

EJEMPLO 4 Uso de la regla de Cramer

Utilice la regla de Cramer para resolver el sistema de ecuaciones lineales para x.

$$\begin{aligned} -x + 2y - 3z &= 1 \\ 2x \phantom{{}+2y} + z &= 0 \\ 3x - 4y + 4z &= 2 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

El determinante de la matriz de coeficientes es $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \end{vmatrix} = 10.$

Como $|A| \neq 0$, usted sabe que la solución es única y la regla de Cramer puede aplicarse para encontrar x, como sigue.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 4 \end{vmatrix}}{10} = \frac{(1)(-1)^5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}}{10} = \frac{(1)(-1)(-8)}{10} = \frac{4}{5}$$

COMENTARIO

Intente aplicar la regla de Cramer en el ejemplo 4 para resolver para y y z. Verá que la solución es $y = -\frac{3}{2}$ y $z = -\frac{8}{5}$.

ÁREA, VOLUMEN Y ECUACIONES DE LÍNEAS Y PLANOS

Los determinantes tiene muchas aplicaciones en geometría analítica; algunas se presentan aquí. La primera aplicación es encontrar el área de un triángulo en el plano x-y.

Área de un triángulo en el plano x-y

El área de un triángulo cuyos vértices son

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \text{ y } (x_3, y_3)$$

está dada por

$$\text{Área} = \pm\tfrac{1}{2}\det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$$

donde el signo ($\pm$) es elegido para generar un área positiva.

DEMOSTRACIÓN

Pruebe el caso para $y_i > 0$. Suponga que $x_1 \le x_3 \le x_2$ y que (x_3, y_3) descansa sobre el segmento de recta que une los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) como se muestra en la figura 3.1. Considere los tres trapezoides cuyos vértices son

Trapezoide 1: $(x_1, 0), (x_1, y_1), (x_3, y_3), (x_3, 0)$
Trapezoide 2: $(x_3, 0), (x_3, y_3), (x_2, y_2), (x_2, 0)$
Trapezoide 3: $(x_1, 0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_2, 0)$.

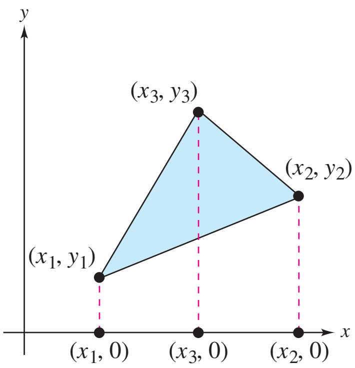


Figura 3.1

El área del triángulo es igual a la suma de las áreas de los dos primeros trapezoides menos el área del tercero. Así

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \tfrac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) + \tfrac{1}{2}(y_3 + y_2)(x_2 - x_3) - \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_2 - x_1) \\ &= \tfrac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2) \\ &= \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Si los vértices no ocurren en el orden $x_1 \le x_3 \le x_2$ o si el vértice (x_3, y_3) no está sobre el segmento de recta que conecta los otros dos vértices, entonces la fórmula puede generar un valor negativo del área.

EJEMPLO 5 Área de un triángulo

Encuentre el área del triángulo cuyos vértices son

$$(1, 0), \quad (2, 2) \quad \text{y} \quad (4, 3).$$

SOLUCIÓN

No es necesario saber la posición relativa de los tres vértices, simplemente evalúe el determinante

$$\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\tfrac{3}{2}$$

y concluya que el área del triángulo es 3/2 unidades cuadradas.

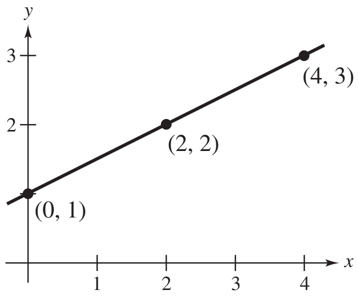


Figura 3.2

Suponga que los tres puntos del ejemplo 5 están en la misma recta. ¿Qué sucedería si aplica la fórmula del área a los tres puntos? La respuesta es que el determinante tendría que ser cero. Considere, por ejemplo, los puntos colineales (0, 1), (2, 2) y (4, 3) mostrados en la figura 3.2. El determinante que genera el área del triángulo que tiene estos tres puntos como vértices es

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si tres puntos en el plano de xy yacen en la misma recta, entonces el determinante en la fórmula para el área del triángulo será cero. Este resultado se generaliza en el siguiente análisis.

Análisis de puntos colineales en el plano de *xy*

Tres puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) son colineales si y sólo si

$$\det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

La prueba para puntos colineales puede adaptarse para otro uso. Es decir, cuando se tienen dos puntos en el plano de xy, usted puede encontrar una ecuación de la recta que pasa por los dos puntos, como sigue.

Forma de dos puntos de la ecuación de una recta

La ecuación de la recta que pasa por puntos distintos (x_1, y_1), (x_2, y_2) está dada por

$$\det\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

EJEMPLO 6 Búsqueda de una ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos

$$(2, 4) \quad \text{y} \quad (-1, 3).$$

SOLUCIÓN

Sean $(x_1, y_1) = (2, 4)$ y $(x_2, y_2) = (-1, 3)$. Aplicando la fórmula del determinante para la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, tenemos

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Para evaluar este determinante, expanda por cofactores a lo largo del renglón superior para obtener

$$\begin{aligned} x\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} &= 0 \\ x(1) - y(3) + 1(10) &= 0 \\ x - 3y + 10 &= 0 \end{aligned}$$

La ecuación de la recta es $x - 3y = -10$.

La fórmula para el área de un triángulo en el plano tiene una generalización directa para el espacio en tres dimensiones, la cual se presenta sin demostración como sigue.

Volumen de un tetraedro

El volumen de un tetraedro cuyos vértices son (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) y (x_4, y_4, z_4) está dado por

$$\text{Volumen} = \pm\tfrac{1}{6}\det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{bmatrix}$$

donde el signo $(\pm)$ se elige para tener un volumen positivo.

EJEMPLO 7 Volumen de un tetraedro

Encuentre el volumen del tetraedro cuyos vértices son (0, 4, 1), (4, 0, 0), (3, 5, 2) y (2, 2, 5), como se muestra en la figura 3.3.

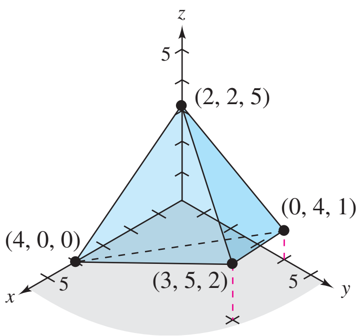


Figura 3.3

SOLUCIÓN

Aplicando la fórmula del determinante para un volumen tenemos

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{6}(-72) = -12.$$

El volumen del tetraedro es 12 unidades cuadradas.

Si cuatro puntos en un espacio de tres dimensiones yacen en el mismo plano, entonces el determinante en la fórmula del volumen se vuelve cero. Así, usted tiene el análisis siguiente.

Análisis para puntos coplanares en el espacio

Cuatro puntos (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) y (x_4, y_4, z_4) son coplanares si y sólo si

$$\det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Este análisis proporciona la forma de un determinante para la ecuación de un plano que pasa por tres puntos en el espacio, como se muestra a continuación.

Forma de tres puntos de la ecuación de un plano

Una ecuación de un plano que pasa por tres puntos (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) y (x_3, y_3, z_3) está dada por

$$\det\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

EJEMPLO 8 Búsqueda de la ecuación del plano que pasa por tres puntos

Encuentre la ecuación del plano que pasa por tres puntos (0, 1, 0), (–1, 3, 2) y (–2, 0, 1).

SOLUCIÓN

Usando la forma del determinante de un plano que pasa a través de tres puntos, tenemos

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Para evaluar este determinante, reste la cuarta columna de la segunda para obtener

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ahora, expandiendo por cofactores a lo largo del segundo renglón resulta

$$x\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x(4) - (y-1)(3) + z(5) = 0.$$

lo que genera la ecuación $4x - 3y + 5z = -3$.

ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

De acuerdo con la Primera Ley de Kepler del Movimiento Planetario, las órbitas de los planetas son elipses, con el sol como uno de los focos de la elipse. La ecuación general de una sección cónica (como una elipse) es

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Para determinar la ecuación de la órbita de una planeta, un astrónomo puede encontrar las coordinadas del planeta junto con su órbita en cinco puntos diferentes (x_i, y_i), donde i = 1, 2, 3, 4 y 5, y entonces usar el determinante

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5x_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ralf Juergen Kraft/Shutterstock.com

3.4 Ejercicios

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

Encontrar la adjunta e inversa de una matriz En los ejercicios 1 a 8, encuentre la adjunta de la matriz A. Después úsela para encontrar la inversa de A, si es posible.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ **2.** $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & -4 & -12 \end{bmatrix}$ **4.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} -3 & -5 & -7 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ **6.** $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

9. Prueba Demuestre que si $|A| = 1$ y todos los elementos de A son enteros, entonces todos los elementos de $|A^{-1}|$ también deben ser enteros.

10. Prueba Demuestre que si una matriz A de $n \times n$ no es invertible, entonces $A[\text{adj}(A)]$ es la matriz cero.

Demostración En los ejercicios 11 y 12, demuestre la fórmula para una matriz A no singular de $n \times n$. Suponga $n \geq 2$.

11. $|\text{adj}(A)| = |A|^{n-1}$ **12.** $\text{adj}[\text{adj}(A)] = |A|^{n-2}A$

13. Ilustre la fórmula proporcionada en el ejercicio 11 para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

14. Ilustre la fórmula proporcionada en el ejercicio 12 para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

15. Prueba Demuestre que si A es una matriz invertible de $n \times n$, entonces $\text{adj}(A^{-1})[\text{adj}(A)]^{-1}$.

16. Ilustre la fórmula proporcionada en el ejercicio 15 para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Uso de la Regla de Cramer En los ejercicios 17 a 30, utilice la regla de Cramer para resolver el sistema de ecuaciones lineales, si es posible.

17. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5 \\ -x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$ **18.** $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= -10 \\ 3x_1 + 2x_2 &= -1 \end{aligned}$

19. $\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &= -2 \\ 5x_1 + 3x_2 &= 4 \end{aligned}$ **20.** $\begin{aligned} 18x_1 + 12x_2 &= 13 \\ 30x_1 + 24x_2 &= 23 \end{aligned}$

21. $\begin{aligned} 20x_1 + 8x_2 &= 11 \\ 12x_1 - 24x_2 &= 21 \end{aligned}$ **22.** $\begin{aligned} 13x_1 - 6x_2 &= 17 \\ 26x_1 - 12x_2 &= 8 \end{aligned}$

23. $\begin{aligned} -0.4x_1 + 0.8x_2 &= 1.6 \\ 2x_1 - 4x_2 &= 5.0 \end{aligned}$ **24.** $\begin{aligned} -0.4x_1 + 0.8x_2 &= 1.6 \\ 0.2x_1 + 0.3x_2 &= 0.6 \end{aligned}$

25. $\begin{aligned} 4x_1 - x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 10 \\ 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= -1 \end{aligned}$

26. $\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 16 \\ 8x_1 - 5x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned}$

27. $\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 11 \\ 4x_1 - 4x_2 + 6x_3 &= 11 \\ 6x_1 - 6x_2 &= 3 \end{aligned}$

28. $\begin{aligned} 14x_1 - 21x_2 - 7x_3 &= -21 \\ -4x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 2 \\ 56x_1 - 21x_2 + 7x_3 &= 7 \end{aligned}$

29. $\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + x_3 &= -5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 10 \\ 5x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 1 \end{aligned}$

30. $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= 7 \\ 5x_1 + 9x_2 + 17x_3 &= 13 \end{aligned}$

Uso de la Regla de Cramer En los ejercicios 31 a 34, utilice una aplicación gráfica o un programa de computadora con capacidades matriciales y la regla de Cramer para resolver para x_1, si es posible.

31. $\begin{aligned} \tfrac{5}{6}x_1 - x_2 &= -20 \\ \tfrac{4}{3}x_1 - \tfrac{7}{2}x_2 &= -51 \end{aligned}$

32. $\begin{aligned} -8x_1 + 7x_2 - 10x_3 &= -151 \\ 12x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 86 \\ 15x_1 - 9x_2 + 2x_3 &= 187 \end{aligned}$

33. $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 9x_3 + 4x_4 &= 35 \\ -x_1 - 9x_3 - 6x_4 &= -17 \\ 3x_3 + x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_4 &= -4 \end{aligned}$

34. $\begin{aligned} -x_1 - x_2 + x_4 &= -8 \\ 3x_1 + 5x_2 + 5x_3 &= 24 \\ 2x_3 + x_4 &= -6 \\ -2x_1 - 3x_2 - 3x_3 &= -15 \end{aligned}$

35. Utilice la regla de Cramer para resolver el sistema de ecuaciones lineales para x y y.

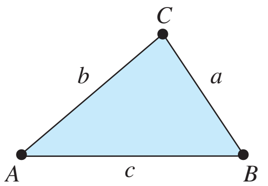
$$\begin{aligned} kx + (1 - k)y &= 1 \\ (1 - k)x + ky &= 3 \end{aligned}$$

¿Para qué valor(es) de k el sistema puede ser inconsistente?

36. Verifique el siguiente sistema de ecuaciones lineales en cos A, cos B y cos C para el triángulo mostrado en la figura.

$$\begin{aligned} c\cos B + b\cos C &= a \\ c\cos A \qquad\qquad + a\cos C &= b \\ b\cos A + a\cos B \qquad\qquad &= c \end{aligned}$$

Después utilice la regla de Cramer para resolver para cos C y use el resultado para verificar la ley de los cosenos $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.



Encontrar el Área de un triángulo En los ejercicios 37 a 40, encuentre el área del triángulo que tiene los vértices dados.

37. (0, 0), (2, 0), (0, 3) **38.** (1, 1), (2, 4), (4, 2)

39. (−1, 2), (2, 2), (−2, 4) **40.** (1, 1), (−1, 1), (0, −2)

Prueba de puntos colineales En los ejercicios 41 a 44, determine si los puntos son colineales.

41. (1, 2), (3, 4), (5, 6) **42.** (−1, 0), (1, 1), (3, 3)

43. (−2, 5), (0, −1), (3, −9)

44. (−1, −3), (−4, 7), (2, −13)

Encontrar la ecuación de una recta En los ejercicios 45 a 48, encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados.

45. (0, 0), (3, 4) **46.** (−4, 7), (2, 4)

47. (−2, 3), (−2, −4) **48.** (1, 4), (3, 4)

Encontrar el volumen de un tetraedro En los ejercicios 49 a 52, encuentre el volumen del tetraedro que tiene los vértices dados.

49. (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)

50. (1, 1, 1), (0, 0, 0), (2, 1, −1), (−1, 1, 2)

51. (3, −1, 1), (4, −4, 4), (1, 1, 1), (0, 0, 1)

52. (0, 0, 0), (0, 2, 0), (3, 0, 0), (1, 1, 4)

Prueba de puntos coplanares En los ejercicios 53 a 56, determine si los puntos son coplanares.

53. (−4, 1, 0), (0, 1, 2), (4, 3, −1), (0, 0, 1)

54. (1, 2, 3), (−1, 0, 1), (0, −2, −5), (2, 6, 11)

55. (0, 0, −1), (0, −1, 0), (1, 1, 0), (2, 1, 2)

56. (1, 2, 7), (−3, 6, 6), (4, 4, 2), (3, 3, 4)

Encontrar una ecuación de una recta En los ejercicios 57 a 60, encuentre la ecuación del plano que pasa por los puntos dados.

57. (1, −2, 1), (−1, −1, 7), (2, −1, 3)

58. (0, −1, 0), (1, 1, 0), (2, 1, 2)

59. (0, 0, 0), (1, −1, 0), (0, 1, −1)

60. (1, 2, 7), (4, 4, 2), (3, 3, 4)

Uso de la Regla de Cramer En los ejercicios 61 a 62 se ha aplicado la regla de Cramer para resolver para una de las variables en un sistema de ecuaciones. Determine en cuál se aplicó correctamente la regla para resolver para esa variable. Si no, identifique el error.

61. $\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ -x + 3y - 2z &= 4 \\ 4x + y - z &= 6 \end{aligned}$ $\qquad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 4 & 6 & -1 \end{vmatrix}}$

62. $\begin{aligned} 5x - 2y + z &= 15 \\ 3x - 3y - z &= -7 \\ 2x - y - 7z &= -3 \end{aligned}$ $\qquad x = \dfrac{\begin{vmatrix} 15 & -2 & 1 \\ -7 & -3 & -1 \\ -3 & -1 & -7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}}$

63. Publicación de libros de texto La siguiente tabla muestra el número de suscriptores y (en millones) de una compañía de comunicaciones en los Estados Unidos para los años 2007 a 2009. (Fuente: U.S. Census Bureau)

Año, t	*Suscriptores, y*
2007	10,697
2008	11,162
2009	9891

(a) Genere un sistema de ecuaciones lineales para los datos que se ajusten a la curva

$y = at^2 + bt + c$

donde t es el año y $t = 7$ corresponde a 2007 y y es el número de suscriptores.

(b) Utilice la regla de Cramer para resolver su sistema.

(c) Use una aplicación gráfica para graficar los datos y su función de regresión polinomial.

(d) Describa brevemente qué tan bien la función polinomial se ajusta a los datos.

64. REMATE Considere el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

donde a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 representan números reales. ¿Qué debe ser cierto de las rectas representadas por las ecuaciones cuando

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0?$$

3 Ejercicios de repaso

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

El determinante de una matriz En los ejercicios 1 a 18, encuentre el determinante de la matriz.

1. $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} -15 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \\ 12 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} -3 & 6 & 9 \\ 9 & 12 & -3 \\ 0 & 15 & -6 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} -15 & 0 & 3 \\ 3 & 9 & -6 \\ 12 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Propiedades de determinantes En los ejercicios 19 a 22, determine cuál de las propiedades de los determinantes está ilustrada por la ecuación.

19. $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 0$

20. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

21. $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 6 & 1 \\ 1 & 8 & 9 & 0 \\ 6 & 12 & -6 & 1 \end{vmatrix} = -12\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 6 & -3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

El determinante de una matriz producto En los ejercicios 23 y 24, encuentre (a) $|A|$, (b) $|B|$, (c) AB y (b) $|AB|$. Después verifique que $|A|\,|B| = |AB|$.

23. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

24. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Encontrar determinantes En los ejercicios 25 y 26, encuentre (a) $|A^T|$, (b) $|A^3|$, (c) $|A^TA|$ y (d) $|5A|$.

25. $A = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

26. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Encontrar determinantes En los ejercicios 27 y 28, encuentra (a) $|A|$ y (b) $|A^{-1}|$.

27. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 7 & 6 \end{bmatrix}$

28. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

El determinante de la inversa de una matriz En los ejercicios 29 a 32, encuentre $|A^{-1}|$. Comience por encontrar A^{-1} luego evalúe su determinante. Verifique su resultado para encontrar $|A|$ y después aplique la fórmula del teorema 3.8, $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$.

29. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} 10 & 2 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

32. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Resolución de un sistema de ecuaciones lineales En los ejercicios 33 a 36, resuelva el sistema de ecuaciones lineales por cada uno de los siguientes métodos.

(a) Eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás.

(b) Eliminación de Gauss-Jordan.

(c) Regla de Cramer.

33. $\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= 2 \\ 5x_1 + 9x_2 + 17x_3 &= 4 \end{aligned}$

34. $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 6 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 6 \end{aligned}$

35. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= -7 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= -8 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 8 \end{aligned}$

36. $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= 7 \\ 5x_1 + 9x_2 + 13x_3 &= 17 \end{aligned}$

Sistema de ecuaciones lineales En los ejercicios 37 a 42, use el determinante de la matriz de coeficientes para indicar cuál de los sistemas de ecuaciones lineales tiene una única solución.

37. $\begin{aligned} 5x + 4y &= 2 \\ -x + y &= -22 \end{aligned}$

38. $\begin{aligned} 2x - 5y &= 2 \\ 3x - 7y &= 1 \end{aligned}$

39. $\begin{aligned} -x + y + 2z &= 1 \\ 2x + 3y + z &= -2 \\ 5x + 4y + 2z &= 4 \end{aligned}$

40. $\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 10 \\ 2x - 3y - 3z &= 22 \\ 8x + 6y &= -2 \end{aligned}$

41. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 15x_3 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= -6 \end{aligned}$

42. $\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 14 \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 3 \\ 3x_3 + 8x_4 + 6x_5 &= 16 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_5 &= 0 \\ 2x_1 - x_3 &= 0 \end{aligned}$

43. Sean A y B matrices cuadradas de orden 4 tales que $|A| = 4$ y $|B| = 2$. Encuentre (a) $|BA|$, (b) $|B^2|$, (c) $|2A|$, (d) $|(AB)^T|$ y (e) $|B^{-1}|$.

44. Sean A y B matrices cuadradas de orden 3 tales que $|A| = -2$ y $|B| = 5$. Encuentre (a) $|BA|$, (b) $|B^4|$, (c) $|2A|$, (d) $|(AB)^T|$ y (e) $|B^{-1}|$.

45. **Demostración** Demuestre la siguiente propiedad.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + c_{31} & a_{32} + c_{32} & a_{33} + c_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}$$

46. Ilustre la propiedad demostrada en el ejercicio 45 para:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad c_{31} = 3, \quad c_{32} = 0, \quad c_{33} = 1$$

47. Encuentre el determinante de la matriz de $n \times n$.

$$\begin{bmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{bmatrix}$$

48. Demuestre que

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+3)(a-1)^3.$$

Cálculo En los ejercicios 49 a 52, encuentre los jacobianos de las funciones. Si x, y y z son funciones continuas de u, v y w con primeras derivadas parciales continuas, los jacobianos $J(u, v)$ y $J(u, v, w)$ se definen como

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

49. $x = \frac{1}{2}(v - u), \quad y = \frac{1}{2}(v + u)$

50. $x = au + bv, \quad y = cu + dv$

51. $x = \frac{1}{2}(u + v), \quad y = \frac{1}{2}(u - v), \quad z = 2uvw$

52. $x = u - v + w, \quad y = 2uv, \quad z = u + v + w$

53. **Escriba** Compare los varios métodos para calcular el determinante de una matriz. ¿Cuál método requiere menos cantidad de cálculos? ¿Cuál método prefiere cuando la matriz tiene muy pocos ceros?

54. **Escriba** Un operador de computadora cobra \$0.001 (un décimo de centavo) por cada suma y resta, y \$0.003 por cada multiplicación y división. Utilice la tabla en la página 116 para comparar y contrastar los costos de calcular el determinante de una matriz de 10×10 por expansión de cofactores y después por reducción de renglones. ¿Qué método preferiría usar para calcular los determinantes?

55. **Escriba** Resuelva la ecuación para x, si es posible. Explique su resultado.

$$\begin{vmatrix} \cos x & 0 & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & 0 & \cos x \\ \operatorname{sen} x - \cos x & 1 & \operatorname{sen} x + \cos x \end{vmatrix} = 0$$

56. **Demostración** Demuestre que si $|A| = |B| \neq 0$ y A y B son del mismo tamaño, entonces existe una matriz C tal que $|C| = 1$ y $A = CB$.

Encontrar la adjunta de una matriz En los ejercicios 57 y 58, encuentre la adjunta de la matriz.

57. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ **58.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Sistema de ecuaciones lineales En los ejercicios 59 a 62, utilice el determinante de la matriz de coeficientes para hallar cuál de los sistemas lineales tiene una única solución. Si la tiene, use la regla de Cramer para encontrarla.

59. $\begin{aligned} 0.2x - 0.1y &= 0.07 \\ 0.4x - 0.5y &= -0.01 \end{aligned}$ **60.** $\begin{aligned} 2x + y &= 0.3 \\ 3x - y &= -1.3 \end{aligned}$

61. $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 3 \\ 6x_1 + 6x_2 + 12x_3 &= 13 \\ 12x_1 + 9x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$

62. $\begin{aligned} 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 5 \\ 4x_1 - 2x_2 - 8x_3 &= 1 \\ 8x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 6 \end{aligned}$

Uso de la Regla de Cramer En los Ejercicios 63 y 64, utilice una aplicación gráfica o programa de computadora con capacidades matriciales y la Regla de Cramer para resolver (si es posible) el sistema de ecuaciones lineales.

63. $\begin{aligned} 0.2x_1 - 0.6x_2 &= 2.4 \\ -x_1 + 1.4x_2 &= -8.8 \end{aligned}$

64. $\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + x_3 &= -5 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 10 \\ 5x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 1 \end{aligned}$

Encontrar el área de un triángulo En los ejercicios 65 y 66, utilice un determinante para encontrar el área del triángulo con los vértices dados.

65. $(1, 0), (5, 0), (5, 8)$ **66.** $(-4, 0), (4, 0), (0, 6)$

Encontrar una ecuación de una recta En los ejercicios 67 y 68, utilice un determinante para encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados.

67. $(-4, 0), (4, 4)$ **68.** $(2, 5), (6, -1)$

Encontrar una ecuación de un plano En los ejercicios 69 y 70, encuentre la ecuación del plano que pasa por los puntos dados.

69. $(0, 0, 0), (1, 0, 3), (0, 3, 4)$

70. $(0, 0, 0), (2, -1, 1), (-3, 2, 5)$

71. Uso de la Regla de Cramer Determine si la regla de Cramer es usada correctamente para resolver para la variable. Si no, identifique el error.

$$\begin{aligned} x - 4y - z &= -1 \\ 2x - 3y + z &= 6 \\ x + y - 4z &= 1 \end{aligned} \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 6 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}}$$

72. Gastos de cuidados de salud La tabla muestra los gastos personales anuales de cuidados de salud (en miles de millones de dólares) en los Estados Unidos de 2007 a 2009 (fuente: Bureau of Economic Analysis).

Año, t	2007	2008	2009
Cantidad, y	1465	1547	1623

(a) Genere un sistema de ecuaciones lineales para los datos que se ajusten a la curva

$y = at^2 + bt + c$

donde t es el año y $t = 7$ corresponde a 2007 y y es el número de suscriptores.

(b) Utilice la regla de Cramer para resolver su sistema.

(c) Use una aplicación gráfica para graficar los datos y su función de regresión polinomial.

(d) Describa brevemente qué tan bien se ajusta la función polinomial a los datos.

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 73 a 76, determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, proporcione una razón o cite una expresión adecuada del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que muestre que la expresión no es cierta en todos los casos o cite del texto una expresión adecuada.

73. (a) El cofactor C_{22} de una matriz dada siempre es un número positivo.

(b) Si una matriz cuadrada B es obtenida a partir de A por intercambio de dos renglones, entonces $\det(B) = \det(A)$.

(c) Si una columna de una matriz cuadrada es un múltiplo de otra columna, entonces el determinante es 0.

(d) Si A es una matriz cuadrada de orden n, entonces $\det(A) = -\det(A^T)$.

74. (a) Si A y B son matrices cuadradas de orden n tales que $\det(A) = -1$, entonces A y B son no singulares.

(b) Si A es una matriz de 3×3 con $\det(A) = 5$, entonces $\det(2A) = 10$.

(c) Si A y B son matrices cuadradas de orden n, entonces $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

75. (a) En la regla de Cramer, el valor de x_i es el cociente de dos determinantes, donde el numerador es el determinante de la matriz de coeficientes.

(b) Tres puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3) son colineales si el determinante de la matriz que tiene las coordenadas como elementos en las primeras dos columnas y 1 en la tercera es diferente de cero.

76. (a) Si A es una matriz cuadrada, entonces la matriz de cofactores de A se llama adjunta de A.

(b) En la regla de Cramer, el denominador es el determinante de la matriz formada al reemplazar la columna correspondiente a la variable que debe ser resuelta por la columna que representa las constantes.

3 Proyectos

1 Matrices Estocásticas

En la sección 2.5, usted estudió el modelo de preferencia del consumidor para dos compañías de televisión satelital. La matriz que representa las probabilidades de cambio era

$$P = \begin{bmatrix} 0.70 & 0.15 & 0.15 \\ 0.20 & 0.80 & 0.15 \\ 0.10 & 0.05 & 0.70 \end{bmatrix}.$$

Cuando se le proporcionó la matriz X de estado inicial, observó que el número de suscriptores después de un año es el producto PX.

$$X = \begin{bmatrix} 15{,}000 \\ 20{,}000 \\ 65{,}000 \end{bmatrix}$$

$$PX = \begin{bmatrix} 0.70 & 0.15 & 0.15 \\ 0.20 & 0.80 & 0.15 \\ 0.10 & 0.05 & 0.70 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15{,}000 \\ 20{,}000 \\ 65{,}000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23{,}250 \\ 28{,}750 \\ 48{,}000 \end{bmatrix}$$

Después de 10 años, el número de suscriptores estaba cerca de alcanzar un **estado estable**.

$$P^{10}X \approx \begin{bmatrix} 33{,}287 \\ 47{,}147 \\ 19{,}566 \end{bmatrix}$$

Es decir, para valores grandes de n, el producto P^nX se acerca al límite $\overline{X}$, $P\overline{X} = \overline{X}$.

Debido a que $P\overline{X} = \overline{X} = 1\overline{X}$, 1 es un *eigenvalor* de P con el correspondiente *eigenvector* $\overline{X}$. Usted estudiará eigenvalores y eigenvectores con más detalle en el Capítulo 7.

1. Utilice una computadora o una calculadora para demostrar que los eigenvalores y los eigenvectores de P. Es decir, demuestre que $P\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i$ para $i = 1, 2,$ y 3.

Eigenvalores: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0.65,\ \lambda_3 = 0.55$

Eigenvectores: $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. Sea S la matriz cuyas columnas son los eigenvectores de P. Demuestre que $S^{-1}PS$ es una matriz diagonal D. ¿Cuáles son los elementos de la diagonal de D?

3. Demuestre que $P^n = (SDS^{-1}) = SD^nS^{-1}$. Utlice este resultado para calcular $P^{10}X$ y verificar el resultado de la sección 2.5.

2 Teorema de Cayley-Hamilton

El **polinomio característico** de una matriz cuadrada A está dado por el determinante $|\lambda I - A|$. Si el orden de A es n, entonces el polinomio característico $p(\lambda)$ es un polinomio de grado n-ésimo en la variable λ.

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0$$

El teorema de Cayley-Hamilton afirma que toda matriz cuadrada satisface su polinomio característico; es decir, para la matriz A de $n \times n$, $p(A) = O$, o

$$A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_2A^2 + c_1A + c_0I = O.$$

Kurhan/Shutterstock.com

Observe que ésta es una ecuación matricial. El cero de la derecha es la matriz cero de $n \times n$ y el coeficiente c_0 ha sido multiplicado por la matriz identidad I de $n \times n$.

1. Verifique el teorema de Cayley-Hamilton para la matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Verifique el teorema de Cayley-Hamilton para la matriz

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

3. Demuestre el teorema de Cayley-Hamilton para una matriz arbitraria A de 2×2,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

4. Si A es una matriz no singular de $n \times n$, demuestre que

$$A^{-1} = \frac{1}{c_0}(-A^{n-1} - c_{n-1}A^{n-2} - \cdot \cdot \cdot - c_2A - c_1I).$$

Use este resultado para encontrar la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

5. El teorema de Cayley-Hamilton puede utilizarse para calcular potencias A^n de la matriz cuadrada A. Por ejemplo, el polinomio característico de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

es $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 1$.

El teorema de Cayley-Hamilton implica que

$$A^2 - 2A - I = O \quad \text{o} \quad A^2 = 2A + I.$$

Así, A^2 se escribe en términos de A e I.

$$A^2 = 2A + I = 2\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

De manera similar, multiplicando ambos miembros de la ecuación $A^2 = 2A + I$ por A da como resultado A^3 en términos de A^2, A e I. Además, usted puede escribir A^3 sólo en términos de A e I después de reemplazar A^2 con $2A + I$, como sigue.

$$A^3 = 2A^2 + A = 2(2A + I) + A = 5A + 2I$$

(a) Escriba A^4 en términos de A e I.

(b) Encuentre A^5 para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(*Sugerencia:* encuentre el polinomio característico de A, luego utilice el teorema de Cayley-Hamilton para expresar A^3 como una combinación lineal de A^2, A e I. De manera inductiva exprese A^5 como una combinación lineal de A^2, A e I.)

Examen acumulativo de los capítulos 1 a 3

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

Tome este examen para repasar el material de los capítulos 1 a 3. Cuando haya terminado, verifique su trabajo contra las respuestas que se proporcionan al final del libro.

En los ejercicios 1 y 2, determine si la ecuación es lineal en las variables x y y.

1. $\frac{4}{y} - x = 10$

2. $\frac{3}{5}x + \frac{7}{10}y = 2$

En los Ejercicios 3 y 4, utilice la eliminación Gaussiana para resolver el sistema de ecuaciones lineales.

3. $$\begin{aligned} x - 2y &= 5 \\ 3x + y &= 1 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - 3x_3 &= 11 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 9 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -3 \end{aligned}$$

5. Utilice una aplicación gráfica o programa de computadora para resolver el sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned} 0.1x - 2.5y + 1.2z - 0.75w &= 108 \\ 2.4x + 1.5y - 1.8z + 0.25w &= -81 \\ 0.4x - 3.2y + 1.6z - 1.4w &= 148.8 \\ 1.6x + 1.2y - 3.2z + 0.6w &= -143.2 \end{aligned}$$

6. Encuentre el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales representado por la matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

7. Resuelva el sistema lineal homogéneo correspondiente a la siguiente matriz de coeficientes.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ -2 & -4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

8. Determine las condiciones de k para las que el sistema es consistente.

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ -x - y + z &= 2 \\ -x + y + z &= k \end{aligned}$$

9. Resuelva para x y y en la ecuación matricial $2A - B = I$ si

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} x & 2 \\ y & 5 \end{bmatrix}.$$

10. Encuentre A^TA para la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$. Demuestre que este producto es simétrico.

En los ejercicios 11 a 14, encuentre la inversa de la matriz (si existe).

11. $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 15 y 16, utilice una matriz inversa para resolver el sistema de ecuaciones lineales.

15. $$\begin{aligned} x + 2y &= -3 \\ x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

16. $$\begin{aligned} 2x - y &= 6 \\ 2x + y &= 10 \end{aligned}$$

17. Encuentre una secuencia de matrices elementales cuyo producto es la siguiente matriz no singular.

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

18. Encuentre el determinante de la matriz

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

19. Encuentre cada determinante si (a) $|A|$ (b) $|B|$ (c) $|AB|$ (d) $|A^{-1}|$. Después verifique que $|A||B| = |AB|$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

20. Encuentre (a) $|A|$ y (b) $|A^{-1}|$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 6 & -8 & 2 \end{bmatrix}$$

21. Si $|A| = 7$ y A es de orden 4, entonces encuentre cada determinante.

(a) $|3A|$ (b) $|A^T|$ (c) $|A^{-1}|$ (d) $|A^3|$

22. Utilice la adjunta de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

para encontrar A^{-1}.

23. Sean $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ y $\mathbf{b}$ las matrices columna mostradas abajo.

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Encuentre las constantes a, b y c tales que $a\mathbf{x}_1 + b\mathbf{x}_2 + c\mathbf{x}_3 = \mathbf{b}$.

24. Utilice ecuaciones lineales para encontrar la parábola $y = a\mathbf{x}_2 + b\mathbf{x} + c$ que pasa por los puntos (–1, 2), (0, 1) y (2, 6).

25. Utilice un determinante para encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (1, 4) y (5, –2).

26. Utilice un determinante para encontrar el área del triángulo con vértices (3, 1), (7, 1) y (7, 9).

27. Determine las corrientes I_1, I_2 y I_3 para la red eléctrica mostrada en la figura de la izquierda.

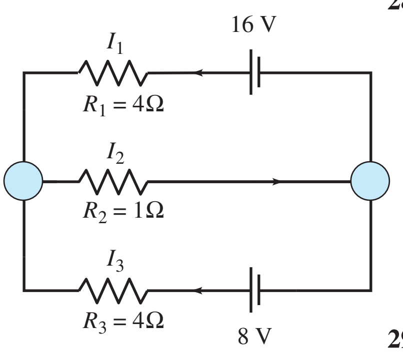


Figura para 27

28. Un fabricante produce tres modelos de un producto que es enviado a dos almacenes. En la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 200 & 300 \\ 600 & 350 \\ 250 & 400 \end{bmatrix}$$

a_{ij} representa el número de unidades del modeo i que el fabricante envía al almacén j.

$$B = \begin{bmatrix} 12.50 & 9.00 & 21.50 \end{bmatrix}$$

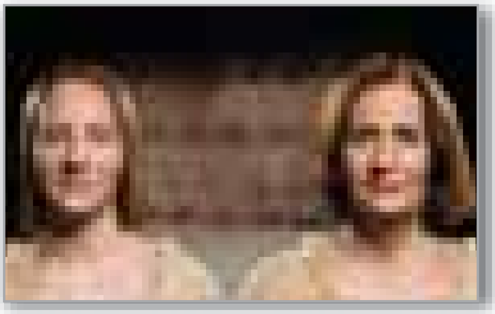
representa los precios de los tres modelos en dólares por unidad. Encuentre el producto BA y declare qué representa cada elemento en la matriz.

29. Sean A, B y C tres matrices de $n \times n$ diferentes de cero tales que $AC = BC$. ¿Esto indica que $A = B$? Demuestre su respuesta.

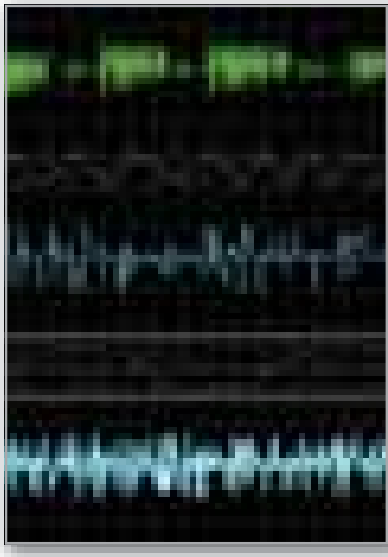
4 Espacios vectoriales

Antena satelital (p. 217)

Cristalografía (p. 207)



Transformación de imágenes (p. 174)



Muestreo digital (p. 166)

Fuerza (p. 151)

En sentido de las manecillas del reloj, desde arriba a la izquierda: Marty Ellis/Shutterstock.com; LVV/Shutterstock.com; Richard Laschon/Shutterstock.com; Anne Kitzman/Shutterstock.com; Kent Mathews/Getty Images

4.1 Vectores en R^n

- Representar un vector como un segmento de recta dirigido.
- Realizar operaciones vectoriales básicas en R^2 y representarlas gráficamente.
- Realizar operaciones vectoriales básicas en R^n.
- Escribir un vector como una combinación lineal de otros vectores.

VECTORES EN EL PLANO

En física e ingeniería, un *vector* es caracterizado por dos cantidades (longitud y sentido) y es representado por un *segmento de recta dirigido*. En este capítulo, usted verá que estos son sólo dos tipos especiales de vectores. Sus representaciones geométricas le ayudarán a comprender la definición más general de un vector.

Un **vector en el plano** se representa geométricamente por un **segmento de recta dirigido** cuyo **punto inicial** es el origen y cuyo **punto terminal** es el punto (x_1, x_2), como se muestra en la figura 4.1.

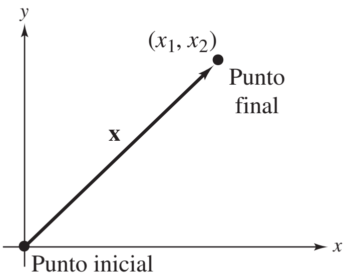


Figura 4.1

COMENTARIO

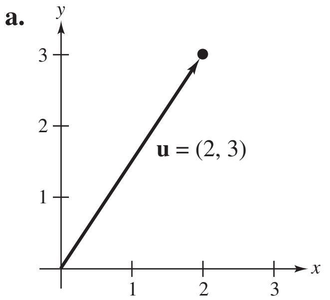
El término *vector* se deriva del latín *vectus*, que quiere decir "llevar o transportar". La idea es que si usted quiere llevar algo desde el origen hasta el punto (x_1, x_2), el viaje puede representarse por el segmento de recta dirigido de (0, 0) a (x_1, x_2). Los vectores se representan con letras minúsculas negritas (como **u**, **v**, **w** y **x**).

Este vector se representa por el mismo **par ordenado** usado para representar su punto terminal. Es decir, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Las coordenadas x_1 y x_2 se denominan **componentes** del vector **x**. Dos vectores en el plano $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ son **iguales** si y sólo si $u_1 = v_1$ y $u_2 = v_2$.

EJEMPLO 1 **Vectores en el plano**

a. Use un segmento de recta dirigido para representar los siguientes vectores en el plano. (a) $\mathbf{u} = (2, 3)$ (b) $\mathbf{v} = (–1, 2)$

b. Para representar $\mathbf{v} = (–1, 2)$, dibuje un segmento desde el origen del punto (–1, 2), como se muestra en la figura 4.2(b).



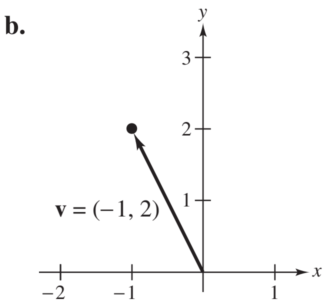


Figura 4.2

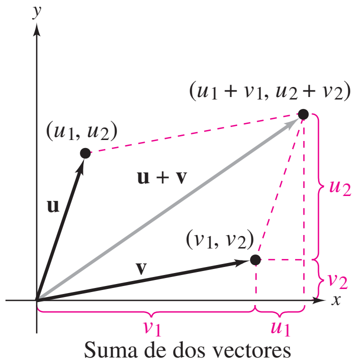


Figura 4.3

OPERACIONES VECTORIALES

La primera operación vectorial básica es la **suma vectorial**. Para sumar dos vectores en el plano se suman sus componentes correspondientes. Es decir, la **suma** de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es el vector definido por

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2).$$

Geométricamente, la suma de dos vectores en el plano puede representarse como la diagonal de un paralelogramo que tiene a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ como sus lados adyacentes, como se muestra en la figura 4.3.

En el siguiente ejemplo, uno de los vectores que usted puede sumar es el vector (0, 0), llamado **vector cero** o **nulo**. Este vector se denota con $\mathbf{0}$.

EJEMPLO 2 Suma de dos vectores en el plano

Determine la suma de los vectores.

a. $\mathbf{u} = (1, 4)$, $\mathbf{v} = (2, -2)$

b. $\mathbf{u} = (3, -2)$, $\mathbf{v} = (-3, 2)$

c. $\mathbf{u} = (2, 1)$, $\mathbf{v} = (0, 0)$

Simulación

Explore este concepto aún más con una simulación electrónica disponible en el sitio web college. cengage.com/pic/larsonELA6e. Visite por favor este sitio para comandos y sintaxis de programación para aplicaciones gráficas específicas y programas de computadora aplicables al ejemplo 2. Ejercicios proyectos y similares también están disponibles en este sitio web.

SOLUCIÓN

a. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (1, 4) + (2, -2) = (3, 2)$

b. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (3, -2) + (-3, 2) = (0, 0) = \mathbf{0}$

c. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (2, 1) + (0, 0) = (2, 1)$

La figura 4.4 muestra la representación gráfica de cada suma.

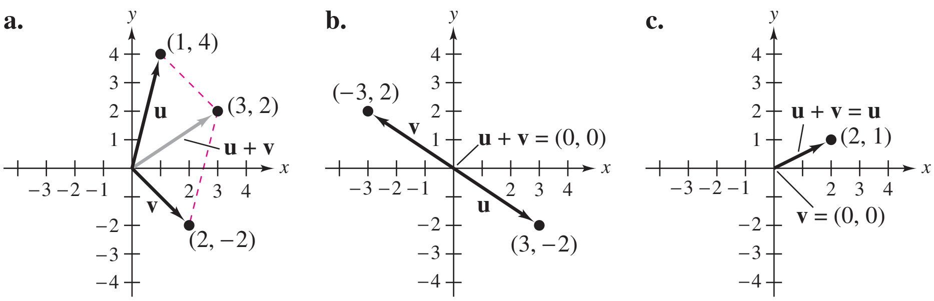


Figura 4.4

La segunda operación vectorial fundamental se denomina **multiplicación escalar**. Para multiplicar un vector $\mathbf{v}$ por un escalar c, cada una de las componentes de $\mathbf{v}$ se multiplica por c. Es decir,

$$c\mathbf{v} = c(v_1, v_2) = (cv_1, cv_2).$$

Recuerde del capítulo 2 que el término *escalar* se utiliza para denotar un número real. Históricamente, este uso surgió del hecho de que al multiplicar un vector por un número real se modifica la "escala" del vector. Por ejemplo, si el vector $\mathbf{v}$ se multiplica por 2, entonces el vector resultante $2\mathbf{v}$ es un vector que tiene la misma dirección que $\mathbf{v}$ y dos veces su longitud. En general, para un escalar c, el vector $c\mathbf{v}$ es c veces más grande que $\mathbf{v}$. además, si c es positivo, entonces $c\mathbf{v}$ tiene la misma dirección que $\mathbf{v}$, y si c es negativo, entonces $c\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}$ tienen direcciones opuestas. Lo anterior se muestra en la figura 4.5.

El producto de un vector $\mathbf{v}$ por el escalar –1 se denota por

$$-\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v}.$$

El vector – $\mathbf{v}$ se denomina **negativo** de $\mathbf{v}$. La **diferencia** de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se define como

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$$

y se dice que $\mathbf{v}$ se ha **restado** de $\mathbf{u}$.

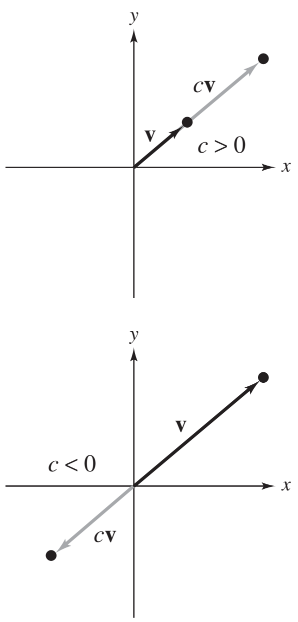


Figura 4.5

EJEMPLO 3 Operaciones con vectores en el plano

Dados **v** = (–2, 5) y **u** = (3, 4), encuentre los siguientes vectores

a. $\frac{1}{2}\mathbf{v}$ **b.** $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ **c.** $\frac{1}{2}\mathbf{v} + \mathbf{u}$

SOLUCIÓN

a. Como $\mathbf{v} = (-2, 5)$, $\frac{1}{2}\mathbf{v} = \left(\frac{1}{2}(-2), \frac{1}{2}(5)\right) = \left(-1, \frac{5}{2}\right)$.

b. Por la definición de resta vectorial, se tiene, $\mathbf{u} - \mathbf{v} = (3 - (-2), 4 - 5) = (5, -1)$.

c. Utilizando el resultado del inciso (a), $\frac{1}{2}\mathbf{v} + \mathbf{u} = \left(-1, \frac{5}{2}\right) + (3, 4) = \left(2, \frac{13}{2}\right)$.

La figura 4.6 muestra la representación geométrica de estas opraciones vectoriales.

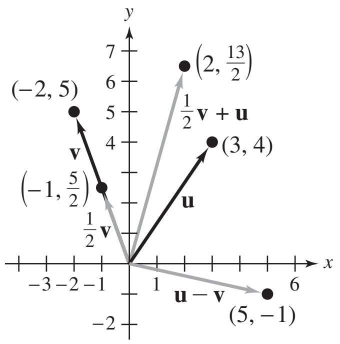


Figura 4.6

La suma vectorial y la multiplicación escalar comparten muchas propiedades con la suma de matrices y la multiplicación por un escalar. Las 10 propiedades enumeradas en el siguiente teorema desempeñan un papel fundamental en álgebra lineal. De hecho, en la siguiente sección se verá que son precisamente estas 10 propiedades las elegidas para abstraerse de los vectores en el plano para definir el concepto general de espacio vectorial.

TEOREMA 4.1 Propiedades de la suma vectorial y de la multiplicación escalar en el plano

Sean **u**, **v** y **w** vectores en el plano, y sean c y d escalares.

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ es un vector en el plano. — Cerradura bajo la adición
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ — Propiedad conmutativa de la adición
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ — Propiedad asociativa de la adición
4. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ — Propiedad del idéntico aditivo
5. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ — Propiedad del inverso aditivo
6. $c\mathbf{u}$ es un vector en el plano. — Cerradura bajo la multiplicación escalar
7. $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$ — Propiedad distributiva
8. $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$ — Propiedad distributiva
9. $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$ — Propiedad asociativa de la multiplicación
10. $1(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ — Propiedad del idéntico multiplicativo

COMENTARIO

Observe que la propiedad asociativa de la suma vectorial permite escribir sin ambigüedad expresiones como **u** + **v** + **w** porque se obtiene el mismo resultado sin importar cuál suma se efectúe primero.

DEMOSTRACIÓN

La demostración de cada propiedad es una aplicación directa. Por ejemplo, para demostrar la propiedad asociativa de la suma vectorial puede escribir

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} &= [(u_1, u_2) + (v_1, v_2)] + (w_1, w_2)\\ &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2) + (w_1, w_2)\\ &= ((u_1 + v_1) + w_1, (u_2 + v_2) + w_2)\\ &= (u_1 + (v_1 + w_1), u_2 + (v_2 + w_2))\\ &= (u_1, u_2) + (v_1 + w_1, v_2 + w_2)\\ &= \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}).\end{aligned}$$

De manera semejante, para demostrar la propiedad distributiva de la multiplicación escalar sobre la adición puede escribir.

$$\begin{aligned}(c + d)\mathbf{u} &= (c + d)(u_1, u_2)\\ &= ((c + d)u_1, (c + d)u_2)\\ &= (cu_1 + du_1, cu_2 + du_2)\\ &= (cu_1, cu_2) + (du_1, du_2)\\ &= c\mathbf{u} + d\mathbf{u}.\end{aligned}$$

Las demostraciones de las otras ocho propiedades se dejan como ejercicio. (Véase el ejercicio 57.)

VECTORES EN R^n

El análisis de los vectores en el plano puede extenderse al análisis de vectores en el espacio n-dimensional. Un vector en el espacio-n se representa por una **n-ada ordenada**. Por ejemplo, una tercia ordenada es de la forma (x_1, x_2, x_3), una cuádrupla ordenada tiene la forma (x_1, x_2, x_3, x_4) y una n-ada ordenada general es de la forma $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$. El conjunto de todas la n-adas se denomina **espacio n-dimensional** y se denota por R^n.

R^1 = espacio 1-dimensional = conjunto de todos los números reales

R^2 = espacio 2-dimensional = conjunto de todos los pares ordenados de números reales

R^3 = espacio 3-dimensional = conjunto de todas las tercias ordenadas de números reales

⋮

R^n = espacio n-dimensional = conjunto de todas la n-adas ordenadas de números reales

Una n-ada $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ puede ser vista como un **punto** en R^n con los x_1 como sus coordenadas o como un **vector**

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \qquad \text{Vector en } R^n$$

con los x_1 como sus componentes. Como con los vectores en el plano (o R^2), dos vectores en R^n son **iguales** si y sólo si los componentes correspondientes son iguales. [En el caso de $n = 2$ o $n = 3$, la notación familiar (x, y) o (x, y, z) se usa ocasionalmente.]

A continuación se definen la suma de dos vectores en R^n y el múltiplo escalar de un vector en R^n. Estas operaciones se denominan **operaciones estandar en R^n**.

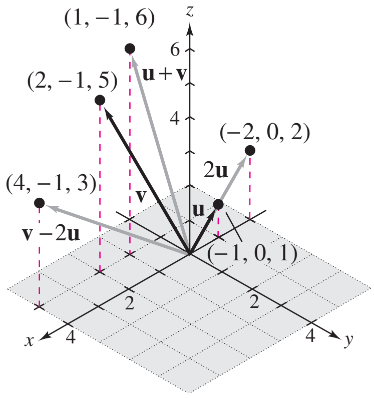


Figura 4.7

Definición de suma vectorial y multiplicación escalar en R^n

Sean $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n)$ vectores en R^n y sea c un número real. Entonces la suma de **u** y **v** se define como el vector

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, \ldots, u_n + v_n)$$

y el **múltiplo escalar** de **u** por c se define como el vector

$$c\mathbf{u} = (cu_1, cu_2, cu_3, \ldots, cu_n).$$

Así como el espacio bidimensional, el **negativo** de un vector en R^n se define como

$$-\mathbf{u} = (-u_1, -u_2, -u_3, \ldots, -u_n)$$

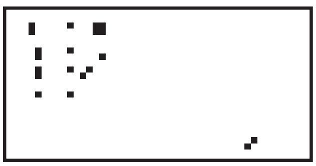
y la **diferencia** de dos vectores en R^n se define como

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3, \ldots, u_n - v_n).$$

El **vector cero** en r^n se denota por $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

NOTA TECNOLÓGICA

Algunas aplicaciones gráficas y programas de cómputo pueden ejecutar la suma vectorial y la multiplicación escalar. Utilice una aplicación gráfica para verificar el ejemplo 4. Los comandos y la sintaxis de programación para estas aplicaciones/programas se proporcionan en la Online Technology Guide disponible en college.cengage.com/pic/larsonELA6e.



EJEMPLO 4 Operaciones vectoriales en R^3

Dados $\mathbf{u} = (-1, 0, 1)$ y $\mathbf{v} = (2, -1, 5)$ en r^3, encuentre los siguientes vectores

a. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ **b.** $2\mathbf{u}$ **c.** $\mathbf{v} - 2\mathbf{u}$

SOLUCIÓN

a. Para sumar dos vectores, se suman sus componentes correspondientes como se muestra a continuación.

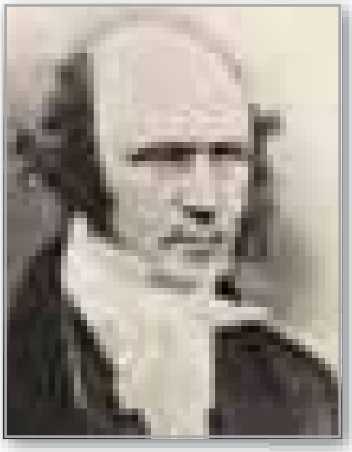
$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (-1, 0, 1) + (2, -1, 5) = (1, -1, 6)$$

b. Para multiplicar un vector por un escalar, cada una de sus componentes se multiplica por el escalar, como sigue:

$$2\mathbf{u} = 2(-1, 0, 1) = (-2, 0, 2)$$

c. Con el resultado del inciso (b), se obtiene $\mathbf{v} - 2\mathbf{u} = (2, -1, 5) - (-2, 0, 2) = (4, -1, 3)$.

En la figura 4.7 se muestran gráficamente estas operaciones vectoriales en R^3.



William Rowan Hamilton (1805-1865)

Considerado el matemático irlandés más importante. En 1828 publicó un sorprendente trabajo de óptica titulado *Una teoría de sistemas de rayos*. En él, Hamilton incluyó algunos de sus propios métodos para trabajar con sistemas de ecuaciones lineales. También introdujo la noción de la ecuación característica de una matriz (véase la Sección 7.1). El trabajo de Hamilton condujo al desarrollo de la notación vectorial moderna. Hoy en día aún utilizamos su notación **i, j** y **k** para los vectores unidad estándar en R^3 (véase la Sección 5.1).

Las siguientes propiedades de la suma vectorial y la multiplicación escalar para vectores en R^n son las mismas que las enumeradas en el teorema 4.1 para vectores en el plano. Sus demostraciones, basadas en las definiciones de suma vectorial y multiplicación escalar en R^n, se dejan como ejercicio. (Véase el ejercicio 58.)

TEOREMA 4.2 Propiedades de la suma vectorial y de la multiplicación escalar en R^n

Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ vectores en R^n, y sean c y d escalares.

1. $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ es un vector en R^n.	Cerradura bajo la suma
2. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$	Propiedad conmutativa de la suma
3. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$	Propiedad asociativa de la suma
4. $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u}$	Propiedad del idéntico aditivo
5. $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$	Propiedad del inverso aditivo
6. $c\mathbf{u}$ is a vector in R^n.	Cerradura bajo la multiplicación por un escalar
7. $c(\mathbf{u}+\mathbf{v})=c\mathbf{u}+c\mathbf{v}$	Propiedad distributiva
8. $(c+d)\mathbf{u}=c\mathbf{u}+d\mathbf{u}$	Propiedad distributiva
9. $c(d\mathbf{u})=(cd)\mathbf{u}$	Propiedad asociativa de la multiplicación
10. $1(\mathbf{u})=\mathbf{u}$	Propiedad del idéntico multiplicativo

Aplicando las 10 propiedades dadas en el teorema 4.2 usted puede realizar manipulaciones algebraicas con vectores en R^n casi de la misma manera en que se hace con números reales, como se demuestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 Operaciones vectoriales en R^4

Sean $\mathbf{u}=(2, -1, 5, 0)$, $\mathbf{v}=(4, 3, 1, -1)$ y $\mathbf{w}=(-6, 2, 0, 3)$ vectores en R^4. Encuentre el valor de $\mathbf{x}$.

a. $\mathbf{x}=2\mathbf{u}-(\mathbf{v}+3\mathbf{w})$

b. $3(\mathbf{x}+\mathbf{w})=2\mathbf{u}-\mathbf{v}+\mathbf{x}$

SOLUCIÓN

a. Con las propiedades enumeradas en el teorema 4.2 se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{x}&=2\mathbf{u}-(\mathbf{v}+3\mathbf{w})\\&=2\mathbf{u}-\mathbf{v}-3\mathbf{w}\\&=2(2,-1,5,0)-(4,3,1,-1)-3(-6,2,0,3)\\&=(4,-2,10,0)-(4,3,1,-1)-(-18,6,0,9)\\&=(4-4+18,-2-3-6,10-1-0,0+1-9)\\&=(18,-11,9,-8).\end{aligned}$$

b. Se empieza por despejar $\mathbf{x}$ como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned}3(\mathbf{x}+\mathbf{w})&=2\mathbf{u}-\mathbf{v}+\mathbf{x}\\3\mathbf{x}+3\mathbf{w}&=2\mathbf{u}-\mathbf{v}+\mathbf{x}\\3\mathbf{x}-\mathbf{x}&=2\mathbf{u}-\mathbf{v}-3\mathbf{w}\\2\mathbf{x}&=2\mathbf{u}-\mathbf{v}-3\mathbf{w}\\\mathbf{x}&=\tfrac{1}{2}(2\mathbf{u}-\mathbf{v}-3\mathbf{w})\end{aligned}$$

Utilizando el resultado del inciso (a) produce

$$\begin{aligned}\mathbf{x}&=\tfrac{1}{2}(18,-11,9,-8)\\&=\left(9,-\tfrac{11}{2},\tfrac{9}{2},-4\right).\end{aligned}$$

El vector cero $\mathbf{0}$ en R^n se denomina **idéntico aditivo** en R^n. De manera semejante, el vector $-\mathbf{v}$ se denomina **inverso aditivo** de $\mathbf{v}$. En el siguiente teorema se resumen varias propiedades importantes del idéntico aditivo y del inverso aditivo en R^n.

TEOREMA 4.3 Propiedades del idéntico aditivo y del inverso aditivo

Sea $\mathbf{v}$ un vector en R^n y sea c un escalar. Entonces las siguientes propiedades se cumplen.

1. El idéntico aditivo es único. Es decir, si $\mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{v}$, entonces $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
2. El inverso aditivo de $\mathbf{v}$ es único. Es decir, si $\mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{u} = -\mathbf{v}$.
3. $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$
4. $c\mathbf{0} = \mathbf{0}$
5. Si $c\mathbf{v} = \mathbf{0}$, entonces $c = 0$ o $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
6. $-(-\mathbf{v}) = \mathbf{v}$

COMENTARIO

En las propiedades 3 y 5 del teorema 4.3 observe que se utilizan dos ceros diferentes: el escalar 0 y el vector 0.

DEMOSTRACIÓN

Para demostrar la primera propiedad se supone que $\mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{v}$. Entonces los pasos siguientes se justifican por el teorema 4.2.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} + \mathbf{u} &= \mathbf{v} && \text{Dado} \\
(\mathbf{v} + \mathbf{u}) + (-\mathbf{v}) &= \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) && \text{Sumar } -\mathbf{v} \text{ a ambos lados} \\
(\mathbf{v} + \mathbf{u}) + (-\mathbf{v}) &= \mathbf{0} && \text{Inverso aditivo} \\
(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + (-\mathbf{v}) &= \mathbf{0} && \text{Propiedad conmutativa} \\
\mathbf{u} + (\mathbf{v} + (-\mathbf{v})) &= \mathbf{0} && \text{Propiedad asociativa} \\
\mathbf{u} + \mathbf{0} &= \mathbf{0} && \text{Inverso aditivo} \\
\mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{Identidad aditiva}
\end{aligned}
$$

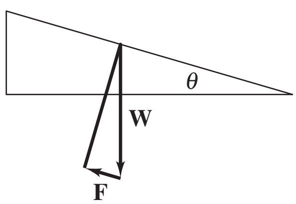
Para demostrar la segunda propiedad, asuma $\mathbf{v} + \mathbf{u} = 0$, y de nuevo utilice el Teorema 4.2 para justificar los siguientes pasos.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} + \mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{Dada} \\
(-\mathbf{v}) + (\mathbf{v} + \mathbf{u}) &= (-\mathbf{v}) + \mathbf{0} && \text{Añadir } -\mathbf{v} \text{ a ambos lados.} \\
(-\mathbf{v}) + (\mathbf{v} + \mathbf{u}) &= -\mathbf{v} && \text{Identidad aditiva} \\
[(-\mathbf{v}) + \mathbf{v}] + \mathbf{u} &= -\mathbf{v} && \text{Propiedad asociativa} \\
\mathbf{0} + \mathbf{u} &= -\mathbf{v} && \text{Inverso aditivo} \\
\mathbf{u} + \mathbf{0} &= -\mathbf{v} && \text{Propiedad conmutativa} \\
\mathbf{u} &= -\mathbf{v} && \text{Identidad aditiva}
\end{aligned}
$$

A medida que adquiere experiencia en la lectura y escritura de demostraciones que implican álgebra vectorial ya no es necesario escribir tantos pasos. Por ahora, sin embargo, es una buena idea hacerlo. Las demostraciones de las otras cinco propiedades se dejan como ejercicio. (Véanse los ejercicios 61–64.)

ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

Los vectores tienen una amplia variedad de aplicaciones en ingeniería y las ciencias físicas. Por ejemplo, para determinar la cantidad de fuerza requerida para empujar un objeto hacia arriba en una rampa que tiene un ángulo de elevación θ, utilice la figura de la derecha.



En la figura, el vector etiquetado como **W** representa el peso del objeto, y el vector etiquetado como **F** representa la fuerza requerida. Utilizando triángulos similares y algo de trigonometría, la fuerza requerida es $\mathbf{F} = \mathbf{W} \operatorname{sen} \theta$. Intente verificar esto.

Anne Kitzman/www.shutterstock.com

COMBINACIONES LINEALES DE VECTORES

El siguiente ejemplo ilustra un tipo de problema importante del álgebra lineal: la escritura de un vector $\mathbf{x}$ como la suma de múltiplos escalares de otros vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots$, y $\mathbf{v}_n$. Es decir, para los escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n.$$

El vector $\mathbf{x}$ se denomina **combinación lineal** de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots$ y $\mathbf{v}_n$.

DESCUBRIMIENTO

1. ¿El vector (1,1) es una combinación lineal de los vectores (1, 2) y (– 2, –4)? Grafique estos vectores en el plano y explique su respuesta geométricamente.
2. De manera similar, determine si el vector (1,1) es una combinación lineal de los vectores (1, 2) y (2,1).
3. ¿Cuál es el significado geométrico de estas dos preguntas?
4. ¿Cada vector en R^2 es una combinación lineal de los vectores (1, 2) y (2,1)? Dé una explicación geométrica de su respuesta.

EJEMPLO 6 Escritura de un vector como una combinación lineal de otros vectores

Dados $\mathbf{x} = (-1, -2, -2)$, $\mathbf{u} = (0, 1, 4)$, $\mathbf{v} = (-1, 1, 2)$ y $\mathbf{w} = (3, 1, 2)$ en r^3, encuentre escalares *a, b* y *c* tales que

$$\mathbf{x} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w}.$$

SOLUCIÓN

Escriba

$$\begin{aligned}\overbrace{(-1, -2, -2)}^{\mathbf{x}} &= a\overbrace{(0, 1, 4)}^{\mathbf{u}} + b\overbrace{(-1, 1, 2)}^{\mathbf{v}} + c\overbrace{(3, 1, 2)}^{\mathbf{w}}\\ &= (-b + 3c, a + b + c, 4a + 2b + 2c)\end{aligned}$$

e iguale las componentes correspondientes de modo que formen el siguiente sistema de tres ecuaciones lineales *a, b* y *c*.

$$\begin{aligned}-b + 3c &= -1 &&\text{Ecuación de la primera componente}\\ a + b + c &= -2 &&\text{Ecuación de la segunda componente}\\ 4a + 2b + 2c &= -2 &&\text{Ecuación de la tercera componente}\end{aligned}$$

Resuelva para *a*, *b* y *c* para obtener $a = 1$, $b = -2$ y $c = -1$. Como una combinación lineal de $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} - 2\mathbf{v} - \mathbf{w}.$$

Intente aplicar la suma vectorial y multiplicación escalar para verificar el resultado.

A menudo es útil representar un vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ en R^n ya sea como una matriz renglón de $1 \times n$ (vector renglón) o como una matriz columna de $n \times 1$ (vector columna). Este planteamiento es válido, ya que las operaciones matriciales de suma y multiplicación por un escalar dan los mismos resultados que las operaciones vectoriales correspondientes. Es decir, las sumas matriciales

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n] + [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n]\\ &= [u_1 + v_1 \quad u_2 + v_2 \quad \cdots \quad u_n + v_n]\end{aligned}$$

y

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}$$

producen el mismo resultado que la operación suma vectorial

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n)\\ &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n).\end{aligned}$$

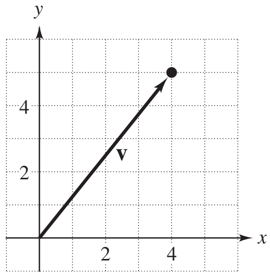
El mismo argumento se aplica a la multiplicación escalar; la única diferencia en las tres notaciones vectoriales es cómo se despliegan las tres componentes.

4.1 Ejercicios

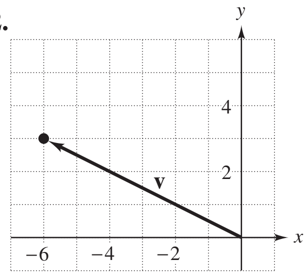
Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

Determinación de la forma componente de un vector En los ejercicios 1 y 2 determine la forma en componentes del vector mostrado.

1.



2.



Representación de un vector En los ejercicios 3 a 6, utilice un segmento de recta dirigido para representar al vector.

3. $\mathbf{u} = (2, -4)$ **4.** $\mathbf{v} = (-2, 3)$

5. $\mathbf{u} = (-3, -4)$ **6.** $\mathbf{v} = (-2, -5)$

Determinación de la suma de dos vectores En los ejercicios 7 a 10, encuentre la suma de los vectores e ilustre geométricamente la operación vectorial indicada.

7. $\mathbf{u} = (1, 3)$, $\mathbf{v} = (2, -2)$ **8.** $\mathbf{u} = (-1, 4)$, $\mathbf{v} = (4, -3)$

9. $\mathbf{u} = (2, -3)$, $\mathbf{v} = (-3, -1)$

10. $\mathbf{u} = (4, -2)$, $\mathbf{v} = (-2, -3)$

Operaciones vectoriales En los ejercicios 11 a 16, encuentre el vector v e ilustre geométricamente las operaciones vectoriales indicadas, donde $\mathbf{u} = (-2, 3)$ y $\mathbf{w} = (-3, -2)$.

11. $\mathbf{v} = \frac{3}{2}\mathbf{u}$ **12.** $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$

13. $\mathbf{v} = \mathbf{u} + 2\mathbf{w}$ **14.** $\mathbf{v} = -\mathbf{u} + \mathbf{w}$

15. $\mathbf{v} = \frac{1}{2}(3\mathbf{u} + \mathbf{w})$ **16.** $\mathbf{v} = \mathbf{u} - 2\mathbf{w}$

17. Dado el vector $\mathbf{v} = (2, 1)$, trace (a) $2\mathbf{v}$, (b) $-3\mathbf{v}$ y (c) $-\frac{1}{2}\mathbf{v}$.

18. Dado el vector $\mathbf{v} = (3, -2)$, trace (a) $4\mathbf{v}$, (b) $-\frac{1}{2}\mathbf{v}$ y (c) $0\mathbf{v}$.

Operaciones vectoriales En los ejercicios 19–24, sean $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v} = (2, 2, -1)$ y $\mathbf{w} = (4, 0, -4)$

19. Encuentre $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ y $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ **20.** Encuentre $\mathbf{u} - \mathbf{v} + 2\mathbf{w}$.

21. Encuentre $2\mathbf{u} + 4\mathbf{v} - \mathbf{w}$. **22.** Encuentre $5\mathbf{u} - 3\mathbf{v} - \frac{1}{2}\mathbf{w}$.

23. Encuentre $\mathbf{z}$, donde $2\mathbf{z} - 3\mathbf{u} = \mathbf{w}$

24. Encuentre $\mathbf{z}$, donde $2\mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{w} + 3\mathbf{z} = \mathbf{0}$.

25. Dado el vector $\mathbf{v} = (1, 2, 2)$, trace (a) $2\mathbf{v}$, (b) $-\mathbf{v}$ y (c) $\frac{1}{2}\mathbf{v}$.

26. Dado el vector $\mathbf{v} = (2, 0, 1)$, trace (a) $-\mathbf{v}$, (b) $2\mathbf{v}$ y (c) $\frac{1}{2}\mathbf{v}$.

27. ¿Cuál(es) de los siguientes vectores es (son) múltiplo(s) escalar(es) de $\mathbf{z} = (3, 2, -5)$?

(a) $\mathbf{v} = \left(2, \frac{4}{3}, -\frac{10}{3}\right)$ (b) $\mathbf{w} = (6, 4, 10)$

28. ¿Cuál(es) de los siguientes vectores es(son) múltiplo(s) escalar(es)?

$\mathbf{z} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right)$?

(a) $\mathbf{u} = (6, -4, 9)$

(b) $\mathbf{v} = \left(-1, \frac{4}{3}, -\frac{3}{2}\right)$

Operaciones vectoriales En los ejercicios 29 y 30, encuentre (a) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, (b) $2(\mathbf{u} + 3\mathbf{v})$ y (c) $2\mathbf{v} - \mathbf{u}$.

29. $\mathbf{u} = (4, 0, -3, 5)$, $\mathbf{v} = (0, 2, 5, 4)$

30. $\mathbf{u} = (0, 4, 3, 4, 4)$, $\mathbf{v} = (6, 8, -3, 3, -5)$

Operaciones vectoriales En los ejercicios 31 y 32, utilice una aplicación gráfica con capacidad matricial para hallar lo siguiente, donde $\mathbf{u} = (1, 2, -3, 1)$, $\mathbf{v} = (0, 2, -1, -2)$ y $\mathbf{w} = (2, -2, 1, 3)$.

31. (a) $\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$ **32.** (a) $\mathbf{v} + 3\mathbf{w}$

(b) $\mathbf{w} - 3\mathbf{u}$ (b) $2\mathbf{w} - \frac{1}{2}\mathbf{u}$

(c) $4\mathbf{v} + \frac{1}{2}\mathbf{u} - \mathbf{w}$ (c) $\frac{1}{2}(4\mathbf{v} - 3\mathbf{u} + \mathbf{w})$

Solución de una ecuación vectorial En los ejercicios 33 a 36, encuentre el valor de $\mathbf{w}$ dado que $\mathbf{u} = (1, -1, 0, 1)$ y $\mathbf{v} = (0, 2, 3, -1)$.

33. $2\mathbf{w} = \mathbf{u} - 3\mathbf{v}$ **34.** $\mathbf{w} + \mathbf{u} = -\mathbf{v}$

35. $\frac{1}{2}\mathbf{w} = 2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$ **36.** $\mathbf{w} + 3\mathbf{v} = -2\mathbf{u}$

Solución de una ecuación vectorial En los ejercicios 37 y 38, determine $\mathbf{w}$ tal que $2\mathbf{u} + \mathbf{v} - 3\mathbf{w} = \mathbf{0}$.

37. $\mathbf{u} = (0, 2, 7, 5)$, $\mathbf{v} = (-3, 1, 4, -8)$

38. $\mathbf{u} = (0, 0, -8, 1)$, $\mathbf{v} = (1, -8, 0, 7)$

Escribir una combinación lineal En los ejercicios 39 a 44, escriba $\mathbf{v}$ como una combinación lineal de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{w}$, en caso de ser posible donde $\mathbf{u} = (1, 2)$ y $\mathbf{w} = (1, -1)$.

39. $\mathbf{v} = (2, 1)$ **40.** $\mathbf{v} = (0, 3)$

41. $\mathbf{v} = (3, 0)$ **42.** $\mathbf{v} = (1, -1)$

43. $\mathbf{v} = (-1, -2)$ **44.** $\mathbf{v} = (1, -4)$

Escribir una combinación lineal En los ejercicios 45 a 48, escriba v como una combinación lineal de $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ y $\mathbf{u}_3$ en caso de ser posible .

45. $\mathbf{v} = (10, 1, 4)$, $\mathbf{u}_1 = (2, 3, 5)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 2, 4)$, $\mathbf{u}_3 = (-2, 2, 3)$

46. $\mathbf{v} = (-1, 7, 2)$, $\mathbf{u}_1 = (1, 3, 5)$, $\mathbf{u}_2 = (2, -1, 3)$, $\mathbf{u}_3 = (-3, 2, -4)$

47. $\mathbf{v} = (0, 5, 3, 0)$, $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 2, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 3, 5, 6)$, $\mathbf{u}_3 = (-3, 1, -4, 2)$

48. $\mathbf{v} = (2, 5, -4, 0)$, $\mathbf{u}_1 = (1, 3, 2, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (2, -2, -5, 4)$, $\mathbf{u}_3 = (2, -1, 3, 6)$

Escribir una combinación lineal En los ejercicios 49 y 50, utilice una aplicación gráfica o un programa de cómputo con capacidad matricial para escribir v como una combinación lineal de $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_4$ y $\mathbf{u}_5$. Después verifique su solución.

49. $\mathbf{v} = (5, 3, -11, 11, 9)$
$\mathbf{u}_1 = (1, 2, -3, 4, -1)$
$\mathbf{u}_2 = (1, 2, 0, 2, 1)$
$\mathbf{u}_3 = (0, 1, 1, 1, -4)$
$\mathbf{u}_4 = (2, 1, -1, 2, 1)$
$\mathbf{u}_5 = (0, 2, 2, -1, -1)$

50. $\mathbf{v} = (5, 8, 7, -2, 4)$
$\mathbf{u}_1 = (1, 1, -1, 2, 1)$
$\mathbf{u}_2 = (2, 1, 2, -1, 1)$
$\mathbf{u}_3 = (1, 2, 0, 1, 2)$
$\mathbf{u}_4 = (0, 2, 0, 1, -4)$
$\mathbf{u}_5 = (1, 1, 2, -1, 2)$

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 51 y 52, determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, proporcione una razón o cite una expresión adecuada del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que muestre que la expresión no es cierta en todos los casos o cite del texto una expresión adecuada.

51. (a) Dos vectores en R^n son iguales si y sólo si sus componentes correspondientes son iguales.
(b) El vector $-\mathbf{v}$ se llama la identidad aditiva del vector $\mathbf{v}$.

52. (a) Para sumar dos vectores en R^n, se suman sus componentes correspondientes.
(b) El vector **cero** en R^n está definido como el inverso aditivo de un vector.

Escribiendo una combinación lineal En los ejercicios 53 y 54, el vector cero $0 = (0, 0, 0)$ puede expresarse como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, y $\mathbf{v}_3$ como $\mathbf{0} = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3$. Lo anterior se denomina solución *trivial*. ¿Puede encontrar una manera *no trivial* de expresar 0 como una combinación lineal de los tres vectores dados?

53. $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 1, 2)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 4)$

54. $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 1, 2)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 1, 3)$

55. Ilustre las propiedades 1 a 10 del teorema 4.2 para $\mathbf{u} = (2, -1, 3, 6)$, $\mathbf{v} = (1, 4, 0, 1)$, $\mathbf{w} = (3, 0, 2, 0)$, $c = 5$, y $d = -2$.

56. Ilustre las 10 propiedades del teorema 4.2 para $\mathbf{u} = (2, -1, 3)$, $\mathbf{v} = (3, 4, 0)$, $\mathbf{w} = (7, 8, -4)$, $c = 2$, y $d = -1$.

57. **Prueba** Complete la demostración del teorema 4.1.

58. **Prueba** Demuestre cada una de las propiedades de la suma de vectores y la multiplicación escalar del teorema 4.2.

59. **Escriba** Sea $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ un sistema de m ecuaciones lineales con n variables. Designe las columnas de A como $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. Si $\mathbf{b}$ es una combinación lineal de estos n vectores columna, explique por qué esto implica que el sistema lineal es consistente. Ilustre su respuesta con ejemplos apropiados. ¿Qué puede concluir acerca del sistema lineal si $\mathbf{b}$ no es una combinación lineal de las columnas de A?

60. REMATE Considere los vectores $\mathbf{u} = (3, -4)$ y $\mathrm{v} = (9, 1)$.
(a) Utilice segmentos de recta dirigidos para representar gráficamente cada vector.
(b) Encuentre $\mathbf{u} + \mathbf{v}$.
(c) Encuentre $2\mathbf{v} - \mathbf{u}$.
(d) Escriba $\mathbf{w} = (39, 0)$ como una combinación lineal de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

Prueba En los ejercicios 61 a 64, complete las demostraciones de las demás propiedades del teorema 4.3, suministrando una justificación para cada paso. Use las propiedades de la suma de vectores y la multiplicación escalar del teorema 4.2.

61. Propiedad 3: $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$

$0\mathbf{v} = (0 + 0)\mathbf{v}$	a.	______
$0\mathbf{v} = 0\mathbf{v} + 0\mathbf{v}$	b.	______
$0\mathbf{v} + (-0\mathbf{v}) = (0\mathbf{v} + 0\mathbf{v}) + (-0\mathbf{v})$	c.	______
$\mathbf{0} = 0\mathbf{v} + (0\mathbf{v} + (-0\mathbf{v}))$	d.	______
$\mathbf{0} = 0\mathbf{v} + \mathbf{0}$	e.	______
$\mathbf{0} = 0\mathbf{v}$	f.	______

62. Propiedad 4: $c\mathbf{0} = \mathbf{0}$

$c\mathbf{0} = c(\mathbf{0} + \mathbf{0})$	a.	______
$c\mathbf{0} = c\mathbf{0} + c\mathbf{0}$	b.	______
$c\mathbf{0} + (-c\mathbf{0}) = (c\mathbf{0} + c\mathbf{0}) + (-c\mathbf{0})$	c.	______
$\mathbf{0} = c\mathbf{0} + (c\mathbf{0} + (-c\mathbf{0}))$	d.	______
$\mathbf{0} = c\mathbf{0} + \mathbf{0}$	e.	______
$\mathbf{0} = c\mathbf{0}$	f.	______

63. Propiedad 5: si $c\mathbf{v} = 0$, entonces $c = 0$ o $\mathbf{v} = 0$. Si $c = 0$, está demostrada. Si $c \neq 0$, entonces c^{-1} existe y se tiene

$c^{-1}(c\mathbf{v}) = c^{-1}\mathbf{0}$	a.	______
$(c^{-1}c)\mathbf{v} = \mathbf{0}$	b.	______
$1\mathbf{v} = \mathbf{0}$	c.	______
$\mathbf{v} = \mathbf{0}.$	d.	______

64. Propiedad 6: $-(-\mathbf{v}) = \mathbf{v}$

$-(-\mathbf{v}) + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ y $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$	a.	______
$-(-\mathbf{v}) + (-\mathbf{v}) = \mathbf{v} + (-\mathbf{v})$	b.	______
$-(-\mathbf{v}) + (-\mathbf{v}) + \mathbf{v} = \mathbf{v} + (-\mathbf{v}) + \mathbf{v}$	c.	______
$-(-\mathbf{v}) + ((-\mathbf{v}) + \mathbf{v}) = \mathbf{v} + ((-\mathbf{v}) + \mathbf{v})$	d.	______
$-(-\mathbf{v}) + \mathbf{0} = \mathbf{v} + \mathbf{0}$	e.	______
$-(-\mathbf{v}) = \mathbf{v}$	f.	______

65. **Escriba** ¿Cómo podría describir geométricamente la sustracción de vectores? ¿Cuál es la relación entre la sustracción de vectores y las operaciones vectoriales básicas de suma y multiplicación escalar?

4.2 Espacios vectoriales

- Definir un espacio vectorial y reconocer algunos espacios vectoriales importantes.
- Mostrar que un conjunto dado no es un espacio vectorial.

DEFINICIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL

En el teorema 4.2 se enumeraron 10 propiedades especiales de la suma vectorial y de la multiplicación escalar en R^n. Definiciones idóneas de la suma vectorial y la multiplicación escalar revelan que muchas otras cantidades matemáticas (como las matrices, los polinomios y las funciones) también comparten estas 10 propiedades. *Cualquier* conjunto que satisface estas propiedades (o **axiomas**) se denomina **espacio vectorial** y los elementos del conjunto se denominan **vectores**.

Es importante comprender que la siguiente definición de espacio vectorial es precisamente eso: una *definición*. Usted no necesita demostrar nada, ya que simplemente se listan los axiomas necesarios de los espacios vectoriales. Este tipo de definición se denomina **abstracción** debido a que se abstrae una colección de propiedades de un espacio n-dimensional R^n específico para formar los axiomas necesarios de un espacio vectorial más general.

Definición de un espacio vectorial

Sea V un conjunto sobre el que están definidas dos operaciones (**la suma vectorial** y **la multiplicación escalar**). Si los siguientes axiomas se cumplen para todo $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ en V y todo escalar (número real) c y d, entonces V se denomina **espacio vectorial**.

Suma:

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ esta en V.	Cerradura bajo la adición
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$	Propiedad conmutativa
3. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$	Propiedad asociativa
4. V contiene un **vector cero 0** tal que para todo $\mathbf{u}$ en V, $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$	Idéntico aditivo
5. Para todo $\mathbf{u}$ en V, hay un vector en V denotado por $-\mathbf{u}$ tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.	Inverso aditivo

Multiplicación escalar:

6. $c\mathbf{u}$ esta en V.	Cerradura bajo la multiplicación escalar
7. $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$	Propiedad distributiva
8. $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$	Propiedad distributiva
9. $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$	Propiedad asociativa
10. $1(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$	Idéntico escalar

Es importante advertir que un espacio vectorial consta de cuatro elementos: un conjunto de vectores, un conjunto de escalares y dos operaciones. Cuando se refiera a un espacio vectorial V, asegúrese de que los cuatro elementos estén claramente expresados o entendidos. A menos de que se afirme otra cosa, se supone que el conjunto de escalares es el conjunto de los números reales.

Los dos primeros ejemplos de espacios vectoriales no son sorprendentes. Son, de hecho, los modelos usados para formar los 10 axiomas de los espacios vectoriales.

EJEMPLO 1 R^2 con las operaciones estándar es un espacio vectorial

El conjunto de todos los pares ordenados de números reales en R^2 con las operaciones estándar es un espacio vectorial. Para comprobar lo anterior, considere de nuevo el teorema 4.1. Los vectores en este espacio tienen la forma

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2).$$

EJEMPLO 2 R^n con las operaciones estándar es un espacio vectorial

El conjunto de todas las n-adas ordenadas de números reales en R^n con las operaciones normales es un espacio vectorial. Esto se comprueba por el teorema 4.2. Los vectores en este espacio son de la forma

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n).$$

COMENTARIO

Del ejemplo 2 puede concluir que R^1, el conjunto de los números reales (con las operaciones usuales de suma y multiplicación), es un espacio vectorial.

Los tres ejemplos siguientes describen espacios vectoriales en los que el conjunto básico V no consta de n-adas ordenadas. En cada ejemplo se describe el conjunto V y se definen las dos operaciones vectoriales. Luego, para demostrar que el conjunto es un espacio vectorial, debe verificar los diez axiomas.

EJEMPLO 3 El espacio vectorial de todas las matrices de 2×3

Demuestre que el conjunto de todas las matrices de 2×3 con las operaciones de suma de matrices y multiplicación escalar es un espacio vectorial.

COMENTARIO

De la misma forma en que se puede demostrar que el conjunto de todas las matrices de 2×3 es un espacio vectorial, también puede demostrar que el conjunto de todas las matrices de $m \times n$, denotado por $M_{m,n}$, es un espacio vectorial.

SOLUCIÓN

Si A y B son matices de 2×3 y c es un escalar, entonces $A + B$ y cA también son matrices de 2×3. Por consiguiente, el conjunto es cerrado bajo la suma de matrices y la multiplicación escalar. Además, los otros ocho axiomas de los espacios vectoriales se concluyen directamente de los teoremas 2. 1 y 2.2 (véase la sección 2.2). Por tanto, puede concluir que el conjunto es un espacio vectorial. Los vectores en este espacio tienen la forma

$$\mathbf{a} = A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}.$$

EJEMPLO 4 El espacio vectorial de todos los polinomios de grado menor o igual que 2

Sea P_2 el conjunto de todos los polinomios de la forma $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ donde a_0, a_1, a_2 son números reales. La suma de dos polinomios $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ y $q(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$ se define de la forma usual como

$$p(x) + q(x) = (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

y el *múltiplo escalar* de $p(x)$ por el escalar c se define como

$$cp(x) = ca_2x^2 + ca_1x + ca_0.$$

Demuestre que P_2 es un espacio vectorial.

SOLUCIÓN

La comprobación de cada uno de los 10 axiomas que definen un espacio vectorial es una aplicación directa de las propiedades de los números reales. Por ejemplo, dado que el conjunto de los números reales es cerrado bajo la suma, se concluye que $a_2 + b_2$, $a_1 + b_1$ y $a_0 + b_0$ son números reales, y que

$$p(x) + q(x) = (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

pertenece al conjunto P_2 porque se trata de un polinomio de grado menor o igual que 2. Por tanto, P_2 es cerrado bajo la suma. Para comprobar el axioma conmutativo de la suma, escriba

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= (a_2x^2 + a_1x + a_0) + (b_2x^2 + b_1x + b_0) \\ &= (a_2 + b_2)x^2 + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0) \\ &= (b_2 + a_2)x^2 + (b_1 + a_1)x + (b_0 + a_0) \\ &= (b_2x^2 + b_1x + b_0) + (a_2x^2 + a_1x + a_0) \\ &= q(x) + p(x). \end{aligned}$$

COMENTARIO

Aunque el polinomio cero $0(x) = 0$ carece de grado, a menudo P_2 se describe como el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual que 2.

¿Puede ver dónde se aplicó la propiedad conmutativa de la suma de números reales? El vector cero en este espacio es el polinomio cero dado por $\mathbf{0}(x) = 0x^2 + 0x + 0$ para toda x. Entonces le será posible concluir que P_2 es un espacio vectorial.

P_n se define como el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual que n (junto con el polinomio cero). El procedimiento usado para comprobar que P_2 es un espacio vectorial puede extenderse para demostrar que P_n, con las operaciones estándar de suma polinomial y multiplicación escalar, es un espacio vectorial.

EJEMPLO 5 El espacio vectorial de funciones continuas (cálculo)

Sea $C(-\infty, \infty)$ el conjunto de todas las funciones continuas de valor real definido sobre toda la recta de los números reales. Este conjunto consta de todas las funciones polinomiales y de todas las demás funciones que son continuas sobre toda la recta numérica. Por ejemplo, $f(x) = \text{sen}\, x$ y $g(x) = e^x$ pertenecen a este conjunto.

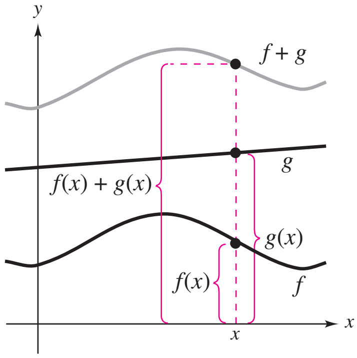


Figura 4.8

La suma está definida por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

como se muestra en la figura 4.8. La multiplicación escalar está definida por

$$(cf)(x) = c[f(x)].$$

Demuestre que $C(-\infty, \infty)$ es un espacio vectorial.

SOLUCIÓN

Para comprobar que el conjunto $C(-\infty, \infty)$ es cerrado bajo la suma y la multiplicación escalar, puede aplicar el resultado de cálculo donde se afirma que la suma de dos funciones continuas es: una función continua y que el producto de un escalar por una función continua es una función continua. Para comprobar que el conjunto $C(-\infty, \infty)$ posee idéntico aditivo, se considera la función f_0 que tiene un valor cero para toda x. Es decir,

$$f_0(x) = 0, \quad \text{donde } x \text{ es cualquier número real.}$$

Esta función es continua sobre toda la recta numérica real(su gráfica es simplemente la recta $y = 0$). Por tanto, pertenece al conjunto $C(-\infty, \infty)$. Además, si f es otra función cual quiera que es continua sobre toda la recta numérica, entonces

$$(f + f_0)(x) = f(x) + f_0(x) = f(x) + 0 = f(x).$$

Por tanto, f_0 es el idéntico aditivo en $C(-\infty, \infty)$. La verificación de los demás axiomas se le dejan a usted.

Por conveniencia, se proporciona un resumen de algunos espacios vectoriales importantes a los que a menudo se hará referencia en el resto del libro. En cada caso las operaciones son las estándar.

Resumen de espacios vectoriales importantes

R = conjunto de todos los números reales
R^2 = conjunto de todos los pares ordenados
R^3 = conjunto de todas las tercias ordenadas
R^n = conjunto de todas las n-adas ordenadas
$C(-\infty, \infty)$ = conjunto de todas las funciones continuas definidas sobre la recta numérica
$C[a, b]$ = conjunto de todas las funciones continuas definidas sobre un intervalo cerrado $[a, b]$
P = conjunto de todos los polinomios
P_n = conjunto de todos los polinomios de grado $\leq n$
$M_{m,n}$ = conjunto de todas las matrices de $m \times n$
$M_{n,n}$ = conjunto de todas las matrices cuadradas de $n \times n$

Se ha visto la versatilidad del concepto de espacio vectorial. Por ejemplo, un vector puede ser un número real, una n-ada, una matriz, un polinomio, una función continua, etc. Sin embargo, ¿cuál es el objetivo de esta abstracción y por qué definirla? Hay muchas razones, pero la más importante es la eficiencia. Esta abstracción resulta ser matemáticamente eficaz en el sentido de que ahora ya se pueden deducir resultados generales válidos para todos los espacios vectoriales. Una vez que se ha demostrado un teorema para un espacio vectorial abstracto, no es necesario dar demostraciones por separado para las n-adas, las matrices y los polinomios. Basta señalar que el teorema es verdadero para cualquier espacio vectorial, sin importar la forma específica que tengan los vectores. Este proceso se ilustra en el teorema 4.4.

TEOREMA 4.4 Propiedades de la multiplicación escalar

Sea $\mathbf{v}$ cualquier elemento de un espacio vectorial V y sea c cualquier escalar. Entonces son ciertas las propiedades siguientes.

1. $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$ **2.** $c\mathbf{0} = \mathbf{0}$
3. Si $c\mathbf{v} = \mathbf{0}$, entonces $c = 0$ o $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. **4.** $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$

DEMOSTRACIÓN

Para demostrar estas propiedades, la restricción es aplicar solamente los 10 axiomas que definen un espacio vectorial. Por ejemplo, para demostrar la segunda propiedad, del axioma 4 se observa que $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$. Esto permite escribir los pasos siguientes.

$$\begin{aligned}
c\mathbf{0} &= c(\mathbf{0} + \mathbf{0}) && \text{Identidad aditiva}\\
c\mathbf{0} &= c\mathbf{0} + c\mathbf{0} && \text{Propiedad distributiva por la izquierda}\\
c\mathbf{0} + (-c\mathbf{0}) &= (c\mathbf{0} + c\mathbf{0}) + (-c\mathbf{0}) && \text{Suma de } -c\mathbf{0} \text{ a ambos lados}\\
c\mathbf{0} + (-c\mathbf{0}) &= c\mathbf{0} + [c\mathbf{0} + (-c\mathbf{0})] && \text{Propiedad asociativa}\\
\mathbf{0} &= c\mathbf{0} + \mathbf{0} && \text{Inverso aditivo}\\
\mathbf{0} &= c\mathbf{0} && \text{Idéntico aditivo}
\end{aligned}$$

Para demostrar la tercera propiedad, se supone que $c\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Demostrar que esto implica ya sea $c = 0$ o $\mathbf{v} = 0$, supone que $c \neq 0$. (Si $c = 0$, no hay nada que demostrar.) Ahora, dado que $c \neq 0$, se usa el recíproco $1/c$ para demostrar que $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ como sigue.

$$\mathbf{v} = 1\mathbf{v} = \left(\frac{1}{c}\right)(c)\mathbf{v} = \frac{1}{c}(c\mathbf{v}) = \frac{1}{c}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

Observe que el último paso utiliza la propiedad 2 (justamente la que se acaba de demostrar). Las demostraciones de las propiedades primera y cuarta se dejan como ejercicios (véanse los ejercicios 47 y 48).

ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

En un sistema resorte-muelle, se asume que el movimiento ocurre sólo en dirección vertical. Es decir, el sistema tiene un único *grado de libertad*. Cuando se jala la masa hacia abajo y después se libera, el sistema oscilará. Si no se disminuye el sistema, lo que significa que no hay fuerzas presentes para ralentizar o detener la oscilación, entonces el sistema oscilará indefinidamente. Al aplicar la Segunda Ley del Movimiento de Newton a la masa, se produce la ecuación diferencial de segundo orden

$$x'' + \omega^2 x = 0$$

donde x es el desplazamiento en el tiempo t, y θ es una constante fija llamada la *frecuencia natural* del sistema. La solución general de esta ecuación diferencial es

$$x(t) = a_1 \operatorname{sen} \omega t + a_2 \cos \omega t$$

donde a_1 y a_2 son constantes arbitrarias (intente verificar esto.) En el ejercicio 41 se le pide que demuestre que el conjunto de todas las funciones $x(t)$ es un espacio vectorial.

CONJUNTOS QUE NO SON ESPACIOS VECTORIALES

En los ejemplos restantes de esta sección se describen algunos conjuntos (con operaciones) que *no* forman espacios vectoriales. Para demostrar que un conjunto no es un espacio vectorial, sólo necesita encontrar un axioma que no se satisfaga.

COMENTARIO

Note que es suficiente con que no se cumpla uno de los 10 axiomas para demostrar que un conjunto no es un espacio vectorial.

EJEMPLO 6 El conjunto de los enteros no es espacio vectorial

El conjunto de todos los enteros (con las operaciones estándar) no constituye un espacio vectorial porque no es cerrado bajo la multiplicación escalar. Por ejemplo,

$$\underbrace{\tfrac{1}{2}}_{\text{Escalar}}\underbrace{(1)}_{\text{Entero}} = \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{\text{No entero}}.$$

En el ejemplo 4 se demostró que el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual que 2 forma un espacio vectorial. A continuación verá que el conjunto de todos los polinomios cuyo grado es exactamente 2 no es un espacio vectorial.

EJEMPLO 7 El conjunto de los polinomios de segundo grado no es un espacio vectorial

El conjunto de todos los polinomios de segundo grado no es un espacio vectorial porque no es cerrado bajo la suma. Para ver esto, considere los polinomios de segundo grado $p(x) = x^2$ y $q(x) = -x^2 + x + 1$, cuya suma es el polinomio de primer grado $p(x) + q(x) = x + 1$.

Los conjuntos en los ejemplos 6 y 7 no son espacios vectoriales porque no satisfacen uno o ambos axiomas de cerradura. En el ejemplo siguiente se considera un conjunto que cumple con ambas pruebas de cerradura y que a pesar de ello no es un espacio vectorial.

EJEMPLO 8 Un conjunto que no es espacio vectorial

Sea $V = r^2$, el conjunto de todos los pares ordenados de números reales, con la operación estándar de suma y la siguiente definición *no estándar* de multiplicación escalar:

$$c(x_1, x_2) = (cx_1, 0)$$

Demuestre que V no es un espacio vectorial.

SOLUCIÓN

En este ejemplo, la operación de multiplicación escalar no es estándar. Por ejemplo, el producto del escalar 2 y del par ordenado (3, 4) no es igual a (6, 8). En vez de eso, la segunda componente del vector es 0,

$$2(3, 4) = (2 \cdot 3, 0) = (6, 0).$$

Este ejemplo es interesante porque en realidad satisface los nueve primeros axiomas (intente demostrar esto). Al verificar este axioma observe que con la definición no estándar de multiplicación escalar se obtiene

$$1(1, 1) = (1, 0) \neq (1, 1).$$

El décimo axioma no se cumple y el conjunto (con las dos operaciones) no es un espacio vectorial.

No se confunda por la notación usada para la multiplicación escalar del ejemplo 8. Al escribir $c(x_1, x_2) = (cx_1, 0)$ se *define* el múltiplo escalar de (x_1, x) por c como $(cx_1, 0)$.

4.2 Ejercicios

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

Describir la identidad aditiva En los ejercicios 1 a 6, describa el vector cero (el idéntico aditivo) del espacio vectorial dado..

1. R^4 **2.** $C(-\infty, \infty)$ **3.** $M_{2,3}$
4. $M_{1,4}$ **5.** P_3 **6.** $M_{2,2}$

Describir el inverso aditivo En los ejercicios 7 a 12, describa el inverso aditivo de un vector en el espacio vectorial dado.

7. R^4 **8.** $C(-\infty, \infty)$ **9.** $M_{2,3}$
10. $M_{1,4}$ **11.** P_3 **12.** $M_{2,2}$

Pruebas para un espacio vectorial En los ejercicios 13 a 34, determine si el conjunto dado, junto con las operaciones indicadas, es un espacio vectorial. En caso negativo, identifique por lo menos uno de los 10 axiomas de espacios vectoriales que no se cumpla.

13. $M_{4,6}$ con las operaciones estándar.

14. $M_{1,1}$ con las operaciones estándar.

15. El conjunto de todos los polinomios de tercer grado con las operaciones estándar.

16. El conjunto de todos los polinomios de quinto grado con las operaciones estándar.

17. El conjunto de todas la funciones polinomiales de primer grado ax, $a \neq 0$, cuyas gráficas pasan por el origen con las operaciones estándar

18. El conjunto de todas las funciones polinomiales de primer grado $ax + b$, $a \neq 0$, cuyas gráficas *no* pasan por el origen con las operaciones estándar.

19. El conjunto de todos los polinomios de cuarto grado o menos con las operaciones estándar

20. El conjunto de todas las funciones cuadráticas cuyas gráficas pasan por el origen con las operaciones estándar.

21. El conjunto

$$\{(x, y)\colon\ x \geq 0, y \text{ es un número real}\}$$

con las operaciones estándar en R^2.

22. El conjunto

$$\{(x, y)\colon\ x \geq 0, y \geq 0\}$$

con las operaciones estándar en R^2.

23. El conjunto

$$\{(x, x)\colon\ x \text{ es un número real}\}$$

con las operaciones estándar.

24. El conjunto

$$\left\{\left(x, \tfrac{1}{2}x\right)\colon\ x \text{ es un número real}\right\}$$

con las operaciones

25. El conjunto de todas las matrices de 2×2 de la forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$$

con las operaciones estándar.

26. El conjunto de todas las matrices de 2×2 de la forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & 1 \end{bmatrix}$$

con las operaciones estándar.

27. El conjunto de todas las matrices de 3×3 de la forma

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{bmatrix}$$

con las operaciones estándar

28. El conjunto de todas las matrices de 3×3 de la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b \\ c & 1 & d \\ e & f & 1 \end{bmatrix}$$

con las operaciones estándar.

29. El conjunto de todas las matrices singulares de 2×2 con las operaciones estándar.

30. El conjunto de todas las matrices no singulares de 2×2 con las operaciones estándar.

31. El conjunto de todas las matrices diagonales de 2×2 con las operaciones estándar.

32. El conjunto de todas las matrices triangulares superiores de 3×3 con las operaciones estándar.

33. $C[0, 1]$, el conjunto de todas las funciones continuas definidas sobre el intervalo $[0, 1]$, con las operaciones estándar.

34. $C[-1, 1]$, el conjunto de todas las funciones continuas definidas en el intervalo $[-1, 1]$, con las operaciones estándar

35. En vez de aplicar las definiciones estándar de suma y multiplicación escalar en r^2, suponga que estas dos operaciones se definen como sigue.

(a) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
$c(x, y) = (cx, y)$

(b) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1, 0)$
$c(x, y) = (cx, cy)$

(c) $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
$c(x, y) = \left(\sqrt{c}\,x, \sqrt{c}\,y\right)$

Con estas nuevas definiciones, ¿R^2 es un espacio vectorial? Justifique sus respuestas.

36. En vez de aplicar las definiciones estándar de suma y multiplicación escalar en R^3, suponga que estas dos operaciones se definen como sigue.

(a) $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)$
$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$
$c(x, y, z) = (cx, cy, 0)$

(b) $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (0, 0, 0)$
$c(x, y, z) = (cx, cy, cz)$

(c) $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)$
$= (x_1 + x_2 + 1, y_1 + y_2 + 1, z_1 + z_2 + 1)$
$c(x, y, z) = (cx, cy, cz)$

(d) $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)$
$= (x_1 + x_2 + 1, y_1 + y_2 + 1, z_1 + z_2 + 1)$
$c(x, y, z) = (cx + c - 1, cy + c - 1, cz + c - 1)$

Con estas nuevas definiciones, ¿R^3 es un espacio vectorial? Justifique su respuesta.

37. **Prueba** Demuestre con todo detalle que $M_{2,2}$, con las operaciones estándar, es un espacio vectorial.

38. **Prueba** Demuestre con todo detalle que el conjunto $\{(x, 2x)$: x es un número real$\}$, con las operaciones estándar en R^2, es un espacio vectorial.

39. Determine si el conjunto R^2, con las operaciones

$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1y_2)$
y $c(x_1, y_1) = (cx_1, cy_1)$

es un espacio vectorial. En caso afirmativo, compruebe cada uno de los axiomas de los espacios vectoriales; en caso negativo, escriba todos los axiomas de los espacios vectoriales que no se cumplen.

40. **REMATE**

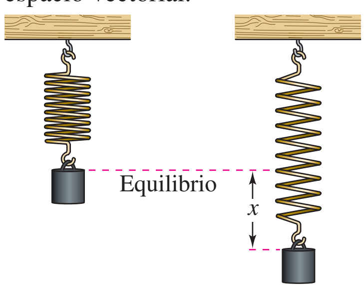
(a) Describa las condiciones bajo las cuales un conjunto puede clasificarse como un espacio vectorial.

(b) Proporcione un ejemplo de un conjunto que es un espacio vectorial y un ejemplo de un conjunto que no es un espacio vectorial.

41. **Sistema de resorte-muelle** La masa de un sistema de masa-muelle (véase la figura) se jala hacia abajo y después se libera, provocando que el sistema oscile de acuerdo con

$x(t) = a_1 \text{ sen } \omega t + a_2 \cos \omega t$

donde x es el desplazamiento en el tiempo t, a_1 y a_2 son constantes arbitrarias, y ω es una constante fija. Demuestre que el conjunto de todas las funciones $x(t)$ es un espacio vectorial.



42. Sea R^∞ el conjunto de todas las secuencias infinitas de números reales, con las operaciones

$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, u_2, u_3, \ldots) + (v_1, v_2, v_3, \ldots)$
$= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, \ldots)$

y $c\mathbf{u} = c(u_1, u_2, u_3, \ldots)$
$= (cu_1, cu_2, cu_3, \ldots)$.

Determine si R^∞ es un espacio vectorial. De ser así, entonces verifique cada axioma del espacio vectorial; si no, entonces enuncie todos los axiomas del espacio vectorial que fallan.

43. Sea V el conjunto de todos los números reales positivos. Determine si V es un espacio vectorial con las siguientes operaciones.

$x + y = xy$ Suma
$cx = x^c$ Multiplicación escalar

Si lo es, verifique cada axioma del espacio vectorial; si no lo es, diga todos los axiomas del espacio vectorial que no se cumplen.

44. **Prueba** Demuestre la propiedad de cancelación de la suma vectorial proporcionando la justificación para cada paso.

Demuestre que si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores de un espacio vectorial V tales que $\mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, entonces $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

$\mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$	Dados
$(\mathbf{u} + \mathbf{w}) + (-\mathbf{w}) = (\mathbf{v} + \mathbf{w}) + (-\mathbf{w})$	a. ______
$\mathbf{u} + (\mathbf{w} + (-\mathbf{w})) = \mathbf{v} + (\mathbf{w} + (-\mathbf{w}))$	b. ______
$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{v} + \mathbf{0}$	c. ______
$\mathbf{u} = \mathbf{v}$	d. ______

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 45 y 46, determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, proporcione una razón o cite una expresión adecuada del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que muestre que la expresión no es cierta en todos los casos o cite del texto una expresión adecuada.

45. (a) Un espacio vectorial consta de cuatro elementos: un conjunto de vectores, un conjunto de escalares y dos operaciones.

(b) El conjunto de todos los enteros con las operaciones estándar es un espacio vectorial.

(c) El conjunto de todas las tercias ordenadas (x, y, z) de números reales, donde $y \geq 0$, con las operaciones estándar en R^3 es un espacio vectorial.

46. (a) Para demostrar que un conjunto no es un espacio vectorial, es suficiente demostrar que uno de los axiomas no se cumple.

(b) El conjunto de todos polinomios de primer grado con las operaciones estándar es un espacio vectorial.

(c) El conjunto de todos los pares de números reales de la forma $(0, y)$, con las operaciones estándar en R^2, es un espacio vectorial.

47. **Prueba** Demuestre la propiedad 1 del teorema 4.4.

48. **Prueba** Demuestre la propiedad 4 del teorema 4.4.

4.3 Subespacios de espacios vectoriales

- Determine si un subconjunto W de un espacio vectorial V es un subespacio de V.
- Determine los subespacios de R^n.

SUBESPACIOS

En muchas de las aplicaciones importantes del álgebra lineal los espacios vectoriales ocurren como **subespacios** de espacios más grandes. Por ejemplo, se verá que el conjunto solución de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales en n variables es un subespacio de R^n. (véase el teorema 4.16).

Un subconjunto no vacío de un espacio vectorial es un subespacio si es un espacio vectorial (con las *mismas* operaciones definidas en el espacio vectorial original), como se establece en la siguiente definición.

COMENTARIO

Observe que si W es un subespacio de V, debe ser cerrado bajo las operaciones inherentes a V.

Definición de subespacio de un espacio vectorial

Un subconjunto no vacío W de un espacio vectorial se denomina **subespacio** de V si W es un espacio vectorial bajo las operaciones de suma y multiplicación escalar definidas en V.

EJEMPLO 1 Un subespacio de R^3

Demuestre que el conjunto $W = \{(x_1, 0, x_3)$: x_1 y x_3 son números reales es un subespacio de R^3 con las operaciones estándar.

SOLUCIÓN

El conjunto W es no vacío, debido a que contiene al vector nulo $(0, 0, 0)$.

Gráficamente, el conjunto W puede interpretarse como simplemente el plano xz, como se muestra en la figura 4.9. El conjunto W es cerrado bajo la suma porque la suma de dos vectores cualesquiera en el plano xz también debe estar en el plano xz. Es decir, si $(x_1, 0, x_3)$ y $(y_1, 0, y_3)$ pertenecen a W, entonces la suma $(x_1 + y_1, 0, x_3 + y_3)$ también está en W (dado que la segunda componente es cero). De manera similar, para ver que W es cerrado bajo la multiplicación escalar, sea $(x_1, 0, x_3)$ que está en W y sea c un escalar. Entonces $c(x_1, 0, x_3) = (cx_1, 0, x_3)$ tiene al cero como segunda componente y, por tanto, debe pertenecer a W. La verificación de los otros ocho axiomas que definen los espacios vectoriales se le deja a usted.

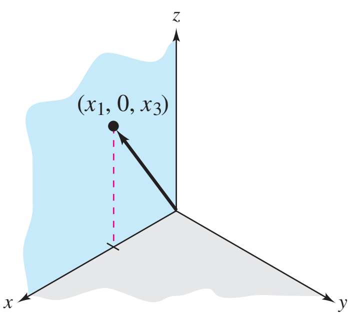


Figura 4.9

Para establecer que un conjunto W es un espacio vectorial es necesario verificar las 10 propiedades de los espacios vectoriales. Si W es un subconjunto de un espacio vectorial V más grande (y las operaciones definidas sobre W son las *mismas* definidas sobre V), entonces casi todas las 10 propiedades son *heredadas* del espacio más grande, por lo que no es necesario verificarlas. El siguiente teorema establece que basta comprobar la cerradura para establecer que un subconjunto no vacío de un espacio vectorial es un subespacio.

TEOREMA 4.5 Prueba para un subespacio

Si W es un subconjunto no vacío de un espacio vectorial V, entonces W es un subespacio de V si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones de cerradura.

1. Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están en W, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ está en W.
2. Si $\mathbf{u}$ está en W y c es cualquier escalar, entonces $c\mathbf{u}$ está en W.

DEMOSTRACIÓN

La demostración del teorema en una dirección es directa. Es decir, si W es un subespacio de V, entonces W es un espacio vectorial y deber ser cerrado bajo la suma y la multiplicación escalar.

Para demostrar el teorema en la otra dirección, se supone que W es cerrado bajo la suma y la multiplicación escalar. observe que si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ están W, entonces automáticamente también están en V. Por consiguiente, los axiomas 2, 3, 7, 8, 9 y 10 que definen los espacios vectoriales se cumplen automáticamente. además, debido a que W es cerrado bajo la adición y la multiplicación escalar, se concluye que para cualquier $\mathbf{v}$ en W y un escalar $c = 0$, $c\mathbf{v} = 0$ y $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$ ambos están en W, por tanto, satisfacen los axiomas restantes 4 y 5.

COMENTARIO

Observe que si W es un subespacio de un espacio vectorial V, entonces tanto W como V deben tener el mismo vector cero 0 (véase el ejercicio 55).

Dado que un subespacio de un espacio vectorial es en sí un espacio vectorial, entonces debe contener el vector cero. De hecho, el subespacio más simple de un espacio vectorial es aquél que consta solamente del vector cero, $W = \{\mathbf{0}\}$. Este subespacio de denomina **subespacio cero**. Otro subespacio obvio de V es V mismo. todo espacio vectorial posee estos dos subespacios triviales, y los subespacios diferentes a éstos se denominan subespacios **propios** (o no triviales).

EJEMPLO 2 El subespacio de $M_{2,2}$

Sea W el conjunto de todas las matrices simétricas de orden 2. Demuestre que W es un subespacio del espacio vectorial $M_{2,2}$ con las operaciones estándar de suma vectorial y multiplicación escalar.

SOLUCIÓN

Recuerde que una matriz es *simétrica* si es igual a su propia transpuesta. Como $M_{2,2}$ es un espacio vectorial, sólo necesita demostrar que W (un subconjunto de $M_{2,2}$) satisface las condiciones del teorema 4.5. Comience por observar que W es *no vacío*. W es cerrado bajo la suma porque $A_1 = A_1$ y $A_2 = A_2^T$, lo que implica que

$$(A_1 + A_2)^T = A_1^T + A_2^T = A_1 + A_2.$$

Por tanto, si A_1 y A_2 son matrices simétricas de orden 2, entonces también lo es $A_1 + A_2$. De manera similar, W es cerrado bajo la multiplicación escalar porque $A = A^t$ implica que $(cA)^t = cA^t = cA$. Si A es una matriz simétrica de orden 2, entonces también lo es cA.

Es posible generalizar el resultado del ejemplo 2. Es decir, para cualquier entero positivo n, el conjunto de las matrices simétricas de orden n es un subespacio del espacio vectorial $M_{n,n}$ con las operaciones estándar. El siguiente ejemplo describe un subconjunto de $M_{n,n}$ que *no* es un subespacio.

EJEMPLO 3 El conjunto de las matrices singulares no es un subespacio de $M_{n,n}$

Sea W el conjunto de matrices singulares de orden 2. Demuestre que W no es un subespacio de $M_{2,2}$ con las operaciones estándar.

SOLUCIÓN

Por el teorema 4.5, usted puede demostrar que el subconjunto W no es subespacio si se concluye que W es vacío, que W no es cerrado bajo la suma o que W no es cerrado bajo la multiplicación escalar. Para este conjunto particular, W es no vacío y cerrado bajo la multiplicación escalar, pero no es cerrado bajo la suma. Para ver lo anterior, sean A y B

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces tanto A como B son singulares (no invertibles), pero su suma

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es no singular (invertible). Así, W no es cerrado bajo la suma y por el teorema 4.5 se puede concluir que no es un subespacio de $M_{2,2}$

EJEMPLO 4 El conjunto de vectores que están en el primer cuadrante no es un subespacio de R^2

Demuestre que $W = \{(x_1, x_2): x_1 \geq 0 \text{ y } x_2 \geq 0\}$, con las operaciones estándar, no es un subespacio de R^2.

SOLUCIÓN

Este conjunto es no vacío y cerrado bajo la suma. Sin embargo, no es cerrado bajo la multiplicación escalar. Para ver lo anterior, advierta que (1, 1) está en W, pero el múltiplo escalar $(-1)(1, 1) = (-1, -1)$ no pertenece a W. Por consiguiente, W no es un subespacio de R^2.

A menudo encontrará series de subespacios anidados entre sí. Por ejemplo, considere los espacios vectoriales $P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots$, y P_n donde P_k es el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual que k, con las operaciones estándar. Es fácil demostrar que si $j \leq k$, entonces P_j es un subespacio de P_k. así, se puede escribir $P_0 \subset P_1 \subset P_2 \subset P_3 \subset \ldots \subset P_n$. (En el ejercicio 45, se le pedirá que demuestre esto.) Otros casos de subespacios anidados se describen en el ejemplo 5.

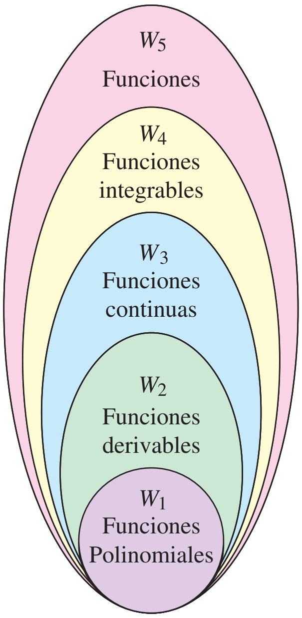


Figura 4.10

EJEMPLO 5 Subespacios de funciones (cálculo)

Sea W_5 el *espacio vectorial* de todas las funciones definidas en [0, 1], y sean W_1, W_2, W_3 y W_4 definidas como sigue

W_1 = conjunto de todas las funciones polinomiales definidas en el intervalo [0, 1]
W_2 = conjunto de todas las funciones derivables en [0, 1]
W_3 = conjunto de todas las funciones continuas en [0, 1]
W_4 = conjunto de todas las funciones integrables en [0, 1]

Demuestre que $W_1 \subset W_2 \subset W_3 \subset W_4 \subset W_5$ y que W_i es un subespacio de W_j para $i \leq j$.

SOLUCIÓN

Del cálculo se sabe que toda función polinomial es derivable en [0, 1]. Por consiguiente, $W_1 \subset W_2$. además, el $W_2 \subset W_3$ porque toda función derivable es continúa, $W_3 \subset W_4$ porque toda función continua es integrable y $W_4 \subset W_5$ porque toda función integrable es, por supuesto, una función. Como resultado de los comentarios previos, se tiene que $W_1 \subset W_2 \subset W_3 \subset W_4 \subset W_5$, como se observa en la figura 4.10. Se deja que usted compruebe que W_i es un subespacio de W_j para $i \leq j$. (Véase el ejercicio 46.)

En el ejemplo 5, observe que si u, V y W son espacios vectoriales tales que W es un subespacio de V y V es un subespacio de u, entonces W también es un subespacio de u. Este caso especial del siguiente teorema establece que la intersección de dos subespacios es un subespacio, como se muestra en la figura 4.11.

COMENTARIO

El teorema 4.6 establece que la *intersección* de dos subespacios es un subespacio. En el ejercicio 56 se pide que usted demuestre que la *unión* de dos subespacios no es necesariamente un subespacio.

TEOREMA 4.6 La intersección de dos subespacios es un subespacio

Si V y W son subespacios de un espacio vectorial U, entonces la intersección de V y W (denotada por $V \cap W$) también es un subespacio de U.

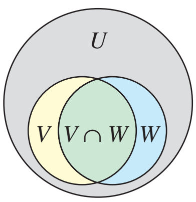


Figura 4.11 La intersección de dos subespacios es un subespacio

DEMOSTRACIÓN

Como V y W son subespacios de U, se sabe que ambos contienen el vector cero. así, $V \cap W$ es no vacía. Para demostrar que $V \cap W$ es cerrada bajo la suma, sean $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ dos vectores cualesquiera en V W. Entonces, como V y W son subespacios de U, se sabe que ambos son cerrados bajo la suma. Por consiguiente, como $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ están en V, su suma $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ debe estar en V. De manera similar, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ está en W porque $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ están en W. Pero esto implica que $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ están en $V \cap W$, y se concluye que $V \cap W$ es cerrada bajo la suma. Se deja que usted demuestre (con un argumento semejante) que $V \cap W$ es cerrada bajo la multiplicación escalar. (Véase el ejercicio 59.)

SUBESPACIOS DE R^n

R^n es una fuente conveniente para ejemplos de espacios vectoriales y el resto de esta sección se dedica a analizar subespacios de R^n.

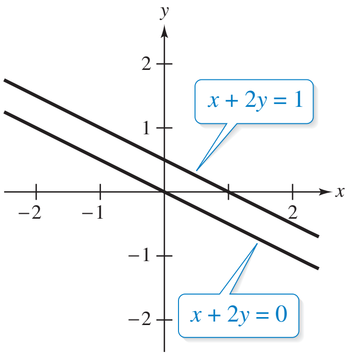


Figura 4.12

EJEMPLO 6 Determinación de subespacios de R^2

¿Cuál de estos dos subconjuntos es un subespacio de R^2?

a. El conjunto de puntos de la recta dada por $x + 2y = 0$

b. El conjunto de puntos en la recta dada por $x + 2y = 1$

SOLUCIÓN

a. Al despejar x se observa que un punto en R^2 está en la recta $x + 2y = 0$ si y sólo si es de la forma $(-2t, t)$, donde t es cualquier número (véase la figura 4.12)

Para demostrar que este conjunto es cerrado bajo la suma, sean $\mathbf{v}_1 = (-2t_1, t_1)$ y $\mathbf{v}_2 = (-2t_2, t_2)$ dos puntos cualesquiera de la recta. Entonces, se tiene

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (-2t_1, t_1) + (-2t_2, t_2) = (-2(t_1 + t_2), t_1 + t_2) = (-2t_3, t_3)$$

donde $t_3 = t_1 + t_2$. Por tanto, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ está en la recta y el conjunto es cerrado bajo la suma. De manera semejante se puede demostrar que el conjunto es cerrado bajo la multiplicación escalar. Por tanto, este conjunto es un subespacio de R^2.

b. Este subconjunto de R^2 *no* es un subespacio de R^2 ya que todo subespacio debe contener el vector cero (0, 0) y el vector cero (0, 0) no pertenece a la recta $x + 2y = 1$. (véase la figura 4.12).

De las dos rectas del ejemplo 6, la que es un subespacio de R^2 es la que pasa por el origen. Esto es característico de los subespacios de R^2. Es decir, si W es un subconjunto de R^2, entonces es un subespacio si y sólo si se cumple una de las siguientes proposiciones.

1. W consta *sólo del punto* (0, 0)
2. W consta de todos los puntos sobre una recta que pasa por el origen.
3. W consta de todo R^2.

En la figura 4.13 se muestran gráficamente estas tres posibilidades.

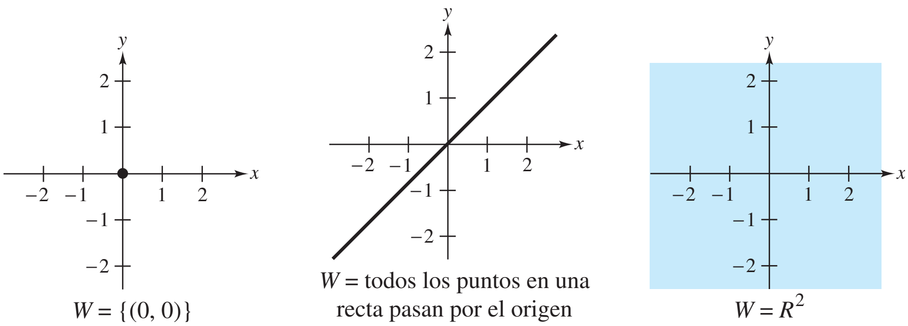


Figura 4.13

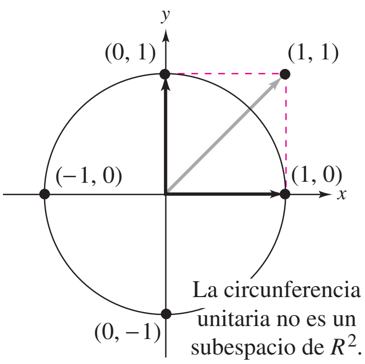


Figura 4.14

COMENTARIO

Otra forma de decir que el subconjunto mostrado en la figura 4.14 no es un subespacio de R^2 es hacer notar que este no contiene el vector cero (el origen).

EJEMPLO 7 Un subconjunto de R^2 que no es un subespacio

Demuestre que el subconjunto de R^2 que consta de todos los puntos en el círculo unitario $x_2 + y_2 = 1$ no es un subespacio.

SOLUCIÓN

Este subconjunto de R^2 *no* es un subespacio, ya que los puntos (1, 0) y (0, 1) están en el subconjunto, pero su suma (1, 1) no lo está (véase la figura 4.14). Por tanto, este subconjunto no es cerrado bajo la suma.

EJEMPLO 8 Determinación de subespacios de R^3

¿Cuál de los siguientes subconjuntos es un subespacio de R^3?

a. $W = \{(x_1, x_2, 1)\colon x_1 \text{ y } x_2 \text{ son números reales}\}$

b. $W = \{(x_1, x_1 + x_3, x_3)\colon x_1 \text{ y } x_3 \text{ son números reales}\}$

SOLUCIÓN

a. Como $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ no está en W, se sabe que W *no* es subespacio de R^3.

b. Este conjunto es no vacío, ya que contiene al vector cero (0, 0, 0). Sea

$$\mathbf{v} = (v_1, v_1 + v_3, v_3) \quad \text{y} \quad \mathbf{u} = (u_1, u_1 + u_3, u_3)$$

dos vectores en W, y sea c cualquier numero real. Demuestre que W es cerrado bajo la suma, como sigue.

$$\begin{aligned}\mathbf{v} + \mathbf{u} &= (v_1 + u_1, v_1 + v_3 + u_1 + u_3, v_3 + u_3)\\ &= (v_1 + u_1, (v_1 + u_1) + (v_3 + u_3), v_3 + u_3)\\ &= (x_1, x_1 + x_3, x_3)\end{aligned}$$

donde $x_1 = v_1 + u_1$ y $x_3 = v_3 + u_3$. Por tanto, $\mathbf{v} + \mathbf{u}$ está en W porque es de la forma apropiada. De manera semejante, W es cerrado bajo la multiplicación escalar porque

$$\begin{aligned}c\mathbf{v} &= (cv_1, c(v_1 + v_3), cv_3)\\ &= (cv_1, cv_1 + cv_3, cv_3)\\ &= (x_1, x_1 + x_3, x_3)\end{aligned}$$

donde $x_1 = cv_1$ y $x_3 = cv_3$, lo que significa que $c\mathbf{v}$ está en W. Entonces W es un subespacio de R^3.

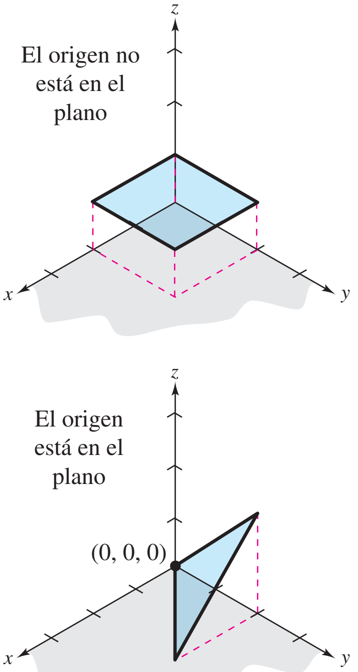


Figura 4.15

En el ejemplo 8, observe que la gráfica de cada subconjunto es un plano en R^3. Sin embargo, pero el único que es un *subespacio* es el representado por el plano que pasa por el origen (véase la figura 4.15).

En general, usted puede demostrar que un subconjunto W de R^3 es un subespacio de R^3 (con las operaciones normales) si y sólo si es de alguna de las formas siguientes.

1. W consta *sólo del punto* (0, 0, 0).
2. W consta de todos los puntos sobre una *recta* que pasa por el origen.
3. W consta de todos los puntos en un *plano* que pasa por el origen.
4. W consta de todo R^3.

ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

El procesamiento de señales digitales depende del muestreo, que convierte señales continuas en secuencias discretas que pueden utilizar los dispositivos digitales. Tradicionalmente, el muestreo es uniforme y por puntos, y se obtiene de un único espacio vectorial. Después, la secuencia resultante se reconstruye en una señal de dominio continuo. Tal proceso, sin embargo, puede involucrar una importante reducción de información, que puede resultar en una señal reconstruida de baja calidad. En aplicaciones como un radar, geofísica y comunicaciones inalámbricas, los investigadores han determinado situaciones en las cuales el muestreo de una unión de subespacios vectoriales puede ser más apropiado. *(Fuente: Sampling Signals from a Union of Subspaces—A New Perspective for the Extension of This Theory, Lu, Y.M. and Do, M.N., IEEE Signal Processing Magazine, Marzo, 2008.)*

4.3 Ejercicios

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

Verificación de subespacios En los ejercicios 1 a 6, compruebe que W es un subespacio de V. En cada caso, suponga que V tiene las operaciones estándar.

1. $W = \{(x_1, x_2, x_3, 0)\colon\ x_1, x_2 \text{ y } x_3 \text{ son números reales}\}$
   $V = R^4$
2. $W = \{(x, y, 2x - 3y)\colon\ x \text{ y } y \text{ son números reales}\}$
   $V = R^3$
3. W es el conjunto de todas las matrices de 2×2 de la forma
   $$\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}.$$
   $V = M_{2,2}$
4. W es el conjunto de todas las matrices de 3×2 de la forma
   $$\begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}.$$
   $V = M_{3,2}$
5. **Cálculo** W es el conjunto de todas las funciones continuas en $[0, 1]$. V es el conjunto de todas las funciones integrables en $[0, 1]$.
6. **Cálculo** W es el conjunto de todas las funciones derivables en $[0, 1]$. V es el conjunto de todas las funciones continuas en $[0, 1]$.

Subconjuntos que no son subespacios En los ejercicios 7 a 20, W no es un subespacio del espacio vectorial dado. Compruebe lo anterior por medio de un ejemplo específico que viole la prueba para un subespacio vectorial (teorema 4.5).

7. W es el conjunto de todos los vectores en r^3 cuya tercera componente es –1.
8. W es el conjunto de todos los vectores en R^2 cuya segunda componente es 1.
9. W es el conjunto de todos los vectores en R^2 cuyas componentes son números racionales.
10. W es el conjunto de todos los vectores en R^2 cuyas componentes son enteros.
11. W es el conjunto de todas las funciones no negativas en $C(-\infty, \infty)$.
12. W es el conjunto de todas las funciones lineales $ax + b$, $a \neq 0$, en $C(-\infty, \infty)$
13. W es el conjunto de todos los vectores en R^3 cuyas componentes son no negativas.
14. W es el conjunto de todos los vectores en R^3 cuyas componentes son pitagóricas triples.
15. W es el conjunto de todas las matrices en $M_{3,3}$ de la forma
    $$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 1 \end{bmatrix}.$$
16. W es el conjunto de todas las matrices en $M_{3,1}$ de la forma $\begin{bmatrix} a & 0 & \sqrt{a} \end{bmatrix}^T$.
17. W es el conjunto de todas las matrices en $M_{n,n}$ con determinantes cero.
18. W es el conjunto de todas las matrices en m tales que $A^2 = A$
19. W es el conjunto de todos los vectores en R^2 cuya segunda componente es el cubo de la primera.
20. W es el conjunto de todos los vectores en r^2 cuya segunda componente es el cuadrado de la primera.

Determinación de subespacios En los ejercicios 21 a 28, determine si el subconjunto de $C(-\infty, \infty)$ es un subespacio de $C(-\infty, \infty)$.

21. El conjunto de todas las funciones positivas: $f(x) > 0$
22. El conjunto de todas las funciones negativas: $f(x) < 0$
23. El conjunto de todas las funciones pares: $f(-x) = f(x)$
24. El conjunto de todas las funciones impares: $f(-x) = -f(x)$
25. El conjunto de todas las funciones constantes: $f(x) = c$
26. El conjunto de todas las funciones exponenciales $f(x) = a^x$, donde $a > 0$
27. El conjunto de todas las funciones tales que $f(0) = 0$
28. El conjunto de todas las funciones tales que $f(0) = 1$

Determinación de subespacios En los ejercicios 29-36, determine si el subconjunto de $M_{n,n}$ es un subespacio de $M_{n,n}$ con las operaciones estándar.

29. El conjunto de todas las matrices triangulares superiores de $n \times n$.
30. El conjunto de todas las matrices diagonales de $n \times n$
31. El conjunto de todas las matrices de $n \times n$ con elementos enteros.
32. El conjunto de todas las matrices A de $n \times n$ que conmutan con una matriz B de $n \times n$ dada
33. El conjunto de todas las matrices singulares de $n \times n$
34. El conjunto de todas las matrices invertibles de $n \times n$
35. El conjunto de todas la matrices de $n \times n$ cuya suma de sus elementos es mayor a cero.
36. El conjunto de todas las matrices de $n \times n$ cuya traza es distinta de cero.

Determinación de subespacios En los ejercicios 37 a 42, determine si el conjunto W es un subespacio de R^3 con las operaciones normales. Justifique su respuesta.

37. $W = \{(x_1, x_2, 0)\colon\ x_1 \text{ y } x_2 \text{ son números reales}\}$
38. $W = \{(x_1, x_2, 4)\colon\ x_1, \text{ y } x_2 \text{ son números reales}\}$
39. $W = \{(a, b, a + 2b)\colon\ a \text{ y } b \text{ son números reales}\}$
40. $W = \{(s, s - t, t)\colon\ s \text{ y } t \text{ son números reales}\}$
41. $W = \{(x_1, x_2, x_1x_2)\colon\ x_1 \text{ y } x_2 \text{ son números reales}\}$
42. $W = \{(x_1, 1/x_1, x_3)\colon\ x_1 \text{ y } x_3 \text{ son números reales}, x_1 \neq 0\}$

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 43 y 44, determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, proporcione una razón o cite una expresión adecuada del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que muestre que la expresión no es cierta en todos los casos o cite del texto una expresión adecuada.

43. (a) Todo espacio vectorial V contiene al menos un subespacio que es el subespacio nulo.
(b) Si V y W son subespacios de un espacio vectorial u, entonces la intersección de V y W es también un subespacio.
(c) Si U, V y W son espacios vectoriales tales que W es un subespacio de V y U es un subespacio de V, entonces $W = U$.

44. (a) Todo espacio vectorial V contiene dos subespacios propios que son el subespacio nulo y V mismo.
(b) Si W es un subespacio de R^2, entonces W debe contener al vector $(0, 0)$.
(c) Si W es un subespacio de un espacio vectorial V, entonces tiene cerradura bajo la adición como se define en V.

45. Considere los espacios vectoriales
$P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$
donde P_k es el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual a k con las operaciones estándar. Demuestre que si $j \le k$, entonces P_j es un subespacio de P_k.

46. **Cálculo** Sean W_1, W_2, W_3, W_4 y W_5, definidos como en el Ejemplo 5. Demuestre que W_1 es un subespacio de W_j para i $\le j$.

47. **Cálculo** Sea $F(-\infty, \infty)$ el espacio vectorial de funciones de valor real definidas en la recta real completa. Demuestre que cada uno de los siguientes es un subespacio de $F(-\infty, \infty)$.
(a) $C(-\infty, \infty)$
(b) El conjunto de todas las funciones diferenciables f definidas en la recta de números reales
(c) El conjunto de todas las funciones diferenciables f definidas en la recta de números reales que satisfacen la ecuación diferencial $f' - 3f = 0$

48. **Cálculo** Determine si el conjunto

$$S = \left\{f \in C[0, 1]: \int_0^1 f(x)\,dx = 0\right\}$$

es un subespacio de $C[0, 1]$. Demuestre su respuesta.

49. Sea W el subconjunto de R^3 que consta de todos los puntos en una recta que pasa por el origen. Tal recta puede representarse con las ecuaciones paramétricas

$x = at$, $y = bt$ y $z = ct$.

Utilice estas ecuaciones para demostrar que W es un subespacio de R^3.

50. **REMATE** Explique por qué es suficiente probar la cerradura a fin de establecer que un subconjunto no vacío de un espacio vectorial es un subespacio.

51. **Demostración guiada** Demuestre que un conjunto W no vacío es un subespacio de un espacio vectorial V si y sólo si $a\mathbf{x} + b\mathbf{y}$ es un elemento de W, donde a y b son escalares cualesquiera y $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ están en W.

Inicio: suponga que W es un subespacio en una dirección y demuéstrelo aplicando los axiomas de cerradura que colocan a $a\mathbf{x} + b\mathbf{y}$ en W. En la otra dirección, suponga que $a\mathbf{x} + b\mathbf{y}$ es un elemento de W para todas las escalares a y b y todas los vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ en W y compruebe que W es cerrado bajo la suma y la multiplicación escalar.

(i) Si W es un subespacio de V, entonces use la cerradura de la multiplicación escalar para demostrar que $a\mathbf{x} + b\mathbf{y}$ está en W. Utilice la cerradura bajo la suma para obtener el resultado deseado.
(ii) En contraparte, suponga que $a\mathbf{x} + b\mathbf{y}$ está en W. Con una asignación ingeniosa de valores específicos para a y b, demuestre que W es cerrada bajo la suma y la multiplicación escalar.

52. Sean $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ y $\mathbf{z}$ vectores en un espacio vectorial V. Demuestre que el conjunto de todas las combinaciones lineales de $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ y $\mathbf{z}$ $W = \{a\mathbf{x} + b\mathbf{y} + c\mathbf{z}\colon a, b$ y c son escalares$\}$ es un subespacio de V. Este subespacio se denomina **generador** de $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$.

53. **Prueba** Sea A una matriz ajustada de 2×3. Demuestre que el conjunto

$$W = \left\{\mathbf{x} \in R^3: A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$$

no es un subespacio de R^3.

54. **Prueba** Sea A una matriz ajustada de $m \times n$. Demuestre que el conjunto $W = \{\mathbf{x} \in R^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$ es un subespacio de R^n.

55. **Prueba** Sea W un subespacio del espacio vectorial V. Demuestre que el vector nulo en V es también el vector nulo en W.

56. Dé un ejemplo que demuestre que la unión de dos subespacios de un espacio vectorial V no necesariamente es un subespacio de V.

57. **Prueba** Sea A una matriz fija de 2×2. Demuestre que el conjunto $W = \{X : XAB = BAX\}$ es un subespacio de $M_{2,2}$.

58. **Prueba** Sean V y W dos subespacios del espacio vectorial U.
(a) Demuestre que el conjunto

$V + W = \{\mathbf{u} : \mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ donde $\mathbf{v} \in V$ y $\mathbf{w} \in W\}$

es un subespacio de U.
(b) Describa $V + W$ si V y W son subespacios de $U = R^2$: $V = \{(x, 0)\colon x$ es un número real$\}$ y $W = \{(0, y)\colon$ y es un número real$\}$.

59. **Prueba** Complete la demostración del teorema 4.6 al probar que la intersección de dos subespacios de un espacio vectorial es cerrada bajo la multiplicación escalar.

4.4 Conjuntos generadores e independencia lineal

- Escribir una combinación lineal de un conjunto de vectores en un espacio vectorial V.
- Determinar si un conjunto de vectores en un espacio vectorial V es un conjunto generador de V.
- Determinar si un conjunto de vectores en un espacio vectorial V es linealmente independiente.

COMBINACIONES LINEALES DE VECTORES EN ESPACIOS VECTORIALES

En esta sección se comienzan a desarrollar los procedimientos para representar cada vector en un espacio vectorial como una **combinación lineal** de un número selecto de vectores en el espacio.

Definición de combinación lineal de vectores

Un vector $\mathbf{v}$ en un espacio vectorial V se denomina **combinación lineal** de los vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ en V si $\mathbf{v}$ puede expresarse en la forma

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_k\mathbf{u}_k$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_k$ son escalares.

A menudo, uno o más vectores en un conjunto dado pueden expresarse como combinaciones lineales de otros vectores en el conjunto. Esta posibilidad se ilustra con los ejemplos 1, 2 y 3.

EJEMPLO 1 Ejemplos de combinaciones lineales

a. Para el siguiente conjunto de vectores en R^3,

$$S = \{\overset{\mathbf{v}_1}{(1, 3, 1)}, \overset{\mathbf{v}_2}{(0, 1, 2)}, \overset{\mathbf{v}_3}{(1, 0, -5)}\}$$

$\mathbf{v}_1$ es una combinación lineal de $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ porque

$$\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 = 3(0, 1, 2) + (1, 0, -5) = (1, 3, 1).$$

b. Para el siguiente conjunto de vectores en $M_{2,2}$,

$$S = \left\{\overset{\mathbf{v}_1}{\begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}, \overset{\mathbf{v}_2}{\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}, \overset{\mathbf{v}_3}{\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}, \overset{\mathbf{v}_4}{\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}\right\}$$

$\mathbf{v}_1$ es una combinación lineal de $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, y $\mathbf{v}_4$ porque

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

En el ejemplo 1 fue fácil verificar que uno de los vectores en el conjunto S es una combinación lineal de los otros vectores, porque se contaba con los coeficientes adecuados para formar la combinación lineal. En el siguiente ejemplo se muestra un procedimiento para determinar los coeficientes.

EJEMPLO 2 Determinación de una combinación lineal

Escriba el vector $\mathbf{w} = (1, 1, 1)$ como una combinación lineal de vectores en el en el conjunto S.

$$S = \{\overset{\mathbf{v}_1}{(1, 2, 3)}, \overset{\mathbf{v}_2}{(0, 1, 2)}, \overset{\mathbf{v}_3}{(-1, 0, 1)}\}$$

SOLUCIÓN

Es necesario encontrar escalares c_1, c_2 y c_3 tales que

$$\begin{aligned}(1, 1, 1) &= c_1(1, 2, 3) + c_2(0, 1, 2) + c_3(-1, 0, 1)\\ &= (c_1, 2c_1, 3c_1) + (0, c_2, 2c_2) + (-c_3, 0, c_3)\\ &= (c_1 - c_3, 2c_1 + c_2, 3c_1 + 2c_2 + c_3).\end{aligned}$$

Al igualar las componentes correspondientes resulta el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned}c_1 \qquad\quad - c_3 &= 1\\ 2c_1 + \ \ c_2 \qquad\ &= 1\\ 3c_1 + 2c_2 + c_3 &= 1\end{aligned}$$

Usando la eliminación de Gauss-Jordan, la matriz aumentada de este sistema se reduce por renglones a

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Así, este sistema tiene un número infinito de soluciones, cada una de la forma

$$c_1 = 1 + t, \quad c_2 = -1 - 2t, \quad c_3 = t.$$

Para obtener una solución, podría hacerse que $t = 1$. Entonces, $c_3 = 1$, $c_2 = -3$ y $c_1 = 2$, y se tiene que

$$\mathbf{w} = 2\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3.$$

Otras elecciones para t producen otras maneras de expresar $\mathbf{w}$ como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$.

EJEMPLO 3 Determinación de una combinación lineal

Si es posible, exprese el vector

$$\mathbf{w} = (1, -2, 2)$$

como una combinación lineal de vectores en el conjunto S dado en el ejemplo 2.

SOLUCIÓN

Siguiendo el procedimiento dado en el ejemplo 2, se obtiene el sistema

$$\begin{aligned}c_1 \qquad\quad - c_3 &= 1\\ 2c_1 + \ \ c_2 \qquad\ &= -2\\ 3c_1 + 2c_2 + c_3 &= 2.\end{aligned}$$

La matriz aumentada de este sistema se reduce a

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

A partir del tercer renglón se concluye que el sistema de ecuaciones es inconsistente y, por tanto, no hay solución. Así que $\mathbf{w}$ *no puede* expresarse como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, y $\mathbf{v}_3$.

CONJUNTOS GENERADORES

Si todo vector en un espacio vectorial puede expresarse como una combinación lineal de vectores en un conjunto S, entonces se dice que S es un **conjunto generador** del espacio vectorial.

Definición de conjunto generador de un espacio vectorial

Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ un subconjunto del espacio vectorial V. El conjunto S se denomina **conjunto generador** de V si *todo* vector en V puede expresarse como una combinación lineal de vectores en S. En estos casos se dice que S **genera** a V.

EJEMPLO 4 Ejemplos de conjuntos generadores

a. El conjunto $S = \{(1, 0, 0),(0, 1, 0), (0, 0,1)\}$ genera a R^3, ya que cualquier vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ en R^3 puede escribirse como

$$\mathbf{u} = u_1(1, 0, 0) + u_2(0, 1, 0) + u_3(0, 0, 1) = (u_1, u_2, u_3).$$

b. El conjunto $S = \{1, x, x^2\}$ genera a P_2, ya que cualquier polinomio $p(x) = a + bx + cx^2$ en P_2 puede expresarse como

$$\begin{aligned} p(x) &= a(1) + b(x) + c(x^2) \\ &= a + bx + cx^2. \end{aligned}$$

Los conjuntos generadores dados en el ejemplo 4 se denominan **conjuntos generadores estándar** de R^3 y P_2, respectivamente. (Enn la siguiente sección se ahondará más en estos conjuntos generadores). En el siguiente ejemplo se considera un conjunto generador no estándar de R^3.

EJEMPLO 5 Un conjunto generador de R^3

Demuestre que el conjunto $S = \{(1, 2, 3), (0, 1, 2), (–2, 0, 1)\}$ genera a R^3.

SOLUCIÓN

Sea $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ cualquier vector en R^3. Busque escalares c_1, c_2 y c_3 tales que

$$\begin{aligned} (u_1, u_2, u_3) &= c_1(1, 2, 3) + c_2(0, 1, 2) + c_3(-2, 0, 1) \\ &= (c_1 - 2c_3, 2c_1 + c_2, 3c_1 + 2c_2 + c_3). \end{aligned}$$

Esta ecuación vectorial produce el sistema

$$\begin{aligned} c_1 \phantom{{}+2c_2} - 2c_3 &= u_1 \\ 2c_1 + c_2 \phantom{{}+c_3} &= u_2 \\ 3c_1 + 2c_2 + c_3 &= u_3. \end{aligned}$$

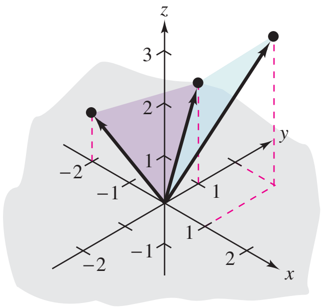
La matriz de coeficientes de este sistema tiene un determinante diferente de cero (intente verificar que es igual a -1) y, de la lista de condiciones equivalentes dada en la sección 3.3, se concluye que el sistema tiene solución única. Entonces, cualquier vector de R^3 puede expresarse como una combinación lineal de los vectores en S, y por tanto se concluye que S genera a R^3.

EJEMPLO 6 Un conjunto que no genera a R^3

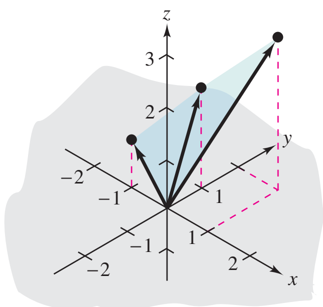
Del ejemplo 3 se sabe que el conjunto

$$S = \{(1, 2, 3), (0, 1, 2), (-1, 0, 1)\}$$

no genera a R^3 porque $\mathbf{w} = (1, -2, 2)$ está en R^3 y no puede ser expresado como una combinación lineal de los vectores en S.



$S_1 = \{(1, 2, 3), (0, 1, 2), (-2, 0, 1)\}$
Los vectores en S_1 no están en un plano común



$S_2 = \{(1, 2, 3), (0, 1, 2), (-1, 0, 1)\}$
Los vectores en S_2 están en un plano común

Figura 4.16

Al comparar los conjuntos de vectores en los ejemplos 5 y 6, se observa que los conjuntos son los mismos excepto por una diferencia aparentemente insignificante en el tercer vector.

$$S_1 = \{(1, 2, 3), (0, 1, 2), (-2, 0, 1)\} \qquad \text{Ejemplo 5}$$
$$S_2 = \{(1, 2, 3), (0, 1, 2), (-1, 0, 1)\} \qquad \text{Ejemplo 6}$$

Sin embargo, la diferencia mencionada es importante porque el conjunto S_1 genera a R^3, en tanto que el conjunto S_2 no. La razón de esta diferencia puede observarse en la figura 4.16. Los vectores en S_2 son coplanares; los vectores en S_1 no lo son.

Aunque el conjunto S_2 no genera a todo R^3, sí genera un subespacio de R^3: el plano en que están los tres vectores de S_2. Este subespacio se denomina espacio lineal **generado por S_2**, como se indica en la siguiente definición.

Definición de generador de un conjunto

Si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es un conjunto de vectores en un espacio vectorial V, entonces el **generador de S** es el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores en S,

$$\text{gen}(S) = \{c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k\colon c_1, c_2, \ldots, c_k \text{ son números reales}\}.$$

El generador de S es denotado por

$$\text{gen}(S) \quad \text{o} \quad \text{gen}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}.$$

Si $\text{gen}(S) = V$, entonces se dice que V es **generado** por $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ o que S **genera** a V.

El siguiente teorema establece que la generación de cualquier subconjunto de un espacio vectorial es un subespacio de V.

TEOREMA 4.7 gen(S) es un subespacio de V

Si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es un conjunto de vectores en un espacio vectorial V, entonces gen(S) es un subespacio de V. además, gen(S) es el menor subespacio de V que contiene a S, en el sentido de que cualquier otro subespacio de V que contenga a S debe contener a gen(S).

DEMOSTRACIÓN

Para demostrar que gen(S), el conjunto de todas las combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$, es un subespacio de V, demuestre que es cerrado bajo la suma y la multiplicación escalar. Considere dos vectores cualesquiera $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en gen(S),

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$$
$$\mathbf{v} = d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \cdots + d_k\mathbf{v}_k$$

donde

$$c_1, c_2, \ldots, c_k \quad \text{y} \quad d_1, d_2, \ldots, d_k$$

son escalares. Entonces

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (c_1 + d_1)\mathbf{v}_1 + (c_2 + d_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (c_k + d_k)\mathbf{v}_k$$

y

$$c\mathbf{u} = (cc_1)\mathbf{v}_1 + (cc_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (cc_k)\mathbf{v}_k$$

lo cual significa que $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $c\mathbf{u}$ también pertenecen a gen(S) porque es posible expresarlos como una combinación lineal de vectores en S. Por consiguiente, gen(S) es un subespacio de V. Se deja que usted demuestre que gen(S) es el menor subespacio de V que contiene a S (Véase el ejercicio 55.)

DEPENDENCIA LINEAL E INDEPENDENCIA LINEAL

Para un conjunto de vectores

$$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$$

en un espacio vectorial V, la ecuación vectorial

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

siempre tiene la **solución trivial**

$$c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_k = 0.$$

Sin embargo, a menudo también hay soluciones **no triviales**. así, en el ejemplo 1(a) se vio que en el conjunto

$$S = \{\overset{\mathbf{v}_1}{(1, 3, 1)}, \overset{\mathbf{v}_2}{(0, 1, 2)}, \overset{\mathbf{v}_3}{(1, 0, -5)}\}$$

el vector $\mathbf{v}_1$ puede expresarse como una combinación lineal de los otros dos como se muestra a continuación.

$$\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$$

La ecuación vectorial

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

tiene una solución no trivial en la cual *no todos los coeficientes son iguales a cero*:

$$c_1 = 1, \quad c_2 = -3, \quad c_3 = -1.$$

Esta característica se describe al decir que el conjunto S es **linealmente dependiente**. Si la *única* solución hubiese sido la trivial ($c_1 = c_2 = c_3 = 0$), entonces el conjunto S sería **linealmente independiente**. Este concepto es esencial en álgebra lineal, por lo que se plantea formalmente en la siguiente definición.

Definición de dependencia lineal e independencia lineal

Un conjunto de vectores $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ en un espacio vectorial V se denomina **linealmente independiente** si la ecuación vectorial.

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

tiene solamente la solución trivial,

$$c_1 = 0, c_2 = 0, \ldots, c_k = 0.$$

Si también hay soluciones no triviales, entonces S se denomina **linealmente dependiente**.

EJEMPLO 7 Ejemplos de conjuntos linealmente dependientes

a. El conjunto $S = \{(1, 2), (2, 4)\}$ en R^2 es linealmente dependiente porque

$$-2(1, 2) + (2, 4) = (0, 0).$$

b. El conjunto $S = \{(1, 0), (0, 1), (–2, 5)\}$ en R^2 es linealmente dependiente porque

$$2(1, 0) - 5(0, 1) + (-2, 5) = (0, 0).$$

c. El conjunto $S = \{(0, 0), (1, 2)\}$ en R^2 es linealmente dependiente porque

$$1(0, 0) + 0(1, 2) = (0, 0).$$

En el siguiente ejemplo se muestra un procedimiento para verificar si un conjunto de vectores es linealmente dependiente o independiente.

EJEMPLO 8 Comprobación de independencia lineal

Determine si el siguiente conjunto de vectores en R^3 es linealmente dependiente o independiente.

$$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \{(1, 2, 3), (0, 1, 2), (-2, 0, 1)\}$$

SOLUCIÓN

Para verificar la independencia o la dependencia lineal, se forma la ecuación vectorial

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}.$$

Si la única solución de esa ecuación es $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, entonces el conjunto S es linealmente independiente. En caso contrario, S es linealmente dependiente. al desarrollar esta ecuación se obtiene

$$c_1(1, 2, 3) + c_2(0, 1, 2) + c_3(-2, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

$$(c_1 - 2c_3, 2c_1 + c_2, 3c_1 + 2c_2 + c_3) = (0, 0, 0)$$

lo cual produce el siguiente sistema homogéneo de ecuaciones lineales en c_1, c_2 y c_3.

$$\begin{aligned} c_1 \qquad\quad - 2c_3 &= 0 \\ 2c_1 + \ \ c_2 \qquad\quad &= 0 \\ 3c_1 + 2c_2 + \ \ c_3 &= 0 \end{aligned}$$

La matriz aumentada de este sistema se reduce por eliminación de Gauss-Jordan como se muestra a continuación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Esto implica que la única solución es la trivial, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Por tanto, S es linealmente independiente.

Los pasos mostrados en el ejemplo 8 se resumen a continuación.

Comprobación para la independencia y dependencia lineal

Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, . . . , \mathbf{v}_k\}$ un conjunto de vectores en un espacio vectorial V. Para determinar si S es linealmente independiente o dependiente, se efectúan los pasos siguientes

1. A partir de la ecuación vectorial $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdot\cdot\cdot + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ escriba un sistema homogéneo de ecuaciones lineales en las variables $c_1, c_2, . . . ,$ y c_k.
2. Utilice la eliminación gaussiana para determinar si el sistema tiene una solución única.
3. Si el sistema tiene solamente la solución trivial, $c_1 = 0, c_2 = 0, . . . , c_k = 0$, entonces el conjunto S es linealmente independiente. Si el sistema también tiene soluciones no triviales, entonces S es linealmente dependiente.

ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

La transformación de imágenes es el proceso por el cual una imagen es transformada en otra al generar una secuencia de imágenes intermedias sintéticas. Dicha transformación tiene una amplia variedad de aplicaciones, que incluyen efectos especiales en películas, la simulación de resultados de curación de heridas y cirugía cosmética y para programas computacionales de progresión de edad. La transformación de una imagen recurre a un proceso llamado distorsión, en el cual una pieza de una imagen se distorsiona. Las matemáticas detrás de la distorsión y transformación pueden incluir la formación de una combinación lineal de los vectores linealmente independientes encuadran a una pieza triangular de una imagen, y realizar una *transformación afín* para formar vectores nuevos y una imagen distorsionada.

dundanim/www.shutterstock.com

EJEMPLO 9 Comprobación de independencia lineal

Determine si el siguiente conjunto de vectores en P_2 es linealmente independiente o dependiente.

$$S = \{\overset{\mathbf{v}_1}{1 + x - 2x^2}, \overset{\mathbf{v}_2}{2 + 5x - x^2}, \overset{\mathbf{v}_3}{x + x^2}\}$$

SOLUCIÓN

Al desarrollar la ecuación $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ se obtiene

$$c_1(1 + x - 2x^2) + c_2(2 + 5x - x^2) + c_3(x + x^2) = 0 + 0x + 0x^2$$
$$(c_1 + 2c_2) + (c_1 + 5c_2 + c_3)x + (-2c_1 - c_2 + c_3)x^2 = 0 + 0x + 0x^2.$$

Al igualar los coeficientes que corresponden a potencias iguales de x se llega al siguiente sistema homogéneo de ecuaciones lineales en c_1, c_2 y c_3.

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 \phantom{{}+c_3} &= 0 \\ c_1 + 5c_2 + c_3 &= 0 \\ -2c_1 - c_2 + c_3 &= 0 \end{aligned}$$

La matriz aumentada de este sistema se reduce por *eliminación de gaussiana* como se muestra a continuación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esto implica que el sistema tiene infinidad de soluciones. Por consiguiente, el sistema debe tener soluciones no triviales y puede concluirse que el conjunto S es linealmente dependiente.

Una solución no trivial es

$$c_1 = 2, \quad c_2 = -1, \quad \text{y} \quad c_3 = 3$$

lo que da como resultado la combinación lineal no trivial

$$(2)(1 + x - 2x^2) + (-1)(2 + 5x - x^2) + (3)(x + x^2) = 0.$$

EJEMPLO 10 Comprobación de independencia lineal

Determine si el siguiente conjunto de vectores en $M_{2,2}$ es linealmente independiente o dependiente.

$$S = \left\{ \overset{\mathbf{v}_1}{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}, \overset{\mathbf{v}_2}{\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}, \overset{\mathbf{v}_3}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}} \right\}$$

SOLUCIÓN

A partir de la ecuación $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ se obtiene

$$c_1\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

la cual produce el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned} 2c_1 + 3c_2 + c_3 &= 0 \\ c_1 \phantom{{}+ 3c_2 + c_3} &= 0 \\ 2c_2 + 2c_3 &= 0 \\ c_1 + c_2 \phantom{{}+ c_3} &= 0 \end{aligned}$$

Utilice la eliminación Gaussiana para demostrar que el sistema sólo tiene la solución trivial, lo que significa que el conjunto S es linealmente independiente.

EJEMPLO 11 **Comprobación de independencia lineal**

Determine si el siguiente conjunto de vectores en $M_{4,1}$ es linealmente independiente o dependiente.

$$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

SOLUCIÓN

A partir de la ecuación $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + c_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$, se obtiene

$$c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_4\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La cual produce el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 \qquad\qquad\qquad &= 0 \\ c_2 + 3c_3 + c_4 &= 0 \\ -c_1 \qquad + c_3 - c_4 &= 0 \\ 2c_2 - 2c_3 + 2c_4 &= 0 \end{aligned}$$

Utilice la eliminación gaussiana para demostrar que el sistema sólo tiene la solución trivial, lo que significa que el conjunto S es linealmente independiente.

Si un conjunto de vectores es linealmente dependiente, entonces, por definición, la ecuación $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ tiene una solución no trivial (una solución para la cual no todos los c_i son iguales a cero). Por ejemplo, si $c_1 \neq 0$, entonces se puede despejar $\mathbf{v}_1$ de esta ecuación y escribirlo como una combinación lineal de los demás vectores $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots,$ y $\mathbf{v}_k$. En otras palabras, el vector $\mathbf{v}_1$ *depende* de los demás vectores del conjunto. Esta propiedad es característica de un conjunto linealmente dependiente.

TEOREMA 4.8 Una Propiedad de los conjuntos linealmente dependientes

Un conjunto $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, $k \geq 2$, es linealmente dependiente si y sólo si por lo menos uno de los vectores $\mathbf{v}_j$ puede expresarse como una combinación lineal de los demás vectores en S.

DEMOSTRACIÓN

Para demostrar el teorema en una dirección, se supone que S es un conjunto linealmente dependiente. Entonces, existen escalares $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_k$ (no todos iguales a cero) tales que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + \cdot \cdot \cdot + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Debido a que uno de los coeficientes debe ser diferente de cero, ninguna generalidad se pierde al suponer $c_1 \neq 0$. Entones, al despejar $\mathbf{v}_1$ como una combinación lineal de los demás vectores se obtiene.

$$\begin{aligned} c_1\mathbf{v}_1 &= -c_2\mathbf{v}_2 - c_3\mathbf{v}_3 - \cdot \cdot \cdot - c_k\mathbf{v}_k \\ \mathbf{v}_1 &= -\frac{c_2}{c_1}\mathbf{v}_2 - \frac{c_3}{c_1}\mathbf{v}_3 - \cdot \cdot \cdot - \frac{c_k}{c_1}\mathbf{v}_k. \end{aligned}$$

De modo contrario, suponga que el vector $\mathbf{v}_1$ en S es una combinación lineal de los demás vectores. Es decir,

$$\mathbf{v}_1 = c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + \cdot \cdot \cdot + c_k\mathbf{v}_k.$$

Entonces la ecuación $-\mathbf{v}_1 = c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ tiene por lo menos un coeficiente, -1, diferente de cero y puede concluirse que S es linealmente dependiente.

EJEMPLO 12 Representación de un vector como una combinación lineal de otros vectores

En el ejemplo 9 se determinó que el conjunto

$$S = \{\overset{\mathbf{v}_1}{1 + x - 2x^2}, \overset{\mathbf{v}_2}{2 + 5x - x^2}, \overset{\mathbf{v}_3}{x + x^2}\}$$

es linealmente dependiente. Demuestre que uno de los vectores de este conjunto puede escribirse como una combinación lineal de los otros dos.

SOLUCIÓN

En el ejemplo 9 se determinó que la ecuación $c_1\mathbf{v}_1 = c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ produce el sistema

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 \phantom{{}+c_3} &= 0 \\ c_1 + 5c_2 + c_3 &= 0 \\ -2c_1 - c_2 + c_3 &= 0. \end{aligned}$$

Este sistema tiene un número infinito de soluciones, dadas por $c_3 = 3t$, $c_2 = -t$ y $c_1 = 2t$. al hacer $t = 1$ se obtiene la ecuación $2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$. Por consiguiente, $\mathbf{v}_2$ puede escribirse como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_3$ como se muestra a continuación.

$$\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_3$$

Al comprobar se obtiene

$$2 + 5x - x^2 = 2(1 + x - 2x^2) + 3(x + x^2) = 2 + 5x - x^2.$$

El teorema 4.8 tiene un corolario práctico que proporciona una prueba simple para determinar si *dos* vectores son linealmente dependientes. En el ejercicio 73 se pide que demuestre dicho corolario.

COMENTARIO

El vector cero siempre es un multiplo escalar de otro vector en un espacio vectorial.

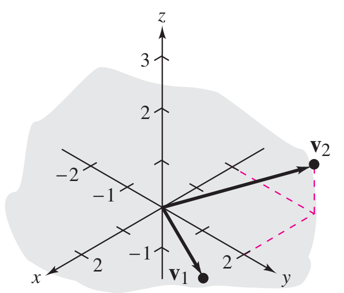
> **TEOREMA 4.8 Corolario**
>
> Dos vectores **u** y **v** en un espacio vectorial V son linealmente dependientes si y sólo si uno de ellos es un múltiplo escalar del otro.

EJEMPLO 13 Comprobación de la dependencia lineal de dos vectores

a. El conjunto $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{(1, 2, 0), (-2, 2, 1)\}$ es linealmente independiente porque $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ no son múltiplos escalares entre sí, como se observa en la figura 4.17 (a).

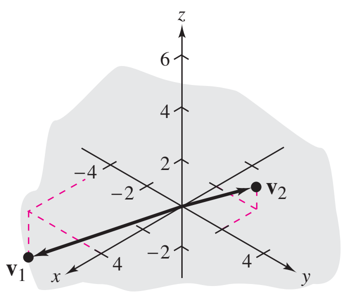
b. El conjunto $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{(4, -4, -2), (-2, 2, 1)\}$ es linealmente dependiente porque $\mathbf{v}_1 = -2\mathbf{v}_2$, como se muestra en la figura 4.17 (b).

a.



$S = \{(1, 2, 0), (-2, 2, 1)\}$
El conjunto S es linealmente independiente

b.



$S = \{(4, -4, -2), (-2, 2, 1)\}$
El conjunto S es linealmente dependiente

Figura 4.17

4.4 Ejercicios

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

Combinaciones lineales En los ejercicios 1 a 4, determine si cada vector puede expresarse como combinación lineal de los vectores en S.

1. $S = \{(2, -1, 3), (5, 0, 4)\}$

(a) $\mathbf{z} = (-1, -2, 2)$ (b) $\mathbf{v} = \left(8, -\frac{1}{4}, \frac{27}{4}\right)$

(c) $\mathbf{w} = (1, -8, 12)$ (d) $\mathbf{u} = (1, 1, -1)$

2. $S = \{(1, 2, -2), (2, -1, 1)\}$

(a) $\mathbf{z} = (-4, -3, 3)$ (b) $\mathbf{v} = (-2, -6, 6)$

(c) $\mathbf{w} = (-1, -22, 22)$ (d) $\mathbf{u} = (1, -5, -5)$

3. $S = \{(2, 0, 7), (2, 4, 5), (2, -12, 13)\}$

(a) $\mathbf{u} = (-1, 5, -6)$ (b) $\mathbf{v} = (-3, 15, 18)$

(c) $\mathbf{w} = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{2}\right)$ (d) $\mathbf{z} = (2, 20, -3)$

4. $S = \{(6, -7, 8, 6), (4, 6, -4, 1)\}$

(a) $\mathbf{u} = (-42, 113, -112, -60)$

(b) $\mathbf{v} = \left(\frac{49}{2}, \frac{99}{4}, -14, \frac{19}{2}\right)$

(c) $\mathbf{w} = \left(-4, -14, \frac{27}{2}, \frac{53}{8}\right)$

(d) $\mathbf{z} = \left(8, 4, -1, \frac{17}{4}\right)$

Combinaciones lineales En los ejercicios 5 a 8, para las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

en $M_{2,2}$, determine cuáles de las siguientes son combinaciones lineales de A y B.

5. $\begin{bmatrix} 6 & -19 \\ 10 & 7 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} -2 & 28 \\ 1 & -11 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Conjuntos generadores En los ejercicios 9 a 20, determine si el conjunto S genera a R^2. En caso negativo, proporcione una descripción geométrica del subespacio generado por S.

9. $S = \{(2, 1), (-1, 2)\}$ **10.** $S = \{(1, -1), (2, 1)\}$

11. $S = \{(5, 0), (5, -4)\}$ **12.** $S = \{(2, 0), (0, 1)\}$

13. $S = \{(-3, 5)\}$ **14.** $S = \{(1, 1)\}$

15. $S = \{(1, 3), (-2, -6), (4, 12)\}$

16. $S = \left\{(1, 2), (-2, -4), \left(\frac{1}{2}, 1\right)\right\}$

17. $S = \{(-1, 2), (2, -4)\}$ **18.** $S = \{(0, 2), (1, 4)\}$

19. $S = \{(-1, 4), (4, -1), (1, 1)\}$

20. $S = \{(-1, 2), (2, -1), (1, 1)\}$

Conjuntos generadores En los ejercicios 21 a 26, determine si el conjunto S genera a R^3. De no ser así, dé una descripción geométrica del subespacio generado por S.

21. $S = \{(4, 7, 3), (-1, 2, 6), (2, -3, 5)\}$

22. $S = \{(6, 7, 6), (3, 2, -4), (1, -3, 2)\}$

23. $S = \{(-2, 5, 0), (4, 6, 3)\}$

24. $S = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$

25. $S = \{(1, -2, 0), (0, 0, 1), (-1, 2, 0)\}$

26. $S = \{(1, 0, 3), (2, 0, -1), (4, 0, 5), (2, 0, 6)\}$

27. Determine si el conjunto $S = \{1, x^2, x^2 + 2\}$ genera a P_2.

28. Determine si el conjunto

$S = \{x^2 - 2x, x^3 + 8, x^3 - x^2, x^2 - 4\}$

genera P_2.

Pruebas para independencia lineal En los ejercicios 29 a 40, determine si el conjunto S es linealmente dependiente o independiente.

29. $S = \{(-2, 2), (3, 5)\}$

30. $S = \{(3, -6), (-1, 2)\}$

31. $S = \{(0, 0), (1, -1)\}$

32. $S = \{(1, 0), (1, 1), (2, -1)\}$

33. $S = \{(1, -4, 1), (6, 3, 2)\}$

34. $S = \{(6, 2, 1), (-1, 3, 2)\}$

35. $S = \{(1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3)\}$

36. $S = \left\{\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(3, 4, \frac{7}{2}\right), \left(-\frac{3}{2}, 6, 2\right)\right\}$

37. $S = \{(-4, -3, 4), (1, -2, 3), (6, 0, 0)\}$

38. $S = \{(1, 0, 0), (0, 4, 0), (0, 0, -6), (1, 5, -3)\}$

39. $S = \{(4, -3, 6, 2), (1, 8, 3, 1), (3, -2, -1, 0)\}$

40. $S = \{(0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\}$

Pruebas para independencia lineal En los ejercicios 41 a 44 determine cuáles de los siguientes conjuntos en P_2 son linealmente independientes.

41. $S = \{2 - x, 2x - x^2, 6 - 5x + x^2\}$

42. $S = \{x^2 - 1, 2x + 5\}$

43. $S = \{x^2 + 3x + 1, 2x^2 + x - 1, 4x\}$

44. $S = \{x^2, x^2 + 1\}$

Pruebas para independencia lineal En los ejercicios 45 a 48, determine si las siguientes matrices de $M_{2,2}$ forman un conjunto linealmente independiente.

45. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

46. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

47. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 22 & 23 \end{bmatrix}$

48. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -8 & -3 \\ -6 & 17 \end{bmatrix}$

Demostración de dependencia lineal En los ejercicios 49 a 52, demuestre que el conjunto dado es linealmente dependiente al hallar una combinación lineal no trivial (de vectores en el conjunto) cuya suma sea el vector nulo. Luego, exprese uno de los vectores del conjunto como una combinación lineal de los demás.

49. $S = \{(3, 4), (-1, 1), (2, 0)\}$

50. $S = \{(2, 4), (-1, -2), (0, 6)\}$

51. $S = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$

52. $S = \{(1, 2, 3, 4), (1, 0, 1, 2), (1, 4, 5, 6)\}$

53. ¿Para qué valores de t los siguientes conjuntos son linealmente independientes?
(a) $S = \{(t, 1, 1), (1, t, 1), (1, 1, t)\}$
(b) $S = \{(t, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 3t)\}$

54. ¿Para qué valores de t los siguientes conjuntos son linealmente independientes?
(a) $S = \{(t, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$
(b) $S = \{(t, t, t), (t, 1, 0), (t, 0, 1)\}$

55. Prueba Complete la demostración del teorema 4.7.

56. REMATE Por inspección, determine por qué cada uno de los siguientes conjuntos es linealmente dependiente
(a) $S = \{(1, -2), (2, 3), (-2, 4)\}$
(b) $S = \{(1, -6, 2), (2, -12, 4)\}$
(c) $S = \{(0, 0), (1, 0)\}$

Generación del mismo subespacio En los ejercicios 57 y 58, determine si los conjuntos S_1 y S_2 generan el mismo subespacio de R^3.

57. $S_1 = \{(1, 2, -1), (0, 1, 1), (2, 5, -1)\}$
$S_2 = \{(-2, -6, 0), (1, 1, -2)\}$

58. $S_1 = \{(0, 0, 1), (0, 1, 1), (2, 1, 1)\}$
$S_2 = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (2, 1, 1)\}$

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 59 y 60, determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, proporcione una razón o cite una expresión adecuada del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que muestre que la expresión no es cierta en todos los casos o cite del texto una expresión adecuada.

59. (a) Un conjunto de vectores $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$ en un espacio vectorial es linealmente dependiente si la ecuación vectorial $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ tiene sólo la solución trivial.
(b) El conjunto $S = \{(1, 0, 0, 0), (0, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ genera R^4.

60. (a) Un conjunto $S = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$, $k \geq 2$, es linealmente independiente si y sólo si al menos uno de los vectores $\mathbf{v}_j$ puede escribirse como una combinación lineal de los otros.
(b) Si un subconjunto S genera un espacio vectorial V, entonces todo vector en V puede escribirse como una combinación lineal de los vectores en S.

Demostración En los ejercicios 61 y 62, demuestre que el conjunto de vectores es linealmente independiente y genera a R^3

61. $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$

62. $B = \{(1, 2, 3), (3, 2, 1), (0, 0, 1)\}$

63. Demostración guiada Demuestre que un subconjunto no vacío de un conjunto finito de vectores linealmente independientes es linealmente independiente.

Inicio: necesita demostrar que un subconjunto de un conjunto linealmente independiente de vectores no puede ser linealmente dependiente.
(i) Suponga que S es un conjunto de vectores linealmente independientes. Sea T un subconjunto de S.
(ii) Si T es linealmente dependiente, entonces existen constantes no todas iguales a cero que satisfacen la ecuación vectorial $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$.
(iii) Use este hecho para deducir una contradicción y concluir que T es linealmente independiente.

64. Prueba Demuestre que si S_1 es un subconjunto no vacío del conjunto finito de S_2 y S_1 es linealmente dependiente, entonces también S_2 es linealmente dependiente.

65. Prueba Demuestre que cualquier conjunto de vectores que contenga al vector cero es linealmente dependiente.

66. Prueba Dado que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes, pero el conjunto $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n, \mathbf{v}\}$ es linealmente dependiente, demuestre que $\mathbf{v}$ es una combinación lineal de los $\mathbf{u}_i$.

67. Prueba Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ un conjunto de vectores linealmente independiente en un espacio vectorial V. Elimine el vector $\mathbf{v}_k$ de este conjunto y demuestre que el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}\}$ no puede generar a V.

68. Prueba Cuando V es generado por $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ y uno de estos vectores se puede escribir como una combinación lineal de los otros vectores $k - 1$, demuestre que el producto generado por estos vectores $k - 1$ también es V.

69. Prueba Sea $S = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ un conjunto linealmente independiente. Demuestre que el conjunto $\{\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}\}$ es linealmente independiente.

70. Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ tres vectores cualesquiera de un espacio vectorial V. Determine si el conjunto de vectores $\{\mathbf{v} - \mathbf{u}, \mathbf{w} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{w}\}$ es linealmente independiente o linealmente dependiente.

71. Prueba Sea A una matriz no singular de orden 3. Demuestre que si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es un conjunto linealmente independiente en $M_{3,1}$, entonces el conjunto $\{A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, A\mathbf{v}_3\}$ es linealmente independiente también. Explique, por medio de un ejemplo, por qué esto no se cumple si A es singular.

72. Escriba ¿Bajo qué condiciones un conjunto que consta de un solo vector es linealmente independiente?

73. Demostración Demuestre el corolario del teorema 4.8: dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son linealmente dependientes si y sólo si uno es múltiplo escalar de otro.

4.5 Base y dimensión

- Reconocer bases en los espacios vectoriales R^n, P_n y $M_{m,n}$.
- Encontrar la dimensión de un espacio vectorial.

BASE PARA UN ESPACIO VECTORIAL

En esta sección se continúa el estudio de los conjuntos generadores. En particular, se considerarán conjuntos generadores (en un espacio vectorial) que sean linealmente independientes y que, además, generen todo el espacio. Este tipo de conjuntos forma una **base** del espacio vectorial.

COMENTARIO

Esta definición establece que una base posee dos características. Una base S debe tener *suficientes vectores* para generar V, pero *no tantos* de modo que uno de ellos pueda escribirse como una combinación lineal de los demás vectores en S.

Definición de base

Un conjunto de vectores $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ en un espacio vectorial V se denomina **base** de V si se cumplen las siguientes condiciones.

1. S genera a V. **2.** S es linealmente independiente.

Esta definición no implica que todo espacio vectorial tiene una base que consta de un número finito de vectores. Sin embargo, en este texto, el análisis de bases está restringido a aquéllas que están formadas por un número finito de vectores. Además, si un espacio vectorial V tiene una base que consta de un número finito de vectores, entontes V es de **dimensión finita**. En caso contrario, V es de **dimensión infinita**. [El espacio vectorial P de *todos* los polinomios es de dimensión infinita, así como el espacio vectorial $C(-\infty, \infty)$ de todas las funciones continuas definidas sobre la recta real.] El espacio vectorial $V = \{\mathbf{0}\}$ sólo tiene al vector nulo y es de dimensión finita.

EJEMPLO 1 **La base estándar de R^3**

Demuestre que el siguiente conjunto es una base de R^3.

$$S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

SOLUCIÓN

En el ejemplo 4 (a) de la sección 4.4 se demostró que S genera R^3. Además, S es linealmente independiente porque la ecuación vectorial

$$c_1(1, 0, 0) + c_2(0, 1, 0) + c_3(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

tiene solamente la solución trivial

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0.$$

(intente comprobar esto.) Por tanto, S es una base de R^3 (véase la figura 4.18).

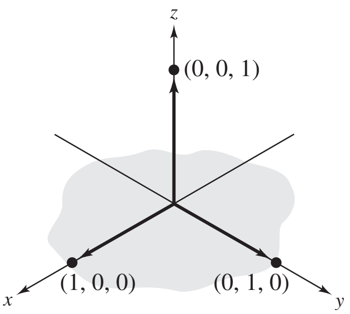


Figura 4.18

La base $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ se denomina **base estándar** de R^3. Este resultado puede generalizarse para el espacio n-dimensional. Es decir, los vectores

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1, 0, \ldots, 0) \\ \mathbf{e}_2 &= (0, 1, \ldots, 0) \\ &\vdots \\ \mathbf{e}_n &= (0, 0, \ldots, 1) \end{aligned}$$

forman una base de R^n denominada **base estándar** de R^n.

En los dos ejemplos siguientes se describen bases no estándar de R^2 y R^3.

EJEMPLO 2 Una base no estándar de R^2

Demuestre que el conjunto

$$S = \{\overset{\mathbf{v}_1}{(1, 1)}, \overset{\mathbf{v}_2}{(1, -1)}\}$$

es una base de R^2.

SOLUCIÓN

De acuerdo con la definición de una base para un espacio vectorial, debe demostrar que S genera a R^2 y que S es linealmente independiente.

Para comprobar que S genera a R^2, sea

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2)$$

que representa un vector arbitrario de R^2. Para demostrar que $\mathbf{x}$ puede expresarse como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, considere la ecuación

$$\begin{aligned} c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 &= \mathbf{x} \\ c_1(1, 1) + c_2(1, -1) &= (x_1, x_2) \\ (c_1 + c_2, c_1 - c_2) &= (x_1, x_2). \end{aligned}$$

Al igualar las componentes correspondientes resulta el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= x_1 \\ c_1 - c_2 &= x_2 \end{aligned}$$

Dado que la matriz de coeficientes de este sistema tiene un determinante diferente de cero, se sabe que el sistema tiene solución única. Por consiguiente, puede concluir que S genera a R^2.

Para demostrar que S es linealmente independiente, considere la siguiente combinación lineal.

$$\begin{aligned} c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 &= \mathbf{0} \\ c_1(1, 1) + c_2(1, -1) &= (0, 0) \\ (c_1 + c_2, c_1 - c_2) &= (0, 0). \end{aligned}$$

Al igualar las componentes correspondientes resulta el siguiente sistema homogéneo.

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1 - c_2 &= 0. \end{aligned}$$

Como la matriz de coeficientes de este sistema tiene un determinante diferente de cero, se sabe que la única solución del sistema es la solución trivial,

$$c_1 = c_2 = 0.$$

Por lo tanto, puede concluir que S es linealmente independiente.

Por tanto, S es una base para R^2 porque es un conjunto linealmente independiente que genera a R^2.

EJEMPLO 3 Una base no estándar de R^3

A partir de los ejemplos 5 y 8 de la sección anterior se sabe que

$$S = \{(1, 2, 3), (0, 1, 2), (-2, 0, 1)\}$$

genera a R^3 y que es linealmente independiente. Por tanto, es una base de R^3.

EJEMPLO 4 **Una base para polinomios**

Demuestre que el espacio vectorial P_3 tiene la base

$$S = \{1, x, x^2, x^3\}.$$

SOLUCIÓN

Es evidente que S genera a P_3 porque el espacio generado por S consta de todos los polinomios de la forma

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, \quad a_0, a_1, a_2 \text{ y } a_3 \text{ son reales}$$

que es precisamente la forma de todos los polinomios en P_3.

Para verificar la independencia lineal de S, recuerde que el vector nulo $\mathbf{0}$ en P_3 es el polinomio $\mathbf{0}(x) = 0$ para toda x. Por tanto, la prueba de independencia lineal produce la ecuación

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = \mathbf{0}(x) = 0, \quad \text{para toda } x.$$

Se dice que este polinomio de tercer grado es *idénticamente igual a cero*. Del álgebra, usted sabe que para que un polinomio sea idénticamente igual a cero todos sus coeficientes deben ser nulos; es decir,

$$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0.$$

Por tanto, S es linealmente independiente y, en consecuencia, es una base de P_3.

COMENTARIO

La base $S = \{1, x, x^2, x^3\}$ se denomina **base estándar** de P_3. De manera semejante, la **base estándar** de P_n es

$$S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}.$$

EJEMPLO 5 **Una base de $M_{2,2}$**

El conjunto

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

es una base $M_{2,2}$. Ese conjunto se denomina **base estándar** de $M_{2,2}$. De manera semejante, la base estándar del espacio vectorial $M_{m,n}$ consta de las mn distintas matrices de $m \times n$ que tienen sólo un 1 y todos los demás elementos son iguales a cero.

TEOREMA 4.9 Unicidad de la representación de la base

Si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de un espacio vectorial V, entonces todo vector en V puede escribirse de una y sólo una forma como combinación lineal de vectores en S.

DEMOSTRACIÓN

La parte de la demostración de existencia es directa. Es decir, debido a que S genera a V, se sabe que un vector $\mathbf{u}$ arbitrario en V puede expresarse como $\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n$.

Para demostrar la unicidad (que un vector dado puede representarse sólo de una manera), suponga que $\mathbf{u}$ tiene otra representación

$$\mathbf{u} = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \cdots + b_n\mathbf{v}_n.$$

al restar la segunda representación de la primera resulta

$$\mathbf{u} - \mathbf{u} = (c_1 - b_1)\mathbf{v}_1 + (c_2 - b_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (c_n - b_n)\mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

Ya que S es linealmente independiente, entonces la única solución de esta ecuación es la trivial,

$$c_1 - b_1 = 0, \quad c_2 - b_2 = 0, \quad \ldots, \quad c_n - b_n = 0$$

lo cual significa que $c_i = b_i$ para toda $i = 1, 2, \ldots, n$. Por tanto, $\mathbf{u}$ solamente tiene una representación para la base dada S.

EJEMPLO 6 Unicidad de la representación de la base

Sea $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ cualquier vector en R^3. Demuestre que la ecuación $\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$ tiene una única solución para la base $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \{(1, 2, 3), (0, 1, 2), (-2, 0, 1)\}$.

SOLUCIÓN

De la ecuación

$$\begin{aligned}(u_1, u_2, u_3) &= c_1(1, 2, 3) + c_2(0, 1, 2) + c_3(-2, 0, 1)\\ &= (c_1 - 2c_3, 2c_1 + c_2, 3c_1 + 2c_2 + c_3)\end{aligned}$$

se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} c_1 \qquad\quad - 2c_3 &= u_1\\ 2c_1 + \ \ c_2 \qquad\quad &= u_2\\ 3c_1 + 2c_2 + \ \ c_3 &= u_3 \end{aligned} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3\end{bmatrix}}_{\mathbf{c}} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix}}_{\mathbf{u}}$$

Como la matriz A es invertible, se sabe que este sistema tiene una única solución dada por $\mathbf{c} = A^{-1}\mathbf{u}$. Al despejar A^{-1} se obtiene

$$\begin{aligned} c_1 &= -u_1 + 4u_2 - 2u_3\\ c_2 &= \ \ 2u_1 - 7u_2 + 4u_3\\ c_3 &= -u_1 + 2u_2 - \ \ u_3. \end{aligned}$$

Por ejemplo, el vector $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$ puede representarse únicamente como una combinación lineal de $-\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$ como sigue

Ahora, se presentarán dos importantes teoremas concernientes a las bases.

TEOREMA 4.10 Bases y dependencia lineal

Si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de un espacio vectorial V, entonces todo conjunto que contiene más de n vectores en V es linealmente dependiente.

DEMOSTRACIÓN

Sea $S_1 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_m\}$ cualquier conjunto de m vectores en V, donde $m > n$. Para demostrar que S_1 es linealmente *dependiente*, es necesario encontrar escalares $k_1, k_2, \ldots, k_m$ (no todos cero) tales que

$$k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + \cdots + k_m\mathbf{u}_m = \mathbf{0}. \qquad \text{Ecuación 1}$$

Como S es una base de V, puede concluirse que cada $\mathbf{u}_i$ es una combinación lineal de vectores en S

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= c_{11}\mathbf{v}_1 + c_{21}\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{n1}\mathbf{v}_n\\ \mathbf{u}_2 &= c_{12}\mathbf{v}_1 + c_{22}\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{n2}\mathbf{v}_n\\ &\ \ \vdots\\ \mathbf{u}_m &= c_{1m}\mathbf{v}_1 + c_{2m}\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{nm}\mathbf{v}_n. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación 1 y reagrupando términos, produce

$$d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \cdots + d_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

donde $d_i = c_{i1}k_1 + c_{i2}k_2 + \ldots + c_{im}k_m$. Ya que los $\mathbf{v}_i$ forman un conjunto linealmente independiente, $d_i = 0$. Así, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} c_{11}k_1 + c_{12}k_2 + \cdots + c_{1m}k_m &= 0\\ c_{21}k_1 + c_{22}k_2 + \cdots + c_{2m}k_m &= 0\\ &\ \ \vdots\\ c_{n1}k_1 + c_{n2}k_2 + \cdots + c_{nm}k_m &= 0 \end{aligned}$$

Pero este sistema homogéneo tiene menos ecuaciones que variables $k_1, k_2, \ldots, k_m$ y, por el teorema 1.1, se sabe que debe tener soluciones *no triviales*. Por consiguiente, S_1 es linealmente dependiente.

EJEMPLO 7 Conjuntos linealmente dependientes en R^3 y P_3

a. Dado que R^3 tiene una base que consta de tres vectores, entonces el conjunto

$$S = \{(1, 2, -1), (1, 1, 0), (2, 3, 0), (5, 9, -1)\}$$

debe ser linealmente dependiente.

b. Como P_3 tiene una base que consta de cuatro vectores, entonces el conjunto

$$S = \{1, 1 + x, 1 - x, 1 + x + x^2, 1 - x + x^2\}$$

debe ser linealmente dependiente.

Como la base estándar de R^n consta de n vectores, por el teorema 4.10 se concluye que todo conjunto de vectores en R^n que contenga más de n vectores debe ser linealmente dependiente. Otra consecuencia importante del teorema 4.10 se da en el siguiente teorema.

TEOREMA 4.11 Número de vectores en una base

Si un espacio vectorial V tiene una base con n vectores, entonces toda base de V tiene n vectores.

DEMOSTRACIÓN

Sea $S_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, . . . \mathbf{v}_m\}$ la base dada de V y sea $S_2 = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, . . . \mathbf{u}_m\}$ cualquier otra base de V. Dado que S_1 es una base y S_2 es linealmente independiente, entonces el teorema 4.10 implica que $m \le n$. De manera semejante, $n \le m$ porque S_1 es linealmente independiente y S_2 es una base. En consecuencia, $n = m$.

EJEMPLO 8 Conjuntos generadores y bases

Utilice el teorema 4.11 para explicar por qué cada uno de los enunciados siguientes es verdadero.

a. El conjunto $S = \{(3, 2, 1),(7, -1, 4)\}$ no es una base de R^3.

b. El conjunto $S_2 = \{x + 2, x^2, x^3 - 1, 3x + 1, x^2 - 2x + 3\}$ no es una base de P_3.

SOLUCIÓN

a. La base estándar de R^3 tiene tres vectores y S_1 tiene sólo dos. Por tanto, por el teorema 4.11, S_1 no puede ser una base de R^3.

b. La base estándar de P_3, $S = \{1, x, x^2, x^3\}$, tiene cuatro elementos. Así, por el teorema 4.11, el conjunto S_2 tiene demasiados elementos para ser una base de P_3.

ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

El modelo de color RGB usa la teoría de que todos los colores visibles son combinaciones de los colores rojo (**r**), verde (**g**) y azul (**b**), conocidos como los colores aditivos primarios. Usando la base estándar para R^3, donde $\mathbf{r} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{g} = (0, 1, 0)$ y $\mathbf{b} = (0, 0, 1)$, cualquier color visible puede representarse como una combinación lineal $c_1\mathbf{r} + c_2\mathbf{g} + c_3\mathbf{b}$ de los colores aditivos primarios. Los coeficientes c_i son son valores entre 0 y un máximo a especificado, incluido. Cuando $c_1 = c_2 = c_3$, el color está en escala de grises, con ci = 0 que representa negro y $c_i = a$ que representa blanco. El modelo de color RGB se usa comúnmente en monitores de computadoras, teléfonos inteligentes, televisiones y otros equipos electrónicos.

Chernetskiy/Shutterstock.com

DIMENSIÓN DE UN ESPACIO VECTORIAL

Por el teorema 4.11, usted sabe que si un espacio vectorial V tiene una base que consta de n vectores, entonces toda otra base del espacio también tiene n vectores. El número n se denomina **dimensión** de V.

Definición de dimensión de un espacio vectorial

Si un espacio vectorial V tiene una base que consta de n vectores, entonces el número n se denomina **dimensión** de V y se denota por $\dim(V) = n$. Si V consta solamente del vector nulo, entonces la dimensión de V se define como cero.

La definición anterior le permite observar las características de las dimensiones de algunos espacios vectoriales conocidos. En cada caso, la dimensión se determina contando simplemente el número de vectores que hay en la base normal.

1. La dimensión de R^n con las operaciones estándar es n.
2. La dimensión de P_n con las operaciones estándar es $n + 1$.
3. La dimensión de M_{mn} con las operaciones estándar es mn.

Si W es un subespacio de un espacio vectorial n-dimensional, entonces se puede demostrar que la dimensión de W es finita y que la dimensión de W es menor o igual que n (Véase el ejercicio 75). En los tres ejemplos siguientes verá una técnica para determinar la dimensión de un subespacio. Básicamente, puede determinarse la dimensión al hallar un conjunto de vectores linealmente independientes que genere el subespacio. Este conjunto es una base del subespacio; la dimensión del subespacio es el número de vectores que hay en la base.

EJEMPLO 9 Determinación de la dimensión de un subespacio

Determine la dimensión de cada subespacio de R^3.

a. $W = \{(d, c - d, c)\text{: } c \text{ y } d \text{ son números reales}\}$

b. $W = \{(2b, b, 0)\text{: } b \text{ es un número real}\}$

SOLUCIÓN

COMENTARIO

En el ejemplo 9(a), el subespacio W es un plano bidimensional en R^3 determinado por los vectores (0, 1, 1) y (1, – 1, 0). En el ejemplo 9(b), el subespacio es una recta unidimensional.

a. Al escribir el vector representativo $(d, c - d, c)$ como

$$(d, c - d, c) = (0, c, c) + (d, -d, 0) = c(0, 1, 1) + d(1, -1, 0)$$

aplicando las técnicas descritas en la sección anterior, se puede demostrar que este conjunto es linealmente independiente. Por tanto, es una base de W y puede concluirse que W es un subespacio bidimensional de R^3.

b. Al escribir el vector representativo $(2b, b, 0)$ como $(2b, b, 0) = b(2, 1, 0)$, observe que W es generado por el conjunto $S = \{(2, 1, 0)\}$. Así, W es un subespacio unidimensional de R^3.

EJEMPLO 10 Determinación de la dimensión de un subespacio

Encuentre la dimensión del subespacio W de R^4 generado por

$$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \{(-1, 2, 5, 0), (3, 0, 1, -2), (-5, 4, 9, 2)\}.$$

SOLUCIÓN

Aunque W es generado por el conjunto S, éste no es una base de W porque es un conjunto linealmente dependiente. Específicamente, $\mathbf{v}_3$ puede expresarse como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ en la forma siguiente. $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ Esto significa que W es generado por el conjunto $S_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$. Además, S_1 es linealmente independiente, ya que ningún vector es un múltiplo escalar de otro y usted puede concluir que la dimensión de W es 2.

EJEMPLO 11 Determinación de la dimensión de un subespacio

Sea W el subespacio de todas las matrices simétricas en $M_{2,2}$.¿Cuál es la dimensión de W?

SOLUCIÓN

Toda matriz simétrica de 2×2 tiene la forma

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente, el conjunto

$$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \{(-1, 2, 5, 0), (3, 0, 1, -2), (-5, 4, 9, 2)\}.$$

genera a W. Además, puede demostrarse que S es linealmente independiente y llegar a la conclusión de que la dimensión de W es 3.

Por lo general, para concluir que un conjunto $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_n\}$ es una base de un espacio vectorial V, es necesario demostrar que S satisface dos condiciones: que S genera V y es linealmente independiente. Sin embargo, si se sabe que V tiene dimensión de n, entonces el siguiente teorema establece que no es necesario verificar ambas condiciones. Basta comprobar una de las dos. La demostración se deja como ejercicio para usted (Véase el ejercicio 74).

TEOREMA 4.12 Comprobación de una base en un espacio *n*-dimensional

Sea V un espacio vectorial de dimensión n.

1. Si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes en V, entonces S es una base de V.
2. Si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ genera a V, entonces S es una base de V.

EJEMPLO 12 Verificación de una base en un espacio *n*-dimensional

Demuestre que el siguiente conjunto de vectores es una base de $M_{5,1}$

$$S = \left\{ \overset{\mathbf{v}_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}}, \overset{\mathbf{v}_2}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}}, \overset{\mathbf{v}_3}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}}, \overset{\mathbf{v}_4}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}}, \overset{\mathbf{v}_5}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}} \right\}$$

SOLUCIÓN

Como S consta de cinco vectores y la dimensión de $M_{5,1}$ es 5, puede aplicar el teorema 4.12 para verificar que S es una base al demostrar linealmente independiente o que S genera a $M_{5,1}$. Para demostrar lo primero, se forma la ecuación vectorial $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + c_4\mathbf{v}_4 + c_5\mathbf{v}_5 = \mathbf{0}$, que produce el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo.

$$\begin{aligned} c_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &= 0 \\ 2c_1 + c_2 \qquad\qquad\qquad\qquad &= 0 \\ -c_1 + 3c_2 + 2c_3 \qquad\qquad &= 0 \\ 3c_1 - 2c_2 - c_3 + 2c_4 \qquad &= 0 \\ 4c_1 + 3c_2 + 5c_3 - 3c_4 - 2c_5 &= 0 \end{aligned}$$

Como de este sistema tiene como única solución la trivial, S debe ser linealmente independiente. Así, por el teorema 4.12, S es una base de $M_{5,1}$.

4.5 Ejercicios

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

Escribir la base estándar En los ejercicios 1 a 6, escriba la base estándar para el espacio vectorial dado.

1. R^6
2. R^4
3. $M_{2,4}$
4. $M_{4,1}$
5. P_4
6. P_2

Escriba En los ejercicios 7 a 14, explique por qué S no es una base de R^2.

7. $S = \{(1, 2), (1, 0), (0, 1)\}$
8. $S = \{(-1, 2), (1, -2), (2, 4)\}$
9. $S = \{(-4, 5), (0, 0)\}$
10. $S = \{(2, 3), (6, 9)\}$
11. $S = \{(6, -5), (12, -10)\}$
12. $S = \{(4, -3), (8, -6)\}$
13. $S = \{(-3, 2)\}$
14. $S = \{(-1, 2)\}$

Escriba En los ejercicios 15 a 20, explique por qué S no es una base de R^3.

15. $S = \{(1, 3, 0), (4, 1, 2), (-2, 5, -2)\}$
16. $S = \{(2, 1, -2), (-2, -1, 2), (4, 2, -4)\}$
17. $S = \{(7, 0, 3), (8, -4, 1)\}$
18. $S = \{(1, 1, 2), (0, 2, 1)\}$
19. $S = \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$
20. $S = \{(6, 4, 1), (3, -5, 1), (8, 13, 6), (0, 6, 9)\}$

Escriba En los ejercicios 21 a 24, explique por qué S no es una base de P_2.

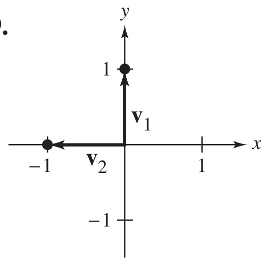
21. $S = \{1, 2x, x^2 - 4, 5x\}$
22. $S = \{2, x, x + 3, 3x^2\}$
23. $S = \{1 - x, 1 - x^2, 3x^2 - 2x - 1\}$
24. $S = \{6x - 3, 3x^2, 1 - 2x - x^2\}$

Escriba En los ejercicios 25 a 28, explique por qué S no es una base de $M_{2,2}$.

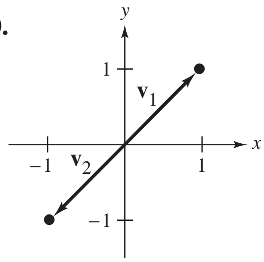
25. $S = \left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\right\}$
26. $S = \left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\right\}$
27. $S = \left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}8 & -4\\-4 & 3\end{bmatrix}\right\}$
28. $S = \left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\right\}$

Determinar si un conjunto es una base En los ejercicios 29 a 32, determine si el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es una base de R^2.

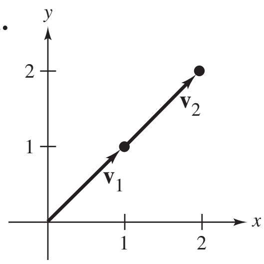
29.



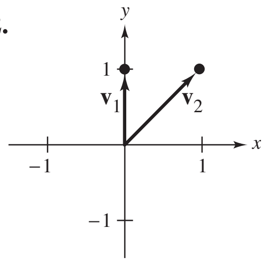
30.



31.



32.



Determinar si un conjunto es una base En los ejercicios 33 a 40, determine si S es una base del espacio vectorial indicado.

33. $S = \{(3, -2), (4, 5)\}$ para R^2
34. $S = \{(1, 2), (1, -1)\}$ para R^2
35. $S = \{(1, 5, 3), (0, 1, 2), (0, 0, 6)\}$ para R^3
36. $S = \{(2, 1, 0), (0, -1, 1)\}$ para R^3
37. $S = \{(0, 3, -2), (4, 0, 3), (-8, 15, -16)\}$ para R^3
38. $S = \{(0, 0, 0), (1, 5, 6), (6, 2, 1)\}$ para R^3
39. $S = \{(-1, 2, 0, 0), (2, 0, -1, 0), (3, 0, 0, 4), (0, 0, 5, 0)\}$ para R^4
40. $S = \{(1, 0, 0, 1), (0, 2, 0, 2), (1, 0, 1, 0), (0, 2, 2, 0)\}$ para R^4

Determinar si un conjunto es una base En los ejercicios 41 a 44, determine si S es una base de P_3.

41. $S = \{t^3 - 2t^2 + 1, t^2 - 4, t^3 + 2t, 5t\}$
42. $S = \{4t - t^2, 5 + t^3, 3t + 5, 2t^3 - 3t^2\}$
43. $S = \{4 - t, t^3, 6t^2, t^3 + 3t, 4t - 1\}$
44. $S = \{t^3 - 1, 2t^2, t + 3, 5 + 2t + 2t^2 + t^3\}$

Determinar si un conjunto es una base En los ejercicios 45 y 46, determine si S es una base de $M_{2,2}$.

45. $S = \left\{\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 4\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\3 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\2 & 0\end{bmatrix}\right\}$
46. $S = \left\{\begin{bmatrix}1 & 2\\-5 & 4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & -7\\6 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4 & -9\\11 & 12\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}12 & -16\\17 & 42\end{bmatrix}\right\}$

Determinar si un conjunto es una base En los ejercicios 47 a 50, determine si S es una base de R^3. Si es así escriba $\mathbf{u} = (8, 3, 8)$ como una combinación lineal de los vectores en S.

47. $S = \{(4, 3, 2), (0, 3, 2), (0, 0, 2)\}$

48. $S = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$

49. $S = \{(0, 0, 0), (1, 3, 4), (6, 1, -2)\}$

50. $S = \left\{\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{2}, 1\right), \left(1, \frac{3}{2}, 0\right), (2, 12, 6)\right\}$

Determinar la dimensión de un espacio vectorial En los ejercicios 51 a 56, determine la dimensión del espacio vectorial dado.

51. R^6

52. R

53. P_7

54. P_4

55. $M_{2,3}$

56. $M_{3,2}$

57. Determine una base de $D_{3,3}$ (el espacio vectorial de todas las matrices diagonales de 3×3). ¿Cuál es la dimensión de este espacio vectorial?

58. Encuentre una base del espacio vectorial de todas las matrices simétricas de 3×3. ¿Cuál es la dimensión de este espacio vectorial?

59. Encuentre todos los subconjuntos del conjunto

$S = \{(1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$

que forman una base para R^2.

60. Encuentre todos los subconjuntos del conjunto

$S = \{(1, 3, -2), (-4, 1, 1), (-2, 7, -3), (2, 1, 1)\}$

que forman una base para R^3.

61. Encuentre una base de R^2 que contenga al vector (2, 2).

62. Encuentre una base de R^3 que contenga a los vectores (1, 0, 2) y (0, 1, 1).

Descripción geométrica, base y dimensión En los ejercicios 63 y 64, (a) proporcione una descripción geométrica de, (b) encuentre una base, y (c) determine la dimensión del subespacio W de R^2.

63. $W = \{(2t, t)\colon t \text{ es un número real}\}$

64. $W = \{(0, t)\colon t \text{ es un número real}\}$

Descripción geométrica, base y dimensión En los ejercicios 65 y 66, (a) proporcione una descripción geométrica de, (b) encuentre una base para, y (c) determine la dimensión del subespacio W de R^3.

65. $W = \{(2t, t, -t)\colon t \text{ es un número real}\}$

66. $W = \{(2s - t, s, t)\colon s \text{ y } t \text{ son números reales}\}$

Base y dimensión En los ejercicios 67 a 70 encuentre (a) una base para omitir y (b) la dimensión del subespacio W de R^4.

67. $W = \{(2s - t, s, t, s)\colon s \text{ y } t \text{ son números reales}\}$

68. $W = \{(5t, -3t, t, t)\colon t \text{ es un número real}\}$

69. $W = \{(0, 6t, t, -t)\colon t \text{ es un número real}\}$

70. $W = \{(s + 4t, t, s, 2s - t)\colon s \text{ y } t \text{ son números reales}\}$

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 71 y 72, determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, proporcione una razón o cite una expresión adecuada del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que muestre que la expresión no es cierta en todos los casos o cite del texto una expresión adecuada.

71. (a) Si $\dim(V) = n$, entonces hay un conjunto de $n - 1$ vectores en V que generan a V.

(b) Si $\dim(V) = n$, entonces hay un conjunto de $n + 1$ vectores en V que generan a V.

72. (a) Si $\dim(V) = n$, entonces cualquier conjunto de $n + 1$ vectores en V deber ser linealmente dependiente.

(b) Si $\dim(V) = n$, entonces cualquier conjunto de $n - 1$ vectores en V deber ser linealmente independiente.

73. Prueba Demuestre que si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de un espacio vectorial V y c es un escalar no nulo, entonces el conjunto $S_1 = \{c\mathbf{v}_1, c\mathbf{v}_2, \ldots, c\mathbf{v}_n\}$ también es una base de V.

74. Prueba Demuestre el teorema 4.12

75. Prueba Demuestre que si W es un subespacio de un espacio vectorial V de dimensión finita, entonces $\dim(W) \leq \dim(V)$.

76. REMATE

(a) Un conjunto S_1 consta de dos vectores de la forma $u = (u_1, u_2, u_3)$. Explique por qué S_1 no es una base de R_3.

(b) Un conjunto S_2 consta de cuatro vectores de la forma $u = (u_1, u_2, u_3)$. Explique por qué S_2 no es una base de R_3.

(c) Un conjunto S_3 consta de tres vectores de la forma $u = (u_1, u_2, u_3)$. Determine las condiciones bajo las cuales S_1 es una base de R_3.

77. Prueba Sea S un conjunto de vectores linealmente independiente del espacio vectorial V de dimensión finita. Demuestre que existe una base para V que contenga a S.

78. Demostración guiada Sea S un conjunto generador para el espacio vectorial V de dimensión finita. Demuestre que existe un subconjunto S' de S que forma una base para V.

Inicio: S es un conjunto generador, pero quizá no sea una base debido a que puede ser linealmente dependiente. Usted necesita eliminar los vectores extra para que el subconjunto S' sea un conjunto generador y sea también linealmente independiente.

(i) Si S es un conjunto linealmente independiente, no hay nada que demostrar. En caso contrario, elimine algún vector $\mathbf{v}$ de S que sea una combinación lineal de otros vectores en S_1.

(ii) Designe este conjunto como S_1. Si S_1 es linealmente independiente, no hay nada que demostrar. En caso contrario, continúe eliminando vectores dependientes hasta que se produzca un subconjunto S' linealmente independiente.

(iii) Concluya que este subconjunto es el conjunto mínimo generador S'.

4.6 Rango de una matriz y sistemas de ecuaciones lineales

- Determinar una base para el espacio renglón, una base del espacio columna y el rango de una matriz.
- Determinar el espacio nulo de una matriz.
- Determinar la solución de un sistema consistente $Ax = b$ en la forma $x_p + x_h$.

ESPACIO RENGLÓN, ESPACIO COLUMNA Y RANGO DE UNA MATRIZ

En esta sección se estudia el espacio vectorial generado por los **vectores renglón** (o por los **vectores columna**) de una matriz. Luego verá cómo se relacionan estos espacios con las soluciones de sistema de ecuaciones lineales.

Para empezar, necesita saber algo de terminología. Para una matriz A de $m \times n$, las n-adas correspondientes a los renglones de A se denominan **vectores renglón** de A.

Vectores columna de A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}) \\ (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}) \\ \vdots \\ (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}) \end{matrix}$$

De manera similar, las columnas de A se denominan **vectores columna** de A. Encontrará muy útil conservar la notación de columna para estos vectores columna.

Vectores columna de A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 1 Vectores renglón y vectores columna

Para la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, los vectores renglón son (0, 1, –1) y (–2, 3, 4), y los vectores columna son $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

En el ejemplo 1, observe que para una matriz A de $m \times n$ los vectores renglón son vectores en R^n y los vectores columna son vectores en R^m. Esto conduce a la siguiente definición de **espacio renglón** y **espacio columna** de una matriz.

Definición de espacio renglón y espacio columna de una matriz

Sea A una matriz de $m \times n$.

1. El **espacio renglón** de A es el subespacio de R^n generado por los vectores renglón de A.
2. El **espacio columna** de A es el subespacio de R^m generado por los vectores columna de A.

Recuerde que dos matrices son equivalentes por renglones si una puede obtenerse a partir de la otra al aplicar operaciones elementales en los renglones. El siguiente teorema establece que las matrices equivalentes por renglones tienen el mismo espacio renglón.

COMENTARIO

Observe que el teorema 4.13 establece que el espacio renglón de una matriz no se modifica por la aplicación de operaciones elementales en los renglones. Sin embargo, éstas pueden modificar el espacio *columna*.

TEOREMA 4.13 Las matrices equivalentes por renglones tienen el mismo espacio renglón

Si una matriz A de $m \times n$ es equivalente por renglones a una matriz B de $m \times n$, entonces el espacio renglón de A es igual al espacio renglón de B.

DEMOSTRACIÓN

Como los renglones de B pueden obtenerse a partir de los renglones de A mediante operaciones elementales en los renglones (multiplicación escalar y suma), se concluye que los vectores renglón de B pueden expresarse como una combinación lineal de los vectores renglón de A. Los vectores renglón de B pertenecen al espacio renglón de A el subespacio generado por los vectores renglón de B está contenido en el espacio renglón de A. Pero también es cierto que los renglones de A pueden obtenerse a partir de los renglones de B mediante la aplicación de operaciones elementales en los renglones. Por tanto, se puede concluir que los dos espacios renglón son subespacios uno del otro, lo que los hace iguales.

Si la matriz B está en forma escalonada por renglones, entonces sus vectores renglón diferentes de cero constituyen un conjunto linealmente independiente. (intente comprobar esto.) En consecuencia, forman una base del espacio renglón de B y por el teorema 4.13, también forman una base del espacio renglón de A. Este importante resultado se establece en el siguiente teorema.

TEOREMA 4.14 Base para el espacio renglón de una matriz

Si una matriz A es equivalente por renglones a una matriz B que está en forma escalonada por renglones, entonces los vectores renglón de B diferentes de cero forman una base del espacio renglón de A.

EJEMPLO 2 **Determinación de una base para un espacio renglón**

Encuentre una base para el espacio renglón de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN

Mediante las operaciones elementales en los *renglones*, reescriba A en forma escalonada como se muestra a continuación

$$B = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \mathbf{w}_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

Por el teorema 4.14 se concluye que los vectores renglón de B diferentes de cero, $\mathbf{w}_1 = (1, 3, 1, 3)$, $\mathbf{w}_2 = (0, 1, 1, 0)$ y $\mathbf{w}_3 = (0, 0, 0, 1)$, forman una base del espacio renglón de A.

La técnica usada en el ejemplo 2 para determinar el espacio renglón de una matriz puede usarse para resolver el siguiente tipo de problema. Suponga que se pide determinar una base del subespacio generado por el conjunto $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ en R^n. Al emplear los vectores en S para formar los renglones de una matriz A se puede aplicar las operaciones elementales en los renglones para reescribir A en forma escalonada por renglones. Los renglones diferentes de cero de esta matriz integrarán entonces una base del subespacio generado por S. Esto se demuestra en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Determinación de la base de un subespacio

Encuentre la base del subespacio de R^3 generado por

$$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \{(-1, 2, 5), (3, 0, 3), (5, 1, 8)\}.$$

SOLUCIÓN

Utilice $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ para formar los renglones de una matriz A. Luego, escriba A en forma escalonada.

$$A = \begin{array}{@{}c@{\;}l} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 8 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \end{array} \end{array} \quad \longrightarrow \quad B = \begin{array}{@{}c@{\;}l} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \end{array} \end{array}$$

Por consiguiente, los vectores renglón de B diferentes de cero $\mathbf{w}_1 = (1, –2, –5)$ y $\mathbf{w}_2 = (0, 1, 3)$, forman una base del espacio renglón de A; es decir, forman una base del subespacio generado por $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

Para encontrar una base del espacio columna de una matriz A usted tiene dos opciones. En una, puede usar el hecho de que el espacio columna de A es igual al espacio renglón de A^T y aplicar la técnica del ejemplo 2 a la matriz A^T. En la otra opción, observe que aun cuando operaciones con renglones pueden cambiar el espacio columna de una matriz, no pueden cambiar las relaciones de dependencia entre las columnas. (Se le pide que demuestre este hecho en el ejercicio 75.) Por ejemplo, considere las matrices equivalentes por renglones A y B del ejemplo 2.

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & -2 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 \end{array} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_4 \end{array} \end{array}$$

Observe que las columnas 1, 2 y 3 de la matriz B satisface, la ecuación $\mathbf{b}_3 = -2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$ y también lo hacen las columnas correspondientes de la matriz A; es decir $\mathbf{a}_3 = -2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$. De manera similar, los vectores columna $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ y $\mathbf{b}_4$ de la matriz B son linealmente independientes y también lo son las columnas correspondientes de la matriz A.

El siguiente ejemplo muestra cómo determinar una base para el espacio columna de una matriz aplicando estos métodos.

EJEMPLO 4 Determinación de una base para el espacio columna de una matriz (método 1)

Encuentre una base para el espacio columna de la matriz A del Ejemplo 2 al encontrar una base para el espacio renglón de A^T.

SOLUCIÓN

Tome la transpuesta de A y aplique las operaciones elementales en los renglones para escribir A^T en forma escalonada por renglones.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{@{}c@{\;}l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 9 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \mathbf{w}_3 \\ \end{array} \end{array}$$

Así, $\mathbf{w}_1 = (1, 0, –3, 3, 2)$, $\mathbf{w}_2 = (0, 1, 9, –5, –6)$ y $\mathbf{w}_3 = (0, 0, 1, –1, –1)$ forman una base del espacio renglón de A^T. Esto equivale a afirmar que los vectores columna $[1 \;\; 0 \;\; –3 \;\; 3 \;\; 2]^T$, $[0 \;\; 1 \;\; 9 \;\; –5 \;\; –6]^T$ y $[0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; –1 \;\; –1]^T$ forman una base del espacio columna de A.

EJEMPLO 5 Determinación de una base para el espacio columna de una matriz (Método 2)

Encuentre una base para el espacio columna de la matriz A del Ejemplo 2 al usar las relaciones de dependencia entre columnas.

SOLUCIÓN

En el ejemplo 2, se aplicaron operaciones con renglones en la matriz original A para obtener la forma escalonada por renglones B. Fácilmente puede verse en la matriz B que el primero, el segundo y el cuarto vector columna son linealmente independientes (estas columnas tienen los 1 principales). Las columnas correspondientes de la matriz A son linealmente independientes y una base del espacio columna que consta de los vectores

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

COMENTARIO

Observe que en la segunda solución, la forma escalonada por renglones de B indica qué columnas de A forman la base del espacio columna. No utilice los vectores columna de B para formar la base.

Note que la base para el espacio columna obtenido en el ejemplo 5 es diferente del obtenido en el 4. Verifique que estas bases generen el mismo espacio columna de A.

También note en los Ejemplos 2, 4, y 5 que el espacio renglón como el espacio columna de A tienen dimensión igual a 3 (ya que en ambas bases hay *tres* vectores). Esto se generaliza con el siguiente teorema.

TEOREMA 4.15 Los espacios de los renglones y las columnas tienen iguales dimensiones

Si A es una matriz de $m \times n$, entonces el espacio renglón y el espacio columna tienen la misma dimensión.

DEMOSTRACIÓN

Sea $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots,$ y $\mathbf{v}_m$ los vectores renglón y $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots$ y $\mathbf{u}_n$ los vectores columna de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Suponga que el espacio renglón de A es de dimensión r y que tiene una base $S = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_r\}$, donde $\mathbf{b}_i = (b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{in})$. Utilizando esta base, puede escribir los vectores renglón de A como

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= c_{11}\mathbf{b}_1 + c_{12}\mathbf{b}_2 + \cdots + c_{1r}\mathbf{b}_r \\ \mathbf{v}_2 &= c_{21}\mathbf{b}_1 + c_{22}\mathbf{b}_2 + \cdots + c_{2r}\mathbf{b}_r \\ &\vdots \\ \mathbf{v}_m &= c_{m1}\mathbf{b}_1 + c_{m2}\mathbf{b}_2 + \cdots + c_{mr}\mathbf{b}_r. \end{aligned}$$

Reescriba este sistema de ecuaciones vectoriales de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} [a_{11}a_{12} \cdots a_{1n}] &= c_{11}[b_{11}b_{12} \cdots b_{1n}] + c_{12}[b_{21}b_{22} \cdots b_{2n}] + \cdots + c_{1r}[b_{r1}b_{r2} \cdots b_{rn}] \\ [a_{21}a_{22} \cdots a_{2n}] &= c_{21}[b_{11}b_{12} \cdots b_{1n}] + c_{22}[b_{21}b_{22} \cdots b_{2n}] + \cdots + c_{2r}[b_{r1}b_{r2} \cdots b_{rn}] \\ &\vdots \\ [a_{m1}a_{m2} \cdots a_{mn}] &= c_{m1}[b_{11}b_{12} \cdots b_{1n}] + c_{m2}[b_{21}b_{22} \cdots b_{2n}] + \cdots + c_{mr}[b_{r1}b_{r2} \cdots b_{rn}] \end{aligned}$$

Ahora, tome solamente los elementos correspondientes a la primera columna de la matriz A para obtener el siguiente sistema escalar de ecuaciones

$$\begin{aligned}
a_{11} &= c_{11}b_{11} + c_{12}b_{21} + \cdots + c_{1r}b_{r1}\\
a_{21} &= c_{21}b_{11} + c_{22}b_{21} + \cdots + c_{2r}b_{r1}\\
&\vdots\\
a_{m1} &= c_{m1}b_{11} + c_{m2}b_{21} + \cdots + c_{mr}b_{r1}
\end{aligned}$$

De manera similar, para los elementos de la j-ésima columna usted puede obtener el sistema mostrado abajo.

$$\begin{aligned}
a_{1j} &= c_{11}b_{1j} + c_{12}b_{2j} + \cdots + c_{1r}b_{rj}\\
a_{2j} &= c_{21}b_{1j} + c_{22}b_{2j} + \cdots + c_{2r}b_{rj}\\
&\vdots\\
a_{mj} &= c_{m1}b_{1j} + c_{m2}b_{2j} + \cdots + c_{mr}b_{rj}
\end{aligned}$$

Luego, si se hace

$$\mathbf{c}_i = [c_{1i} \ \ c_{2i} \ \ . \ . \ . \ \ c_{mi}]^T.$$

entonces el sistema para la j-ésima columna puede reescribirse en una forma vectorial como

$$\mathbf{u}_j = b_{1j}\mathbf{c}_1 + b_{2j}\mathbf{c}_2 + \cdots + b_{rj}\mathbf{c}_r.$$

Agrupando todos los vectores columna se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= [a_{11} \ \ a_{21} \cdots a_{m1}]^T = b_{11}\mathbf{c}_1 + b_{21}\mathbf{c}_2 + \cdots + b_{r1}\mathbf{c}_r\\
\mathbf{u}_2 &= [a_{12} \ \ a_{22} \cdots a_{m2}]^T = b_{12}\mathbf{c}_1 + b_{22}\mathbf{c}_2 + \cdots + b_{r2}\mathbf{c}_r\\
&\vdots\\
\mathbf{u}_n &= [a_{1n} \ \ a_{2n} \cdots a_{mn}]^T = b_{1n}\mathbf{c}_1 + b_{2n}\mathbf{c}_2 + \cdots + b_{rn}\mathbf{c}_r.
\end{aligned}$$

Como cada vector columna de A es una combinación lineal de r vectores, usted sabe que la dimensión del espacio columna de A es menor o igual que r (la dimensión del espacio renglón de A). Es decir,

$$\dim(\text{espacio columna de } A) \leq \dim(\text{espacio renglón de } A).$$

Al repetir este procedimiento para A^T se puede concluir que la dimensión del espacio columna de A^T es menor o igual que la dimensión del espacio renglón de A^T. Pero esto implica que la dimensión del espacio renglón de A es menor o igual que la dimensión del espacio columna de A. Es decir,

$$\dim(\text{espacio renglón de } A) \leq \dim(\text{espacio columna de } A).$$

Por consiguiente, ambas dimensiones deber ser iguales.

COMENTARIO

Algunos textos distinguen entre el *rango renglón* y el *rango columna* de una matriz. Sin embargo, debido a que estos rangos son iguales (teorema 4.15), este texto no establece ninguna distinción entre ambos.

La dimensión del espacio renglón (o columna) de una matriz se denomina el **rango** de la matriz.

Definición del rango de una matriz

La dimensión del espacio renglón (o columna) de una matriz A se llama **rango** de A y se denota por rango(A).

EJEMPLO 6 Determinación del rango de una matriz

Para encontrar el rango de la matriz A que se muestra a continuación, convierta a la forma escalonada por renglón como se presenta en la matriz B.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Como B tiene tres renglones diferentes de cero, entonces el rango de A es 3.

ESPACIO NULO DE UNA MATRIZ

Los conceptos de espacios renglón y columna y rango, tienen algunas aplicaciones importantes a los sistemas de ecuaciones lineales. Considere primero el sistema lineal homogéneo

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

donde A es una matriz de $m \times n$, $\mathbf{x} = [x_1\, x_2 \, . \, . \, . \, x_n]^T$ es el vector columna de las incógnitas y $\mathbf{0} = [0\ 0 \, . \, . \, . \, 0]^T$ es el vector cero en R^m. El siguiente teorema establece que el conjunto de todas las soluciones de este sistema homogéneo es un subespacio de R^n.

COMENTARIO

El espacio nulo de A es llamado también espacio solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

TEOREMA 4.16 Soluciones de un sistema homogéneo

Si A es una matriz de $m \times n$, entonces el conjunto de todas las soluciones del sistema de ecuaciones lineales homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es un subespacio de R^n llamado **espacio nulo** de A y es denotado por $n(A)$. así,

$$N(A) = \{\mathbf{x} \in R^n : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

La dimensión del espacio nulo de A es la **nulidad** de A.

DEMOSTRACIÓN

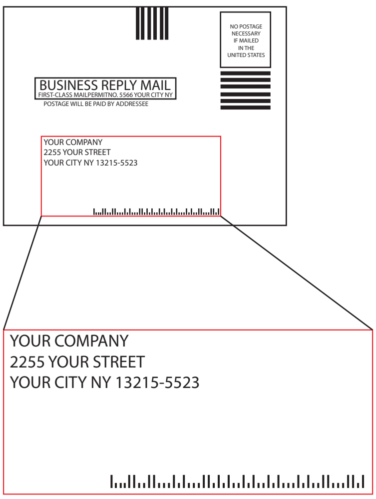
Como A es una matriz de $m \times n$, se sabe que $\mathbf{x}$ es de tamaño $n \times 1$. así el conjunto de todas las soluciones de este sistema es un *subconjunto* de R^n. Este conjunto claramente es no vacío, debido a que $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Puede comprobar que este es un subespacio demostrando que es cerrado bajo las operaciones de suma y multiplicación escalar. Sean $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ dos vectores solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y sea c un escalar. Como $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ y $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$, se sabe que

$$A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \qquad \text{Suma}$$

y

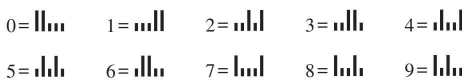
$$A(c\mathbf{x}_1) = c(A\mathbf{x}_1) = c(\mathbf{0}) = \mathbf{0}. \qquad \text{Multiplicación escalar}$$

Por tanto, $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$ y $c\mathbf{x}_1$ son soluciones de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y se puede concluir que el conjunto de todas las soluciones forma un subespacio de R^n.



ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

El Servicio Postal de los Estados Unidos utiliza códigos de barras para representar cierta información como códigos postales y direcciones de entrega. El código de barras CP + 4 que se muestra a la izquierda comienza con una barra larga, tiene una serie de barras cortas y largas para representar cada dígito en el código CP + 4 y un dígito adicional para verificación de errores, y termina con una barra larga. El siguiente es el código para los dígitos.



El dígito para verificación de errores es tal que cuando se suma con los dígitos en el código CP + 4, el resultado es un múltiplo de 10 (verifique esto, así como si el código CP + 4 que se muestra está correctamente codificado). Algunos códigos de barras más sofisticados también incluyen dígitos para la corrección de errores. De manera análoga, las matrices se pueden usar para verificar errores en mensajes transmitidos. La información en forma de vectores columna se puede multiplicar por una matriz de detección de errores. Cuando el producto resultante está en el espacio nulo de la matriz de detección de errores, no existen errores en la transmisión. De lo contrario, existe un error en alguna parte del mensaje. Si la matriz de detección de errores también tiene corrección de errores, entonces la matriz producto resultante también se indicará donde ocurra el error.

EJEMPLO 7 **Determinación del espacio nulo de una matriz**

Encuentre el espacio nulo de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

El espacio nulo de A es el espacio solución del sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Para resolver este sistema, usted necesita escribir la matriz aumentada $[A \ \mathbf{0}]$ en la forma reducida escalonada por renglones. Ya que el sistema de ecuaciones es homogéneo, la columna del lado derecho de la matriz aumentada consiste completamente de ceros y no puede ser cambiada con operaciones con renglones. Esto es suficiente para encontrar la forma reducida escalonada por renglones de A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones correspondiente a la forma reducida escalonada es

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad + 3x_4 &= 0 \\ x_3 + \ x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Seleccione x_2 y x_4 como variables libres para representar las soluciones en la forma paramétrica

$$x_1 = -2s - 3t, \quad x_2 = s, \quad x_3 = -t, \quad x_4 = t$$

Esto significa que el espacio solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ consta de todos los vectores $\mathbf{x}$ de la forma mostrada enseguida.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s - 3t \\ s \\ -t \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Una base para el espacio nulo de A consta de los vectores

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

En otras palabras, estos dos vectores son soluciones de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y todas las soluciones de este sistema homogéneo son combinaciones lineales de los mismos.

COMENTARIO

Aunque las bases del ejemplo 7 demuestran que los vectores generan el conjunto solución, no prueban que sean linealmente independientes. Cuando se resuelven sistemas homogéneos a partir de la forma reducida escalonada por renglones, el conjunto generador siempre es independiente.

En el ejemplo 6, la matriz A tiene cuatro columnas; además, el rango de la matriz es 2 y la dimensión del espacio nulo es 2. Por tanto,

$$\text{Número de columnas} = \text{rango} + \text{nulidad}$$

Una manera de ver esto es observar la forma reducida escalonada por renglones de A.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las columnas con los 1 principales (columnas 1 y 3) determinan el rango de la matriz. Las otras columnas (2 y 4) determinan la nulidad de la matriz, ya que a ellas corresponden las variables libres. Esta relación se generaliza con el siguiente teorema.

TEOREMA 4.17 Dimensión del espacio solución

Si A es una matriz de $m \times n$ de rango r, entonces la dimensión del espacio solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es $n - r$, es decir $n = \text{rango}(A) + \text{nulidad}(A)$

DEMOSTRACIÓN

Como A tiene rango r, se sabe que es equivalente por renglones a la matriz B de la forma reducida escalonada por renglones con los renglones r diferentes de cero. No se pierde ninguna generalidad al suponer que la esquina superior izquierda de B tiene la forma de la matriz identidad I_r de $r \times r$. Más aún, como los renglones nulos de B no contribuyen a la solución, pueden descartarse de la forma de la matriz B' de $r \times n$, donde $B' = [\boldsymbol{I}r\ C]$. La matriz C tiene $n - r$ columnas correspondientes a las variables $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$. Por tanto, el espacio solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ puede representarse por el sistema

$$\begin{array}{cccccccccl}
x_1 + & & & c_{11}x_{r+1} & + & c_{12}x_{r+2} & + \cdots + & c_{1,n-r}x_n & = 0 \\
& x_2 + & & c_{21}x_{r+1} & + & c_{22}x_{r+2} & + \cdots + & c_{2,n-r}x_n & = 0 \\
& & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
& & x_r + & c_{r1}x_{r+1} & + & c_{r2}x_{r+2} & + \cdots + & c_{r,n-r}x_n & = 0.
\end{array}$$

Resolviendo para las primeras r variables en términos de las últimas $n - r$ variables produce $n - r$ vectores en la base del espacio solución. En consecuencia, el espacio solución tiene dimensión $n - r$.

El ejemplo 8 ilustra este teorema y además explora el espacio columna de una matriz.

EJEMPLO 8 **Rango y nulidad de una matriz**

Sean los vectores columna de la matriz A denotados por $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ y $\mathbf{a}_5$.

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 0 & -12 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 \end{array} \end{array}$$

a. Determine el rango y la nulidad de A.

b. Determine un subconjunto de los vectores columna de A que forman una base para el espacio columna de A.

SOLUCIÓN

Sea B la forma escalonada reducida de A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 0 & -12 \end{bmatrix} \longrightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a. Como B tiene tres renglones diferentes de cero, el rango de A es 3. Además, el número de columnas de A es $n = 5$, lo cual implica que la nulidad de A es $n - \text{rango} = 5 - 3 = 2$.

b. Debido a que el primero, el segundo y el cuarto vector columna de B son linealmente independientes, los correspondientes vectores columna de A

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

forman una base para el espacio columna de A.

SOLUCIONES DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Usted sabe que el conjunto de todos los vectores solución del sistema lineal *homogéneo* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es un subespacio. ¿Esto se cumple también para el conjuntos de todos los vectores solución del sistema *no homogéneo* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{b} \neq 0$? La respuesta es "no" debido a que el vector nulo nunca es una solución de un sistema no homogéneo. Sin embargo, existe una relación entre los conjuntos de soluciones de los dos sistemas $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Específicamente, si $\mathbf{x}_p$ es una solución *particular* del sistema no homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, entonces *toda* solución de este sistema puede ser escrita en la forma $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$, donde $\mathbf{x}_h$ es una solución del sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ correspondiente. El siguiente teorema establece este importante concepto.

TEOREMA 4.18 Soluciones de un sistema lineal no homogéneo

Si $\mathbf{x}_p$ es una solución particular del sistema no homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, entonces toda solución de este sistema puede escribirse en la forma $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$, donde $\mathbf{x}_h$ es una solución del sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ correspondiente.

DEMOSTRACIÓN

Sea $\mathbf{x}$ cualquier solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Entonces, $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p)$ es una solución del sistema lineal homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ya que

$$A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) = A\mathbf{x} - A\mathbf{x}_p = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Haciendo $\mathbf{x}_h = \mathbf{x} - \mathbf{x}_p$, se tiene $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$.

EJEMPLO 9 Determinación del conjunto solución de un sistema no homogéneo

Determine el conjunto de todos los vectores solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned} x_1 \phantom{{}+2x_2} - 2x_3 + x_4 &= 5 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 \phantom{{}+3x_4} &= 8 \\ x_1 + 2x_2 \phantom{{}-5x_3} - 5x_4 &= -9 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

La matriz aumentada del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se reduce como sigue.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -5 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & -5 & -9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones lineales correspondiente a la matriz reducida escalonada por renglones es

$$\begin{aligned} x_1 \phantom{{}+x_2} - 2x_3 + x_4 &= 5 \\ x_2 + x_3 - 3x_4 &= -7. \end{aligned}$$

Haciendo $x_3 = s$ y $x_4 = t$, se puede escribir un vector solución representativo de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ como se muestra enseguida.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s - t + 5 \\ -s + 3t - 7 \\ s + 0t + 0 \\ 0s + t + 0 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = s\mathbf{u}_1 + t\mathbf{u}_2 + \mathbf{x}_p$$

Observe que $\mathbf{x}_p$ es un vector solución *particular* de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $\mathbf{x}_h = s\mathbf{u}_1 + t\mathbf{u}_1$ representa un vector arbitrario en el espacio solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

El teorema final de esta sección describe cómo el espacio columna de una matriz puede utilizarse para determinar si el sistema de ecuaciones lineales es consistente.

TEOREMA 4.19 Soluciones de un sistema de ecuaciones lineales

El sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente si y sólo si $\mathbf{b}$ está en el espacio columna de A.

DEMOSTRACIÓN

Para el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, sean A, $\mathbf{x}$ y $\mathbf{b}$ la matriz de coeficientes $m \times n$, la matriz columna de $n \times 1$ de incógnitas, y la matriz del lado derecho de $m \times 1$, respectivamente. Entonces

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Por tanto, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ si y sólo si $\mathbf{b} = [b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_m]$ es una combinación lineal de las columnas de A. Es decir, el sistema es consistente si y sólo si $\mathbf{b}$ es un subespacio de R^n generado por las columnas de A.

EJEMPLO 10 Consistencia de un sistema de ecuaciones lineales

Considere el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \\ x_1 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1. \end{aligned}$$

El rango de la matriz de coeficientes es igual al rango de la matriz aumentada. (Intente verificar esto.)

$$[A \quad \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como se muestra arriba, $\mathbf{b}$ está en el espacio columna de A y el sistema de ecuaciones lineales es consistente.

El siguiente resumen presenta varios resultados importantes que involucran sistemas de ecuaciones lineales, matrices, determinantes y espacios vectoriales.

Resumen de condiciones equivalentes para matrices cuadradas

Si A es una matriz de $n \times n$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes

1. A es invertible.
2. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución única para cualquier matriz $\mathbf{b}$ de $n \times 1$.
3. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene sólo la solución trivial.
4. A es equivalente por renglones a I_n.
5. $|A| \neq 0$
6. Rango$(A) = n$.
7. Los n vectores renglón de A son linealmente independientes.
8. Los n vectores columna de A son linealmente independientes.

4.6 Ejercicios

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

Vectores renglón y vectores columna En los ejercicios 1 a 4, escriba (a) los vectores renglón y (b) los vectores columna de la matriz.

1. $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 6 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

Determinación de una base para un espacio renglón y rango En los ejercicios 5 a 10, encuentre (a) una base del espacio renglón y (b) el rango de la matriz.

5. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 10 & 6 \\ 8 & -7 & 5 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} -2 & -4 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & -6 & -4 \\ -2 & -4 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Determinación de una base para un subespacio En los ejercicios 11 a 14, determine una base del subespacio de R^3 generado por S.

11. $S = \{(1, 2, 4), (-1, 3, 4), (2, 3, 1)\}$

12. $S = \{(4, 2, -1), (1, 2, -8), (0, 1, 2)\}$

13. $S = \{(4, 4, 8), (1, 1, 2), (1, 1, 1)\}$

14. $S = \{(1, 2, 2), (-1, 0, 0), (1, 1, 1)\}$

Determinación de una base para un subespacio En los ejercicios 15 a 18, determine una base del subespacio de R^4 generado por S.

15. $S = \{(2, 9, -2, 53), (-3, 2, 3, -2), (8, -3, -8, 17), (0, -3, 0, 15)\}$

16. $S = \{(6, -3, 6, 34), (3, -2, 3, 19), (8, 3, -9, 6), (-2, 0, 6, -5)\}$

17. $S = \{(-3, 2, 5, 28), (-6, 1, -8, -1), (14, -10, 12, -10), (0, 5, 12, 50)\}$

18. $S = \{(2, 5, -3, -2), (-2, -3, 2, -5), (1, 3, -2, 2), (-1, -5, 3, 5)\}$

Determinación de una base para un espacio columna y rango En los ejercicios 19-24, encuentre (a) una base del espacio renglón columna y (b) el rango de la matriz.

19. $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 4 & 20 & 31 \\ 6 & -5 & -6 \\ 2 & -11 & -16 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 & -6 \\ 7 & 14 & -6 & -3 \\ -2 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

Determinación del espacio nulo de una matriz En los ejercicios 25-36, encuentre el espacio nulo de la matriz.

25. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$

26. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

27. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

28. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

29. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

30. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

31. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

32. $A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 21 \\ -2 & 4 & -14 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$

33. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -6 & 4 & -8 \end{bmatrix}$

34. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & -8 & -4 & -2 \end{bmatrix}$

35. $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

36. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Determinación de una base y dimensión En los ejercicios 37 a 46, encuentre (a) la base y (b) la dimensión del espacio solución del sistema homogéneo de ecuaciones lineales.

37. $\begin{aligned} x - 4y &= 0 \\ 3x - 12y &= 0 \end{aligned}$

38. $\begin{aligned} x - y &= 0 \\ -x + y &= 0 \end{aligned}$

39. $\begin{aligned} -x + y + z &= 0 \\ 3x - y &= 0 \\ 2x - 4y - 5z &= 0 \end{aligned}$

40. $\begin{aligned} 4x - y + 2z &= 0 \\ 2x + 3y - z &= 0 \\ 3x + y + z &= 0 \end{aligned}$

41. $\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 0 \\ -3x + 6y - 9z &= 0 \end{aligned}$

42. $\begin{aligned} x + 2y - 4z &= 0 \\ -3x - 6y + 12z &= 0 \end{aligned}$

43. $\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 15x_3 + 11x_4 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 8x_4 &= 0 \end{aligned}$

44. $\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$

45. $\begin{aligned} 9x_1 - 4x_2 - 2x_3 - 20x_4 &= 0 \\ 12x_1 - 6x_2 - 4x_3 - 29x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 7x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 - 8x_4 &= 0 \end{aligned}$

46. $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 22x_4 + 13x_5 &= 0 \\ x_1 + x_3 - 2x_4 + x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 42x_4 + 27x_5 &= 0 \end{aligned}$

Rango, nulidad, bases e independencia lineal En los ejercicios 47 y 48, use el hecho de que las matrices A y B son equivalentes por renglones.

(a) Determine el rango y la nulidad de A.

(b) Determine una base para el espacio nulo de A.

(c) Determine una base del espacio renglón de A.

(d) Determine una base del espacio columna de A.

(e) Determine si los renglones de A son o no linealmente independientes.

(f) Sean las columnas de A denotadas por $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ y $\mathbf{a}_5$. ¿Cuál de los siguientes conjuntos es (son) linealmente independientes?

(i) $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4\}$ **(ii)** $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ **(iii)** $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5\}$

47. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 2 & 2 & -2 \\ 4 & 9 & 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

48. $A = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 8 & 0 & -17 \\ 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 3 & 11 & -19 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & -13 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Sistema no homogéneo En los ejercicios 49 a 54, (a) determine si el sistema no homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente y (b) si el sistema es consistente, escriba la solución en la forma $\mathbf{x} = \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_p$, donde $\mathbf{x}_h$ es una solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{x}_p$ es una solución particular de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

49. $\begin{aligned} x + 3y + 10z &= 18 \\ -2x + 7y + 32z &= 29 \\ -x + 3y + 14z &= 12 \\ x + y + 2z &= 8 \end{aligned}$

50. $\begin{aligned} 2x - 4y + 5z &= 8 \\ -7x + 14y + 4z &= -28 \\ 3x - 6y + z &= 12 \end{aligned}$

51. $\begin{aligned} 3x - 8y + 4z &= 19 \\ -6y + 2z + 4w &= 5 \\ 5x + 22z + w &= 29 \\ x - 2y + 2z &= 8 \end{aligned}$

52. $\begin{aligned} 3w - 2x + 16y - 2z &= -7 \\ -w + 5x - 14y + 18z &= 29 \\ 3w - x + 14y + 2z &= 1 \end{aligned}$

53. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 &= 0 \\ -5x_1 - 10x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 55x_5 &= -8 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 - 5x_5 &= 14 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 15x_5 &= -2 \end{aligned}$

54. $\begin{aligned} 5x_1 - 4x_2 + 12x_3 - 33x_4 + 14x_5 &= -4 \\ -2x_1 + x_2 - 6x_3 + 12x_4 - 8x_5 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 - 12x_4 + 8x_5 &= -1 \end{aligned}$

Consistencia de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ En los ejercicios 55 a 58, determine si $\mathbf{b}$ pertenece al espacio columna de A. Si es así, escriba $\mathbf{b}$ como una combinación lineal de los vectores columna de A.

55. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

56. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

57. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

58. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$

59. **Prueba** Demuestre que si A no es cuadrada, entonces los vectores renglón de A o los vectores columna de A forman un conjunto linealmente dependiente.

60. Dé un ejemplo donde se demuestre que el rango del producto de dos matrices puede ser menor que el rango de cualquiera de las dos matrices.

61. Dé un ejemplo de matrices A y B del mismo orden tales que
   (a) $\text{rango}(A + B) < \text{rango}(A)$ y $\text{rango}(A + B) < \text{rango}(B)$
   (b) $\text{rango}(A + B) = \text{rango}(A)$ y $\text{rango}(A + B) = \text{rango}(B)$
   (c) $\text{rango}(A + B) > \text{rango}(A)$ y $\text{rango}(A + B) > \text{rango}(B)$.

62. **Prueba** Demuestre que los vectores renglón diferentes de cero de una matriz en forma escalonada por renglones son linealmente independientes.

63. Sea A una matriz de $m \times n$ (donde $m < n$) cuyo rango es r.
   (a) ¿Cuál es el mayor valor que puede tener r?
   (b) ¿Cuántos vectores hay en una base del espacio renglón de A?
   (c) ¿Cuántos vectores hay en una base del espacio columna de A?
   (d) ¿Cuál espacio vectorial R^k tiene como subespacio el espacio renglón?
   (e) ¿Cuál espacio vectorial R^k tiene como subespacio el espacio columna?

64. Demuestre que los tres puntos (x_1, y_1),(x_2, y_2) y (x_3, y_3) en un plano son colineales si y sólo si la matriz

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$$

tiene un rango menor que 3.

65. Dadas las matrices A y B, demuestre que los vectores renglón de AB están en el espacio renglón de B y que los vectores columna de AB están en el espacio columna de A.

66. Encuentre al rango de la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \cdots & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & n^2-n+3 & \cdots & n^2 \end{bmatrix}$$

para $n = 2$, 3 y 4. ¿Puede encontrar algún patrón en estos rangos?

67. **Prueba** Demuestre cada una de las propiedades del sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con n variables.
   (a) Si $\text{rango}(A) = \text{rango}([A\ \ \mathbf{b}]) = n$, entonces el sistema tiene una única solución.
   (b) Si $\text{rango}(A) = \text{rango}([A\ \ \mathbf{b}]) < n$, entonces el sistema tiene un número infinito de soluciones.
   (c) Si $\text{rango}(A) < \text{rango}([A\ \ \mathbf{b}])$, entonces el sistema es inconsistente.

68. **Prueba** Sea A una matriz de $m \times n$. Demuestre que $N(A) \subset N(A^TA)$.

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 69-71, determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, proporcione una razón o cite una expresión adecuada del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que muestre que la expresión no es cierta en todos los casos o cite del texto una expresión adecuada.

69. (a) El espacio nulo de A también se denomina *espacio solución* de A.
   (b) El espacio nulo de A es el espacio solución del sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

70. (a) Si una matriz A de $m \times n$ es equivalente por renglones a una matriz B de $m \times n$, entonces el espacio renglón de A es equivalente al espacio renglón de B.
   (b) Si A es una matriz de $m \times n$ de rango r, entonces la dimensión del espacio solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es $m - r$.

71. (a) Si una matriz B de $m \times n$ puede ser obtenida a partir de operaciones elementales con renglones en una matriz A de $m \times n$, entonces el espacio columna de B es igual al espacio columna de A.
   (b) El sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es inconsistente si y sólo si $\mathbf{b}$ está en el espacio columna de A.
   (c) El espacio columna de la matriz A es igual al espacio renglón de A^T.

72. REMATE La dimensión del espacio renglón de una matriz A de 3×5 es 2.
   (a) ¿Cuál es la dimensión del espacio columna de A?
   (b) ¿Cuál es el rango de A?
   (c) ¿Cuál es la nulidad de A?
   (d) ¿Cuál es la dimensión del espacio solución del sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$?

73. Sean A y B matrices cuadradas de orden n que satisfacen $A\mathbf{x} = B\mathbf{x}$ para toda $\mathbf{x}$ en R^n.
   (a) Determine el rango y la nulidad de $A - B$.
   (b) Demuestre que A y B deben ser idénticas.

74. **Prueba** Sea A una matriz de $m \times n$.
   (a) Demuestre que el sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente para todas los vectores columna de $\mathbf{b}$ si y sólo si el rango de A es m.
   (b) Demuestre que el sistema de ecuaciones lineales homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene sólo la solución trivial si y sólo si las columnas de A son linealmente independientes.

75. **Prueba** Demuestre que las operaciones con renglones no cambian las relaciones de dependencia entre las columnas de una matriz de $m \times n$.

76. **Escriba** Explique por qué los vectores renglón de una matriz de 4×3 forman un conjunto linealmente dependiente. (Suponga que todos los elementos de la matriz son diferentes entre sí.)

4.7 Coordenadas y cambio de base

- Encontrar una matriz de coordenadas respecto a la base en R^n.
- Encontrar la matriz de transición de la base B a la base B' in R^n.
- Representar coordenadas en espacios n-dimensionales generales.

REPRESENTACIÓN DE COORDENADAS EN R^n

En el teorema 4.9 se vio que si B es una base de un espacio vectorial V, entonces todo vector $\mathbf{x}$ en V puede expresarse en una y sólo una forma como una combinación lineal de vectores en B. Los coeficientes de la combinación lineal son las **coordenadas de x con respecto a *B***. En el contexto de la representación de coordenadas, el orden de los vectores en estas bases es importante y esto en ocasiones se enfatiza al referirse a B como una base *ordenada*.

Representación de coordenadas con respecto a una base

Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base de un espacio vectorial V y $\mathbf{x}$ un vector en V tales que

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n.$$

Los escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ se denominan **coordenadas de x con respecto a la base *B***. La **matriz de coordenadas** (o **vector de coordenadas**) **con respecto a *B*** es la matriz columna en R^n cuyas componentes son las coordenadas de $\mathbf{x}$.

$$[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

En R^n, se usa la notación de columnas para la matriz de coordenadas. Para el vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, las x_i son las coordenadas de x respecto a la base estándar S de R^n. Así, se tiene

$$[\mathbf{x}]_S = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

EJEMPLO 1 **Coordenadas y componentes en R^n**

Determine la matriz de coordenadas de $\mathbf{x} = (-2, 1, 3)$ en R^3 con respecto a la base estándar

$$S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

SOLUCIÓN

Como $\mathbf{x}$ puede expresarse como $\mathbf{x} = (-2, 1, 3) = -2(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + 3(0, 0, 1)$, la matriz de coordenadas de $\mathbf{x}$ relativa a la base estándar es simplemente

$$[\mathbf{x}]_S = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Así, las componentes de $\mathbf{x}$ son las mismas que sus coordenadas con respecto a la base estándar.

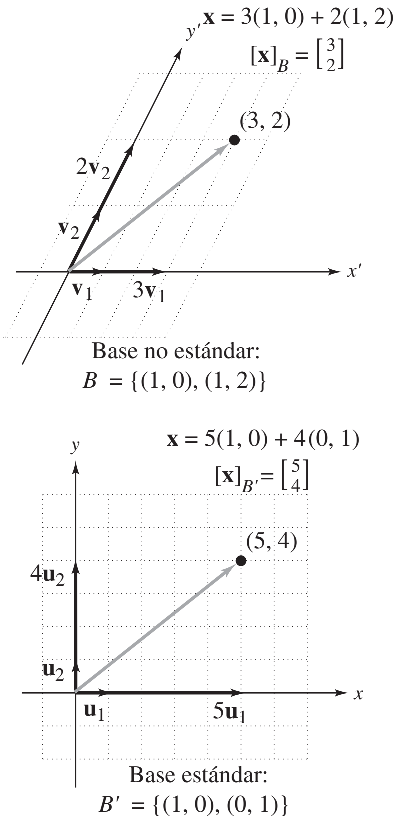


Figura 4.19

EJEMPLO 2 Determinación de una matriz de coordenadas con respecto a una base estándar

La matriz de coordenadas de $\mathbf{x}$ en R^2 con respecto a la base (no estándar) $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{(1, 0), (1, 2)\}$ es

$$[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Determine las coordenadas de $\mathbf{x}$ con respecto a la base (estándar) $B' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} = \{(1, 0), (0, 1)\}$.

SOLUCIÓN

Dado que $[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, se puede escribir $\mathbf{x} = 3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 = 3(1, 0) + 2(1, 2) = (5, 4)$. Además, como $(5, 4) = 5(1, 0) + 4(0, 1)$, se concluye que las coordenadas de $\mathbf{x}$ con respecto a B' son

$$[\mathbf{x}]_{B'} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

En la figura 4.19 se comparan estas dos representaciones de coordenadas.

El ejemplo 2 muestra que el procedimiento para determinar la matriz de coordenadas relativa a una base *estándar* es directo. Sin embargo, el problema se dificulta un poco cuando es necesario determinar la matriz de coordenadas relativa a una base *no estándar*. He aquí un ejemplo.

EJEMPLO 3 Determinación de una matriz de coordenadas relativa a una base no estándar

Encuentre la matriz de coordenadas de $\mathbf{x} = (1, 2, -1)$ en R^3 relativa a la base (no estándar)

$$B' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\} = \{(1, 0, 1), (0, -1, 2), (2, 3, -5)\}.$$

SOLUCIÓN

Se empieza por escribir $\mathbf{x}$ como una combinación lineal de $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ y $\mathbf{u}_3$.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3 \\ (1, 2, -1) &= c_1(1, 0, 1) + c_2(0, -1, 2) + c_3(2, 3, -5) \end{aligned}$$

Al igualar las componentes correspondientes se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales y ecuación matricial correspondientes.

$$\begin{aligned} c_1 \qquad\quad + 2c_3 &= 1 \\ -c_2 + 3c_3 &= 2 \\ c_1 + 2c_2 - 5c_3 &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La solución de este sistema es $c_1 = 5$, $c_2 = -8$ y $c_3 = -2$. Por tanto,

$$\mathbf{x} = 5(1, 0, 1) + (-8)(0, -1, 2) + (-2)(2, 3, -5)$$

y la matriz de coordenadas de $\mathbf{x}$ relativa a B' es

$$[\mathbf{x}]_{B'} = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

COMENTARIO

No hubiese sido correcto escribir la solución como

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

¿Puede ver por qué?

CAMBIO DE BASE EN R^n

El procedimiento mostrado en los ejemplos 2 y 3 se denomina **cambio de base**. Es decir, usted tenía las coordenadas de un vector relativo a una base B y se le pidió encontrar las coordenadas relativas a otra base B'.

De tal modo que, si en el ejemplo 3 la base estándar es B, entonces el problema de determinar la matriz de coordenadas de $\mathbf{x} = (1, 2, -1)$ relativa a la base B' se transforma en el problema de resolver para c_1, c_2 y c_3 en la ecuación matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}}_{[\mathbf{x}]_{B'}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}}_{[\mathbf{x}]_B}.$$

La matriz P se denomina **matriz de transición de B' a B**, donde $[\mathbf{x}]_{B'}$ es la matriz de coordenadas de $\mathbf{x}$ relativa a B' y $[\mathbf{x}]_B$ es la matriz de coordenadas de $\mathbf{x}$ relativa a B. Al multiplicar por la matriz de transición P, una matriz de coordenadas relativa a B' cambia a una matriz de coordenadas relativa a B. Es decir,

$$P[\mathbf{x}]_{B'} = [\mathbf{x}]_B. \qquad \text{Cambio de base de } B' \text{ a } B$$

Para efectuar un cambio de base de B a B' se usa la matriz P^{-1} (la **matriz de transición de B a B'**) y se escribe

$$[\mathbf{x}]_{B'} = P^{-1}[\mathbf{x}]_B. \qquad \text{Cambio de base de } B \text{ a } B'$$

Lo anterior significa que el problema de cambio de base del ejemplo 3 puede representarse por la ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 3 & -7 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}}_{[\mathbf{x}]_B} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ -8 \\ -2 \end{bmatrix}}_{[\mathbf{x}]_{B'}}.$$

Este análisis se generaliza como sigue. Suponga que

$$B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \quad \text{y} \quad B' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$$

son dos bases de R^n. Si $\mathbf{x}$ es un vector de R^n y

$$[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [\mathbf{x}]_{B'} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

son las matrices de coordenadas de $\mathbf{x}$ con respecto a B y B', entonces la **matriz de transición P de B' a B** es la matriz P tal que

$$[\mathbf{x}]_B = P[\mathbf{x}]_{B'}.$$

El siguiente teorema establece que la matriz de transición P es invertible y que su inversa es la **matriz de transición de B a B'**. Es decir,

$$\underbrace{[\mathbf{x}]_{B'}}_{\substack{\text{Matriz de} \\ \text{coordenadas de} \\ \mathbf{x} \text{ relativa a } B'}} = \underbrace{P^{-1}}_{\substack{\text{Matriz de} \\ \text{transición} \\ \text{de } B \text{ a } B'}} \underbrace{[\mathbf{x}]_B}_{\substack{\text{Matriz de} \\ \text{coordenadas de} \\ \mathbf{x} \text{ relativa a } B}}.$$

TEOREMA 4.20 La inversa de una matriz de transición

Si P es la matriz de transición de una base B' a una base en R^n, entonces P es invertible y la matriz de transición de B a B' está dada por P^{-1}.

Antes de demostrar el teorema 4.20, necesita demostrar un lema preliminar.

LEMA

Sean $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ y $B' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ dos bases del espacio vectorial V. Si

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= c_{11}\mathbf{u}_1 + c_{21}\mathbf{u}_2 + \cdots + c_{n1}\mathbf{u}_n \\
\mathbf{v}_2 &= c_{12}\mathbf{u}_1 + c_{22}\mathbf{u}_2 + \cdots + c_{n2}\mathbf{u}_n \\
&\vdots \\
\mathbf{v}_n &= c_{1n}\mathbf{u}_1 + c_{2n}\mathbf{u}_2 + \cdots + c_{nn}\mathbf{u}_n
\end{aligned}$$

entonces la matriz de transición de B a B' es

$$Q = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}.$$

DEMOSTRACIÓN (DEL LEMA)

Sea $\mathbf{v} = d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \ldots + d_n\mathbf{v}_n$ un vector arbitrario en V. La matriz de coordenadas de $\mathbf{v}$ relativa a la base B es

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}.$$

entonces se tiene

$$Q[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}d_1 + c_{12}d_2 + \cdots + c_{1n}d_n \\ c_{21}d_1 + c_{22}d_2 + \cdots + c_{2n}d_n \\ \vdots \\ c_{n1}d_1 + c_{n2}d_2 + \cdots + c_{nn}d_n \end{bmatrix}.$$

Por otra parte, puede escribirse

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \cdots + d_n\mathbf{v}_n \\
&= d_1(c_{11}\mathbf{u}_1 + c_{21}\mathbf{u}_2 + \cdots + c_{n1}\mathbf{u}_n) + d_2(c_{12}\mathbf{u}_1 + c_{22}\mathbf{u}_2 + \cdots + c_{n2}\mathbf{u}_n) + \cdots \\
&\qquad + d_n(c_{1n}\mathbf{u}_1 + c_{2n}\mathbf{u}_2 + \cdots + c_{nn}\mathbf{u}_n) \\
&= (d_1c_{11} + d_2c_{12} + \cdots + d_nc_{1n})\mathbf{u}_1 + (d_1c_{21} + d_2c_{22} + \cdots + d_nc_{2n})\mathbf{u}_2 + \cdots \\
&\qquad + (d_1c_{n1} + d_2c_{n2} + \cdots + d_nc_{nn})\mathbf{u}_n
\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} c_{11}d_1 + c_{12}d_2 + \cdots + c_{1n}d_n \\ c_{21}d_1 + c_{22}d_2 + \cdots + c_{2n}d_n \\ \vdots \\ c_{n1}d_1 + c_{n2}d_2 + \cdots + c_{nn}d_n \end{bmatrix}.$$

así, $Q[\mathbf{v}]_B = [\mathbf{v}]_{B'}$ y puede concluirse que Q es la matriz de transición de B a B'.

DEMOSTRACIÓN (DEL TEOREMA 4.20)

A partir del lema anterior, sea Q la matriz de transición de B a B'. Por tanto $[\mathbf{v}]_B = P[\mathbf{v}]_{B'}$ y $[\mathbf{v}]_{B'} = Q[\mathbf{v}]_B$, lo cual implica que $[\mathbf{v}] = PQ[\mathbf{v}]$ para todo vector en R^n. De aquí se concluye que $PQ = I$. Así, P es invertible y P^{-1} es igual a Q, la matriz de transición de B a B'.

La eliminación de Gauss-Jordan puede ser usada para encontrar la matriz de transición P^{-1}. Primero defina dos matrices B y B' cuyas columnas corresponden a los vectores en B y en B'. Es decir,

$$B = \begin{array}{c}\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \quad & \mathbf{v}_n \end{array}\end{array} \quad \text{y} \quad B' = \begin{array}{c}\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \quad & \mathbf{u}_n \end{array}\end{array}.$$

Luego, al reducir la matriz $[B' \;\; B]$ de $n \times 2n$ para que en vez de B' aparezca la matriz identidad I_n, obtiene la matriz $[I_n \;\; P^{-1}]$. Este procedimiento se establece formalmente en el siguiente teorema.

TEOREMA 4.21 Matriz de transición de B a B'

Sean $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ y $B' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ dos bases de R^n. Entonces, la matriz de transición P^{-1} de B a B' puede determinarse mediante la eliminación de Gauss-Jordan en la matriz $[B' \;\; B]$ de $n \times 2n$ como sigue

$$[B' \;\; B] \longrightarrow [I_n \;\; P^{-1}]$$

DEMOSTRACIÓN

Para empezar, sea

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= c_{11}\mathbf{u}_1 + c_{21}\mathbf{u}_2 + \cdots + c_{n1}\mathbf{u}_n \\ \mathbf{v}_2 &= c_{12}\mathbf{u}_1 + c_{22}\mathbf{u}_2 + \cdots + c_{n2}\mathbf{u}_n \\ &\vdots \\ \mathbf{v}_n &= c_{1n}\mathbf{u}_1 + c_{2n}\mathbf{u}_2 + \cdots + c_{nn}\mathbf{u}_n \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$c_{1i}\begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ \vdots \\ u_{n1} \end{bmatrix} + c_{2i}\begin{bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \\ \vdots \\ u_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + c_{ni}\begin{bmatrix} u_{1n} \\ u_{2n} \\ \vdots \\ u_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{1i} \\ v_{2i} \\ \vdots \\ v_{ni} \end{bmatrix}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$. a partir de estas ecuaciones vectoriales se puede escribir los n sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} u_{11}c_{1i} + u_{12}c_{2i} + \cdots + u_{1n}c_{ni} &= v_{1i} \\ u_{21}c_{1i} + u_{22}c_{2i} + \cdots + u_{2n}c_{ni} &= v_{2i} \\ &\vdots \\ u_{n1}c_{1i} + u_{n2}c_{2i} + \cdots + u_{nn}c_{ni} &= v_{ni} \end{aligned}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$. Como cada uno de los sistemas tiene la misma matriz de coeficientes, usted puede reducir todos los n sistemas simultáneamente utilizando la siguiente matriz aumentada.

$$\left[\begin{array}{cc} \underbrace{\begin{array}{cccc} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{n1} & u_{n2} & \cdots & u_{nn} \end{array}}_{B'} & \underbrace{\begin{array}{cccc} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{array}}_{B} \end{array}\right]$$

Aplicando la eliminación de Gauss-Jordan a esta matriz, resulta

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{bmatrix}.$$

Sin embargo, por el lema precedente al teorema 4.20, el lado derecho de esta matriz es $Q = P^{-1}$, lo que implica que la matriz tiene la forma $[I_n \quad P^{-1}]$, lo cual demuestra el teorema.

En el siguiente ejemplo se puede aplicar este procedimiento al problema de cambio de base del ejemplo 3.

EJEMPLO 4 Determinación de una matriz de transición

Halle la matriz de transición de B a B' para las siguientes bases en R^3.

$$B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \quad \text{y} \quad B' = \{(1, 0, 1), (0, -1, 2), (2, 3, -5)\}$$

SOLUCIÓN

Primero utilice los vectores en las dos bases para formar las matrices B y B'.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Luego, forme la matriz $[B' \quad B]$ y use la eliminación de Gauss-Jordan para reescribir $[B' \quad B]$ como $[i_3 \quad P^{-1}]$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

A partir de lo anterior puede concluir que la matriz de transición de B a B' es

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 3 & -7 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Intente multiplicar P^{-1} por la matriz de coordenadas de $\mathbf{x} = [1 \quad 2 \quad -1]^T$ para ver que el resultado es el mismo que se obtuvo en el ejemplo 3.

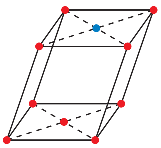
DESCUBRIMIENTO

1. Sean $B = \{(1,0), (1,2)\}$ y $B' = \{(1,0), (0,1)\}$. Forme la matriz $[B' \quad B]$.

2. Haga una conjetura acerca de la necesidad de utilizar la eliminación de Gauss-Jordan para obtener la matriz de transición P^{-1} si el cambio de base es de una base no estándar a una base estándar.

ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

La cristalografía es la ciencia de las formas y estructuras de los cristales. En un cristal, los átomos se encuentran en un patrón repetitivo llamado *red cristalina*. La unidad de repetición más sencilla en una red cristalina se denomina *celda unidad*. Los cristalógrafos pueden usar bases y matrices de coordenadas en R^3 para designar las ubicaciones de átomos en una celda unidad. Por ejemplo, la siguiente figura muestra la celda unidad conocida como *monoclínico centrado*.



La matriz de coordenadas para el átomo superior centrado (azul) podría expresarse como $[\mathbf{x}]_{B'} = [\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 1]^T$.

Brazhnykov Andriy/Shutterstock.com

Observe que cuando B es la base estándar, como en el ejemplo 4, el proceso de cambio de $[B' \;\; B]$ a $[I_n \;\; P^{-1}]$ se transforma en

$$[B' \;\; I_n] \longrightarrow [I_n \;\; P^{-1}].$$

Pero este es el mismo procedimiento utilizado para determinar matrices inversas en la sección 2.3. En otras palabras, si B es la base estándar en R^n, entonces la matriz de transición de B a B' es

$$P^{-1} = (B')^{-1}.$$ Base estándar a base no estándar

El proceso es aún más sencillo si B' es la base estándar, porque la matriz $[B' \;\; B]$ ya está en la forma

$$[I_n \;\; B] = [I_n \;\; P^{-1}].$$

En este caso, la matriz de transición es simplemente

$$P^{-1} = B.$$ Base estándar a base no estándar

Así, la matriz de transición en el ejemplo 2 de $B = \{(1, 0), (1, 2)\}$ a $B' = \{(1, 0), (0, 1)$ es

$$P^{-1} = B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

EJEMPLO 5 Determinación de una matriz de transición

Encuentre la matriz de transición de B a B' para las siguientes bases en R^2.

$$B = \{(-3, 2), (4, -2)\} \quad \text{y} \quad B' = \{(-1, 2), (2, -2)\}$$

SOLUCIÓN

Comience por formar la matriz

$$[B' \;\; B] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

y use la eliminación de Gauss-Jordan para obtener la matriz de transición P^{-1} de B a B':

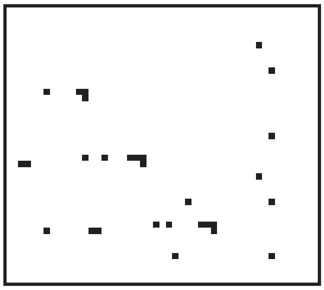
$$[I_2 \;\; P^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Así, se tiene

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

NOTA TECNOLÓGICA

Muchas aplicaciones gráficas y programas de computadora pueden formar una matriz aumentada y encontrar su forma escalonada reducida por renglón. Si usted utiliza una aplicación gráfica, entonces podría ver algo similar a lo siguiente para el Ejemplo 5.



La Online Technology Guide, disponible en college.cengage.com/pic/larsonELA6e provee la sintaxis de programación para estas aplicaciones/programas para el ejemplo 5.

En el ejemplo 5, si usted hubiese determinado la matriz de transición de B' a B (en vez de B a B'), hubiera obtenido

$$[B' \;\; B] = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

que se reduce a

$$[I_2 \;\; P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

La matriz de transición de B' a B es

$$P = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Usted puede comprobar que ésta es la inversa de la matriz de transición determinada en el ejemplo 5 al efectuar a multiplicación PP^{-1} para obtener I_2.

REPRESENTACIÓN DE COORDENADAS EN ESPACIOS *n*-DIMENSIONALES GENERALES

Un beneficio de la representación de coordenadas es que permite representar vectores de un espacio n-dimensional arbitrario con la misma notación usada en R^n. Así, en el ejemplo 6, observe que el vector de coordenadas de un vector en P_3 es un vector en R^4.

EJEMPLO 6 Representación de coordenadas en P_3

Determine la matriz de coordenadas de

$$p = 3x^3 - 2x^2 + 4$$

relativo a la base estándar de P_3,

$$S = \{1, x, x^2, x^3\}.$$

SOLUCIÓN

Escriba p como una combinación lineal de los vectores de la base (en el orden dado).

$$p = 4(1) + 0(x) + (-2)(x^2) + 3(x^3)$$

Lo anterior indica que la matriz de coordenadas de p con respecto a S es

$$[p]_S = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

En el siguiente ejemplo, la matriz de coordenadas de un vector en $M_{3,1}$ es un vector en R^3.

EJEMPLO 7 Representación de coordenadas en $M_{3,1}$

Encuentre la matriz de coordenadas de

$$X = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

relativa a la base estándar de $M_{3,1}$.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

SOLUCIÓN

Dado que X puede expresarse como

$$X = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

entonces la matriz de coordenadas de X con respecto a S es

$$[X]_S = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

COMENTARIO

En la Sección 6.2 usted aprenderá más sobre el uso de R^n para representar un espacio vectorial n-dimensional arbitrario.

Los teoremas 4.20 y 4.21 pueden generalizarse para abarcar los espacios n-dimensionales arbitrarios. Este texto, sin embargo, no cubre generalizaciones de estos teoremas.

4.7 Ejercicios

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

Determinación de una matriz de coordenadas En los ejercicios 1-4, encuentre la matriz de coordenadas de x en R^n respecto a la base estándar.

1. $\mathbf{x} = (5, -2)$

2. $\mathbf{x} = (1, -3, 0)$

3. $\mathbf{x} = (7, -4, -1, 2)$

4. $\mathbf{x} = (-6, 12, -4, 9, -8)$

Determinación de una matriz de coordenadas En los ejercicios 5 a 10 se proporciona la matriz de coordenadas de **x** relativa a una base (no estándar) de B. Determine el vector de coordenadas de **x** relativo a la base estándar de R^n.

5. $B = \{(2, -1), (0, 1)\}$, $[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

6. $B = \{(-1, 4), (4, -1)\}$, $[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

7. $B = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$, $[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

8. $B = \left\{\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(3, 4, \frac{7}{2}\right), \left(-\frac{3}{2}, 6, 2\right)\right\}$, $[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

9. $B = \{(0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\}$, $[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

10. $B = \{(4, 0, 7, 3), (0, 5, -1, -1), (-3, 4, 2, 1), (0, 1, 5, 0)\}$, $[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

Determinación de una matriz de coordenadas En los ejercicios 11 a 16, determine la matriz de coordenadas de **x** en R^n relativa a la base B.

11. $B' = \{(4, 0), (0, 3)\}$, $\mathbf{x} = (12, 6)$

12. $B' = \{(-6, 7), (4, -3)\}$, $\mathbf{x} = (-26, 32)$

13. $B' = \{(8, 11, 0), (7, 0, 10), (1, 4, 6)\}$, $\mathbf{x} = (3, 19, 2)$

14. $B' = \left\{\left(\frac{3}{2}, 4, 1\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{2}, 0\right), \left(1, \frac{1}{2}, 2\right)\right\}$, $\mathbf{x} = \left(3, -\frac{1}{2}, 8\right)$

15. $B' = \{(4, 3, 3), (-11, 0, 11), (0, 9, 2)\}$, $\mathbf{x} = (11, 18, -7)$

16. $B' = \{(9, -3, 15, 4), (3, 0, 0, 1), (0, -5, 6, 8), (3, -4, 2, -3)\}$, $\mathbf{x} = (0, -20, 7, 15)$

Determinación de una matriz de coordenadas En los ejercicios 17 a 24, determine la matriz de transición de B a B'.

17. $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $B' = \{(2, 4), (1, 3)\}$

18. $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $B' = \{(1, 1), (5, 6)\}$

19. $B = \{(2, 4), (-1, 3)\}$, $B' = \{(1, 0), (0, 1)\}$

20. $B = \{(1, 1), (1, 0)\}$, $B' = \{(1, 0), (0, 1)\}$

21. $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, $B' = \{(1, 0, 0), (0, 2, 8), (6, 0, 12)\}$

22. $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, $B' = \{(1, 3, -1), (2, 7, -4), (2, 9, -7)\}$

23. $B = \{(3, 4, 0), (-2, -1, 1), (1, 0, -3)\}$, $B' = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

24. $B = \{(1, 3, 2), (2, -1, 2), (5, 6, 1)\}$, $B' = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

Determinación de una matriz de coordenadas En los ejercicios 25 a 34, utilice una aplicación gráfica o programa de cómputo con capacidades matriciales para determinar la matriz de transición de B a B'.

25. $B = \{(2, 5), (1, 2)\}$, $B' = \{(2, 1), (-1, 2)\}$

26. $B = \{(-2, 1), (3, 2)\}$, $B' = \{(1, 2), (-1, 0)\}$

27. $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, $B' = \{(1, 3, 3), (1, 5, 6), (1, 4, 5)\}$

28. $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, $B' = \{(2, -1, 4), (0, 2, 1), (-3, 2, 1)\}$

29. $B = \{(1, 2, 4), (-1, 2, 0), (2, 4, 0)\}$, $B' = \{(0, 2, 1), (-2, 1, 0), (1, 1, 1)\}$

30. $B = \{(3, 2, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 0)\}$, $B' = \{(1, 1, -1), (0, 1, 2), (-1, 4, 0)\}$

31. $B = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$, $B' = \{(1, 3, 2, -1), (-2, -5, -5, 4), (-1, -2, -2, 4), (-2, -3, -5, 11)\}$

32. $B = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$, $B' = \{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$

33. $B = \{(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$, $B' = \{(1, 2, 4, -1, 2), (-2, -3, 4, 2, 1), (0, 1, 2, -2, 1), (0, 1, 2, 2, 1), (1, -1, 0, 1, 2)\}$

34. $B = \{(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$, $B' = \{(2, 4, -2, 1, 0), (3, -1, 0, 1, 2), (0, 0, -2, 4, 5), (2, -1, 2, 1, 1), (0, 1, 2, -3, 1)\}$

Determinación de matrices de transición y coordenadas En los ejercicios 35 a 38, (a) determinar la matriz de transición de B a B', (b) determinar la matriz de transición de B' a B, (c) verificar que las dos matrices de transición son la inversa una de otra y (d) determinar $[\mathbf{x}]_B$ cuando se proporciona $[\mathbf{x}]_{B'}$.

35. $B = \{(1, 3), (-2, -2)\},\ B' = \{(-12, 0), (-4, 4)\},$

$$[\mathbf{x}]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

36. $B = \{(2, -2), (6, 3)\},\ B' = \{(1, 1), (32, 31)\},$

$$[\mathbf{x}]_{B'} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

37. $B = \{(1, 0, 2), (0, 1, 3), (1, 1, 1)\},$

$B' = \{(2, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 2, 1)\},$

$$[\mathbf{x}]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

38. $B = \{(1, 1, 1), (1, -1, 1), (0, 0, 1)\},$

$B' = \{(2, 2, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\},$

$$[\mathbf{x}]_{B'} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Determinación de matrices de transición y coordenadas En los ejercicios 39 y 41, utilice una aplicación gráfica con capacidades matriciales para (a) encontrar la matriz de transición de B a B', (b) encontrar la matriz de transición de B' a B, (c) verifique que las dos matrices de transición son la inversa una de otra y (d) determine $[\mathbf{x}]_B$ cuando se proporciona $[\mathbf{x}]_{B'}$.

39. $B = \{(4, 2, -4), (6, -5, -6), (2, -1, 8)\},$

$B' = \{(1, 0, 4), (4, 2, 8), (2, 5, -2)\},$

$$[\mathbf{x}]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

40. $B = \{(1, 3, 4), (2, -5, 2), (-4, 2, -6)\},$

$B' = \{(1, 2, -2), (4, 1, -4), (-2, 5, 8)\},$

$$[\mathbf{x}]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

41. $B = \{(2, 0, -1), (0, -1, 3), (1, -3, -2)\},$

$B' = \{(0, -1, -3), (-1, 3, -2), (-3, -2, 0)\},$

$$[\mathbf{x}]_{B'} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

42. REMATE Sean B y B' dos bases de R^n.

(a) Cuando $B = I_n$, escriba la matriz de transición de B a B' en términos de B'.

(b) Cuando $B' = I_n$, escriba la matriz de transición de B a B' en términos de B.

(c) Cuando $B = I_n$, escriba la matriz de transición de B' a B en términos de B'.

(d) Cuando $B' = I_n$, escriba la matriz de transición de B' a B en términos de B.

Representación de coordenadas en P_3 En los ejercicios 43 a 46, halle la matriz de coordenadas de p con respecto a la base estándar de P_3.

43. $p = 2x^3 + x^2 + 11x + 4$

44. $p = 3x^2 + 114x + 13$

45. $p = x^3 - 2x^2 + 5x + 1$ **46.** $p = 4x^3 - 3x - 2$

Representación de coordenadas en $M_{3,1}$ En los ejercicios 47 a 50, halle la matriz de coordenadas de X con respecto a la base estándar en $M_{3,1}$.

47. $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ **48.** $X = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

49. $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ **50.** $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 51 y 52, determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, proporcione una razón o cite una expresión adecuada del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que muestre que la expresión no es cierta en todos los casos o cite del texto una expresión adecuada.

51. (a) Si P es la matriz de transición de una base de B a B', entonces la ecuación $P[\mathbf{x}]_{B'} = [\mathbf{x}]_B$ representa el cambio de base de B a B'.

(b) Para cualquier matriz X de 4×1, la matriz de coordenadas $[X]_S$ respecto a la base estándar de $M_{4,1}$ es igual a X misma.

52. (a) Para realizar el cambio de base de una base no estándar B' a una base estándar B, la matriz de transición P^{-1} es simplemente B.

(b) La matriz de coordenadas de $p = 5x^2 + x - 3$ respecto a la base estándar de P_2 es $[p]_S = [5 \ \ 1 \ \ -3]^T$.

53. Sea P la matriz de transición de B'' a B' y sea Q la matriz de transición de B' a B. ¿Cuál es la matriz de transición de B'' a B'?

54. Sea P la matriz de transición de B'' a B' y sea Q la matriz de transición de B' a B. ¿Cuál es la matriz de transición de B a B''?

4.8 Aplicaciones de los espacios vectoriales

- Uso del wronskiano para probar la independencia lineal de un conjunto de soluciones de una ecuación diferencial homogénea lineal.
- Identificar y trazar la gráfica de una sección cónica y realizar una rotación de ejes.

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES (CÁLCULO)

Una **ecuación diferencial lineal de orden** n es de la forma

$$y^{(n)} + g_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + g_1(x)y' + g_0(x)y = f(x)$$

donde $g_0, g_1, \ldots, g_{n-1}$ y f son funciones de x con un dominio común. Si $f(x) = 0$, la ecuación es **homogénea**. De otra manera es **no homogénea**. A una función y se le denomina solución de la ecuación diferencial lineal si la ecuación se satisface cuando y y sus primeras n derivadas se sustituyen en la ecuación.

EJEMPLO 1 Ecuación diferencial lineal de segundo orden

Demuestre que $y_1 = e^x$ y $y_2 = e^{-x}$ son soluciones de la ecuación diferencial lineal $y'' - y = 0$.

SOLUCIÓN

Para la función $y_1 = e^x$, se tiene que $y_1 = e^x$ y $y_1'' = e^x$, por tanto,

$$y_1'' - y_1 = e^x - e^x = 0$$

lo que significa que es una solución de la ecuación diferencial. De manera semejante, para $y_2 = e^{-x}$ se tiene

$$y_2' = -e^{-x} \quad \text{y} \quad y_2'' = e^{-x}.$$

Esto implica que

$$y_2'' - y_2 = e^{-x} - e^{-x} = 0.$$

Por tanto, $y_2 = e^{-x}$ también es una solución de la ecuación diferencial lineal.

Existen dos observaciones importantes que usted puede hacer acerca del ejemplo 1. La primera es que el espacio vectorial $C''(-\infty, \infty)$ de todas las funciones derivables dos veces definidas en la recta de los enteros reales, las dos soluciones $y_1 = e^x$ y $y_2 = e^{-x}$ son *linealmente independientes*. Esto significa que la única solución de

$$C_1y_1 + C_2y_2 = 0$$

que es válida para toda x es $C_1 = C_2 = 0$. La segunda observación es que toda *combinación lineal* de y_1 y y_2 también es solución de la ecuación diferencial lineal. Para ver esto, sea $y = C_1y_1 + C_2y_2$. Entonces

$$\begin{aligned} y &= C_1e^x + C_2e^{-x} \\ y' &= C_1e^x - C_2e^{-x} \\ y'' &= C_1e^x + C_2e^{-x}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial $y'' - y = 0$ resulta

$$y'' - y = (C_1e^x + C_2e^{-x}) - (C_1e^x + C_2e^{-x}) = 0.$$

Por tanto, $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$ es una solución.

Estas dos observaciones se generalizan en el siguiente teorema, el cual se establece sin demostración.

COMENTARIO

La solución

$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdot \cdot \cdot + C_ny_n$

es llamada **solución general** de la ecuación diferencial dada.

Soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea

Toda ecuación diferencial lineal homogénea de n-ésimo orden

$$y^{(n)} + g_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdot \cdot \cdot + g_1(x)y' + g_0(x)y = 0$$

tiene n soluciones linealmente independientes. Además, si $\{y_1, y_2, . . . , y_n\}$ es un conjunto de soluciones linealmente independientes, entonces toda solución es de la forma

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdot \cdot \cdot + C_ny_n$$

donde $C_2, C_2, . . . , C_n$ son números reales.

A la luz del teorema anterior, se puede ver la importancia de ser capaz de determinar si un conjunto de soluciones es linealmente independiente. Antes de describir una manera de probar la independencia lineal, vea la siguiente definición.

COMENTARIO

El wronskiano de un conjunto de funciones se llama así en honor al matemático polaco Josef Maria Wronski (1778-1853).

Definición del wronskiano de un conjunto de funciones

Sea $\{y_1, y_2, . . . , y_n\}$ un conjunto de funciones, cada una de las cuales tiene $n - 1$ derivadas en un intervalo I. El determinante

$$W(y_1, y_2, . . . , y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

se denomina **Wronskiano** del conjunto de funciones dado.

EJEMPLO 2 **Determinación del wronskiano de un conjunto de funciones**

a. El wronskiano del conjunto $\{1 - x, 1 + x, 2 - x\}$ es

$$W = \begin{vmatrix} 1 - x & 1 + x & 2 - x \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

b. El wronskiano del conjunto $\{x, x^2, x^3\}$ es

$$W = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 2x^3.$$

Se dice que el wronskiano en el inciso (a) del ejemplo 2 es **idénticamente igual a cero**, porque para cualquier valor de x es cero. El wronskiano del inciso (b) no es idénticamente igual a cero, ya que existen valores de x para los que el wronskiano es diferente de cero.

El siguiente teorema muestra cómo el wronskiano de un conjunto de funciones puede utilizarse para probar la independencia lineal.

COMENTARIO

Esta prueba *no* se aplica a un conjunto arbitrario de funciones. Cada una de las funciones $y_1, y_2, . . . y_n$ debe ser una solución de la misma ecuación diferencial lineal homogénea de orden n.

Prueba del wronskiano para la independencia lineal

Sea $\{y_1, y_2, . . . , y_n\}$ un conjunto de n soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de n-ésimo orden. El conjunto es linealmente independiente si y sólo si el wronskiano no es idénticamente igual a cero.

La demostración de este teorema para el caso donde $n = 2$ se deja como ejercicio (véase el ejercicio 40).

EJEMPLO 3 **Prueba de independencia lineal de un conjunto de soluciones**

Determine si $\{1, \cos x, \operatorname{sen} x\}$ es un conjunto de soluciones linealmente independiente para la ecuación diferencial lineal homogénea

$$y''' + y' = 0.$$

SOLUCIÓN

Comience observando que cada una de las funciones es una solución de $y''' + y' = 0$. (Intente verificar lo anterior.) A continuación, al probar la independencia lineal se genera el wronskiano de las tres funciones como sigue.

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \operatorname{sen} x \\ 0 & -\operatorname{sen} x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix} \\ &= \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \end{aligned}$$

Como W no es idénticamente igual a cero, el conjunto

$$\{1, \cos x, \operatorname{sen} x\}$$

es linealmente independiente. Además, como este conjunto consta de tres soluciones linealmente independientes de una ecuación diferencial lineal homogénea de tercer orden, se tiene que la solución general es

$$y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \operatorname{sen} x$$

donde C_1, C_2 y C_3 son números reales.

EJEMPLO 4 **Prueba de independencia lineal de un conjunto de soluciones**

Determine si $\{e^x, xe^x, (x + 1)e^x\}$ es un conjunto de soluciones linealmente independiente de la ecuación diferencial lineal homogénea

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$$

SOLUCIÓN

Como en el ejemplo 3, comience verificando que cada una de las funciones es una solución de $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$. (Esta verificación se le deja a usted.) Probar la independencia lineal genera el wronskiano de las tres funciones como sigue.

$$W = \begin{vmatrix} e^x & xe^x & (x+1)e^x \\ e^x & (x+1)e^x & (x+2)e^x \\ e^x & (x+2)e^x & (x+3)e^x \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, el conjunto $\{e^x, xe^x, (x + 1)e^x\}$ es linealmente dependiente.

En el ejemplo 4, se utilizó el wronskiano para determinar que el conjunto

$$\{e^x, xe^x, (x + 1)e^x\}$$

es linealmente dependiente. Otra forma de determinar la dependencia lineal de este conjunto es advirtiendo que la tercera función es una combinación lineal de las otras dos. Es decir

$$(x + 1)e^x = e^x + xe^x.$$

Intente demostrar que el conjunto $\{e^x, xe^x, x^2e^x\}$ forma un conjunto linealmente independiente de soluciones de la ecuación diferencial

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$$

SECCIONES CÓNICAS Y ROTACIÓN

Toda sección cónica en el plano xy tiene una ecuación de la forma

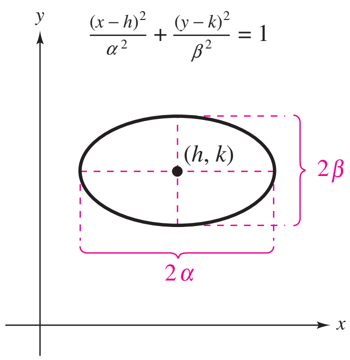
$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

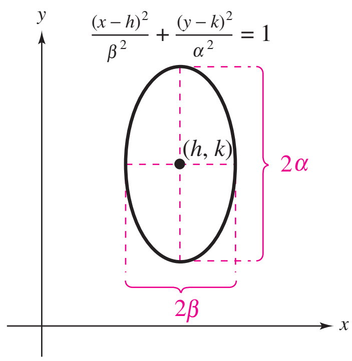
Identificar la gráfica de esta ecuación es bastante fácil en tanto que b, el coeficiente del término xy, sea cero. En estos casos los ejes de las cónicas son paralelos a los ejes coordenados y la identificación se lleva a cabo al escribir la ecuación en la forma normal (completada al cuadrado). Las formas estándar de las ecuaciones de las cuatro cónicas fundamentales se proporcionan en el siguiente resumen. Para circunferencias, elipses e hipérbolas, el punto (h, k) es el centro. Para las parábolas, el punto (h, k) es el vértice.

Formas estándar de las ecuaciones de las cónicas

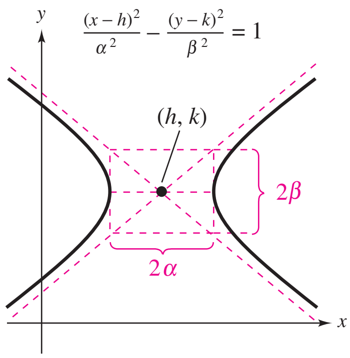
Circunferencia (r = radio): $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

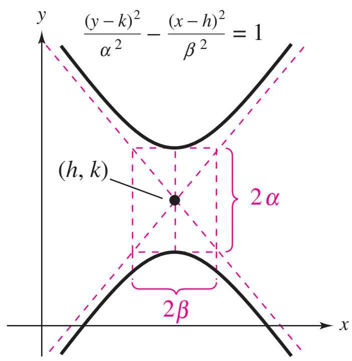
Elipse (2α = longitud del eje mayor, 2β = longitud del eje menor):



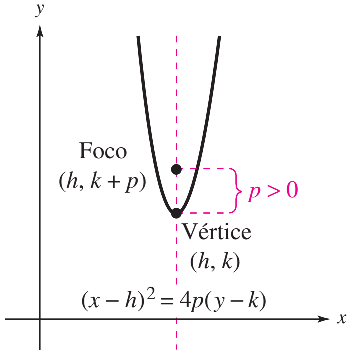


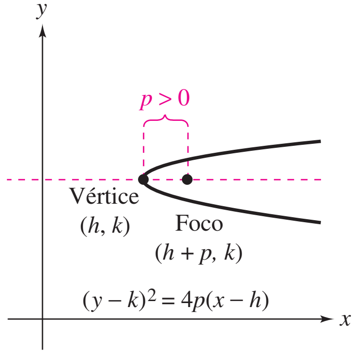
Hipérbola (2α = longitud del eje transversal, 2β = longitud del eje menor):





Parábola (p = distancia directa del vértice al foco):





EJEMPLO 5 Identificación de secciones cónicas

a. La forma estándar de $x^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ es

$$(x - 1)^2 = 4(-1)(y - 1).$$

La gráfica de esta ecuación es una parábola con vértices en $(h, k) = (1, 1)$. El eje de la parábola es vertical. Como $p = -1$, el foco está en el punto $(1, 0)$. Por último, ya que el foco está por debajo del vértice, la parábola se abre hacia arriba, como se observa en la figura 4.20(a)

b. La forma estándar de $x^2 + 4y^2 + 6x - 8y + 9 = 0$ es

$$\frac{(x + 3)^2}{4} + \frac{(y - 1)^2}{1} = 1.$$

La gráfica de esta ecuación es una elipse con centro en $(h, k) = (-3, 1)$. El eje mayor es horizontal y su longitud es $2\alpha = 4$. La longitud del eje menor es $2\beta = 2$. Los vértices de esta elipse están en $(-5, 1)$ y $(-1, 1)$, y los extremos del eje menor están en $(-3, 2)$ y $(-3, 0)$, como se muestra en la figura 4.20(b)

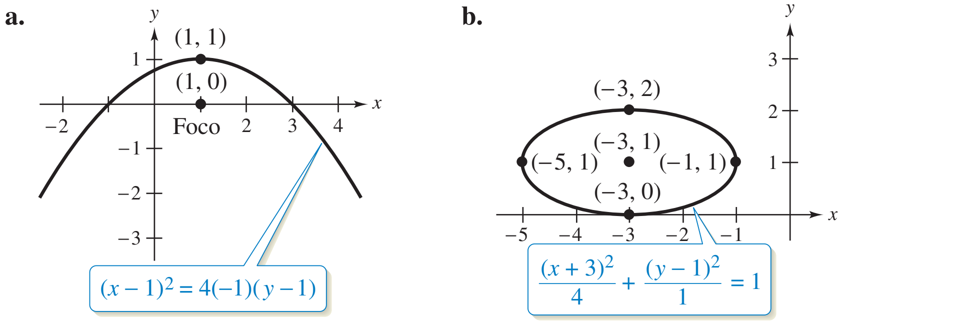


Figura 4.20

Las ecuaciones de las cónicas del ejemplo 5 no tienen término xy. En consecuencia, los ejes de las cónicas correspondientes son paralelos a los ejes coordenados. Para ecuaciones polinomiales de segundo grado que tengan un término xy, los ejes de las cónicas correspondientes no son paralelos a los ejes coordenados. En estos casos es útil *rotar* los ejes estándar para formar nuevos ejes x' y y'. El ángulo de rotación necesario ∅ (medido en sentido contrario de las manecillas del reloj) está dado por $\cot 2\theta = (a - c)/b$. Con esta rotación, la base estándar de R^2,

$$B = \{(1, 0), (0, 1)\}$$

es rotada para formar la nueva base

$$B' = \{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta), (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\}$$

como se muestra en l figura 4.21.

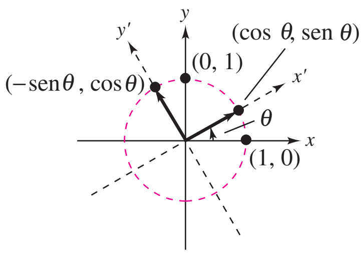


Figura 4.21

Para hallar las coordenadas de un punto (x, y) relativas a esta nueva base, se puede utilizar una matriz de transición, como se demuestra en el ejemplo 6.

EJEMPLO 6 Una matriz de transición para la rotación en R^2

Determine las coordenadas de un punto (x, y) en R^2 relativas a la base

$$B' = \{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta), (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\}.$$

SOLUCIÓN

Por el teorema 4.21 se tiene

$$[B' \; B] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como B es la base estándar en R^2, P^{-1} es representada por $(B')^{-1}$. Puede usar la fórmula dada en la Sección 2.3 (página 66) para la inversa de una matriz de 2×2 para encontrar $(B')^{-1}$. Esto resulta en

$$[I \quad P^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Si $(x', y')^T$ son las coordenadas de (x, y) relativas a B', se puede usar la matriz de transición P^{-1} como se muestra a continuación

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Las coordenadas x' y y' están dadas por $x' = x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta$ y $y' = -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta$.

Las dos últimas ecuaciones del ejemplo 6 proporcionan las coordenadas $x'y'$ en términos de las coordenadas xy. Para efectuar una rotación de ejes para una ecuación polinomial de segundo grado, es útil expresar las coordenadas xy en términos de las coordenadas $x'y'$. Para lograr esto, en las dos últimas ecuaciones del ejemplo 6 se despejan x y y para obtener

$$x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta \quad \text{y} \quad y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta.$$

Al sustituir estas expresiones por x y y en la ecuación dada de segundo grado se obtiene una ecuación polinomial de segundo grado x' y y' que no tiene término $x'y'$.

Rotación de ejes

La ecuación de segundo grado $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ puede escribirse en la forma

$$a'(x')^2 + c'(y')^2 + d'x' + e'y' + f' = 0$$

al rotar en sentido contrario al de las manecillas del reloj los ejes coordenados a un ángulo θ, donde θ se define como $\cot 2\theta = \dfrac{a - c}{b}$. Los coeficientes de esta nueva ecuación se obtienen a partir de las sustituciones.

$$x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta \quad \text{y} \quad y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta.$$

La demostración del resultado anterior se deja para usted (véase el ejercicio 82).

ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

Una antena satelital es una antena diseñada para transmitir o recibir señales de un tipo específico. Una antena satelital estándar consta de una superficie en forma de tazón y un *polarrotor* que apunta hacia la superficie. La superficie en forma de tazón típicamente tiene la forma de un paraboloide elíptico (véase la Sección 7.4). El corte transversal de la superficie típicamente tiene la forma de una parábola rotada.

Chris H. Galbraith/Shutterstock.com

En el ejemplo 7 se demuestra cómo identificar la gráfica de un polinomio de segundo grado mediante la rotación de los ejes coordenados.

EJEMPLO 7 **Rotación de una sección cónica**

Efectúe una rotación de ejes para eliminar el término xy en

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 + 14\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 18 = 0$$

y trace en el plano $x'y'$ la gráfica de la ecuación resultante.

SOLUCIÓN

El ángulo de rotación está dado por

$$\cot 2\theta = \frac{a-c}{b} = \frac{5-5}{-6} = 0.$$

Lo anterior implica que $\varnothing = \pi/4$; por tanto

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Con la sustitución de

$$x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')$$

y

$$y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$$

en la ecuación original y simplificando se obtiene

$$(x')^2 + 4(y')^2 + 6x' - 8y' + 9 = 0.$$

Por último, al completar el cuadrado se encuentra que la forma normal de esta ecuación es

$$\frac{(x'+3)^2}{2^2} + \frac{(y'-1)^2}{1^2} = \frac{(x'+3)^2}{4} + \frac{(y'-1)^2}{1} = 1$$

que es la ecuación de una elipse, como se muestra en la figura 4.22.

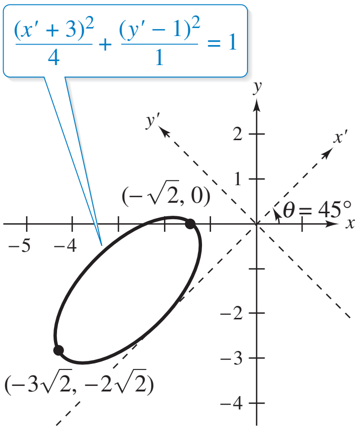


Figura 4.22

En el ejemplo 7, la nueva base (rotada) en R^2 es

$$B' = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

y las coordenadas de los vértices de la elipse relativas a B' son

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para encontrar las coordenadas de los vértices con respecto a la base estándar $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$, utilice las ecuaciones

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')$$

y

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$$

para obtener $\left(-3\sqrt{2}, -2\sqrt{2}\right)$ y $\left(-\sqrt{2}, 0\right)$, como se muestra en la figura 4.22.

4.8 Ejercicios

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

Determinación de soluciones de una ecuación diferencial En los ejercicios 1 a 12, determine qué funciones son soluciones de la ecuación diferencial lineal.

1. $y'' + y = 0$

(a) e^x (b) $\operatorname{sen} x$

(c) $\cos x$ (d) $\operatorname{sen} x - \cos x$

2. $y''' + y = 0$

(a) e^x (b) e^{-x} (c) e^{-2x} (d) $2e^{-x}$

3. $y''' + y'' + y' + y = 0$

(a) x (b) e^x (c) e^{-x} (d) xe^{-x}

4. $y'' + 4y' + 4y = 0$

(a) e^{-2x} (b) xe^{-2x}

(c) x^2e^{-2x} (d) $(x + 2)e^{-2x}$

5. $y^{(4)} + y''' - 2y'' = 0$

(a) 1 (b) x (c) x^2 (d) e^x

6. $y^{(4)} - 16y = 0$

(a) $3 \cos x$ (b) $3 \cos 2x$

(c) e^{-2x} (d) $3e^{2x} - 4 \operatorname{sen} 2x$

7. $x^2y'' - 2y = 0$

(a) $\dfrac{1}{x^2}$ (b) x^2 (c) e^{x^2} (d) e^{-x^2}

8. $y'(2x - 1)y = 0$

(a) e^{x-x^2} (b) $2e^{x-x^2}$

(c) $3e^{x-x^2}$ (d) $4e^{x-x^2}$

9. $xy' - 2y = 0$

(a) $\sqrt{x}$ (b) x (c) x^2 (d) x^3

10. $xy'' + 2y' = 0$

(a) x (b) $\dfrac{1}{x}$ (c) xe^x (d) xe^{-x}

11. $y'' - y' - 2y = 0$

(a) xe^{2x} (b) $2e^{2x}$ (c) $2e^{-2x}$ (d) xe^{-x}

12. $y' - 2xy = 0$

(a) $3e^{x^2}$ (b) xe^{x^2} (c) x^2e^x (d) xe^{-x}

Determinación de wronskiano para un conjunto de funciones En los ejercicios 13 a 26, encuentre el wronskiano para el conjunto de funciones.

13. $\{x, \cos x\}$ **14.** $\{e^{2x}, \cos 3x\}$

15. $\{e^x, e^{-x}\}$ **16.** $\{e^{x^2}, e^{-x^2}\}$

17. $\{x, \operatorname{sen} x, \cos x\}$ **18.** $\{x, -\operatorname{sen} x, \cos x\}$

19. $\{e^{-x}, xe^{-x}, (x + 3)e^{-x}\}$ **20.** $\{x, e^{-x}, e^x\}$

21. $\{1, e^x, e^{2x}\}$ **22.** $\{x^2, e^{x^2}, x^2e^x\}$

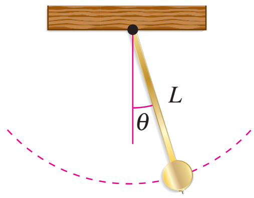
23. $\{1, x, x^2, x^3\}$ **24.** $\{x, x^2, e^x, e^{-x}\}$

25. $\{1, x, \cos x, e^{-x}\}$ **26.** $\{x, e^x, \operatorname{sen} x, \cos x\}$

Pruebas de independencia lineal En los ejercicios 27–34, (a) verifique que cada solución satisfaga la ecuación diferencial, (b) pruebe la independencia lineal del conjunto de soluciones, y (c) si el conjunto es linealmente independiente, entonces escriba la solución general de la ecuación diferencial.

	Ecuación diferencial	*Solución*
27.	$y'' + 16y = 0$	$\{\operatorname{sen} 4x, \cos 4x\}$
28.	$y'' - 2y' + y = 0$	$\{e^x, xe^x\}$
29.	$y''' + 4y'' + 4y' = 0$	$\{e^{-2x}, xe^{-2x}, (2x + 1)e^{-2x}\}$
30.	$y''' + 4y' = 0$	$\{2, 2 \operatorname{sen} 2x, 1 + \operatorname{sen} 2x\}$
31.	$y''' + 4y' = 0$	$\{1, \operatorname{sen} 2x, \cos 2x\}$
32.	$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$	$\{e^{-x}, xe^{-x}, x^2e^{-x}\}$
33.	$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$	$\{e^{-x}, xe^{-x}, e^{-x} + xe^{-x}\}$
34.	$y^{(4)} - 2y''' + y'' = 0$	$\{1, x, e^x, xe^x\}$

35. Péndulo Considere un péndulo de longitud L que oscila sólo por la fuerza de gravedad.



Para valores pequeños de $\theta = \theta(t)$, el movimiento del péndulo puede aproximarse por la ecuación diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

Donde g es la aceleración debido a la gravedad.

(a) Verifique que

$$\left\{\operatorname{sen}\sqrt{\frac{g}{L}}t, \cos\sqrt{\frac{g}{L}}t\right\}$$

es un conjunto de soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial.

(b) Encuentre la solución general de la ecuación diferencial y demuestre que puede escribirse en la forma

$$\theta(t) = A \cos\left[\operatorname{sen}\sqrt{\frac{g}{L}}(t + \phi)\right].$$

36. Prueba Demuestre que $y = C_1 \cos ax + C_2 \operatorname{sen} ax$ es la solución general de $y'' + a^2y = 0$, $a \neq 0$.

Prueba En los ejercicios 37–39, demuestre que el conjunto dado de soluciones de una ecuación diferencial homogénea lineal de segundo orden es linealmente independiente.

37. $\{e^{ax}, e^{bx}\}$, $a \neq b$ **38.** $\{e^{ax}, xe^{ax}\}$

39. $\{e^{ax} \cos bx, e^{ax} \operatorname{sen} bx\}$, $b \neq 0$

40. **Prueba** Sea $\{y_1, y_2\}$ un conjunto de soluciones de una ecuación diferencial homogénea de segundo orden. Demuestre que este conjunto es linealmente independiente si y sólo si el wronskiano no es idénticamente igual a cero.

41. **Escriba** ¿La suma de dos soluciones de una ecuación diferencial lineal no homogénea también es una solución? Explique su respuesta.

42. **Escriba** ¿El múltiplo escalar de una solución de una ecuación diferencial lineal no homogénea también es una solución? Explique su respuesta.

Identificar y graficar una sección cónica En los ejercicios 43–60, identifique y trace la gráfica de la sección cónica.

43. $y^2 + x = 0$ **44.** $y^2 + 8x = 0$

45. $x^2 + 4y^2 - 16 = 0$ **46.** $5x^2 + 3y^2 - 15 = 0$

47. $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} - 1 = 0$ **48.** $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{25} = 1$

49. $x^2 - 2x + 8y + 17 = 0$

50. $y^2 - 6y - 4x + 21 = 0$

51. $9x^2 + 25y^2 - 36x - 50y + 61 = 0$

52. $4x^2 + y^2 - 8x + 3 = 0$

53. $9x^2 - y^2 + 54x + 10y + 55 = 0$

54. $4y^2 - 2x^2 - 4y - 8x - 15 = 0$

55. $x^2 + 4y^2 + 4x + 32y + 64 = 0$

56. $4y^2 + 4x^2 - 24x + 35 = 0$

57. $2x^2 - y^2 + 4x + 10y - 22 = 0$

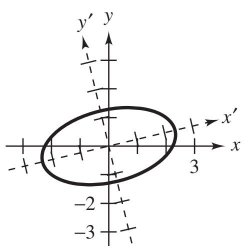
58. $4x^2 - y^2 + 4x + 2y - 1 = 0$

59. $x^2 + 4x + 6y - 2 = 0$

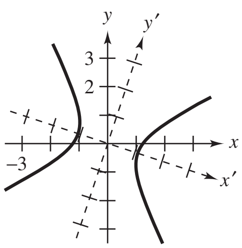
60. $y^2 + 8x + 6y + 25 = 0$

Relacionar una ecuación con una gráfica En los ejercicios 61–64, relacione la gráfica con su ecuación [las gráficas se etiquetan (a), (b), (c), y (d)].

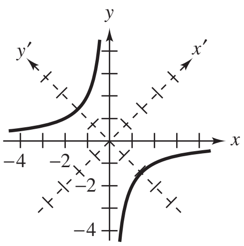
(a)



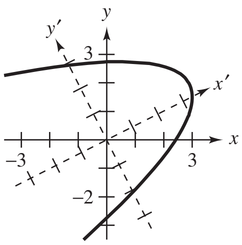
(b)



(c)



(d)



61. $xy + 2 = 0$

62. $-2x^2 + 3xy + 2y^2 + 3 = 0$

63. $x^2 - xy + 3y^2 - 5 = 0$

64. $x^2 - 4xy + 4y^2 + 10x - 30 = 0$

Rotación de una sección cónica En los ejercicios 65 a 76, efectúe una rotación de ejes para eliminar el término xy y trace la gráfica de la cónica

65. $xy + 1 = 0$ **66.** $xy - 2 = 0$

67. $4x^2 + 2xy + 4y^2 - 15 = 0$

68. $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 8y = 0$

69. $2x^2 - 3xy - 2y^2 + 10 = 0$

70. $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 24 = 0$

71. $9x^2 + 24xy + 16y^2 + 80x - 60y = 0$

72. $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 12 = 0$

73. $13x^2 + 6\sqrt{3}xy + 7y^2 - 16 = 0$

74. $7x^2 - 2\sqrt{3}xy + 5y^2 = 16$

75. $3x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2 + 2x + 2\sqrt{3}\,y = 0$

76. $x^2 + 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 2\sqrt{3}x + 2y + 16 = 0$

Rotación de una sección cónica degenerada En los ejercicios 77 a 80, efectúe una rotación de ejes para eliminar el término xy y trace la gráfica de la cónica “degenerada”.

77. $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ **78.** $5x^2 - 2xy + 5y^2 = 0$

79. $x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0$ **80.** $x^2 - 10xy + y^2 = 0$

81. **Prueba** Demuestre que una rotación $\theta = \pi/4$ eliminará el término xy de la ecuación

$$ax^2 + bxy + ay^2 + dx + ey + f = 0.$$

82. **Prueba** Demuestre que una rotación θ, donde $\cot 2\theta = (a - c)/b$, eliminará el término xy de la ecuación

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

83. **Prueba** Para la ecuación $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$, la matriz A se define como

$$A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}.$$

(a) Demuestre que si $|A| = 0$, entonces la gráfica de $ax^2 + bx + cy^2 = 0$ es una recta.

(b) Demuestre que si $|A| \neq 0$, entonces la gráfica de $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$ son dos rectas que se intersectan.

84. **REMATE** Explique cada uno de los siguientes.

(a) Cómo usar el wronskiano para probar la lineal independencia de un conjunto de soluciones de una ecuación diferencial homogénea lineal.

(b) Cómo eliminar el término xy si aparece en la ecuación general de una sección cónica.

4 Ejercicios de repaso

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

Operaciones vectoriales En los ejercicios 1 a 4, determine (a) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, (b) $2\mathbf{v}$, (c) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ y (d) $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$.

1. $\mathbf{u} = (-1, 2, 3), \quad \mathbf{v} = (1, 0, 2)$
2. $\mathbf{u} = (-1, 2, 1), \quad \mathbf{v} = (0, 1, 1)$
3. $\mathbf{u} = (3, -1, 2, 3), \quad \mathbf{v} = (0, 2, 2, 1)$
4. $\mathbf{u} = (0, 1, -1, 2), \quad \mathbf{v} = (1, 0, 0, 2)$

Solución de una ecuación vectorial En los ejercicios 5 a 8, resuelva para x dado que $\mathbf{u} = (1, -1, 2)$, $\mathbf{v} = (0, 2, 3)$ y $\mathbf{w} = (0, 1, 1)$

5. $2\mathbf{x} - \mathbf{u} + 3\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$
6. $3\mathbf{x} + 2\mathbf{u} - \mathbf{v} + 2\mathbf{w} = \mathbf{0}$
7. $5\mathbf{u} - 2\mathbf{x} = 3\mathbf{v} + \mathbf{w}$
8. $2\mathbf{u} + 3\mathbf{x} = 2\mathbf{v} - \mathbf{w}$

Escribir una combinación lineal En los ejercicios 9 a 12, exprese $\mathbf{v}$ como una combinación lineal de $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, y $\mathbf{u}_3$, en caso de ser posible.

9. $\mathbf{v} = (3, 0, -6), \quad \mathbf{u}_1 = (1, -1, 2), \quad \mathbf{u}_2 = (2, 4, -2),$ $\mathbf{u}_3 = (1, 2, -4)$
10. $\mathbf{v} = (4, 4, 5), \quad \mathbf{u}_1 = (1, 2, 3), \quad \mathbf{u}_2 = (-2, 0, 1),$ $\mathbf{u}_3 = (1, 0, 0)$
11. $\mathbf{v} = (1, 2, 3, 5), \quad \mathbf{u}_1 = (1, 2, 3, 4),$ $\mathbf{u}_2 = (-1, -2, -3, 4), \quad \mathbf{u}_3 = (0, 0, 1, 1)$
12. $\mathbf{v} = (4, -13, -5, -4), \quad \mathbf{u}_1 = (1, -2, 1, 1),$ $\mathbf{u}_2 = (-1, 2, 3, 2), \quad \mathbf{u}_3 = (0, -1, -1, -1)$

Describir el vector cero y el inverso aditivo En los ejercicios 13 a 16, describa el vector cero y el inverso aditivo de un vector en el espacio vectorial dado.

13. $M_{3,4}$
14. P_8
15. R^3
16. $M_{2,3}$

Determinar subespacios En los ejercicios 17 a 24, determine si W es un subespacio del espacio vectorial.

17. $W = \{(x, y): x = 2y\}, \quad V = R^2$
18. $W = \{(x, y): x - y = 1\}, \quad V = R^2$
19. $W = \{(x, y): y = ax, a \text{ es un entero}\}, \quad V = R^2$
20. $W = \{(x, y): y = ax^2\}, \quad V = R^2$
21. $W = \{(x, 2x, 3x): x \text{ es un número real}\}, \quad V = R^3$
22. $W = \{(x, y, z): x \geq 0\}, \quad V = R^3$
23. $W = \{f: f(0) = -1\}, \quad V = C[-1, 1]$
24. $W = \{f: f(-1) = 0\}, \quad V = C[-1, 1]$
25. ¿Cuál de los siguientes subconjuntos de R^3 es subespacio de R^3?
    (a) $W = \{(x_1, x_2, x_3): x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\}$
    (b) $W = \{(x_1, x_2, x_3): x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$
26. ¿Cuál de los siguientes subconjuntos de R^3 es subespacio de R^3?
    (a) $W = \{(x_1, x_2, x_3): x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$
    (b) $W = \{(x_1, x_2, x_3): x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$

Conjuntos generadores, independencia lineal y bases En los ejercicios 27 a 32, determine si S (a) genera a R^3, (b) es linealmente independiente y (c) es una base para R^3.

27. $S = \{(1, -5, 4), (11, 6, -1), (2, 3, 5)\}$
28. $S = \{(4, 0, 1), (0, -3, 2), (5, 10, 0)\}$
29. $S = \left\{\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -1\right), (5, 2, 3), (-4, 6, -8)\right\}$
30. $S = \{(2, 0, 1), (2, -1, 1), (4, 2, 0)\}$
31. $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (-1, 2, -3)\}$
32. $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (2, -1, 0)\}$
33. Determine si

    $$S = \{1 - t, 2t + 3t^2, t^2 - 2t^3, 2 + t^3\}$$

    es una base para P_3.
34. Determine si $S = \{1, t, 1 + t^2\}$ es una base para P_2.

Determinar si un conjunto es una base En los ejercicios 35 y 36 determine si el conjunto es una base para $M_{2,2}$.

35. $S = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\right\}$
36. $S = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$

Determinación de espacio nulo, nulidad y rango de una matriz En los ejercicios 37-42, encuentre (a) el espacio nulo, (b) la nulidad y (c) el rango de la matriz A. Después verifique que rango(A) + nulidad$(A) = n$, donde n es el número de columnas de A.

37. $A = \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -10 & 16 \end{bmatrix}$
38. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$
39. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -6 & -4 \\ 1 & 5 & -3 & 11 \\ 2 & 7 & -6 & 16 \end{bmatrix}$
40. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$
41. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & -18 \\ -1 & 3 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$
42. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

Encontrar una base y dimensión En los ejercicios 43 a 46, determine (a) una base y (b) la dimensión del espacio solución del sistema de ecuaciones homogéneas

43. $$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 6x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 5x_3 - 11x_4 &= 0 \end{aligned}$$

44. $$\begin{aligned} 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

45. $$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_1 - 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 0 \end{aligned}$$

46. $$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 0 \\ -3x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 17x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Encontrar una base para un espacio renglón y rango En los ejercicios 47-52, encuentre (a) una base del espacio renglón y (b) el rango de la matriz.

47. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$ **48.** $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ 1 & 16 & 14 \end{bmatrix}$

49. $[1 \quad -4 \quad 0 \quad 4]$ **50.** $[1 \quad 2 \quad -1]$

51. $\begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 6 \\ -1 & 16 & 14 \end{bmatrix}$ **52.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Encontrar una matriz de coordenadas En los ejercicios 53-58, dada la matriz de coordenadas de x respecto a una base B (no estándar) de R^n, encuentre la matriz de coordenadas de x respecto a la base estándar.

53. $B = \{(1, 1), (-1, 1)\}, \quad [\mathbf{x}]_B = [3 \quad 5]^T$

54. $B = \{(2, 0), (3, 3)\}, \quad [\mathbf{x}]_B = [1 \quad 1]^T$

55. $B = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), (1, 0)\right\}, \quad [\mathbf{x}]_B = \left[\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\right]^T$

56. $B = \{(4, 2), (1, -1)\}, \quad [\mathbf{x}]_B = [2 \quad 1]^T$

57. $B = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\},$
$[\mathbf{x}]_B = [2 \quad 0 \quad -1]^T$

58. $B = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}, \quad [\mathbf{x}]_B = [4 \quad 0 \quad 2]^T$

Encontrar una matriz de coordenadas En los ejercicios 59-64, encuentre la matriz de coordenadas de x en R^n respecto a la base B'.

59. $B' = \{(5, 0), (0, -8)\}, \quad \mathbf{x} = (2, 2)$

60. $B' = \{(1, 1), (0, -2)\}, \quad \mathbf{x} = (2, -1)$

61. $B' = \{(1, 2, 3), (1, 2, 0), (0, -6, 2)\}, \quad \mathbf{x} = (3, -3, 0)$

62. $B' = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\}, \quad \mathbf{x} = (4, -2, 9)$

63. $B' = \{(9, -3, 15, 4), (-3, 0, 0, -1), (0, -5, 6, 8),$
$(-3, 4, -2, 3)\}, \quad \mathbf{x} = (21, -5, 43, 14)$

64. $B' = \{(1, -1, 2, 1), (1, 1, -4, 3), (1, 2, 0, 3),$
$(1, 2, -2, 0)\}, \quad \mathbf{x} = (5, 3, -6, 2)$

Encontrar una matriz de transición En los ejercicios 65 a 68, determine la matriz de transición de B a B'.

65. $B = \{(1, -1), (3, 1)\},$
$B' = \{(1, 0), (0, 1)\}$

66. $B = \{(1, -1), (3, 1)\},$
$B' = \{(1, 2), (-1, 0)\}$

67. $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\},$
$B' = \{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$

68. $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\},$
$B' = \{(1, 2, 3), (0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$

Encontrar matrices de transición y coordenadas En los ejercicios 69–72, (a) encuentre la matriz de transición de B a B', (b) encuentre la matriz de transición de B' a B, (c) verifique que las dos matrices de transición son inversas una a la otra, y (d) encuentre la matriz de coordenadas $[x]_{B'}$, dada la matriz de coordenadas $[x]_B$.

69. $B = \{(1, 1), (-1, 1)\}, \quad B' = \{(0, 1), (1, 2)\},$
$[\mathbf{x}]_B = [3 \quad -3]^T$

70. $B = \{(1, 0), (1, -1)\}, \quad B' = \{(1, 1), (1, -1)\},$
$[\mathbf{x}]_B = [2 \quad -2]^T$

71. $B = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\},$
$B' = \{(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\},$
$[\mathbf{x}]_B = [-1 \quad 2 \quad -3]^T$

72. $B = \{(1, 1, -1), (1, 1, 0), (1, -1, 0)\},$
$B' = \{(1, -1, 2), (2, 2, -1), (2, 2, 2)\},$
$[\mathbf{x}]_B = [2 \quad 2 \quad -1]^T$

73. Sea W el subespacio de P_3 (todos los polinomios de tercer grado) tales que $p(0) = 0$, y sea U el subespacio de todos los polinomios tales que $p(1) = 0$. Determine una base de W, una base de U y una base de su intersección $W \cap U$.

74. Cálculo Sea $V = C'(-\infty, \infty)$ el espacio vectorial de todas las funciones continuamente derivables sobre la recta real.

(a) Demuestre que $W = \{f: f' = 4f\}$ es un subespacio de V.

(b) Demuestre que $U = \{f: f' = f + 1\}$ no es un subespacio de V.

75. Escriba Sea $B = \{p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x), p_{n+1}(x)\}$ una base de P_n. ¿Debe contener B un polinomio para cada grado $0, 1, 2, \ldots, n$? Explique su razonamiento.

76. Prueba Sean A y B matrices de $n \times n$ con $A \neq O$ y $B \neq O$. Demuestre que si A es simétrica y B es cuasisimétrica ($B^T = -B$), entonces $\{A, B\}$ es un conjunto linealmente independiente.

77. Prueba Sea $V = P_5$ y considere el conjunto W de todos los polinomios de la forma $(x^3 + x)p(x)$, donde $p(x)$ está en P_2. ¿W es un subespacio de V? Demuestre su respuesta.

78. Sean $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ tres vectores linealmente independientes de un espacio vectorial V. ¿El conjunto $\{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1\}$ es linealmente dependiente o independiente?

79. Prueba Sea A una matriz cuadrada de $n \times n$. Demuestre que los vectores renglón de A son linealmente dependientes si y sólo si los vectores columna de A son linealmente dependientes.

80. Prueba Sea A una matriz cuadrada $n \times n$ y sea l un escalar. Demuestre que el conjunto

$$S = \{\mathbf{x}: A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\}$$

es un subespacio de R^n. Determine la dimensión de S si $\lambda = 3$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

81. Sean $f(x) = x$ y $g(x) = |x|$.

(a) Demuestre que f y g son linealmente independientes en $C[-1, 1]$

(b) Demuestre que f y g son linealmente dependientes en $C[0, 1]$

82. Dado un conjunto de funciones, describa cómo su dominio puede influir si el conjunto es linealmente independiente o dependiente.

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 83 a 86, determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, proporcione una razón o cite una expresión adecuada del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que muestre que la expresión no es cierta en todos los casos o cite del texto una expresión adecuada.

83. (a) Las operaciones estándar en R^n son la suma vectorial y la multiplicación escalar.

(b) El inverso aditivo de un vector no es único.

(c) Un espacio vectorial consta de cuatro elementos: un conjunto de vectores, un conjunto de escalares y dos operaciones.

84. (a) El conjunto $W = \{(0, x^2, x^3): x^2$ y x^3 son números reales$\}$ es un subespacio de $R^3\}$

(b) Un conjunto generador S linealmente independiente es denominado base de un espacio vectorial V.

(c) Si A es una matriz invertible de $n \times n$, entonces los vectores renglón n son linealmente dependientes.

85. (a) El conjunto de todas las n-adas se denomina n-espacio y se denota por R^n.

(b) El idéntico aditivo de un vector no es único.

(c) Una vez que se ha demostrado un teorema para un espacio vectorial abstracto, no es necesario demostrar por separado las n-adas, matrices y polinomios.

86. (a) El conjunto de puntos en la recta $x + y = 0$ es un subespacio de R^2.

(b) Las operaciones elementales con renglones preservan el espacio columna de la matriz A.

Determinación de soluciones de una ecuación diferencial En los ejercicios 87 a 90, determine cuáles funciones son solución de la ecuación diferencial lineal.

87. $y'' - y' - 6y = 0$

(a) e^{3x} (b) e^{2x} (c) e^{-3x} (d) e^{-2x}

88. $y^{(4)} - y = 0$

(a) e^x (b) e^{-x} (c) $\cos x$ (d) $\operatorname{sen} x$

89. $y' + 2y = 0$

(a) e^{-2x} (b) xe^{-2x} (c) x^2e^{-x} (d) $2xe^{-2x}$

90. $y'' + 9y = 0$

(a) $\operatorname{sen} 3x + \cos 3x$ (b) $3 \operatorname{sen} x + 3 \cos x$

(c) $\operatorname{sen} 3x$ (d) $\cos 3x$

Determinación del wronskiano para un conjunto de funciones En los ejercicios 91 a 94, determine el wronskiano para el conjunto de funciones.

91. $\{1, x, e^x\}$ **92.** $\{1, x, 2 + x\}$

93. $\{1, \operatorname{sen} 2x, \cos 2x\}$ **94.** $\{x, \operatorname{sen}^2 x, \cos^2 x\}$

Pruebas de independencia lineal En los ejercicios 95-98, (a) verifique que cada solución satisface la ecuación diferencial, (b) pruebe la independencia lineal del conjunto de soluciones, y (c) si el conjunto es linealmente independiente, escriba la solución general de la ecuación diferencial.

	Ecuación Diferencial	*Soluciones*
95.	$y'' + 6y' + 9y = 0$	$\{e^{-3x}, xe^{-3x}\}$
96.	$y'' + 6y' + 9y = 0$	$\{e^{-3x}, 3e^{-3x}\}$
97.	$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$	$\{e^x, e^{2x}, e^x - e^{2x}\}$
98.	$y'' + 4y = 0$	$\{\operatorname{sen} 2x, \cos 2x\}$

Identificar y graficar una sección cónica En los ejercicios 99-106, identifique y trace la gráfica de la sección cónica.

99. $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$

100. $9x^2 + 9y^2 + 18x - 18y + 14 = 0$

101. $x^2 - y^2 + 2x - 3 = 0$

102. $4x^2 - y^2 + 8x - 6y + 4 = 0$

103. $2x^2 - 20x - y + 46 = 0$

104. $y^2 - 4x - 4 = 0$

105. $4x^2 + y^2 + 32x + 4y + 63 = 0$

106. $16x^2 + 25y^2 - 32x - 50y + 16 = 0$

Rotación de una sección cónica En los ejercicios 107 a 110, efectúe una rotación de ejes para eliminar el término xy y trace la gráfica de la cónica.

107. $xy = 3$

108. $9x^2 + 4xy + 9y^2 - 20 = 0$

109. $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 60x - 80y + 100 = 0$

110. $7x^2 + 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 16 = 0$

4 Proyectos

1 Solución de sistemas lineales

Escriba un párrafo para responder la siguiente pregunta. No necesita realizar cálculos, pero fundamente sus explicaciones en las propiedades adecuadas vistas en el texto.

1. Una solución del sistema lineal homogéneo

$$\begin{aligned} x + 2y + z + 3w &= 0 \\ x - y + w &= 0 \\ y - z + 2w &= 0 \end{aligned}$$

es $x = -2$, $y = -1$, $z = 1$ y $w = 1$. Explique por qué $x = 4$, $y = 2$, $z = -2$ y $w = -2$ también debe ser una solución.

2. Los vectores $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ son soluciones del sistema lineal homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Explique por qué el vector $2\mathbf{x}_1 - 3\mathbf{x}_2$ debe ser una solución.

3. Considere los dos sistemas representados por las matrices aumentadas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 & -9 \\ 1 & 0 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si el primer sistema es consistente, explique por qué el segundo sistema también lo es.

4. Los vectores $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ son soluciones del sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. El vector $2\mathbf{x}_1 - 3\mathbf{x}_2$, ¿también es solución? ¿Por qué sí o por qué no?

5. Los sistemas lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ y $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$ son consistentes. El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$, ¿es necesariamente consistente? ¿Por qué sí o por qué no?

2 Suma directa

En este proyecto, usted explorará la **suma** y **suma directa** de subespacios. En el ejercicio 58 en la Sección 4.3, usted demostró que para dos subespacios U y W de un espacio vectorial V, la suma $U + W$ de los subespacios, definida como $U + W = \{\mathbf{u} + \mathbf{w} : \mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W\}$ también es un subespacio de V.

1. Considere los subespacios de $V = R^3$

$$\begin{aligned} U &= \{(x, y, x - y) : x, y \in R\} \\ W &= \{(x, 0, x) : x \in R\} \\ Z &= \{(x, x, x) : x \in R\} \end{aligned}$$

Determine $U + W$, $U + Z$ y $W + Z$.

2. Si u y W son subespacios de V tales que $V = u + W$ y u $W = \{\mathbf{0}\}$, demuestre que todo vector en V tiene una representación *única* de la forma $\mathbf{u} + \mathbf{w}$, donde $\mathbf{u}$ pertenece a $\mathbf{u}$ está en U y $\mathbf{w}$ está en W. En este caso, se dice que V es la **suma directa** de u y W y puede escribir

$V = U \oplus W.$ Suma directa

¿Cuál de las sumas del inciso (1) son sumas directas?

3. Sea $V = U \oplus W$ y suponga que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ es una base del subespacio U y $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ es una base del subespacio W. Demuestre que el conjunto $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ es una base para V.

4. Considere los subespacios de $V = R^3$ que siguen. $U = \{(x, 0, y) : x, y \in R\}$ $W = \{(0, x, y) : x, y \in R\}$ Demuestre que $R^3 = U + W$. ¿R^3 es la suma *directa* de U y W? ¿Cuáles son las dimensiones de U, W, $U \cap W$ y $U + W$? Formule una conjetura general que relacione las dimensiones de U, W, $U \cap W$ y $U + W$.

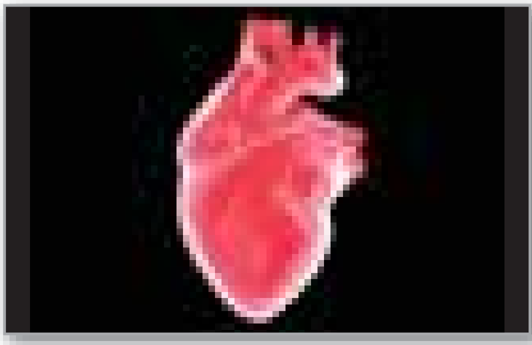
5. ¿Puede usted encontrar dos subespacios bidimensionales en R^3 cuya intersección es el vector cero? ¿Por qué sí o por qué no?

East/Shutterstock.com

5 Espacios con producto interno

Ganancias (p. 260)

Rotación (p. 271)



Análisis del ritmo cardiaco (p. 249)

Trabajo (p. 242)

Flujo eléctrico/magnético (p. 234)

5.1 Longitud y producto punto en R^n

- Determinación de la longitud de un vector y determinación de un vector unitario.
- Determinación de la distancia entre dos vectores.
- Determinación de producto punto y el ángulo entre dos vectores, determine ortogonalidad y verificar la Desigualdad de Cauchy-Schwarz, la desigualdad del triángulo y el teorema de Pitágoras.
- Utilizar un producto matricial para representar un producto punto.

LONGITUD VECTORIAL Y VECTORES UNITARIOS

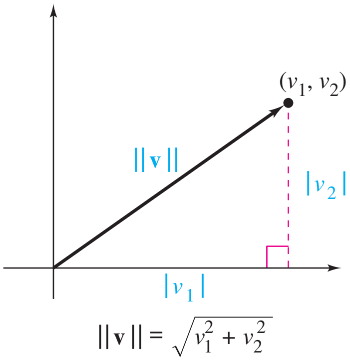


Figura 5.1

En la sección 4.1 se mencionó que los vectores en el plano pueden caracterizarse como segmentos de recta dirigidos con cierta *longitud* y *dirección*. En esta sección se usa R^2 como modelo para definir estas otras propiedades geométricas (como distancia y ángulo) de vectores en R^n. Luego, en la siguiente sección, estos conceptos se extienden a espacios vectoriales en general.

Podemos comenzar por revisar la definición de la longitud de un vector en R^2. Si $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ es un vector en el plano, entonces la **longitud** o **magnitud** de $\mathbf{v}$, denotada por $\|\mathbf{v}\|$, se define como

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Esta definición corresponde al concepto usual de longitud en geometría euclidiana. Es decir, el vector $\mathbf{v}$ es considerado como la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos lados tienen longitudes $|v_1|$ y $|v_2|$, como se muestra en la figura 5.1. Aplicando el teorema de Pitágoras tenemos

$$\|\mathbf{v}\|^2 = |v_1|^2 + |v_2|^2 = v_1^2 + v_2^2.$$

Usando R^2 como modelo, la longitud de un vector en R^n se define como sigue.

COMENTARIO

La longitud de un vector también se llama **norma**. Si $\|\mathbf{v}\| = 1$, entonces el vector v se llama **vector unitario**.

Definición de longitud de un vector en R^n

La **longitud** o **magnitud** de un vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ en R

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}.$$

Esta definición muestra que la longitud de un vector no puede ser negativa. Es decir, $\|\mathbf{v}\| \geq 0$. Además, $\|\mathbf{v}\| = 0$ si y sólo si $\mathbf{v}$ es el vector $\mathbf{0}$.

EJEMPLO 1 Longitud de un vector en R^n

a. En R^5, la longitud de $\mathbf{v} = (0, -2, 1, 4, -2)$ es

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 1^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

b. En R^3, la longitud de $\mathbf{v} = \left(2/\sqrt{17}, -2/\sqrt{17}, 3/\sqrt{17}\right)$ es

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\left(2/\sqrt{17}\right)^2 + \left(-2/\sqrt{17}\right)^2 + \left(3\sqrt{17}\right)^2} = \sqrt{17/17} = 1.$$

Dado que su longitud es 1, $\mathbf{v}$ es un vector unitario, como se observa en la figura 5.2.

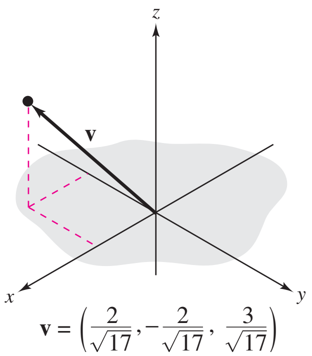


Figura 5.2

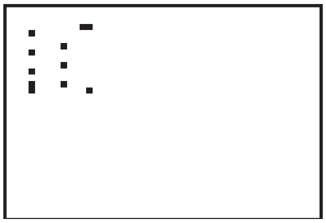
Cada vector en la base estándar de R^n es de longitud 1 y se llama **vector unitario estándar** en R^n. En física e ingeniería es común denotar los vectores unitarios estándares en R^2 y R^3 como sigue.

$$\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\} = \{(1, 0), (0, 1)\} \quad \text{y} \quad \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

Dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en R^n diferentes de cero son **paralelos** si uno es un múltiplo escalar del otro; es decir, $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$. Además, si $c > 0$, entonces $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tienen la **misma dirección**; si c < 0, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tienen **direcciones opuestas**. El siguiente teorema da una fórmula para determinar la longitud de un múltiplo escalar de un vector.

NOTA TECNOLÓGICA

Usted puede utilizar una aplicación gráfica o programa de cómputo para encontrar la longitud o norma de un vector. Por ejemplo, utilizando una aplicación gráfica, la longitud del vector $\mathbf{v} = (2, -1, -2)$ puede ser encontrada y aparecer como sigue



Utilice una aplicación gráfica o un programa de computación para verificar las longitudes de los vectores dados en el ejemplo 1.

TEOREMA 5.1 Longitud de un múltiplo escalar

Sea $\mathbf{v}$ un vector en R^n y sea c un escalar. Entonces

$$\|c\mathbf{v}\| = |c|\,\|\mathbf{v}\|$$

Donde $|c|$ es el valor absoluto de c.

DEMOSTRACIÓN

Debido a que $c\mathbf{v} = (cv_1, cv_2, \ldots, cv_n)$, se concluye que

$$\begin{aligned}\|c\mathbf{v}\| &= \|(cv_1, cv_2, \ldots, cv_n)\|\\ &= \sqrt{(cv_1)^2 + (cv_2)^2 + \cdots + (cv_n)^2}\\ &= |c|\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}\\ &= |c|\,\|\mathbf{v}\|.\end{aligned}$$

Un uso importante del teorema 5.1 es hallar un vector unitario que tenga la misma dirección que un vector dado. El siguiente teorema proporciona un procedimiento para hacer esto.

TEOREMA 5.2 Vector unitario en la dirección de v

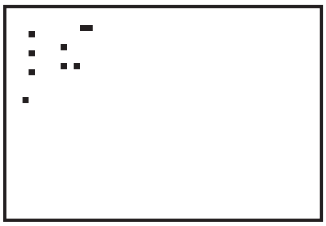
Si $\mathbf{v}$ es un vector en R^n diferente de cero, entonces el vector

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

es de longitud 1 y tiene la misma dirección que $\mathbf{v}$. Este vector es llamado el **vector unitario en la dirección de v**.

NOTA TECNOLÓGICA

Usted puede utilizar una aplicación gráfica o programa de cómputo para encontrar el vector unitario para un vector dado. Por ejemplo, utilizando una aplicación gráfica, puede encontrar el vector unitario para $\mathbf{v} = (-3, 4)$, el cual puede aparecer como



DEMOSTRACIÓN

Como $\mathbf{v}$ es diferente de cero, se sabe que $\|\mathbf{v}\| \neq 0$. Por lo tanto, $1/\|\mathbf{v}\|$ es positivo y $\mathbf{u}$ puede escribirse como un múltiplo escalar positivo de $\mathbf{v}$.

$$\mathbf{u} = \left(\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\right)\mathbf{v}$$

Por consiguiente, concluimos que $\mathbf{u}$ tiene la misma dirección que $\mathbf{v}$. Finalmente, $\mathbf{u}$ tiene una longitud de 1 debido a que

$$\|\mathbf{u}\| = \left\|\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right\| = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\|\mathbf{v}\| = 1.$$

El proceso para encontrar al vector unitario en la dirección de $\mathbf{v}$ se llama **normalización** del vector $\mathbf{v}$ y se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 Determinación de un vector unitario

Encuentre el vector unitario en la dirección de $\mathbf{v} = (3, -1, 2)$ y compruebe que su longitud es 1.

SOLUCIÓN

El vector unitario en la dirección de $\mathbf{v}$ es

$$\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{(3, -1, 2)}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3, -1, 2) = \left(\frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}\right)$$

que es un vector unitario, ya que

$$\sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right)^2} = \sqrt{\frac{14}{14}} = 1. \text{ (Véase la figura 5.3.)}$$

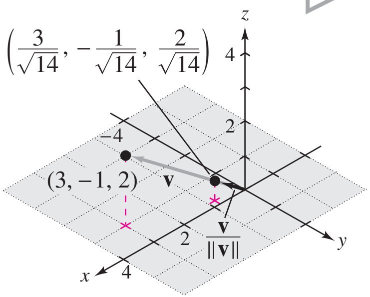


Figura 5.3

DISTANCIA ENTRE DOS VECTORES EN R^n

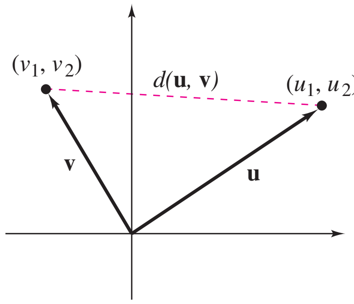
Para definir la **distancia entre dos vectores** en R^n, se usará R^2 como modelo. La fórmula de la distancia en geometría analítica nos dice que la distancia d entre dos puntos en el plano, (u_1, u_2) y (v_1, v_2), es

$$d = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}.$$

En terminología vectorial, esta distancia puede considerarse como la longitud de $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, donde $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, como se observa en la figura 5.4. Es decir,

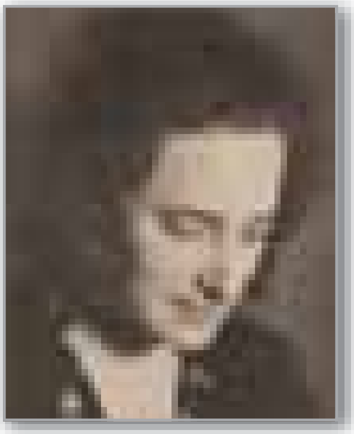
$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}$$

lo cual conduce a la siguiente definición.



$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}$$

Figura 5.4



Olga Taussky-Todd (1906-1995)

Taussky-Todd nació en lo que ahora es la República Checa. Se interesó en las matemáticas a una edad temprana. Durante su vida, Taussky-Todd fue una matemática distinguida y prolífica. Escribió numerosos artículos de investigación en áreas tales como teoría de matrices, teoría de grupos, teoría de números algebraicos y análisis numérico. Taussky-Todd recibió diversos honores y distinciones por su trabajo. Por ejemplo, su artículo sobre la suma de cuadrados le valió el Premio Ford de la Asociación Matemática de América.

Definición de la distancia entre dos vectores

La **distancia entre dos vectores u** y **v** en R^n es

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|.$$

Intente verificar las siguientes tres propiedades de distancia.

1. $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0$
2. $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ si y sólo si $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.
3. $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$

EJEMPLO 3 **Determinación de la distancia entre dos vectores**

a. La distancia entre $\mathbf{u} = (-1, -4)$ y $\mathbf{v} = (2, 3)$ es

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|(-1 - 2, -4 - 3)\| = \sqrt{(-3)^2 + (-7)^2} = \sqrt{58}.$$

b. La distancia entre $\mathbf{u} = (0, 2, 2)$ y $\mathbf{v} = (2, 0, 1)$ es

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|(0 - 2, 2 - 0, 2 - 1)\| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2} = 3.$$

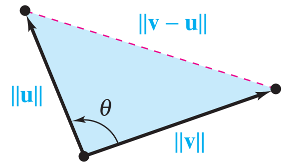
c. La distancia entre $\mathbf{u} = (3, -1, 0, -3)$ y $\mathbf{v} = (4, 0, 1. 2)$ es

$$\begin{aligned} d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \\ &= \|(3 - 4, -1 - 0, 0 - 1, -3 - 2)\| \\ &= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (-5)^2} \\ &= \sqrt{28} \\ &= 2\sqrt{7}. \end{aligned}$$

Fotos provistas por Jacobs, Konrad/Oberwolfach Photo Collection

PRODUCTO PUNTO Y EL ÁNGULO ENTRE DOS VECTORES

Para hallar el ángulo $\theta(0 \le \theta \le \pi)$ entre dos vectores diferentes de cero $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ en R^2, puede aplicarse la ley de los cosenos al triángulo mostrado en la figura 5.5 para obtener



Ángulo entre dos vectores

Figura 5.5

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \cos \theta.$$

Al desarrollar y despejar cos θ se obtiene

$$\cos \theta = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}.$$

El numerador en el cociente de la derecha se define como el **producto punto** de **u** y **v** se denota por

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Esta definición se generaliza a R^n como sigue.

COMENTARIO

Observe que el producto punto de dos vectores es un escalar, no otro vector.

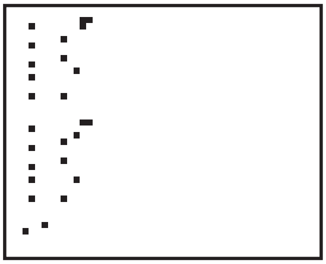
Definición del producto punto en R^n

El **producto punto** de los vectores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ es la cantidad *escalar*

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdot \cdot \cdot + u_n v_n.$$

NOTA TECNOLÓGICA

Usted puede utilizar una aplicación gráfica o un programa de cómputo para encontrar el producto punto de dos vectores. Usando una aplicación gráfica, puede verificar el ejemplo 4 y el resultado puede aparecer así



Los comandos y la sintaxis de programación para estas aplicaciones/programas relativos al ejemplo 4 se proporcionan en la **Online Technology Guide** disponible en college.cengage.com/pic/ larsonELA6e.

EJEMPLO 4 Determinación del producto punto de dos vectores

El producto punto de $\mathbf{u} = (1, 2, 0, -3)$ y $\mathbf{v} = (3, -2, 4, 2)$ es

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1)(3) + (2)(-2) + (0)(4) + (-3)(2) = -7.$$

TEOREMA 5.3 Propiedades del producto punto

Si **u**, **v** y **w** son vectores en R^n y c es un escalar, entonces se cumplen las siguientes propiedades.

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
2. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
3. $c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v})$
4. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$
5. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \ge 0$ y $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ si y sólo si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

DEMOSTRACIÓN

Las demostraciones de las propiedades se concluyen fácilmente de la definición del producto punto. Por ejemplo, para demostrar la primera propiedad se puede escribir

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdot \cdot \cdot + u_n v_n \\ &= v_1 u_1 + v_2 u_2 + \cdot \cdot \cdot + v_n u_n \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}.\end{aligned}$$

En la sección 4.1 R^n se definió como el conjunto de todas las n-adas ordenadas de números reales. Cuando R^n se combina con las operaciones normales de suma vectorial, multiplicación escalar, longitud de un vector y el producto punto, el espacio resultante se llama **espacio euclidiano *n* dimensional**. En el resto de este libro, a menos que se especifique lo contrario, se supondrá que R^n tiene las operaciones euclidianas normales.

EJEMPLO 5 **Encontrar productos punto**

Dados $\mathbf{u} = (2, -2)$, $\mathbf{v} = (5, 8)$ y $\mathbf{w} = (-4, 3)$, hallar

a. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

b. $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$

c. $\mathbf{u} \cdot (2\mathbf{v})$

d. $\|\mathbf{w}\|^2$

e. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} - 2\mathbf{w})$

SOLUCIÓN

a. Por definición, tenemos

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 2(5) + (-2)(8) = -6.$$

b. Usando el resultado del inciso (a), tenemos

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w} = -6\mathbf{w} = -6(-4, 3) = (24, -18).$$

c. Por la propiedad 3 del teorema 5.3, tenemos

$$\mathbf{u} \cdot (2\mathbf{v}) = 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = 2(-6) = -12.$$

d. Por la propiedad 4 del teorema 5.3, tenemos

$$\|\mathbf{w}\|^2 = \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = (-4)(-4) + (3)(3) = 25.$$

e. Como $2\mathbf{w} = (-8, 6)$, tenemos

$$\mathbf{v} - 2\mathbf{w} = (5 - (-8), 8 - 6) = (13, 2).$$

En consecuencia,

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} - 2\mathbf{w}) = 2(13) + (-2)(2) = 26 - 4 = 22.$$

EJEMPLO 6 **Uso de las propiedades del producto punto**

Dados dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en R^n tales que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 39$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -3$ y $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 79$, evalúe $(\mathbf{u} + 2\mathbf{v}) \cdot (3\mathbf{u} + \mathbf{v})$.

SOLUCIÓN

Por medio del teorema 5.3 se reescribe el producto punto como

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} + 2\mathbf{v}) \cdot (3\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \mathbf{u} \cdot (3\mathbf{u} + \mathbf{v}) + (2\mathbf{v}) \cdot (3\mathbf{u} + \mathbf{v}) \\ &= \mathbf{u} \cdot (3\mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + (2\mathbf{v}) \cdot (3\mathbf{u}) + (2\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \\ &= 3(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + 6(\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) + 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \\ &= 3(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + 7(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \\ &= 3(39) + 7(-3) + 2(79) \\ &= 254.\end{aligned}$$

DESCUBRIMIENTO

1. Sean $\mathbf{u} = (1, 1)$ y $\mathbf{v} = (-4, -3)$. Calcule $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ y $\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$.
2. Repita este experimento con otra selección de valores para $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.
3. Formule una conjetura sobre la relación entre el producto punto de dos vectores y el producto de sus longitudes.

Para definir el ángulo θ que hay entre dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en R^n puede usarse la fórmula en R^2

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}.$$

Para que tal definición tenga sentido, es necesario saber que el valor del lado derecho de la fórmula anterior no puede ser mayor que 1 en valor absoluto. Este hecho proviene de un famoso teorema que debe su nombre al matemático francés Agustin Louis Cauchy (1789-1857) y al matemático alemán Hermann Schwarz (1843-1921).

TEOREMA 5.4 Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores en R^n, entonces

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \le \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|$$

Donde $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}|$ denota el *valor absoluto* de $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

DEMOSTRACIÓN

Caso 1. Si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, entonces se tiene que $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = |\mathbf{0} \cdot \mathbf{v}| = 0$ y $\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| = 0\|\mathbf{v}\| = 0$. Así, el teorema se cumple cuando $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Caso 2. Si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, sea t cualquier número real y considere el vector $t\,\mathbf{u} + \mathbf{v}$. Ya que $(t\,\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (t\,\mathbf{u} + \mathbf{v}) \ge 0$, se tiene que

$$(t\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (t\mathbf{u} + \mathbf{v}) = t^2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + 2t(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \ge 0.$$

Ahora, se definen $a = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$, $b = 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ y $c = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ para obtener la desigualdad cuadrática $at^2 + bt + c \ge 0$. Como esta desigualdad nunca es negativa, tiene raíces no reales o una sola raíz real repetida. Pero por la fórmula cuadrática, esto implica que el discriminante, $b^2 - 4ac$, es menor o igual a cero.

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &\le 0 \\ b^2 &\le 4ac \\ 4(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 &\le 4(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \\ (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 &\le (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \end{aligned}$$

Al sacar raíz cuadrada de ambos lados se obtiene

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \le \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\,\sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|.$$

EJEMPLO 7 Ejemplo de la desigualdad de Cauchy-Schwarz

Verifique la desigualdad de Cauchy-Schwarz para $\mathbf{u} = (1, -1, 3)$ y $\mathbf{v} = (2, 0, -1)$.

SOLUCIÓN

Como $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -1$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 11$ y $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 5$, tenemos

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = |-1| = 1$$

y

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\| &= \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\,\sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \\ &= \sqrt{11}\,\sqrt{5} \\ &= \sqrt{55}. \end{aligned}$$

La desigualdad $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \le \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|$ se mantiene puesto que $1 \le \sqrt{55}$.

La desigualdad de Cauchy-Schwarz encabeza la definición del ángulo entre dos vectores diferentes de cero en R^n.

COMENTARIO

El ángulo entre el vector cero y otro vector no está definido.

Definición del ángulo entre dos vectores en R^n

En **ángulo** θ entre dos vectores diferentes de cero en R^n está definido por

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|}, \quad 0 \le \theta \le \pi.$$

EJEMPLO 8 Determinación del ángulo entre dos vectores

El ángulo entre $\mathbf{u} = (-4, 0, 2, -2)$ $\mathbf{v} = (2, 0, -1, 1)$ está dado por

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} = \frac{-12}{\sqrt{24}\,\sqrt{6}} = -\frac{12}{\sqrt{144}} = -1.$$

Por consiguiente, $\theta = \pi$. Es lógico considerar que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tienen direcciones opuestas, ya que $\mathbf{u} = -2\mathbf{v}$.

Observe que como $\|\mathbf{u}\|$ y $\|\mathbf{v}\|$ siempre son positivos, entonces $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ y $\cos\theta$ siempre tendrán el mismo signo. Además, dado que el coseno es positivo en el primer cuadrante y negativo en el segundo, entonces el signo del producto punto de dos vectores puede usarse para determinar si el ángulo entre ellos es agudo u obtuso, como se observa en la figura 5.6.

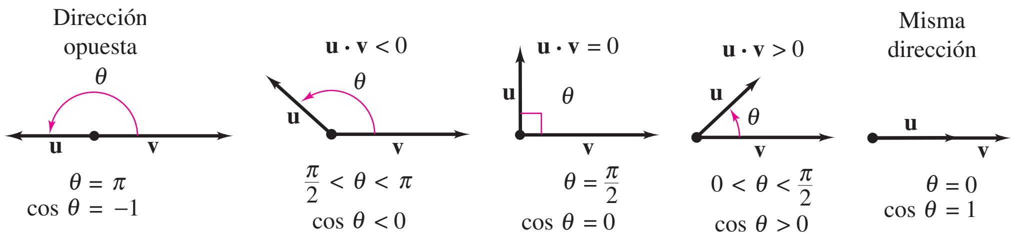


Figura 5.6

COMENTARIO

Aunque el ángulo entre el vector cero y otro no está definido, es conveniente extender la definición anterior para incluir el vector cero. En otras palabras, se dice que el vector cero es ortogonal a cualquier vector.

La figura 5.6. muestra que dos vectores diferentes de cero forman un ángulo recto si y sólo si su producto punto es cero. Decimos que los vectores son **ortogonales** (o perpendiculares).

Definición de vectores ortogonales

Dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en R^n son **ortogonales** si

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0.$$

EJEMPLO 9 Vectores ortogonales en R^n

a. Los vectores $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$ y $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$ son ortogonales, ya que

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (1)(0) + (0)(1) + (0)(0) = 0.$$

b. Los vectores $\mathbf{u} = (3, 2, -1, 4)$ y $\mathbf{v} = (1, -1, 1, 0)$ son ortogonales, ya que

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (3)(1) + (2)(-1) + (-1)(1) + (4)(0) = 0.$$

EJEMPLO 10 Obtención de vectores ortogonales

Determine todos los vectores en R^2 que son ortogonales a $\mathbf{u} = (4, 2)$.

SOLUCIÓN

Sea $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ ortogonal a $\mathbf{u}$. Entonces

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (4, 2)\cdot(v_1, v_2) = 4v_1 + 2v_2 = 0$$

lo cual implica que $2v_2 = -4v_1$ y $v_2 = -2v_1$. Así, cada vector que es ortogonal a $(4, 2)$ es de la forma

$$\mathbf{v} = (t, -2t) = t(1, -2)$$

donde t es un número real. (Véase la figura 5.7.)

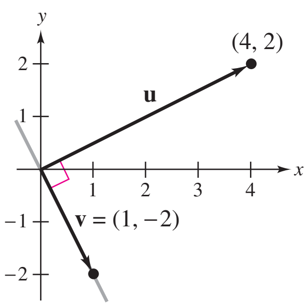


Figura 5.7

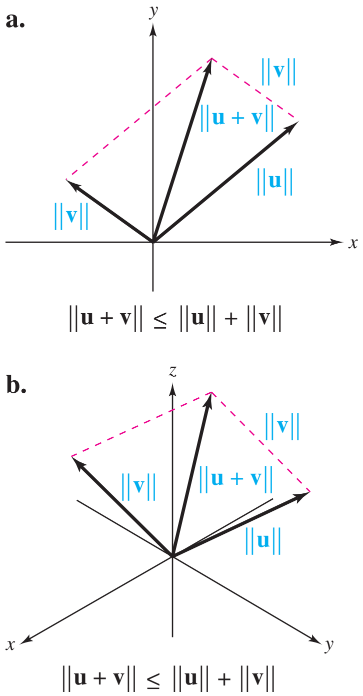


Figura 5.8

La desigualdad de Cauchy-Schwarz se puede usar para demostrar otra desigualdad bastante conocida llamada **desigualdad del triángulo** (teorema 5.5, página 288). Este nombre se deriva de la interpretación del teorema en R^2, ilustrada para los vectores **u** y **v** en la figura 5.8(a). Si considera que

$$\|\mathbf{u}\| \text{ y } \|\mathbf{v}\|$$

son las longitudes de dos lados del triángulo, puede ver que la longitud del tercero es

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|.$$

Además, dado que la longitud de cualquier lado de un triángulo no puede ser mayor que la suma de las longitudes de los otros lados, tenemos

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|.$$

La Figura 5.8(b) ilustra la desigualdad del triángulo para los vectores **u** y **v** en R^3. El siguiente teorema generaliza estos resultados de R^n.

TEOREMA 5.5 La desigualdad del triángulo

Si **u** y **v** son vectores en R^n, entonces

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|.$$

DEMOSTRACIÓN

Al aplicar las propiedades del producto punto tenemos

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \\
&= \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \\
&= \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2 \\
&\le \|\mathbf{u}\|^2 + 2|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| + \|\mathbf{v}\|^2.
\end{aligned}$$

COMENTARIO:

En la desigualdad del triángulo ocurre la igualdad si y sólo si los vectores **u** y **v** tienen la misma dirección. (Véase el ejercicio 84).

Ahora, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \le \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$, usted puede escribir

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &\le \|\mathbf{u}\|^2 + 2|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| + \|\mathbf{v}\|^2 \\
&\le \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 \\
&= \left(\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|\right)^2.
\end{aligned}$$

Dado que ambas expresiones, $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$ y $(\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)$, son no negativas, al extraer raíz cuadrada a ambos lados tenemos

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|.$$

A partir de la demostración de la desigualdad del triángulo tenemos

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \|\mathbf{v}\|^2.$$

Si **u** y **v** son ortogonales, entonces $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ y se tiene la siguiente extensión del **teorema de Pitágoras** para R^n.

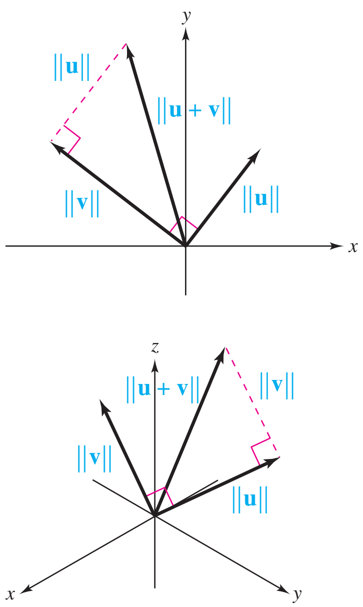


Figura 5.9

TEOREMA 5.6 Teorema de Pitágoras

Si **u** y **v** son vectores en R^n, entonces **u** y **v** son ortogonales si y sólo si

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2.$$

Esta relación se ilustra gráficamente para R^2 y R^3 en la figura 5.9.

PRODUCTO PUNTO Y MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

A menudo resulta útil representar un vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ en R^n como una matriz columna de $n \times 1$. En esta notación, el producto punto de dos vectores

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

puede representarse como la matriz producto de la transpuesta de $\mathbf{u}$ multiplicada por $\mathbf{v}$.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T\mathbf{v} = [u_1 \;\; u_2 \;\; \ldots \;\; u_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = [u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n]$$

EJEMPLO 11 Utilización de una multiplicación matricial para encontrar productos punto

a. El producto punto de los vectores

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

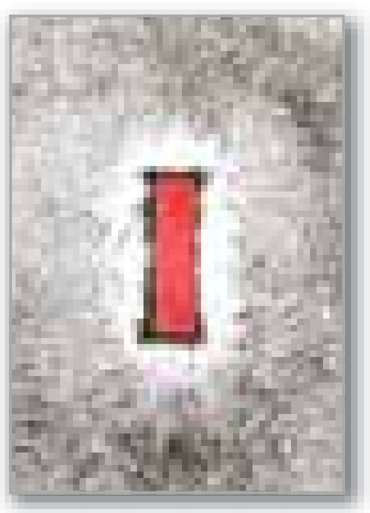
es $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T\mathbf{v} = [2 \;\; 0]\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = [(2)(3) + (0)(1)] = 6.$

b. Por ejemplo, el producto de los vectores

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

es $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T\mathbf{v} = [1 \;\; 2 \;\; -1]\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = [(1)(3) + (2)(-2) + (-1)(4)] = -5.$

De esta manera, muchas de las propiedades del producto punto son consecuencia directa de las propiedades correspondientes de la multiplicación de matrices. En el ejercicio 85 se le pide utilizar las propiedades de la multiplicación matricial para demostrar las primeras tres propiedades del Teorema 5.3.



ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

Los ingenieros eléctricos pueden usar el producto punto para calcular el *flujo* eléctrico o magnético, el cual es una medida de la potencia de un campo eléctrico o magnético que penetra en una superficie. Considere una superficie de forma arbitraria con un elemento de área dA, un vector normal (perpendicular) $d\mathbf{A}$, un vector de campo eléctrico $\mathbf{E}$ y un vector de campo magnético $\mathbf{B}$. El flujo eléctrico Φ_e se puede encontrar al usar la integral de superficie $\Phi_e = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}$ y el flujo magnético Φ_m se puede encontrar al usar la integral de superficie $\Phi_m = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$. Es interesante notar que para una superficie cerrada dada que rodea a una carga eléctrica, el flujo eléctrico neto es proporcional a la carga, pero el flujo magnético neto es cero. Esto se debe a que los campos eléctricos inician en cargas positivas y terminan en cargas negativas, pero los campos magnéticos forman bucles cerrados, por lo que no inician o terminan en ningún punto. Esto significa que el campo magnético que entra en una superficie cerrada debe ser igual al campo magnético que abandona la superficie cerrada.

Awe Inspiring Images/Shutterstock.Com

5.1 Ejercicios

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

Determinación de la longitud de un vector En los ejercicios 1 a 4, encuentre la longitud del vector dado

1. $\mathbf{v} = (4, 3)$ **2.** $\mathbf{v} = (0, 1)$

3. $\mathbf{v} = (1, 2, 2)$ **4.** $\mathbf{v} = (2, 0, -5, 5)$

Determinación de un vector unitario En los ejercicios 5 a 8, encuentre (a) $\|\mathbf{u}\|$, (b) $\|\mathbf{v}\|$ y (c) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.

5. $\mathbf{u} = \left(-1, \frac{1}{4}\right), \quad \mathbf{v} = \left(4, -\frac{1}{8}\right)$

6. $\mathbf{u} = \left(1, \frac{1}{2}\right), \quad \mathbf{v} = \left(2, -\frac{1}{2}\right)$

7. $\mathbf{u} = (1, 2, 1), \quad \mathbf{v} = (0, 2, -2)$

8. $\mathbf{u} = (0, 1, -1, 2), \quad \mathbf{v} = (1, 1, 3, 0)$

Determinación de un vector En los ejercicios 9 a 12, encuentre un vector unitario (a) en la dirección de **u,** y (b) en dirección opuesta a la de **u**.

9. $\mathbf{u} = (-5, 12)$ **10.** $\mathbf{u} = (1, -1)$

11. $\mathbf{u} = (3, 2, -5)$ **12.** $\mathbf{u} = (-1, 3, 4)$

Determinación de un vector En los ejercicios 13 a 16, halle el vector **v** con la longitud dada que tenga la misma dirección que el vector **u**.

13. $\|\mathbf{v}\| = 4, \quad \mathbf{u} = (1, 1)$ **14.** $\|\mathbf{v}\| = 4, \quad \mathbf{u} = (-1, 1)$

15. $\|\mathbf{v}\| = 2, \quad \mathbf{u} = \left(\sqrt{3}, 3, 0\right)$

16. $\|\mathbf{v}\| = 3, \quad \mathbf{u} = (0, 2, 1, -1)$

17. Dado el vector $\mathbf{v} = (-1, 3, 0, 4)$, encuentre **u** tal que

(a) **u** tenga la misma dirección que **v** y la mitad de su longitud.

(b) **u** tenga dirección opuesta a **v** y el doble de su longitud.

18. ¿Para qué valores de c es $\|c(1, 2, 3)\| = 1$?

Determinación de la distancia entre dos vectores En los ejercicios 19 a 22, determine la distancia entre **u** y **v**.

19. $\mathbf{u} = (1, -1), \quad \mathbf{v} = (-1, 1)$

20. $\mathbf{u} = (1, 1, 2), \quad \mathbf{v} = (-1, 3, 0)$

21. $\mathbf{u} = (1, 2, 0), \quad \mathbf{v} = (-1, 4, 1)$

22. $\mathbf{u} = (0, 1, -1, 2), \quad \mathbf{v} = (1, 1, 2, 2)$

Determinación de productos punto En los ejercicios 23 a 26, encuentre (a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, (b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$, (c) $\|\mathbf{u}\|^2$, (d) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}$ y (e) $\mathbf{u} \cdot (5\mathbf{v})$.

23. $\mathbf{u} = (3, 4), \quad \mathbf{v} = (2, -3)$

24. $\mathbf{u} = (-1, 2), \quad \mathbf{v} = (2, -2)$

25. $\mathbf{u} = (-1, 1, -2), \quad \mathbf{v} = (1, -3, -2)$

26. $\mathbf{u} = (4, 0, -3, 5), \quad \mathbf{v} = (0, 2, 5, 4)$

27. Encuentre $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (2\mathbf{u} - \mathbf{v})$ dado que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 4$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -5$ y $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 10$.

28. Encuentre $(3\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - 3\mathbf{v})$ dado que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 8$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 7$ y $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 6$.

Determinación de normas, vectores unitarios y productos punto En los ejercicios 29 a 32, utilice una aplicación gráfica o un programa de cómputo con capacidades vectoriales para encontrar (a) norma de **u** y **v**, (b) Un vector unitario en la dirección de **v**, (c) Un vector unitario en la dirección opuesta a **u**, (d) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, (e) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ y (f) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$

29. $\mathbf{u} = \left(1, \frac{1}{8}, \frac{2}{5}\right), \quad \mathbf{v} = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right)$

30. $\mathbf{u} = \left(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), \quad \mathbf{v} = \left(0, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$

31. $\mathbf{u} = \left(0, 1, \sqrt{2}\right), \quad \mathbf{v} = \left(-1, \sqrt{2}, -1\right)$

32. $\mathbf{u} = \left(-1, \sqrt{3}, 2\right), \quad \mathbf{v} = \left(\sqrt{2}, -1, -\sqrt{2}\right)$

Verificación de la desigualdad de Cauchy-Schwarz En los ejercicios 33 a 36, verifique la desigualdad de Cauchy-Schwarz para los vectores dados.

33. $\mathbf{u} = (3, 4), \quad \mathbf{v} = (2, -3)$

34. $\mathbf{u} = (-1, 0), \quad \mathbf{v} = (1, 1)$

35. $\mathbf{u} = (1, 1, -2), \quad \mathbf{v} = (1, -3, -2)$

36. $\mathbf{u} = (1, -1, 0), \quad \mathbf{v} = (0, 1, -1)$

Determinación del ángulo entre dos vectores En los ejercicios 37 a 44, halle al ángulo θ entre los vectores dados.

37. $\mathbf{u} = (3, 1), \quad \mathbf{v} = (-2, 4)$

38. $\mathbf{u} = (2, -1), \quad \mathbf{v} = (2, 0)$

39. $\mathbf{u} = \left(\cos \frac{\pi}{6}, \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}\right), \quad \mathbf{v} = \left(\cos \frac{3\pi}{4}, \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4}\right)$

40. $\mathbf{u} = \left(\cos \frac{\pi}{3}, \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right), \quad \mathbf{v} = \left(\cos \frac{\pi}{4}, \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right)$

41. $\mathbf{u} = (1, 1, 1), \quad \mathbf{v} = (2, 1, -1)$

42. $\mathbf{u} = (2, 3, 1), \quad \mathbf{v} = (-3, 2, 0)$

43. $\mathbf{u} = (0, 1, 0, 1), \quad \mathbf{v} = (3, 3, 3, 3)$

44. $\mathbf{u} = (1, -1, 0, 1), \quad \mathbf{v} = (-1, 2, -1, 0)$

Determinación de una relación entre dos vectores En los ejercicios 45 a 52, determine si **u** y **v** son ortogonales, paralelos o ninguna de las anteriores.

45. $\mathbf{u} = (2, 18), \quad \mathbf{v} = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{6}\right)$

46. $\mathbf{u} = (4, 3), \quad \mathbf{v} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$

47. $\mathbf{u} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \quad \mathbf{v} = (2, -4)$

48. $\mathbf{u} = (1, -1), \quad \mathbf{v} = (0, -1)$

49. $\mathbf{u} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{v} = (1, -2, 0)$

50. $\mathbf{u} = (0, 1, 6), \quad \mathbf{v} = (1, -2, -1)$

51. $\mathbf{u} = (-2, 5, 1, 0), \quad \mathbf{v} = \left(\frac{1}{4}, -\frac{5}{4}, 0, 1\right)$

52. $\mathbf{u} = \left(4, \frac{3}{2}, -1, \frac{1}{2}\right), \quad \mathbf{v} = \left(-2, -\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

Determinación de vectores ortogonales En los ejercicios 53 a 56, determine los vectores $\mathbf{v}$ que son ortogonales al vector $\mathbf{u}$ dado.

53. $\mathbf{u} = (0, 5)$ **54.** $\mathbf{u} = (2, 7)$

55. $\mathbf{u} = (2, -1, 1)$ **56.** $\mathbf{u} = (4, -1, 0)$

Verificación de la desigualdad del triángulo En los ejercicios 57 a 60, verifique la desigualdad del triángulo para los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

57. $\mathbf{u} = (4, 0),\ \mathbf{v} = (1, 1)$ **58.** $\mathbf{u} = (-1, 1),\ \mathbf{v} = (2, 0)$

59. $\mathbf{u} = (1, 1, 1),\ \mathbf{v} = (0, 1, -2)$

60. $\mathbf{u} = (1, -1, 0),\ \mathbf{v} = (0, 1, 2)$

Verificación del teorema de Pitágoras En los ejercicios 61 a 64, compruebe el teorema de Pitágoras para los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

61. $\mathbf{u} = (1, -1),\quad \mathbf{v} = (1, 1)$

62. $\mathbf{u} = (3, -2),\quad \mathbf{v} = (4, 6)$

63. $\mathbf{u} = (3, 4, -2),\quad \mathbf{v} = (4, -3, 0)$

64. $\mathbf{u} = (4, 1, -5),\quad \mathbf{v} = (2, -3, 1)$

65. Revise el Ejercicio 23 usando la multiplicación matricial.

66. Revise el Ejercicio 24 usando la multiplicación matricial.

67. Revise el Ejercicio 25 usando la multiplicación matricial.

68. Revise el Ejercicio 26 usando la multiplicación matricial.

Escriba En los ejercicios 69 y 70, determine si los vectores son ortogonales, paralelos o ninguna de las dos cosas. Explique por qué.

69. $\mathbf{u} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, -1),\quad \mathbf{v} = (\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta, 0)$

70. $\mathbf{u} = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 1),\quad \mathbf{v} = (\operatorname{sen}\theta, -\cos\theta, 0)$

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 71 y 72, determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, proporcione una razón o cite una expresión adecuada del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que muestre que la expresión no es cierta en todos los casos o cite del texto una expresión adecuada.

71. (a) La longitud o norma de un vector es

$$\|\mathbf{v}\| = |v_1 + v_2 + v_3 + \cdot \cdot \cdot + v_n|.$$

(b) El producto punto de dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es otro vector representado por

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_1v_1, u_2v_2, u_3v_3, \ldots, u_nv_n).$$

72. (a) Si $\mathbf{v}$ es un vector diferente de cero en R^n, el vector unitario es $\mathbf{u} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$.

(b) Si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$, entonces el ángulo θ entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es agudo.

Escriba En los ejercicios 73 y 74, escriba un párrafo corto explicando por qué cada una de las expresiones siguientes no tiene sentido. Suponga que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores en R^n y que c es un escalar.

73. (a) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v}$ (b) $\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

74. (a) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}$ (b) $c \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$

Vectores ortogonales En los ejercicios 75 y 76, sea $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ un vector en R^2. Demuestre que $(v_2, -v_1)$ es ortogonal a $\mathbf{v}$ y use este hecho para encontrar dos vectores unitarios ortogonales al vector dado.

75. $\mathbf{v} = (12, 5)$ **76.** $\mathbf{v} = (8, 15)$

77. Ganancias El vector $\mathbf{u} = (3140, 2750)$ proporciona los números de hamburguesas y hot dogs, respectivamente, vendidos en un puesto de comida rápida a lo largo de un mes. El vector $\mathbf{v} = (2.25, 1.75)$ proporciona los precios (en dólares) de los productos. Encuentre el producto punto $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e interprete el resultado en el contexto del problema.

78. Ganancias El vector $\mathbf{u} = (4600, 4290, 5250)$ proporciona los números de unidades de tres modelos de teléfonos celulares que produce una compañía de telecomunicaciones. El vector $\mathbf{v} = (79.99, 89.99, 99.99)$ proporciona los precios en dólares de los tres modelos de teléfonos celulares, respectivamente. Encuentre el producto punto $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e interprete el resultado en el contexto del problema.

79. Encuentre el ángulo entre la diagonal de un cubo y una de sus aristas.

80. Encuentre el ángulo entre la diagonal de un cubo y la diagonal de uno de sus lados.

81. Demostración guiada Demuestre que si $\mathbf{u}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, entonces $\mathbf{u}$ es ortogonal a $c\mathbf{v} + d\mathbf{w}$ para cualesquiera escalares c y d.

Inicio: Para demostrar que $\mathbf{u}$ es ortogonal a $c\mathbf{v} + d\mathbf{w}$, necesita probar que el producto punto de $\mathbf{u}$ y $c\mathbf{v} + d\mathbf{w}$ es igual a cero.

(i) Reescriba el producto punto de $\mathbf{u}$ y $c\mathbf{v} + d\mathbf{w}$ como una combinación lineal de $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ y $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})$ aplicando las propiedades 2 y 3 del teorema 5.3.

(ii) Utilice el hecho de que $\mathbf{u}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, y el resultado del inciso (i) para concluir que $\mathbf{u}$ es ortogonal a $c\mathbf{v} + d\mathbf{w}$.

82. Prueba Demuestre que si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores en R^n, entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \tfrac{1}{4}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \tfrac{1}{4}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2.$$

83. Prueba Demuestre que los vectores $\mathbf{u} = (\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta)$ y $\mathbf{v} = (\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$ son vectores unitarios ortogonales para cualquier valor de θ. Grafique $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ para $\theta = \pi/3$.

84. Prueba Demuestre que $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ si y sólo si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ tienen la misma dirección.

85. Prueba Use las propiedades de la multiplicación matricial para demostrar las primeras tres propiedades del Teorema 5.3.

86. REMATE ¿Qué se sabe de θ, el ángulo entre dos vectores distintos de cero $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, bajo cada condición?

(a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ (b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$ (c) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$

87. Escriba Sea $\mathbf{x}$ la solución para el sistema lineal homogéneo de ecuaciones $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ de $m \times n$. Explique por qué $\mathbf{x}$ es ortogonal a los vectores renglón de A.

5.2 Espacios con producto interno

- Determinar si una función define un producto interno y encontrar el producto interno de dos vectores en R^n, $M_{m,n}$, P_n y $C[a, b]$.
- Encontrar una proyección ortogonal de un vector sobre otro vector en un espacio de producto interno.

PRODUCTO INTERNO

En la sección 5.1 se ampliaron de R^2 a R^n los conceptos de longitud, distancia y ángulo. En esta sección se extienden los conceptos mencionados en un paso más: a espacios vectoriales en general. Esto se lleva a cabo por medio del concepto de **producto interno** de dos vectores.

Ya tenemos un ejemplo de un producto interno: el *producto punto* en R^n. Este producto, llamado **producto interno euclidiano**, es sólo uno de varios productos internos que es posible definir en R^n. Para distinguir entre el producto interno estándar y otros posibles productos internos, se usa la siguiente notación.

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ = producto punto (producto interno euclidiano para R^n)

$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ = producto interno general para el espacio vectorial V.

Para definir un producto interno general se procede casi de la misma manera como se definió un espacio vectorial general. Es decir, se enumera una serie de axiomas que deben satisfacerse para que una función pueda calificarse como un producto. Los axiomas son paralelos a las propiedades 1, 2, 3 y 5 del producto punto dadas en el teorema 5.3.

Definición de producto interno

Sea **u**, **v** y **w** vectores en un espacio vectorial y sea c cualquier escalar. Un **producto interno** en V es una función que asocia un número real $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ con cada par de vectores **u** y **v** que cumplen los siguientes axiomas.

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$
2. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$
3. $c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle c\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$
4. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ y $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ si y sólo si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Un espacio vectorial V con un producto interno se llama **espacio con producto interno**. Siempre que hagamos referencia a un espacio con producto interno, supondremos que el conjunto de escalares es el conjunto de los números reales.

EJEMPLO 1 El producto interno euclidiano para R^n

Demuestre que el producto punto en R^n satisface los cuatro axiomas de un producto interno.

SOLUCIÓN

En R^n, el producto punto de dos vectores $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ es

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n.$$

Por el teorema 5.3 sabemos que este producto satisface los cuatro axiomas requeridos, lo que verifica que es un producto interno en R^n.

El producto interno euclidiano no es el único producto interno que puede definirse en R^n. En el ejemplo 2 se ilustra un producto interno distinto. Observe que para demostrar que una función es un producto interno es necesario demostar que se satisfacen los cuatro axiomas del producto interior.

EJEMPLO 2 Un producto interno diferente en R^2

Demuestre que la siguiente función define un producto interno en R^2, donde $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$.

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2$$

SOLUCIÓN

1. Como el producto de los números reales es conmutativo,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2 = v_1u_1 + 2v_2u_2 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle.$$

2. Sea $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$, entonces

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle &= u_1(v_1 + w_1) + 2u_2(v_2 + w_2) \\ &= u_1v_1 + u_1w_1 + 2u_2v_2 + 2u_2w_2 \\ &= (u_1v_1 + 2u_2v_2) + (u_1w_1 + 2u_2w_2) \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle. \end{aligned}$$

3. Si c es cualquier escalar, entonces

$$c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = c(u_1v_1 + 2u_2v_2) = (cu_1)v_1 + 2(cu_2)v_2 = \langle c\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$$

4. Ya que el cuadrado de un número real es no negativo,

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = v_1^2 + 2v_2^2 \geq 0.$$

Además, esta expresión es igual a cero si y sólo si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (es decir, si y sólo si $v_1 = v_2 = 0$).

El ejemplo 2 se puede generalizar

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = c_1u_1v_1 + c_2u_2v_2 + \cdot \cdot \cdot + c_nu_nv_n, \quad c_i > 0$$

es un producto interno sobre R^n. (En el ejercicio 89, se le pide que demuestre esto). Las constantes positivas $c_1, \ldots, c_n$ se denominan **ponderaciones** o **pesos**. Si cualquier c_i es negativo o cero, entonces la función anterior no define un producto interno.

EJEMPLO 3 Una función que no es un producto interno

Demuestre que la siguiente función no es un producto interno en R^3, donde $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 - 2u_2v_2 + u_3v_3$$

SOLUCIÓN

Observe que el axioma 4 no se satisface. Por ejemplo, sea $\mathbf{v} = (1, 2, 1)$. Entonces $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = (1)(1) - 2(2)(2) + (1)(1) = -6$, que es menor que cero.

EJEMPLO 4 Producto interno sobre $M_{2,2}$

Sean $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ matrices en el espacio vectorial $M_{2,2}$. La función

$$\langle A, B \rangle = a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22}$$

es un producto interno sobre $M_{2,2}$. La comprobación de los cuatro axiomas del producto interno se deja como ejercicio. (Véase el ejercicio 27.)

A partir del cálculo se obtiene el producto interno que se describe en el siguiente ejemplo. La comprobación de las propiedades del producto interno depende de las propiedades de la integral definida.

EJEMPLO 5 Un producto interno definido por una integral definida (cálculo)

Sean f y g funciones continuas de valores reales en el espacio vectorial $c[a, b]$. Demuestre que

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

define un producto interno sobre $C[a, b]$.

SOLUCIÓN

Puede utilizar propiedades del cálculo para verificar cada una de las cuatro partes de la definición.

1. $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b g(x)f(x)\,dx = \langle g, f\rangle$

2. $$\langle f, g + h\rangle = \int_a^b f(x)[g(x) + h(x)]\,dx = \int_a^b [f(x)g(x) + f(x)h(x)]\,dx$$
$$= \int_a^b f(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)h(x)\,dx = \langle f, g\rangle + \langle f, h\rangle$$

3. $c\langle f, g\rangle = c\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b cf(x)g(x)\,dx = \langle cf, g\rangle$

4. Ya que $[f(x)]^2 \geq 0$ para toda x, se sabe del cálculo que

$$\langle f, f\rangle = \int_a^b [f(x)]^2\,dx \geq 0$$

con

$$\langle f, f\rangle = \int_a^b [f(x)]^2\,dx = 0$$

si y sólo si f es la función cero en $c[a, b]$ o si $a = b$.

El siguiente teorema enlista algunas propiedades de los productos internos.

TEOREMA 5.7 Propiedades de los productos internos

Sean **u, v** y **w** vectores en un espacio V con producto interno y sea c cualquier número real.

1. $\langle \mathbf{0}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{0}\rangle = 0$
2. $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$
3. $\langle \mathbf{u}, c\mathbf{v}\rangle = c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$

DEMOSTRACIÓN

Se demostrará la primera propiedad y la demostración de las otras dos se dejan como ejercicio. (Véanse los ejercicios 91 y 92.) A partir de la definición de producto interno se sabe que $\langle \mathbf{0}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{0}\rangle$, de modo que basta demostrar que uno de los dos es cero. Usando el hecho de que $0(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{0}, \mathbf{v}\rangle &= \langle 0(\mathbf{v}), \mathbf{v}\rangle \\ &= 0\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

La definición de norma (o longitud), distancia y ángulo para espacios generales con producto interno son bastante semejantes a las correspondientes para el espacio euclidiano n-dimensional.

Definición de norma, distancia y ángulo

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores en un espacio V con producto interno.

1. La **norma** (o **longitud**) de $\mathbf{u}$ es $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$.
2. La **distancia** entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$.
3. El **ángulo** entre dos vectores diferentes de cero $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ está dado por

$$\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}, \quad 0 \le \theta \le \pi.$$

4. $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son **ortogonales** si $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

Si $\|\mathbf{v}\| = 1$, entonces $\mathbf{v}$ se llama **vector unitario**. Además, si $\mathbf{v}$ es cualquier vector diferente de cero en un espacio V con producto interno, entonces el vector $\mathbf{u} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ es unitario y se denomina **vector unitario en la dirección de** $\mathbf{v}$.

Observe que la definición del ángulo θ entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ presupone que

$$-1 \le \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} \le 1$$

para un producto interno general, el cual se sigue a partir de la desigualdad de Cauchy-Schwarz que se dará después, en el teorema 5.8.

EJEMPLO 6 Obtención de productos internos

Para los polinomios $p = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx$ y $q = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$ en el espacio vectorial P_n, la función $\langle p, q \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$. Es un producto interno. (En el ejercicio 34, se le pide que demuestre esto.) Si $p(x) = 1 - 2x^2$, $q(x) = 4 - 2x + x^2$ y $r(x) = x + 2x^2$ son polinomios en P_2, determine

a. $\langle p, q \rangle$ **b.** $\langle q, r \rangle$ **c.** $\|q\|$ **d.** $d(p, q)$

SOLUCIÓN

a. El producto interno de p y q es

$$\langle p, q \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 = (1)(4) + (0)(-2) + (-2)(1) = 2.$$

b. El producto interno de q y r es $\langle q, r \rangle = (4)(0) + (-2)(1) + (1)(2) = 0$.

Observe que los vectores q y r son ortogonales.

c. La norma de q es $\|q\| = \sqrt{\langle q, q \rangle} = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{21}$.

d. La distancia entre p y q es

$$\begin{aligned} d(p, q) &= \|p - q\| \\ &= \|(1 - 2x^2) - (4 - 2x + x^2)\| \\ &= \|-3 + 2x - 3x^2\| \\ &= \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{22}. \end{aligned}$$

La ortogonalidad depende del producto interno particular utilizado. Esto es, dos vectores pueden ser ortogonales respecto a un producto interno, pero no para otro. Intente reescribir el ejemplo 6 usando el producto interno $\langle p, q \rangle = a_0 b_0 + a_1b_1 + 2a_2b_2$. Con este producto interno, el único par ortogonal es p y q, pero q y r no es.

NOTA TECNOLÓGICA

Muchas aplicaciones gráficas y programas de computación contienen rutinas para aproximar integrales definidas. Por ejemplo, en algunas aplicaciones usted puede utilizar el comando fnInt para verificar el ejemplo 7(b). Este puede verse así

El resultado debe ser aproximadamente $0.183 \approx \frac{1}{\sqrt{30}}$.

Los comandos y la sintaxis de programación para estas aplicaciones/programas relativos al ejemplo 7(b) están disponibles en la **Online Technology Guide**, en *college.cengage.com/pic/larsonELA6e*.

EJEMPLO 7 Uso del producto interno en $C[0, 1]$ (cálculo)

Utilice el producto interno definido en el ejemplo 5 y las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$ en $C[0, 1]$ para determinar

a. $\|f\|$ **b.** $d(f, g)$

SOLUCIÓN

a. Como $f(x) = x$, tenemos

$$\|f\|^2 = \langle f, f\rangle = \int_0^1 (x)(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Así, $\|f\| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

b. Para encontrar $d(f, g)$ escribimos

$$\begin{aligned}[d(f, g)]^2 &= \langle f - g, f - g\rangle \\ &= \int_0^1 [f(x) - g(x)]^2\,dx = \int_0^1 [x - x^2]^2\,dx \\ &= \int_0^1 [x^2 - 2x^3 + x^4]\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{1}{30}.\end{aligned}$$

Así, $d(f, g) = \dfrac{1}{\sqrt{30}}$.

En el ejemplo 7, usted encontró que la distancia entre las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$ en $C[0, 1]$ es $1/\sqrt{30} \approx 0.183$. En la práctica, la distancia *real* entre un par de vectores no es tan útil como la distancia *relativa* entre algunos pares. Por ejemplo, la distancia entre $g(x) = x^2$ y $h(x) = x^2 + 1$ en $C[0, 1]$ es 1 (Verifique esto). A partir de la Figura 5.10, parece razonable decir que f y g con más cercanos que g y h.

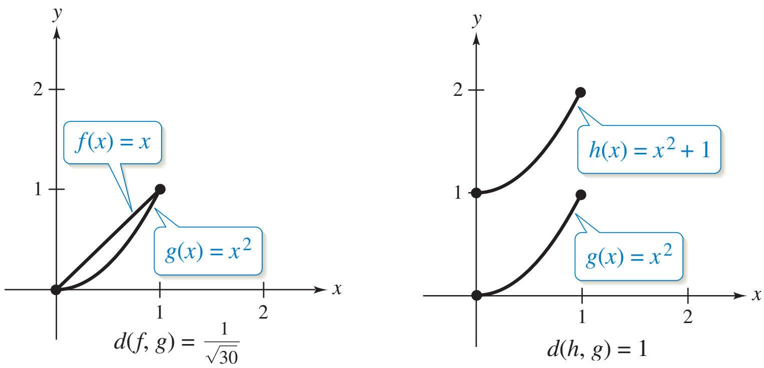


Figura 5.10

Las propiedades de longitud y distancia enumeradas para R^n en la sección anterior también son válidas para el producto interno en espacios generales con productos internos. Por ejemplo, si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores en un espacio con producto interno, entonces se cumplen las siguientes propiedades.

Propiedades de la norma	*Propiedades de la distancia*
1. $\|\mathbf{u}\| \geq 0$	**1.** $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0$
2. $\|\mathbf{u}\| = 0$ si y sólo si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.	**2.** $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ si y sólo si $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.
3. $\|c\mathbf{u}\| = \|c\|\,\|\mathbf{u}\|$	**3.** $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$

El teorema 5.8 enumera las versiones del producto interno en espacios generales para la desigualdad de Cauchy-Schwarz, la desigualdad del triángulo y el teorema de Pitágoras.

TEOREMA 5.8

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores en un espacio V con producto interno.

1. Desigualdad de Cauchy-Schwarz: $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leq \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$
2. Desigualdad del triángulo: $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$
3. Teorema de Pitágoras: $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales si y sólo si

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2.$$

Las demostraciones de estos tres axiomas son semejantes a las de los teoremas 5.4, 5.5 y 5.6. Simplemente se sustituye $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ por el producto interno euclidiano $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

EJEMPLO 8 Ejemplo de la desigualdad de Cauchy-Schwarz (cálculo)

Sean $f(x) = 1$ y $g(x) = x$ funciones en el espacio vectorial $C[0, 1]$, con el producto interno definido en el ejemplo 5. Compruebe que $|< f, g>| \leq \|f\|\,\|g\|$.

SOLUCIÓN

Para el lado izquierdo de esta desigualdad tenemos

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Para el lado derecho de la desigualdad se tiene

$$\|f\|^2 = \int_0^1 f(x)f(x)\,dx = \int_0^1 dx = x\Big]_0^1 = 1$$

y

$$\|g\|^2 = \int_0^1 g(x)g(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Por consiguiente,

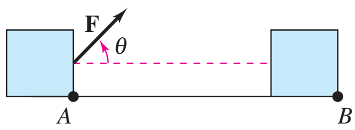
$$\|f\|\,\|g\| = \sqrt{(1)\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577 \quad \text{y} \quad |\langle f, g\rangle| \leq \|f\|\,\|g\|.$$

ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

El concepto de trabajo es importante para los científicos e ingenieros para determinar la energía necesaria para realizar diversas labores. Si una fuerza constante $\mathbf{F}$ actúa en un ángulo θ con la recta de movimiento de un objeto para mover el objeto del punto A al punto B (véase la Figura a continuación), entonces el trabajo W hecho por la fuerza está dado por

$$\begin{aligned} W &= (\cos\theta)\|\mathbf{F}\|\,\|\overrightarrow{AB}\| \\ &= \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

Donde $\overrightarrow{AB}$ representa el segmento de recta dirigido de A hacia B. La cantidad $(\cos\theta)\|\mathbf{F}\|$ es la longitud de la *proyección ortogonal* de $\mathbf{F}$ sobre $\overrightarrow{AB}$. Las proyecciones ortogonales se discuten en la siguiente página.



Andrew Lundquist/Shutterstock.Com

PROYECCIONES ORTOGONALES EN ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO

Sean **u** y **v** vectores en R^2. Si **v** es diferente de cero, entonces se puede proyectar ortogonalmente **u** sobre **v**, como se muestra en la figura 5.11. Esta proyección se denota por $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$. Dado que $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ es un múltiplo escalar de **v**, podemos escribir

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = a\mathbf{v}.$$

Si $a > 0$, como se muestra en la figura 5.11(a), entonces $\cos\theta > 0$ y la longitud de $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ es

$$\|a\mathbf{v}\| = |a|\,\|\mathbf{v}\| = a\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\cos\theta = \frac{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\cos\theta}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

lo cual implica que $a = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})/\|\mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})/(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})$. Así,

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v}.$$

Si $a < 0$, como se muestra en la figura 5.11(b), entonces puede demostrarse que la proyección ortogonal de **u** sobre **v** es la misma fórmula. (Verifique esto.)

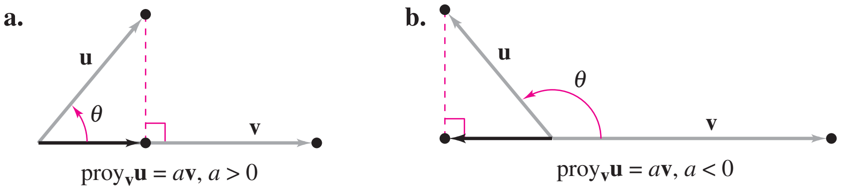


Figura 5.11

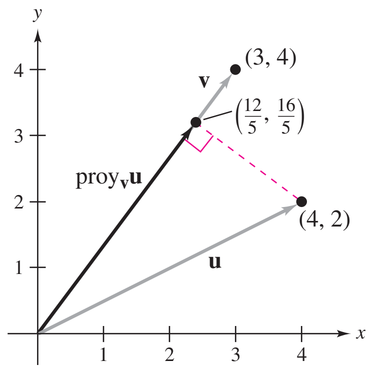


Figura 5.12

EJEMPLO 9 Obtención de la proyección ortogonal de u sobre v

En R^2, la proyección ortogonal de $\mathbf{u} = (4, 2)$ sobre $\mathbf{v} = (3, 4)$ está dada por

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v} = \frac{(4, 2)\cdot(3, 4)}{(3, 4)\cdot(3, 4)}(3, 4) = \frac{20}{25}(3, 4) = \left(\frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right)$$

como se muestra la figura 5.12.

COMENTARIO

Si **v** es un vector unitario, entonces $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = \|\mathbf{v}\|^2 = 1$ y la fórmula para la proyección ortogonal de **u** sobre **v** toma la forma más simple

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle\mathbf{v}.$$

Una proyección ortogonal en un espacio con producto interno general se define como sigue.

Definición de proyección ortogonal

Sean **u** y **v** vectores en un espacio V con producto interno, tal que $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Entonces, la **proyección ortogonal** de **u** sobre **v** está dada por

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle}\mathbf{v}.$$

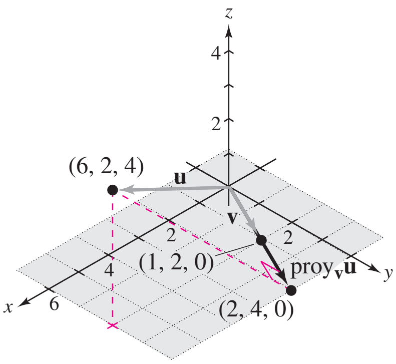


Figura 5.13

EJEMPLO 10 Determinación de la proyección ortogonal en R^3

Utilice el producto interno euclidiano, en R^3, para encontrar la proyección ortogonal de $\mathbf{u} = (6, 2, 4)$ sobre $\mathbf{v} = (1, 2, 0)$.

SOLUCIÓN

Como $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 10$ y $\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = 5$, la proyección ortogonal de **u** sobre **v** es

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}\mathbf{v} = \frac{10}{5}(1, 2, 0) = 2(1, 2, 0) = (2, 4, 0)$$

como se muestra en la figura 5.13.

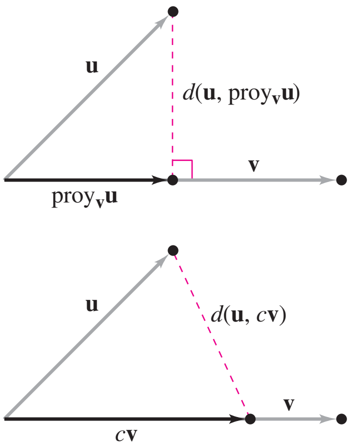


Figura 5.14

Observe en el ejemplo que $\mathbf{u} - \text{proy}_\mathbf{v}\mathbf{u} = (6, 2, 4) - (2, 4, 0) = (4, -2, 4)$ es ortogonal a $\mathbf{v} = (1, 2, 0)$. Esto es cierto en general: si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores diferentes de cero en un espacio con producto interno, entonces $\mathbf{u} - \text{proy}_\mathbf{v}\mathbf{u}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$. (Véase el ejercicio 90.)

Una importante propiedad de las proyecciones ortogonales usada en modelación matemática (véase la Sección 5.4) está dada por el siguiente teorema, el cual afirma que todos los posibles múltiplos escalares de un vector $\mathbf{v}$, la proyección ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$ es la más próxima a $\mathbf{u}$, como se observa en la figura 5.14. Así, en el ejemplo 10, este teorema implica que, de todos los posibles múltiplos escalares de un vector $\mathbf{v} = (1, 2, 0)$, el vector $\text{proy}_\mathbf{v}\mathbf{u} = (2, 4, 0)$ es el más cercano a $\mathbf{u} = (6, 2, 4)$. Se le pedirá que demuestre explícitamente esto en el ejercicio 101.

TEOREMA 5.9 Proyección ortogonal y distancia

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores en un espacio V con producto interno, de modo que $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Entonces,

$$d(\mathbf{u}, \text{proy}_\mathbf{v}\mathbf{u}) < d(\mathbf{u}, c\mathbf{v}), \quad c \neq \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}.$$

DEMOSTRACIÓN

Sea $b = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle / \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$. Entonces podemos escribir

$$\|\mathbf{u} - c\mathbf{v}\|^2 = \|(\mathbf{u} - b\mathbf{v}) + (b - c)\mathbf{v}\|^2$$

donde $(\mathbf{u} - b\mathbf{v})$ y $(b - c)\mathbf{v}$ son ortogonales. Usted puede verificar esto aplicando los axiomas del producto interno para demostrar que $\langle (\mathbf{u} - b\mathbf{v}), (b - c)\mathbf{v} \rangle = 0$. Ahora, por el teorema de Pitágoras, puede escribir

$$\|(\mathbf{u} - b\mathbf{v}) + (b - c)\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} - b\mathbf{v}\|^2 + \|(b - c)\mathbf{v}\|^2$$

lo cual implica que

$$\|\mathbf{u} - c\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} - b\mathbf{v}\|^2 + (b - c)^2\|\mathbf{v}\|^2.$$

Como $b \neq c$ y $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, se sabe que $(b - c)^2\|\mathbf{v}\|^2 > 0$. Así que

$$\|\mathbf{u} - b\mathbf{v}\|^2 < \|\mathbf{u} - c\mathbf{v}\|^2$$

y puede concluir que $d(\mathbf{u}, b\mathbf{v}) < d(\mathbf{u}, c\mathbf{v})$.

En el siguiente ejemplo se analiza un tipo de proyección ortogonal en el espacio con producto interno $C[a, b]$.

EJEMPLO 11 Obtención de la proyección ortogonal en $C[a, b]$ (cálculo)

Sean $f(x) = 1$ y $g(x) = x$ funciones en $C[0, 1]$. Utilice el producto interno definido en el ejemplo 5,

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

para hallar la proyección ortogonal de f sobre g.

SOLUCIÓN

Del ejemplo 8 sabemos que

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \langle g, g \rangle = \|g\|^2 = \frac{1}{3}.$$

Por lo tanto, la proyección ortogonal de f sobre g es

$$\text{proy}_g f = \frac{\langle f, g \rangle}{\langle g, g \rangle} g = \frac{1/2}{1/3} x = \frac{3}{2} x.$$

5.2 Ejercicios

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

Mostrar que una función es un producto interno En los Ejercicios 1-4, muestre que la función define a un producto interno en R_2, donde $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$.

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_1 + u_2v_2$ **2.** $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + 5u_2v_2$

3. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{2}u_1v_1 + \frac{1}{4}u_2v_2$

4. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1v_2 + u_2v_1 + u_1v_2 + 2u_2v_2$

Mostrar que una función es un producto interno En los Ejercicios 5-8, muestre que la función define a un producto interno en R_3, donde $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

5. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1v_1 + 3u_2v_2 + u_3v_3$

6. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2 + u_3v_3$

7. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 2u_3v_3$

8. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{2}u_1v_1 + \frac{1}{4}u_2v_2 + \frac{1}{2}u_3v_3$

Mostrar que una función no es un producto interno En los ejercicios 9 a 12, establezca por qué $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ no es un producto interno para $\mathbf{u} = (u\ , u\ )$ y $\mathbf{v} = (v\ , v\ )$ en R^2.

9. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1$ **10.** $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 - 2u_2v_2$

11. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1^2v_1^2 - u_2^2v_2^2$ **12.** $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_2 - u_2v_1$

Mostrar que una función no es un producto interno En los ejercicios 13 a 16, establezca por qué $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ no es un producto interno para $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ en R_3.

13. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -u_1u_2u_3$

14. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 - u_2v_2 - u_3v_3$

15. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1^2v_1^2 + u_2^2v_2^2 + u_3^2v_3^2$

16. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1u_2 + v_1v_2 + u_3v_3$

Determinación de Producto interno, Longitud y Distancia En los ejercicios 17 a 26, determine (a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, (b) $\|\mathbf{u}\|$, (c) $\|\mathbf{v}\|$ y (d) $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ para el producto interno dado definido en R^n.

17. $\mathbf{u} = (3, 4)$, $\mathbf{v} = (5, -12)$, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

18. $\mathbf{u} = (1, 1)$, $\mathbf{v} = (7, 9)$, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

19. $\mathbf{u} = (-4, 3)$, $\mathbf{v} = (0, 5)$, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_1 + u_2v_2$

20. $\mathbf{u} = (0, -6)$, $\mathbf{v} = (-1, 1)$, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2$

21. $\mathbf{u} = (0, 9, 4)$, $\mathbf{v} = (9, -2, -4)$, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

22. $\mathbf{u} = (0, 1, 2)$, $\mathbf{v} = (1, 2, 0)$, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

23. $\mathbf{u} = (8, 0, -8)$, $\mathbf{v} = (8, 3, 16)$,
$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1v_1 + 3u_2v_2 + u_3v_3$

24. $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v} = (2, 5, 2)$,
$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2 + u_3v_3$

25. $\mathbf{u} = (2, 0, 1, -1)$, $\mathbf{v} = (2, 2, 0, 1)$, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

26. $\mathbf{u} = (1, -1, 2, 0)$, $\mathbf{v} = (2, 1, 0, -1)$,
$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

Mostrar que una función es un producto interno En los Ejercicios 27 y 28, sean

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

matrices en el espacio vectorial $M_{2,2}$. Muestre que la función define in producto interno en $M_{2,2}$.

27. $\langle A, B \rangle = a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22}$

28. $\langle A, B \rangle = 2a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{12}b_{12} + 2a_{22}b_{22}$

Determinación de Producto interno, Longitud y Distancia En los ejercicios 29 a 32, utilice el producto interno $\langle A, B \rangle = 2a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + 2a_{22}b_{22}$ para encontrar (a) $\langle A, B \rangle$, (b) $\|A\|$, (c) $\|B\|$ y (d) $d(A, B)$ para las matrices en $M_{2,2}$

29. $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

30. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

31. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

32. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Mostrar que una función es un producto interno En los Ejercicios 33 y 34, muestre que la función define a un producto interno.

33. $\langle p, q \rangle = a_0b_0 + 2a_1b_1 + a_2b_2$, para $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ y $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ en P_2

34. $\langle p, q \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$, para $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ y $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$ en P_n

Determinación de Producto interno, Longitud y Distancia En los ejercicios 35 a 38, utilice el producto interno $\langle p, q \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$ para encontrar (a) $\langle p, q \rangle$, (b) $\|p\|$, (c) $\|q\|$ y (d) $d(p, q)$ para los polinomios en P_2.

35. $p(x) = 1 - x + 3x^2$, $q(x) = x - x^2$

36. $p(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$, $q(x) = 1 + 2x^2$

37. $p(x) = 1 + x^2$, $q(x) = 1 - x^2$

38. $p(x) = 1 - 2x - x^2$, $q(x) = x - x^2$

Cálculo En los ejercicios 39 a 42, use las funciones f y g dadas en $C[-1, 1]$ para encontrar (a) $\langle f, g \rangle$, (b) $\|f\|$, (c) $\|g\|$ y (d) $d(f, g)$ para el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx.$$

39. $f(x) = 1$, $g(x) = 3x^2 - 1$

40. $f(x) = -x$, $g(x) = x^2 - x + 2$

41. $f(x) = x$, $g(x) = e^x$ **42.** $f(x) = x$, $g(x) = e^{-x}$

Determinación de un ángulo entre dos vectores En los Ejercicios 43-52, encuentre el ángulo θ entre los vectores.

43. $\mathbf{u} = (3, 4), \quad \mathbf{v} = (5, -12), \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

44. $\mathbf{u} = (2, -1), \quad \mathbf{v} = \left(\frac{1}{2}, 1\right), \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

45. $\mathbf{u} = (-4, 3), \quad \mathbf{v} = (0, 5), \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_1 + u_2v_2$

46. $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{4}, -1\right), \quad \mathbf{v} = (2, 1),$
$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2$

47. $\mathbf{u} = (1, 1, 1), \quad \mathbf{v} = (2, -2, 2),$
$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2 + u_3v_3$

48. $\mathbf{u} = (0, 1, -1), \quad \mathbf{v} = (1, 2, 3), \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

49. $p(x) = 1 - x + x^2, \quad q(x) = 1 + x + x^2,$
$\langle p, q \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$

50. $p(x) = 1 + x^2, \quad q(x) = x - x^2,$
$\langle p, q \rangle = a_0b_0 + 2a_1b_1 + a_2b_2$

51. Cálculo $f(x) = x, \quad g(x) = x^2,$
$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

52. Cálculo $f(x) = 1, \quad g(x) = x^2,$
$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

Verificación de desigualdades En los Ejercicios 53–64, verifique (a) la desigualdad de Cauchy-Schwarz y (b) la desigualdad del triángulo para los vectores y productos internos dados.

53. $\mathbf{u} = (5, 12), \quad \mathbf{v} = (3, 4), \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

54. $\mathbf{u} = (-1, 1), \quad \mathbf{v} = (1, -1), \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

55. $\mathbf{u} = (1, 0, 4), \quad \mathbf{v} = (-5, 4, 1), \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

56. $\mathbf{u} = (1, 0, 2), \quad \mathbf{v} = (1, 2, 0), \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$

57. $p(x) = 2x, \quad q(x) = 3x^2 + 1,$
$\langle p, q \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$

58. $p(x) = x, \quad q(x) = 1 - x^2,$
$\langle p, q \rangle = a_0b_0 + 2a_1b_1 + a_2b_2$

59. $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix},$
$\langle A, B \rangle = a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22}$

60. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix},$
$\langle A, B \rangle = a_{11}b_{11} + a_{21}b_{21} + a_{12}b_{12} + a_{22}b_{22}$

61. Cálculo $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad g(x) = \cos x,$
$$\langle f, g \rangle = \int_{0}^{\pi/4} f(x)g(x)\,dx$$

62. Cálculo $f(x) = x, \quad g(x) = \cos \pi x,$
$$\langle f, g \rangle = \int_{0}^{2} f(x)g(x)\,dx$$

63. Cálculo $f(x) = x, \quad g(x) = e^x,$
$$\langle f, g \rangle = \int_{0}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

64. Cálculo $f(x) = x, \quad g(x) = e^{-x},$
$$\langle f, g \rangle = \int_{0}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

Cálculo En los ejercicios 65 a 68, demuestre que f y g son ortogonales en el espacio con producto interno $C[a, b]$, donde el producto interno está dado por
$$\langle f, g \rangle = \int_{a}^{b} f(x)g(x)\,dx.$$

65. $C[-\pi/2, \pi/2], \quad f(x) = \cos x, \quad g(x) = \operatorname{sen} x$

66. $C[-1, 1], \quad f(x) = x, \quad g(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$

67. $C[-1, 1], \quad f(x) = x, \quad g(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$

68. $C[0, \pi], \quad f(x) = 1, \quad g(x) = \cos(2nx),$
$n = 1, 2, 3, \ldots$

Determinación y gráficas de proyecciones ortogonales en R^2 En los ejercicios 69 a 72, (a) determine $\operatorname{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$, (b) encuentre $\operatorname{proy}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$, y (c) trace la gráfica de ambos resultados. Use el producto interno euclidiano.

69. $\mathbf{u} = (1, 2), \quad \mathbf{v} = (2, 1)$

70. $\mathbf{u} = (-1, -2), \quad \mathbf{v} = (4, 2)$

71. $\mathbf{u} = (-1, 3), \quad \mathbf{v} = (4, 4)$

72. $\mathbf{u} = (2, -2), \quad \mathbf{v} = (3, 1)$

Determinación de proyecciones ortogonales en R^2 En los ejercicios 73 a 76 halle (a) $\operatorname{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ y (b) $\operatorname{proy}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$. Use el producto interno euclidiano.

73. $\mathbf{u} = (1, 3, -2), \quad \mathbf{v} = (0, -1, 1)$

74. $\mathbf{u} = (1, 2, -1), \quad \mathbf{v} = (-1, 2, -1)$

75. $\mathbf{u} = (0, 1, 3, -6), \quad \mathbf{v} = (-1, 1, 2, 2)$

76. $\mathbf{u} = (-1, 4, -2, 3), \quad \mathbf{v} = (2, -1, 2, -1)$

Cálculo En los ejercicios 77 a 84, determine la proyección ortogonal de f sobre g. Aplique el producto interno en $C[a, b]$
$$\langle f, g \rangle = \int_{a}^{b} f(x)g(x)\,dx.$$

77. $C[-1, 1], \quad f(x) = x, \quad g(x) = 1$

78. $C[-1, 1], \quad f(x) = x^3 - x, \quad g(x) = 2x - 1$

79. $C[0, 1], \quad f(x) = x, \quad g(x) = e^x$

80. $C[0, 1], \quad f(x) = x, \quad g(x) = e^{-x}$

81. $C[-\pi, \pi], \quad f(x) = \operatorname{sen} x, \quad g(x) = \cos x$

82. $C[-\pi, \pi], \quad f(x) = \operatorname{sen} 2x, \quad g(x) = \cos 2x$

83. $C[-\pi, \pi], \quad f(x) = x, \quad g(x) = \operatorname{sen} 2x$

84. $C[-\pi, \pi], \quad f(x) = x, \quad g(x) = \cos 2x$

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 85 y 86, determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, proporcione una razón o cite una expresión adecuada del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que muestre que la expresión no es cierta en todos los casos o cite del texto una expresión adecuada.

85. (a) El producto punto es el único producto interno que se puede definir en R^n.
(b) Un vector distinto de cero en un producto interno puede tener una norma de cero.

86. (a) La norma del vector $\mathbf{u}$ está definida por el ángulo entre el vector $\mathbf{u}$ y eje x positivo.
(b) El ángulo θ entre un vector $\mathbf{v}$ y la proyección de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$ es obtuso si el escalar $a < 0$ y agudo si $a > 0$, donde $a\mathbf{v} = \text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$.

87. Sean $\mathbf{u} = (4, 2)$ y $\mathbf{v} = (2, -2)$ dos vectores en R^2 con el producto interno $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2$.
(a) Demuestre que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales.
(b) Dibuje los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. ¿Son ortogonales en el sentido euclidiano?

88. **Prueba** Demuestre que

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$$

para cualesquiera vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en un espacio V con producto interno.

89. **Prueba** Demuestre que la función es un producto interno para R^n.

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = c_1u_1v_1 + c_2u_2v_2 + \cdot \cdot \cdot + c_nu_nv_n, \quad c_i > 0$$

90. **Prueba** Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores diferentes de cero en un espacio V con producto interno. Demuestre que $\mathbf{u} - \text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$.

91. **Prueba** Demuestre la propiedad 2 del teorema 5.7: Si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores en un espacio con producto interno, entonces $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.

92. **Prueba** Demuestre la propiedad 3 del teorema 5.7: Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores en un espacio con producto interno y c es un escalar, entonces $\langle \mathbf{u}, c\mathbf{v} \rangle = c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

93. **Demostración guiada** Sea W un subespacio del espacio V con producto interno. Demuestre que el conjunto $W^\perp$ es un subespacio de V.

$$W^\perp = \{\mathbf{v} \in V : \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0 \text{ para toda } \mathbf{w} \in W\}$$

Inicio: Para demostrar que $W^\perp$ es un subespacio de V, usted debe demostrar que $W^\perp$ no es un conjunto vacío y que las condiciones de cerradura para un subespacio se cumplen (teorema 4.5)
(i) Encuentre un vector en $W^\perp$ para concluir que no es vacío.
(ii) Para demostrar la cerradura de $W^\perp$ bajo la suma, usted necesita demostrar que $\langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{w} \rangle = 0$ para toda $\mathbf{w} \in W$ y para todo $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in W^\perp$. Utilice las propiedades de los productos internos y el hecho de que $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{w} \rangle$ y $\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w} \rangle$ son cero para demostrar esto.
(iii) Para demostrar la cerradura bajo la multiplicación por un escalar, proceda como en el inciso (ii). Usted debe aplicar las propiedades de los productos internos y la condición de pertenencia a $W^\perp$.

94. Utilice el resultado del ejercicio 93 para encontrar $W^\perp$ si W es un espacio de (1, 2, 3) en $V = R^3$.

95. **Demostración guiada** Sea $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ el producto interno euclidiano en R^n. Utilice el hecho de que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T\mathbf{v}$ para demostrar que para cualquier matriz A de $n \times n$
(a) $\langle A^T\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, A\mathbf{v} \rangle$
y
(b) $\langle A^TA\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \|A\mathbf{u}\|^2$.

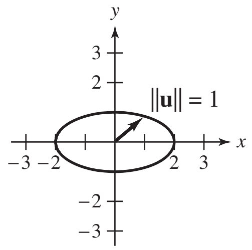
Inicio: Para demostrar (a) y (b), puede utilizar las propiedades de las transpuestas (teorema 2.6) y las propiedades del producto punto (teorema 5.3)
(i) Para demostrar el inciso (a), puede repetir el uso de la propiedad $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T\mathbf{v}$ y la propiedad 4 del teorema 2.6.
(ii) Para demostrar el inciso (b), puede utilizar la propiedad $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T\mathbf{v}$, la propiedad 4 del teorema 2.6 y la propiedad 4 del teorema 5.3.

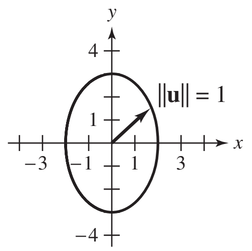
96. REMATE
(a) Explique cómo determinar si una función dada define un producto interno.
(b) Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores en un espacio con producto interno V tal que $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Explique cómo encontrar la proyección ortogonal de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$.

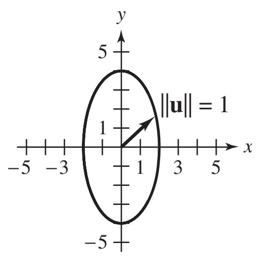
Determinación de la ponderación de un producto interno En los Ejercicios 97-100, encuentre c_1 y c_2 para el producto interno de R^2 dado por

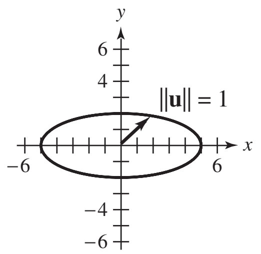
$$\langle \mathrm{u}, \mathrm{v} \rangle = c_1u_1v_1 + c_2u_2v_2$$

tal que la gráfica represente un círculo unidad como se muestra.

97.


98.


99.


100.


101. Los dos vectores del ejemplo 10 son $\mathbf{u} = (6, 2, 4)$ y $\mathbf{v} = (1, 2, 0)$. Sin usar el teorema 5.9, demuestre que entre todos los múltiplos escalares $c\mathbf{v}$ del vector $\mathbf{v}$, la proyección de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$ es el vector más cercano a $\mathbf{u}$, es decir, demuestre que $d(\mathbf{u}, \text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u})$ es un mínimo.

5.3 Bases ortonormales: proceso de Gram-Schmidt

- Mostrar que un conjunto de vectores es ortogonal y forma una base ortonormal y representa a un vector respecto a una base ortonormal.
- Aplicar el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt.

CONJUNTOS ORTOGONALES Y ORTONORMALES

En la sección 4.7 vimos que un espacio vectorial puede tener muchas bases distintas. mientras estudiamos esa sección, quizá haya obsevado que ciertas bases son más convenientes que otras. Por ejemplo, R^3 tiene la conveniente base estándar $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Este conjunto es la base *estándar* de R^3 porque tiene características especiales particularmente útiles. Una característica importante es que los tres vectores de la base son *mutuamente ortogonales*. Es decir,

$$(1, 0, 0) \cdot (0, 1, 0) = 0$$
$$(1, 0, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0$$
$$(0, 1, 0) \cdot (0, 0, 1) = 0.$$

Una segunda característica importante es que cada vector de la base es un vector *unitario*.

En esta sección se definen algunas ventajas que poseen las bases que constan de vectores unitarios mutuamente ortogonales y se desarrolla un procedimiento, denominado *el proceso de ortonormalización de Gram-schmidt*, para construir estas bases.

Definición de conjuntos ortogonales y conjuntos ortonormales

Un conjunto s de vectores en un espacio V con producto interno se llama **ortogonal** si todo par de vectores en s es ortogonal. Si, además, cada vector en este conjunto es unitario, entonces s se denomina **ortonormal**.

Para $s = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, esta definición tiene la forma que se muestra enseguida.

Ortogonal	*Ortonormal*
1. $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0,\ i \neq j$	**1.** $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0,\ i \neq j$
	2. $\lVert \mathbf{v}_i \rVert = 1,\ i = 1, 2, \ldots, n$

Si s es una *base*, entonces se denomina **base ortogonal** o **base ortonormal**, respectivamente.

La base estándar para R^n es ortonormal, aunque no es la única base ortonormal de R^n. Por ejemplo, una base ortonormal no estándar de R^3 puede formarse efectuando una rotación de los ejes alrededor del eje z para obtener

$$B = \{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0), (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0), (0, 0, 1)\}$$

como se muestra en la figura 5.15. intente comprobar que el producto punto de dos vectores cualesquiera diferentes entre sí en B es igual a cero y que todo vector en B es unitario.

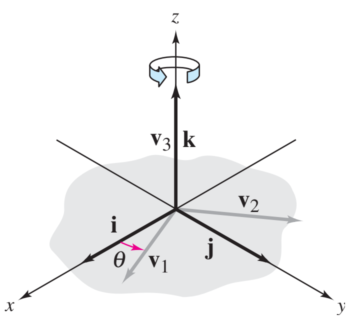


Figura 5.15

En el ejemplo siguiente se describe otra base ortonormal no estándar para R^3.

EJEMPLO 1 Una base ortonormal no estándar para R^3

Demuestre que el conjunto que aparece en seguida es una base ortonormal para R^3.

$$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}$$

SOLUCIÓN

Primero, demuestre que los tres vectores son mutuamente ortogonales.

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 0 = 0$$

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = \frac{2}{3\sqrt{2}} - \frac{2}{3\sqrt{2}} + 0 = 0$$

$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = -\frac{\sqrt{2}}{9} - \frac{\sqrt{2}}{9} + \frac{2\sqrt{2}}{9} = 0$$

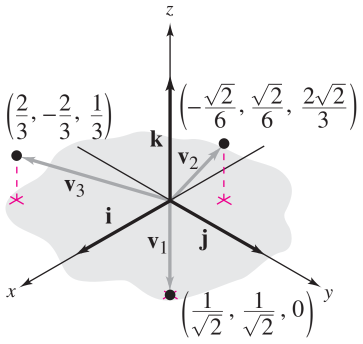


Figura 5.16

Además, cada vector es de longitud 1, ya que

$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + 0} = 1$$

$$\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} = \sqrt{\tfrac{2}{36} + \tfrac{2}{36} + \tfrac{8}{9}} = 1$$

$$\|\mathbf{v}_3\| = \sqrt{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3} = \sqrt{\tfrac{4}{9} + \tfrac{4}{9} + \tfrac{1}{9}} = 1.$$

Por consiguiente, S es un conjunto ortonormal. Dado que los tres vectores no son coplanares (véase la figura 5.16), se sabe que generan a R^3. Entonces, por el teorema 4.12 forman una base ortonormal (no estándar) para R^3.

EJEMPLO 2 Una base ortonormal de P_3

En P_3, con el producto interno

$$\langle p, q\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

la base estándar $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ es ortonormal. La verificación de esto se deja como ejercicio. (Véase el ejercicio 19.)

ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

El análisis del tiempo-frecuencia de señales fisiológicas irregulares, como las variaciones latido a latido del ritmo cardiaco (también conocido como variabilidad de la frecuencia cardíaca o VFC), puede ser difícil. Esto se debe a que la estructura de una señal puede incluir múltiples componentes periódicos, no periódicos y pseudoperiódicos. Los investigadores han propuesto y validado un método simplificado para el análisis de la VFC llamado distribución de base ortonormal y representación de tiempo-frecuencia (OPTR, por sus siglas en inglés). Este método puede detectar cambios abruptos o lentos en la estructura de la señal de la VFC, dividir una señal de la VFC no estacionaria en segmentos que son "menos no estacionarios" y determinar patrones en la VFC. Los investigadores encontraros que, a pesar de que tenía una mala resolución de tiempo con señales que cambiaban gradualmente, el método OPTR representó con precisión cambios multicomponentes y abruptos en señales de la VFC tanto de la vida real como simuladas. *(Fuente: Orthonormal-Basis Partitioning and Time-Frequency Representation of Cardiac Rhythm Dynamics, Aysin, Benhur, et al., IEEE Transactions on Biomedical Engineering, 52, no. 5)*

El conjunto ortogonal en el siguiente ejemplo se usa para construir aproximaciones de Fourier de funciones continuas. (Véase la sección 5.5.)

EJEMPLO 3 Un conjunto ortogonal en $C[0, 2\pi]$ (cálculo)

En $C[0, 2\pi]$, con el producto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\, dx$$

demuestre que el conjunto $s = \{1, \operatorname{sen} x, \cos x, \operatorname{sen} 2x, \cos 2x, \ldots, \operatorname{sen} nx, \cos nx\}$ es ortogonal.

Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

Fourier nació en Auxerre, Francia. Es reconocido como un contribuyente importante en el campo de la educación para científicos, matemáticos e ingenieros. Sus investigaciones condujeron a importantes resultados referentes a eigenvalores (Sección 7.1), ecuaciones diferenciales y series de Fourier (funciones de series trigonométricas). Sus trabajos forzaron a los matemáticos de esos días a aceptar la definición de una función.

SOLUCIÓN

Para demostrar que el conjunto dado es ortogonal, es necesario que verifique los productos internos mostrados enseguida, donde m y n son enteros positivos.

$$\langle 1, \operatorname{sen} nx\rangle = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} nx\, dx = 0$$

$$\langle 1, \cos nx\rangle = \int_0^{2\pi} \cos nx\, dx = 0$$

$$\langle \operatorname{sen} mx, \cos nx\rangle = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx = 0$$

$$\langle \operatorname{sen} mx, \operatorname{sen} nx\rangle = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\, dx = 0, \quad m \neq n$$

$$\langle \cos mx, \cos nx\rangle = \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx\, dx = 0, \quad m \neq n$$

Se verificará uno de los productos anteriores y los demás se dejan como ejercicio. Si $m \neq n$, entonces la fórmula para reescribir el producto de funciones trigonométricas como una suma puede usarse para obtener

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\operatorname{sen}(m + n)x + \operatorname{sen}(m - n)x]\, dx = 0.$$

Si $m = n$, entonces

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} mx \cos mx\, dx = \frac{1}{2m}\left[\operatorname{sen}^2 mx\right]_0^{2\pi} = 0.$$

El conjunto S en el ejemplo 3 es ortogonal pero no ortonormal. Sin embargo, es posible formar un conjunto ortonormal al normalizar cada uno de los vectores en s. Eso es porque

$$\|1\|^2 = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi$$

$$\|\operatorname{sen} nx\|^2 = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 nx\, dx = \pi$$

$$\|\cos nx\|^2 = \int_0^{2\pi} \cos^2 nx\, dx = \pi$$

concluimos que el conjunto

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx\right\}$$

es ortonormal.

Cada conjunto en los ejemplos 1, 2 y 3 es linealmente independiente. La independencia lineal es una característica de cualquier conjunto ortogonal de vectores diferentes de cero, como se establece en el siguiente teorema.

TEOREMA 5.10 Los conjuntos ortogonales son linealmente independientes

Si $s = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es un conjunto ortogonal de vectores *diferentes de cero* en un espacio V con producto interno, entonces s es linealmente independiente.

DEMOSTRACIÓN

Es necesario demostrar que la ecuación vectorial

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

implica que $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Para hacer esto, forme el producto interno del lado izquierdo de la ecuación con cada vector en S, es decir, para cada i,

$$\langle (c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_i\mathbf{v}_i + \cdots + c_n\mathbf{v}_n), \mathbf{v}_i\rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{v}_i\rangle$$
$$c_1\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_i\rangle + c_2\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_i\rangle + \cdots + c_i\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\rangle + \cdots + c_n\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i\rangle = 0.$$

Así, como cada s es ortogonal, $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\rangle = 0$ para $j \neq i$ y de este modo la ecuación se reduce a

$$c_i\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\rangle = 0.$$

Pero como cada uno de los vectores en s es diferente de cero, y sabemos que

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\rangle = \|\mathbf{v}_i\|^2 \neq 0.$$

Así, cada c_i debe ser cero y el conjunto debe ser linealmente independiente.

Como una consecuencia de los teoremas 4.12 y 5.10 obtenemos el siguiente resultado.

Corolario del Teorema 5.10

Si V es un espacio de dimensión n con producto interno, entonces cualquier conjunto de n vectores ortogonales diferentes de cero es una base para V.

EJEMPLO 4 Uso de la ortogonalidad para verificar una base

Demuestre que el siguiente conjunto es una base para R^4.

$$S = \{\overset{\mathbf{v}_1}{(2, 3, 2, -2)}, \overset{\mathbf{v}_2}{(1, 0, 0, 1)}, \overset{\mathbf{v}_3}{(-1, 0, 2, 1)}, \overset{\mathbf{v}_4}{(-1, 2, -1, 1)}\}$$

SOLUCIÓN

El conjunto S consta de cuatro vectores diferentes de cero. Así, por el corolario del teorema 5.10, se puede demostrar que S es una base para R^4 al probar que es un conjunto ortogonal, como sigue

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 2 + 0 + 0 - 2 = 0$$
$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 = -2 + 0 + 4 - 2 = 0$$
$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_4 = -2 + 6 - 2 - 2 = 0$$
$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 = -1 + 0 + 0 + 1 = 0$$
$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_4 = -1 + 0 + 0 + 1 = 0$$
$$\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_4 = 1 + 0 - 2 + 1 = 0$$

S es ortogonal y por el corolario del teorema 5.10, es una base para R^4.

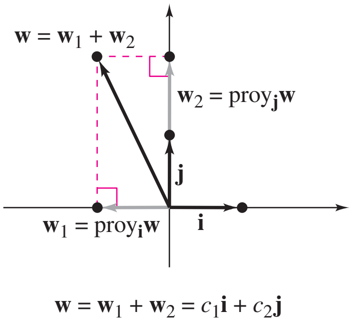


Figura 5.17

En la sección 4.7 se analizó una técnica para determinar la representación de coordenadas con respecto a una base no estándar. Si la base es *ortonormal*, entonces tal procedimiento puede perfeccionarse.

Antes de presentar este resultado consideraremos un ejemplo en R^2. En la figura 5.17 se observa que $\mathbf{i} = (1, 0)$ y $\mathbf{j} = (0, 1)$ forman una base ortonormal para R^2. Cualquier vector $\mathbf{w}$ en R^2 puede representarse como $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, donde $\mathbf{w}_1 = \text{proy}_{\mathbf{i}}\mathbf{w}$ y $\mathbf{w}_2 = \text{proy}_{\mathbf{j}}\mathbf{w}$. Como $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ son vectores unitarios, concluimos que $\mathbf{w}_1 = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i}$ y $\mathbf{w}_2 = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j}$. En consecuencia

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{i})\mathbf{i} + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{j})\mathbf{j} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j}$$

lo que demuestra que los coeficientes c_1 y c_2 son simplemente los productos punto de $\mathbf{w}$ con los vectores básicos respectivos. Este resultado se generaliza en el siguiente teorema.

TEOREMA 5.11 Coordenadas con respecto a una base ortonormal

Si $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base ortonormal para un espacio V con producto interno, entonces la representación en coordenadas de un vector $\mathbf{w}$ con respecto a B es

$$\mathbf{w} = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \cdot \cdot \cdot + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n.$$

DEMOSTRACIÓN

Como B es una base de V, entonces deben existir escalares únicos $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que

$$\mathbf{w} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdot \cdot \cdot + c_n\mathbf{v}_n.$$

Tomando el producto interno (con $\mathbf{v}_i$) de ambos lados de esta ecuación se obtiene

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_i \rangle &= \langle (c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdot \cdot \cdot + c_n\mathbf{v}_n), \mathbf{v}_i \rangle \\ &= c_1\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_i \rangle + c_2\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_i \rangle + \cdot \cdot \cdot + c_n\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle \end{aligned}$$

y por la ortogonalidad de B la ecuación anterior se reduce a

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_i \rangle = c_i\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle.$$

ya que B es ortonormal, se tiene que $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \|\mathbf{v}\|^2 = 1$ y se concluye que $\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_i \rangle = c_i$.

En el teorema 5.11, las coordenadas de $\mathbf{w}$ con respecto a la base *ortonormal* B se denominan **coeficientes de Fourier** de $\mathbf{w}$ con respecto a B, en honor del matemático francés Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830). La matriz de coordenadas correspondiente de $\mathbf{w}$ con respecto a B es

$$[\mathbf{w}]_B = [c_1 \;\; c_2 \; \cdot \cdot \cdot \; c_n]^T = [\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_1 \rangle \;\; \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_2 \rangle \; \cdot \cdot \cdot \; \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_n \rangle]^T.$$

EJEMPLO 5 Representación de vectores con respecto a una base ortonormal

Encontrar las coordenadas de $\mathbf{w} = (5, -5, 2)$ con respecto a la siguiente base ortonormal para R^3

$$B = \Big\{\underbrace{\left(\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}, 0\right)}_{\mathbf{v}_1}, \underbrace{\left(-\tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5}, 0\right)}_{\mathbf{v}_2}, \underbrace{(0, 0, 1)}_{\mathbf{v}_3}\Big\}$$

SOLUCIÓN

Dado que B es ortonormal, es posible aplicar el teorema 5.11 para determinar las coordenadas requeridas.

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_1 &= (5, -5, 2) \cdot \left(\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}, 0\right) = -1 \\ \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_2 &= (5, -5, 2) \cdot \left(-\tfrac{4}{5}, \tfrac{3}{5}, 0\right) = -7 \\ \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_3 &= (5, -5, 2) \cdot (0, 0, 1) = 2 \end{aligned}$$

Así, la matriz de coordenadas con respecto a B es $[\mathbf{w}]_B = [-1 \quad -7 \quad 2]^T$.

PROCESO DE ORTONORMALIZACIÓN DE GRAM-SCHMIDT

COMENTARIO

El proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt conduce a una factorización matricial similar a la factorización-*LU* estudiada en el capítulo 2. Usted investigará más acerca de la *factorización-QR* en el proyecto 1 al final de este capítulo.

Una vez que se han visto las ventajas de las bases ortonormales (lo directo que es la representación de coordenadas), a continuación se considerará un procedimiento para encontrar tales bases. Este procedimiento se denomina **proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt**, en honor del matemático danés Jorgen Pederson Gram (1850-1916) y del matemático alemán Erhardt Schmidt (1876-1959). Consta de tres pasos.

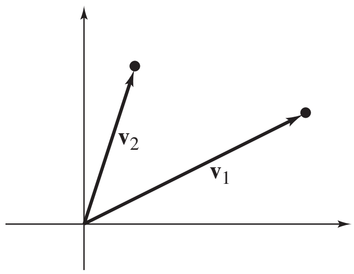
1. Empezar con una base del espacio con producto interior. No se requiere que sea una base ortogonal ni que conste de vectores unitarios.
2. Convertir la base dada a una base ortogonal.
3. Normalizar cada uno de los vectores de la base ortogonal a fin de obtener una base ortonormal

TEOREMA 5.12 Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt

1. Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base del espacio V con producto interior.
2. Sea $B' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$, donde $\mathbf{w}_i$ está dado por

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_1 &= \mathbf{v}_1 \\
\mathbf{w}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}\mathbf{w}_1 \\
\mathbf{w}_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}\mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle}\mathbf{w}_2 \\
&\vdots \\
\mathbf{w}_n &= \mathbf{v}_n - \frac{\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}\mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle}\mathbf{w}_2 - \cdots - \frac{\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{w}_{n-1} \rangle}{\langle \mathbf{w}_{n-1}, \mathbf{w}_{n-1} \rangle}\mathbf{w}_{n-1}.
\end{aligned}$$

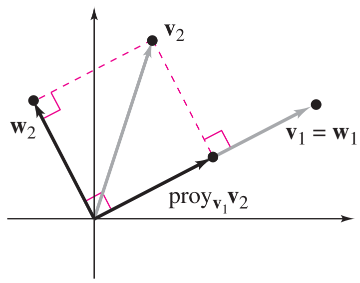
   Entonces B' es una base *ortonormal* para V.
3. Sea $\mathbf{u}_i = \dfrac{\mathbf{w}_i}{\|\mathbf{w}_i\|}$. Luego, el conjunto $B'' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ es una base *ortonormal* de V. Además, gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ = gen $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ para $k = 1, 2, \ldots, n$.



$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es una base para R^2.

Figura 5.18

En vez de dar una demostración general de este teorema, parece más instructivo analizar un caso especial en el que se pueda usar un modelo geométrico. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ una base para R^2, como se muestra en la figura 5.18. Para determinar una base ortogonal para R^2, primero se elige uno de los vectores originales, por ejemplo $\mathbf{v}_1$. Luego, se requiere encontrar un segundo vector que sea ortogonal a $\mathbf{v}_1$. En la figura 5.19 se observa que $\mathbf{v}_2 - \text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{v}_2$ tiene esta propiedad.



$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \text{proy}_{\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_2$ es ortogonal a $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$.

Figura 5.19

Así, con

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$$

y

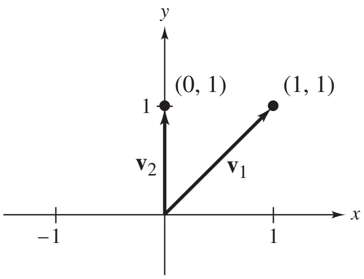
$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \text{proy}_{\mathbf{v}_1}\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}\mathbf{w}_1$$

se puede concluir que el conjunto $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ es ortogonal. Por el corolario del teorema 5.10, se trata de una base para R^2. Finalmente, para normalizar $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$ se obtiene la siguiente base ortonormal para R^2

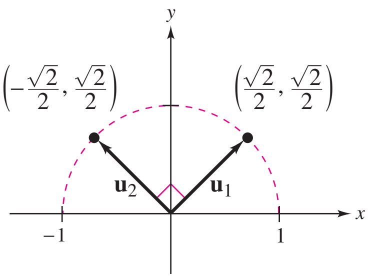
$$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} = \left\{\frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|}, \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|}\right\}$$

COMENTARIO

Un conjunto ortonormal obtenido por el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt depende del orden de los vectores en la base. Por ejemplo, intente volver a trabajar en el ejemplo 6 con la base original ordenada como $\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1\}$ en vez de $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.



Base dada: $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$



Base ortonormal: $B'' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$

Figura 5.20

EJEMPLO 6 Aplicación del proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt

Aplique el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt a la siguiente base en R^2

$$B = \{\overset{\mathbf{v}_1}{(1, 1)}, \overset{\mathbf{v}_2}{(0, 1)}\}$$

SOLUCIÓN

El proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt produce

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = (1, 1)$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}\mathbf{w}_1 = (0, 1) - \frac{1}{2}(1, 1) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

El conjunto $B' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ es una base ortogonal para R^2. Al normalizar cada vector de B' se obtiene

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|} = \frac{1}{1/\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Por tanto, $B'' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ es una base ortonormal para R^2. Véase la figura 5.20.

EJEMPLO 7 Aplicación del proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt

Aplique el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt a la siguiente base para R^3

$$B = \{\overset{\mathbf{v}_1}{(1, 1, 0)}, \overset{\mathbf{v}_2}{(1, 2, 0)}, \overset{\mathbf{v}_3}{(0, 1, 2)}\}$$

SOLUCIÓN

Aplicando el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt se produce

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = (1, 1, 0)$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}\mathbf{w}_1 = (1, 2, 0) - \frac{3}{2}(1, 1, 0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}\mathbf{w}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2}\mathbf{w}_2 \\ &= (0, 1, 2) - \frac{1}{2}(1, 1, 0) - \frac{1/2}{1/2}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \\ &= (0, 0, 2).\end{aligned}$$

El conjunto $B' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ es una base ortogonal para R^3. Al normalizar cada uno de los vectores de B' se obtiene

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|} = \frac{1}{1/\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|} = \frac{1}{2}(0, 0, 2) = (0, 0, 1).$$

Así, $B'' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es una base ortonormal para R^3.

En los ejemplos 6 y 7 se aplicó el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt a bases para R^2 y R^3. Este proceso funciona de manera adecuada para un subespacio de un espacio con producto interno. El procedimiento se ilustra con el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 8 Aplicación del proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt

Los vectores $\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0)$ y $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 1)$ generan un plano en R^3. Determine una base ortonormal para este subespacio.

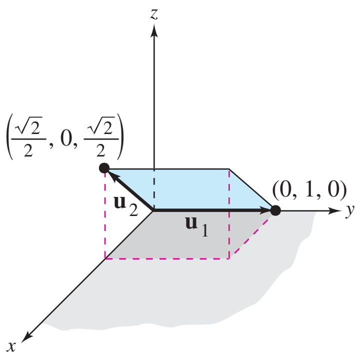


Figura 5.21

SOLUCIÓN

La aplicación del proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt produce

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = (0, 1, 0)$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}\mathbf{w}_1 = (1, 1, 1) - \frac{1}{1}(0, 1, 0) = (1, 0, 1).$$

Al normalizar $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$ se obtiene el conjunto ortonormal

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|} = (0, 1, 0)$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Véase la figura 5.21.

EJEMPLO 9 Aplicación del proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt (cálculo)

Aplique el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt a la base $B = \{1, x, x^2\}$ en P_2, usando el producto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\, dx.$$

SOLUCIÓN

Sea $B = \{1, x, x^2\} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Entonces tenemos

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = 1$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}\mathbf{w}_1 = x - \frac{0}{2}(1) = x$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1 \rangle}{\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle}\mathbf{w}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_2 \rangle}{\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2 \rangle}\mathbf{w}_2 \\ &= x^2 - \frac{2/3}{2}(1) - \frac{0}{2/3}(x) \\ &= x^2 - 1/3. \end{aligned}$$

Luego, al normalizar $B' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ se obtiene

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2/3}}(x) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{8/45}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3x^2 - 1).$$

En los ejercicios 45 a 50 se pide que usted compruebe estos cálculos.

COMENTARIO

Los polinomios $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ y $\mathbf{u}_3$ en el ejemplo 9 se denominan los tres primeros **polinomios normalizados de Legendre,** en honor del matemático francés Adrien-Marie Legendre (1752-1833).

Los cálculos en el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt algunas veces son más simples cuando cada vector $\mathbf{w}_i$ se normaliza *antes* de ser usado para calcular el siguiente vector. Esta forma **alternativa del proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt** consta de los pasos siguientes.

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|} = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|}, \text{ donde } \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|}, \text{ donde } \mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 - \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle \mathbf{u}_2$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{u}_n = \frac{\mathbf{w}_n}{\|\mathbf{w}_n\|}, \text{ donde } \mathbf{w}_n = \mathbf{v}_n - \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 - \cdot \cdot \cdot - \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{u}_{n-1} \rangle \mathbf{u}_{n-1}$$

EJEMPLO 10 Forma alternativa del proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt

Determine una base ortonormal del espacio solución del siguiente sistema homogéneo de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 7x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 &= 0 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

La matriz aumentada de este sistema se reduce como sigue.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 7 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

Si se hace que $x_3 = s$ y $x_4 = t$, entonces cada solución del sistema es de la forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s + t \\ 2s - 8t \\ s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ -8 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por consiguiente, una base del espacio solución es

$$B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = \{(-2, 2, 1, 0), (1, -8, 0, 1)\}.$$

Para hallar una base ortonormal $B' = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, se usa la forma alternativa del proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt como sigue.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} \\ &= \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_2 &= \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 \\ &= (1, -8, 0, 1) - \left[(1, -8, 0, 1) \cdot \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)\right]\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) \\ &= (-3, -4, 2, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2 &= \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|} \\ &= \left(-\frac{3}{\sqrt{30}}, -\frac{4}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{1}{\sqrt{30}}\right) \end{aligned}$$

5.3 Ejercicios

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

Conjuntos ortogonales y ortonormales En los Ejercicios 1-14, (a) determine si el conjunto de vectores en R^n es ortogonal, (b) si el conjunto es ortogonal, determine si también es ortonormal y (c) determine si el conjunto es una base para R^n.

1. $\{(2, -4), (2, 1)\}$ **2.** $\{(3, -2), (-4, -6)\}$

3. $\{(-4, 6), (5, 0)\}$ **4.** $\{(11, 4), (8, -3)\}$

5. $\left\{\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)\right\}$ **6.** $\left\{(1, 2), \left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)\right\}$

7. $\{(4, -1, 1), (-1, 0, 4), (-4, -17, -1)\}$

8. $\{(2, -4, 2), (0, 2, 4), (-10, -4, 2)\}$

9. $\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\}$

10. $\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{6}\right), \left(0, \frac{2\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right), \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{1}{2}\right)\right\}$

11. $\{(2, 5, -3), (4, 2, 6)\}$ **12.** $\{(-6, 3, 2, 1), (2, 0, 6, 0)\}$

13. $\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$

14. $\left\{\left(\frac{\sqrt{10}}{10}, 0, 0, \frac{3\sqrt{10}}{10}\right), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), \left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}, 0, 0, \frac{\sqrt{10}}{10}\right)\right\}$

Normalización de un conjunto ortogonal En los Ejercicios 15-18, (a) demuestre que el conjunto de vectores en R^n es ortogonal y (b) normalice el conjunto para producir un conjunto ortonormal.

15. $\{(-1, 4), (8, 2)\}$ **16.** $\{(2, -5), (10, 4)\}$

17. $\{(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}), (-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})\}$

18. $\left\{\left(-\frac{2}{15}, \frac{1}{15}, \frac{2}{15}\right), \left(\frac{1}{15}, \frac{2}{15}, 0\right)\right\}$

19. Complete el ejemplo 2 para verificar que $\{1, x, x^2, x^3\}$ es una base ortonormal para P_3 con el producto interno $\langle p, q\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

20. Verifique que $\{(\operatorname{sen}\theta, \cos\theta), (\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta)\}$ es una base ortonormal para R^2.

Determinación de un matriz de coordenadas En los Ejercicios 21–26, encuentre la matriz de coordenadas de x respecto a la base ortonormal B en R^n.

21. $\mathbf{x} = (1, 2), B = \left\{\left(-\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{3\sqrt{13}}{13}\right), \left(\frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right)\right\}$

22. $\mathbf{x} = (-3, 4), B = \left\{\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right), \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)\right\}$

23. $\mathbf{x} = (2, -2, 1)$,
$B = \left\{\left(\frac{\sqrt{10}}{10}, 0, \frac{3\sqrt{10}}{10}\right), (0, 1, 0), \left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}, 0, \frac{\sqrt{10}}{10}\right)\right\}$

24. $\mathbf{x} = (3, -5, 11), B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

25. $\mathbf{x} = (5, 10, 15), B = \left\{\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right), \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right), (0, 0, 1)\right\}$

26. $\mathbf{x} = (2, -1, 4, 3)$,
$B = \left\{\left(\frac{5}{13}, 0, \frac{12}{13}, 0\right), (0, 1, 0, 0), \left(-\frac{12}{13}, 0, \frac{5}{13}, 0\right), (0, 0, 0, 1)\right\}$

Aplicación del proceso de Gram-Schmidt En los ejercicios 27 a 36, use el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt para transformar la base dada para R^n en una base ortonormal. Aplique el producto interno euclidiano para R^n y use los vectores en el orden dado.

27. $B = \{(3, 4), (1, 0)\}$ **28.** $B = \{(1, 2), (-1, 0)\}$

29. $B = \{(0, 1), (2, 5)\}$ **30.** $B = \{(4, -3), (3, 2)\}$

31. $B = \{(1, -2, 2), (2, 2, 1), (2, -1, -2)\}$

32. $B = \{(1, 0, 0), (1, 1, 1), (1, 1, -1)\}$

33. $B = \{(4, -3, 0), (1, 2, 0), (0, 0, 4)\}$

34. $B = \{(0, 1, 2), (2, 0, 0), (1, 1, 1)\}$

35. $B = \{(0, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$

36. $B = \{(3, 4, 0, 0), (-1, 1, 0, 0), (2, 1, 0, -1), (0, 1, 1, 0)\}$

Aplicación del proceso de Gram-Schmidt En los ejercicios 37 a 42, use el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt para transformar la base dada para R^n en una base ortonormal para el subespacio. Aplique el producto interno euclidiano de R^n y use los vectores en el orden dado.

37. $B = \{(-8, 3, 5)\}$ **38.** $B = \{(4, -7, 6)\}$

39. $B = \{(3, 4, 0), (2, 0, 0)\}$

40. $B = \{(1, 2, 0), (2, 0, -2)\}$

41. $B = \{(1, 2, -1, 0), (2, 2, 0, 1), (1, 1, -1, 0)\}$

42. $B = \{(7, 24, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 1, -2)\}$

43. Utilice el producto interno $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2$ en R^2 y el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt para transformar $\{(2, -1), (-2, 10)\}$ en una base ortonormal.

44. **Escriba** Explique por qué el resultado del ejercicio 43 no es una base ortonormal cuando se aplica el producto interno euclidiano en R^2.

Cálculo En los ejercicios 45 a 50, sea $B = \{1, x, x^2\}$ una base para P_2 con el producto interno

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx.$$

Complete el ejemplo 9 verificando los productos internos indicados.

45. $\langle x, 1\rangle = 0$ **46.** $\langle 1, 1\rangle = 2$

47. $\langle x^2, 1\rangle = \frac{2}{3}$ **48.** $\langle x^2, x\rangle = 0$

49. $\langle x, x\rangle = \frac{2}{3}$ **50.** $\left\langle x^2 - \frac{1}{3}, x^2 - \frac{1}{3}\right\rangle = \frac{8}{45}$

Aplicación de la forma alternativa del proceso de Gram-Schmidt En los Ejercicios 51-55, aplique la forma alternativa del proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt para encontrar una base ortonormal para el espacio solución del sistema lineal homogéneo.

51. $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$

52. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$

53. $\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$

54. $x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0$ **55.** $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$

> **56.** REMATE Sea B una base para un espacio con producto interno V. Explique cómo aplicar el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt para formar una base ortonormal B' para V.

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 57 y 58, determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, proporcione una razón o cite una expresión adecuada del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que muestre que la expresión no es cierta en todos los casos o cite del texto una expresión adecuada.

57. (a) Un conjunto S de vectores en un espacio V con producto interno es ortogonal si cada par de vectores en S es ortogonal.
(b) Una base ortonormal deducida con el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt no depende del orden de los vectores en la base.

58. (a) Un conjunto S de vectores en un espacio V con producto interno es ortonormal si cada vector es unitario y cada par de vectores en S es ortogonal.
(b) Si un conjunto S de vectores diferentes de cero es un espacio V con producto interno, entonces S es linealmente independiente.

Conjuntos ortonormales en P_2 En los ejercicios 59 a 64, sean $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x$ y $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ vectores en P con $\langle p, q\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$. Determine si los polinomios de segundo grado dados forman un conjunto ortonormal y, en caso negativo, aplique el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt para formar un conjunto ortonormal.

59. $\left\{\dfrac{x^2+1}{\sqrt{2}}, \dfrac{x^2+x-1}{\sqrt{3}}\right\}$

60. $\left\{\sqrt{2}(x^2-1), \sqrt{2}(x^2+x+2)\right\}$

61. $\{x^2, x^2+2x, x^2+2x+1\}$ **62.** $\{1, x, x^2\}$

63. $\left\{\dfrac{3x^2+4x}{5}, \dfrac{-4x^2+3x}{5}, 1\right\}$ **64.** $\{x^2-1, x-1\}$

65. Demostración Sea $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ una base ortonormal para R^n. Demuestre que

$$\|\mathbf{v}\|^2 = |\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_1|^2 + |\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_2|^2 + \cdots + |\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_n|^2$$

para cualquier vector $\mathbf{v}$ en R^n. Esta ecuación se denomina **igualdad de Parseval**.

66. Demostración guiada Demuestre que si $\mathbf{w}$ es ortogonal para cada vector en $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, entonces $\mathbf{w}$ es ortogonal para toda combinación lineal de vectores en S.

Inicio: para demostrar que $\mathbf{w}$ es ortogonal a toda combinación lineal de vectores en S, usted necesita demostrar que su producto punto es cero.

(i) Escriba $\mathbf{v}$ como una combinación lineal de vectores, con escalares arbitrarios $c_1, \ldots, c_n$ en S.
(ii) Forme el producto interno de $\mathbf{w}$ y $\mathbf{v}$.
(iii) Use las propiedades del producto interno para reescribir el producto interno $\langle\mathbf{w}, \mathbf{v}\rangle$ como una combinación lineal de los productos internos $\langle\mathbf{w}, \mathbf{v}_i\rangle$, $i = 1, \ldots, n$.
(iv) Use el hecho de que $\mathbf{w}$ es ortogonal a cada vector en s para llegar a la conclusión de que $\mathbf{w}$ es ortogonal a $\mathbf{v}$.

67. Demostración Sea P una matriz de $n \times n$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes.
(a) $P^{-1} = P^T$. (La cual se llama *matriz ortogonal*.)
(b) Los vectores renglón de P forman una base ortonormal para R^n.
(c) Los vectores columna de P forman una base ortonormal para R^n.

68. Demostración Sea W un subespacio de R^n. demuestre que la intersección de W y $W^\perp$ es $\{0\}$, donde $W^\perp$ es el subespacio de R^n dado por

$W^\perp = \{\mathbf{v}: \mathbf{w}\cdot\mathbf{v} = 0$ para cada $\mathbf{w}$ en $W\}$.

Subespacios fundamentales En los ejercicios 69 a 70, encuentre las bases para los cuatro **subespacios fundamentales** de la matriz A mostrada abajo.

$N(A)$ = espacio nulo de A $N(A^T)$ = espacio nulo de A^T
$R(A)$ = espacio columna de A $R(A^T)^\perp$ = espacio columna de A^T

Después, demuestre que $N(A) = R(A^T)^\perp$ y $N(A^T) = R(A)^\perp$.

69. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ **70.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

71. Sea A una matriz general de $m \times n$.
(a) Explique por qué $R(A^T)$ es lo mismo que un espacio renglón de A.
(b) Demuestre que $N(A) \subset R(A^T)^\perp$.
(c) Demuestre que $N(A) = R(A^T)^\perp$.
(d) Demuestre que $N(A^T) = R(A)^\perp$.

72. Determine una base ortonormal para R^4 que incluya los vectores

$$\mathbf{v}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

5.4 Modelos matemáticos y análisis por mínimos cuadrados

- Definir el problema de mínimos cuadrados.
- Encontrar el complemento ortogonal de un subespacio y la proyección de un vector sobre un subespacio.
- Encontrar los cuatro subespacios fundamentales de una matriz.
- Resolver un problema de mínimos cuadrados.
- Use mínimos cuadrados para modelación matemática.

EL PROBLEMA DE MÍNIMOS CUADRADOS

En esta sección, estudiará los sistemas *inconsistentes* de ecuaciones lineales y aprenderá cómo encontrar la "mejor solución posible" para tales sistemas. La necesidad de "resolver" sistemas inconsistentes surge al calcular rectas de regresión por mínimos cuadrados, como se ilustra en el ejemplo 1.

EJEMPLO 1 Recta de regresión por mínimos cuadrados

Sean (1, 0), (2, 1) y (3, 3) tres puntos en el plano, como se muestra en la figura 5.22. ¿Cómo puede encontrar la recta $y = c_0 + c_1x$ que "mejor ajusta" estos puntos? Una forma es observando que si los tres puntos son colineales, entonces el siguiente sistema de ecuaciones será consistente.

$$\begin{aligned} c_0 + c_1 &= 0 \\ c_0 + 2c_1 &= 1 \\ c_0 + 3c_1 &= 3 \end{aligned}$$

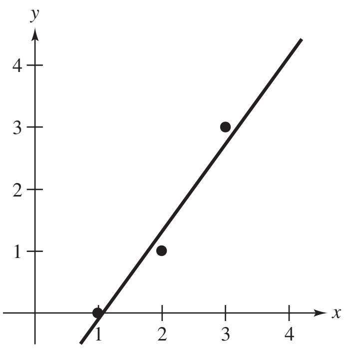


Figura 5.22

Este sistema puede escribirse en la forma matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix}.$$

Sin embargo, debido a que los puntos no son colineales, el sistema es inconsistente. Aunque esto hace imposible encontrar un $\mathbf{x}$ tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, usted puede buscar un $\mathbf{x}$ que *minimice* la norma del error $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$. La solución $\mathbf{x} = [c_0 \quad c_1]^T$ de este problema de minimización se denomina **recta de regresión por mínimos cuadrados** $y = c_0 + c_1x$.

En la sección 2.5 estudió brevemente la recta de regresión por mínimos cuadrados y cómo calcularla usando matrices. Ahora puede combinar las ideas de ortogonalidad y proyección para desarrollar este concepto de manera más general. Para empezar, considere el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde A es una matriz de $m \times n$ y $\mathbf{b}$ es un vector columna en R^m. Usted también sabe cómo usar la eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás para resolver para $\mathbf{x}$ si el sistema es consistente. Si el sistema es inconsistente, sin embargo, esto es útil para encontrar la "mejor solución posible"; es decir, el valor de $\mathbf{x}$ para el cual la diferencia entre $A\mathbf{x}$ y $\mathbf{b}$ es mínima. Una forma de definir "mejor posible" requiere que la norma $A\mathbf{x} - \mathbf{b}$ sea minimizada. Esta definición es el corazón del **problema de mínimos cuadrados**.

COMENTARIO

El término **mínimos cuadrados** proviene del hecho de que minimizar $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ equivale a minimizar $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2$, que es una suma de cuadrados.

Problema de mínimos cuadrados

Dada una matriz a de $m \times n$ y un vector $\mathbf{b}$ en R^m, el **problema de mínimos cuadrados** es encontrar un $\mathbf{x}$ en R^n tal que $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2$ sea mínima.

SUBESPACIOS ORTOGONALES

Para resolver el problema de mínimos cuadrados, primero debe desarrollar el concepto de subespacios **ortogonales**. Dos subespacios de R^n se denominan **ortogonales** si los vectores de un subespacio son ortogonales con los del otro.

Definición de subespacios ortogonales

Los subespacios s_1 y s_2 de R^n son **ortogonales** si $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ para todo $\mathbf{v}_1$ en s_1 y todo $\mathbf{v}_2$ en S_2.

EJEMPLO 2 Subespacios ortogonales

Los subespacios

$$S_1 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right) \quad \text{y} \quad S_2 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}\right)$$

son ortogonales debido a que el producto punto de todo vector en S_1 y cualquier vector en S_2 es cero.

Observe en el ejemplo 2 que el vector cero es el único vector común a S_1 y S_2. Esto es cierto en general. Si S_1 y S_2 son subespacios ortogonales de R^n, entonces su intersección consta solamente del vector cero. Se le pide demostrar este hecho en el ejercicio 43.

Siempre que S sea un subespacio de R^n, el conjunto de todos los vectores ortogonales a todo vector en S se denomina **complemento ortogonal** de S, como se muestra en la siguiente definición.

Definición de complemento ortogonal

Si S es un subespacio de R^n, entonces el **complemento ortogonal de S** es el conjunto $S^\perp = \{\mathbf{u} \in R^n : \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ para todos los vectores } \mathbf{v} \in S\}$.

El complemento ortogonal para el subespacio trivial $\{\mathbf{0}\}$ es todo R^n y, de manera inversa, el complemento ortogonal de R^n es el subespacio trivial $\{\mathbf{0}\}$. En el ejemplo 2, el subespacio S_1 es el complemento ortogonal de S_2, y el subespacio S_2 es el complemento ortogonal de S_1. En general, el complemento ortogonal de un subespacio de R^n es el mismo subespacio de R^n (véase el ejercicio 44). Usted puede encontrar el complemento ortogonal de un subespacio de R^n determinando el espacio nulo de una matriz, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

El problema de mínimos cuadrados tiene una amplia variedad de aplicaciones en la vida real. Para ilustrar, en los Ejemplos 9 y 10 y los Ejercicios 37, 38 y 39, usted usará análisis por mínimos cuadrados para resolver problemas que implican muy diversos temas, como población mundial, astronomía, títulos doctorales entregados, ganancias de la General Dynamics Corporation y la velocidad de galope de animales. En cada una de estas aplicaciones se le presentará un conjunto de datos y se le pedirá que elabore modelo(s) matemático(s) para los datos. Por ejemplo, en el ejercicio 38 encontrará las ganancias anuales de 2005 a 2010 de la General Dynamics Corporation, y se le pedirá encontrar la regresión cuadrática por mínimos cuadrados y polinomios cúbicos para los datos. Con estos modelos, se le pide predecir las ganancias para el año 2015 y decidir cuál de los modelos parece más preciso para predecir ganancias futuras.

Loskutnikov/Shutterstock.com

EJEMPLO 3 Obtención del complemento ortogonal

Obtenga el complemento ortogonal del subespacio S en R^4 sobre los dos vectores columna $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ de la matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\qquad\quad \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2$$

SOLUCIÓN

Un vector $\mathbf{u} \in R^4$ será el complemento ortogonal de s si su producto punto con las dos columnas de a, $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, es cero. Si obtiene la transpuesta de A, entonces verá que el complemento ortogonal de S consta de todos los vectores $\mathbf{u}$ tales que $A^T\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

$$A^T\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esto es, el complemento ortogonal de S es el espacio nulo de la matriz A^T:

$$S^{\perp} = N(A^T).$$

Usando las técnicas para resolver sistemas lineales homogéneos puede encontrar una posible base para el complemento ortogonal que puede constar de dos vectores

$$\mathbf{u}_1 = [-2 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_2 = [-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T.$$

Observe que R^4 en el ejemplo 3 se divide en dos subespacios, $S = \text{gen}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ y $S^{\perp} = \text{gen}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$. De hecho, los cuatro vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ forman una base de R^4. Cada vector en R^4 puede ser escrito *únicamente* como la suma de un vector de S y un vector de $S^{\perp}$. Este concepto se generaliza en la siguiente definición.

Definición de suma directa

Sean s y s dos subespacios de R^n. Si cada vector $\mathbf{x} \in R^4$ puede escribirse únicamente como una suma de un vector $\mathbf{s}_1$ de S_1 y un vector $\mathbf{s}_2$ de S_2, $\mathbf{x} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$, entonces R es la **suma directa** de S_1 y S_2 y puede escribirla como $R^n = S_1 \oplus S_2$.

EJEMPLO 4 Suma directa

a. Del ejemplo 2, puede observar que R^3 es la suma directa de los subespacios

$$S_1 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \quad \text{y} \quad S_2 = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right).$$

b. Del ejemplo 3, puede observar que $R^4 = S_1 \oplus S_2$, donde

$$S = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \quad \text{y} \quad S^{\perp} = \text{gen}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right).$$

El siguiente teorema reúne algunos hechos importantes acerca de los complementos ortogonales y las sumas directas.

TEOREMA 5.13 Propiedades de los subespacios ortogonales

Sea S un subespacio de R^n. Entonces las siguientes propiedades se cumplen.

1. $\dim(S) + \dim(S^\perp) = n$
2. $R^n = S \oplus S^\perp$
3. $(S^\perp)^\perp = S$

DEMOSTRACIÓN

1. Si $S = R^n$ o $S = \{\mathbf{0}\}$, entonces la propiedad 1 es trivial. Así, sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_t\}$ una base de s, $0 < t < n$. Sea a la matriz de $m \times n$ cuyas columnas son los vectores base $\mathbf{v}_i$. Entonces $S = R(A)$ (el espacio columna de A), lo que implica que $S^\perp = N(A^T)$, donde A^T es una matriz $t \times n$ de rango t (véase la sección 5.3, ejercicio 71). Como la dimensión de $N(A^T)$ es $n - t$, usted tiene que demostrar que

$$\dim(S) + \dim(S^\perp) = t + (n - t) = n.$$

2. Si $S = R^n$ o $S = \{\mathbf{0}\}$, entonces la propiedad 2 es trivial. Así, sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_t\}$ una base de s y sea $\{\mathbf{v}_{t+1}, \mathbf{v}_{t+2}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base de s . Puede demostrarse que el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_t, \mathbf{v}_{t+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es linealmente independiente y forma una base para R^n. Sea $\mathbf{x} \in R^n$, $\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_t\mathbf{v}_t + c_{t+1}\mathbf{v}_{t+1} + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$. Si escribe $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_t\mathbf{v}_t$ y $\mathbf{w} = c_{t+1}\mathbf{v}_{t+1} + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$, entonces puede expresar un vector arbitrario $\mathbf{x}$ como la suma de un vector de S y un vector de $S^\perp$, $\mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$.

Para demostrar que esta representación es única, suponga $\mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{w} = \hat{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{w}}$ (donde $\hat{\mathbf{v}}$ está en S y $\hat{\mathbf{w}}$ está en $S^\perp$). Esto implica que $\hat{\mathbf{v}} - \mathbf{v} = \mathbf{w} - \hat{\mathbf{w}}$; así, los dos vectores $\hat{\mathbf{v}} - \mathbf{v}$ y $\mathbf{w} - \hat{\mathbf{w}}$ están en S y $S^\perp$. Como $S \cap S^\perp = \{\mathbf{0}\}$, usted debe tener $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}$ y $\mathbf{w} = \hat{\mathbf{w}}$.

3. Sea $\mathbf{v} \in S$. Entonces $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$ para toda $\mathbf{u} \in S^\perp$, lo que implica que $\mathbf{u} \in (S^\perp)^\perp$. Por otra parte, si $\mathbf{v} \in (S^\perp)^\perp$, entonces, como $R^n = S \oplus S^\perp$, usted puede escribir $\mathbf{v}$ como la suma única del vector de S y de un vector de $S^\perp$, $\mathbf{v} = \mathbf{s} + \mathbf{w}$, $\mathbf{s} \in S$, $\mathbf{w} \in S^\perp$. Como $\mathbf{w}$ está en $S^\perp$, es ortogonal a todo vector en S y en particular a $\mathbf{v}$. Así,

$$0 = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{s} + \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}.$$

Esto implica que $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{s} + \mathbf{w} = \mathbf{s} \in S$.

En la sección 5.2, usted estudió la proyección de un vector sobre otro. Ahora generalizará las proyecciones de un vector $\mathbf{v}$ sobre un subespacio S. Como $R^n = S \oplus S^\perp$, todo vector $\mathbf{v}$ en R^n puede ser escrito únicamente como la suma de un vector de S y un vector de $S^\perp$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{v}_1 \in S, \quad \mathbf{v}_2 \in S^\perp.$$

El vector $\mathbf{v}_1$ se llama **proyección** de $\mathbf{v}$ sobre el subespacio S y se denota por $\mathbf{v}_1 = \text{proy}_s\mathbf{v}$. Así, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v} - \mathbf{v}_1 = \mathbf{v} - \text{proy}_s\mathbf{v}$, lo que implica que el vector $\mathbf{v} - \text{proy}_s\mathbf{v}$ es ortogonal al subespacio S.

Siempre que se trate con un subespacio S de R^n, puede utilizar el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt para calcular una base ortonormal de S. Esta es relativamente más fácil de calcular la proyección de un vector $\mathbf{v}$ sobre S usando el siguiente teorema. (Se le pedirá demostrarlo en el ejercicio 45.)

TEOREMA 5.14 Proyección sobre un subespacio

Si $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_t\}$ es una base ortonormal del subespacio S de R^n y $\mathbf{v} \in R^n$, entonces

$$\text{proy}_S\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t)\mathbf{u}_t.$$

EJEMPLO 5 Proyección sobre un subespacio

Encuentre la proyección del vector $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}$ sobre el subespacio S de R^3 generado por los vectores

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix}0\\3\\1\end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN

Por normalización de $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$, obtenemos una base ortonormal de S.

$$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{w}_1, \frac{1}{2}\mathbf{w}_2\right\} = \left\{\begin{bmatrix}0\\ \frac{3}{\sqrt{10}}\\ \frac{1}{\sqrt{10}}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$$

Aplique el teorema 5.14 para encontrar la proyección de $\mathbf{v}$ sobre S.

$$\begin{aligned}\text{proy}_S\mathbf{v} &= (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2\\ &= \frac{6}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}0\\ \frac{3}{\sqrt{10}}\\ \frac{1}{\sqrt{10}}\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ \frac{9}{5}\\ \frac{3}{5}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

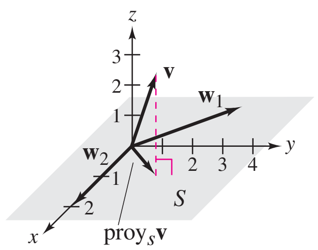


Figura 5.23

La proyección de $\mathbf{v}$ sobre el plano de S se ilustra en la figura 5.23.

El teorema 5.9 dice que entre todos los múltiplos escalares de un vector $\mathbf{u}$, la proyección ortogonal de $\mathbf{v}$ sobre $\mathbf{u}$ es la única y más cercana a $\mathbf{v}$. El ejemplo 5 sugiere que esta propiedad también es cierta para proyecciones sobre subespacios, es decir, entre todos los vectores del subespacio S, la proyección vectorial $\text{proy}_s\mathbf{v}$ es el vector más cercano a $\mathbf{v}$. Estos dos resultados se ilustran en la figura 5.24.

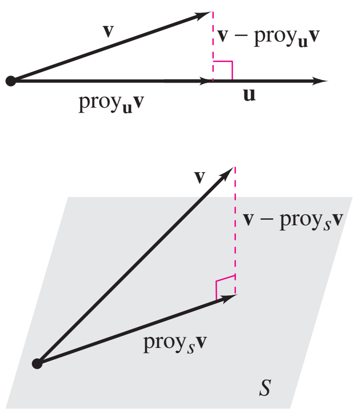


Figura 5.24

TEOREMA 5.15 Orthogonal Projection and Distance

Sea S un subespacio de R^n y sea $\mathbf{v} \in R^n$. Entonces, para todo $\mathbf{u} \in s$, $\mathbf{u} \neq \text{proy}_s\mathbf{v}$,

$$\|\mathbf{v} - \text{proy}_S\mathbf{v}\| < \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|.$$

DEMOSTRACIÓN

Sea $\mathbf{u} \in S$, $\mathbf{u} \neq \text{proy}_s\mathbf{v}$. Sumando y restando la misma cantidad $\text{proy}_s\mathbf{v}$ y al vector $\mathbf{v} - \mathbf{u}$, tenemos

$$\mathbf{v} - \mathbf{u} = (\mathbf{v} - \text{proy}_S\mathbf{v}) + (\text{proy}_S\mathbf{v} - \mathbf{u}).$$

Observe que $(\text{proy}_s\mathbf{v} - \mathbf{u})$ está en S y $(\mathbf{v} - \text{proy}_s\mathbf{v})$ es ortogonal a S. Así, $(\mathbf{v} - \text{proy}_s\mathbf{v})$ y $(\text{proy}_s\mathbf{v} - \mathbf{u})$ son vectores ortogonales y puede utilizar el teorema de Pitágoras (teorema 5.6) para obtener

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{v} - \text{proy}_S\mathbf{v}\|^2 + \|\text{proy}_S\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2.$$

Puesto que $\mathbf{u} \neq \text{proy}_s\mathbf{v}$, el segundo término del lado derecho es positivo y tenemos que

$$\|\mathbf{v} - \text{proy}_S\mathbf{v}\| < \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|.$$

SUBESPACIOS FUNDAMENTALES DE UNA MATRIZ

Recuerde que si A es una matriz de $m \times n$, el espacio columna de A es un subespacio de R^m que consta de todos los vectores de la forma $A\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in R^n$. Los cuatro **subespacios fundamentales** de la matriz A están definidos de la siguiente manera (véanse ejercicios 69 y 70 en la sección 5.3).

$$\begin{array}{ll} N(A) = \text{espacio nulo de } A & N(A^T) = \text{espacio nulo de } A^T \\ R(A) = \text{espacio columna de } A & R(A^T) = \text{espacio columna de } A^T \end{array}$$

Estos subespacios juegan un papel crucial en la solución del problema de mínimos cuadrados.

EJEMPLO 6 Espacios fundamentales

Encuentre los cuatro subespacios fundamentales de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN

El espacio columna de A es simplemente el espacio de la primera y tercera columnas, ya que la segunda columna es un múltiplo escalar de la primera. El espacio columna de A^T equivale al espacio renglón de A, el cual es compartido por los dos primeros renglones. El espacio nulo de A es un espacio solución del sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Finalmente, el espacio nulo de A^T es un espacio solución del sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes es A^T. Lo siguiente resume estos resultados.

$$R(A) = \text{Gen}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \qquad R(A^T) = \text{Gen}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$N(A) = \text{Gen}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \qquad N(A^T) = \text{Gen}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

En el ejemplo 6, observe que $R(A)$ y $N(A^T)$ son subespacios ortogonales de R^4 y $R(A^T)$ y $N(A)$ son subespacios ortogonales de R^3. Éstas y otras propiedades de estos subespacios se establecen en el siguiente teorema.

TEOREMA 5.16 Subespacios fundamentales de una matriz

Si A es una matriz de $m \times n$, entonces

1. $R(A)$ y $N(A^T)$ son subespacios ortogonales de R^m.
2. $R(A^T)$ y $N(A)$ son subespacios ortogonales de R^n.
3. $R(A) \oplus N(A^T) = R^m$.
4. $R(A^T) \oplus N(A) = R^n$.

DEMOSTRACIÓN

Para demostrar la propiedad 1, sea $\mathbf{v} \in R(A)$ y $\mathbf{u} \in N(A^T)$. Como el espacio columna de A es igual al espacio renglón de A^T, puede ver que $A^T\mathbf{u} = \mathbf{0}$ implica $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$. La propiedad 2 se obtiene al aplicar la propiedad 1 a A^T.

Para demostrar la propiedad 3, observe que $R(A)^{\perp} = N(A^T)$. Así, $R^m = R(A) \oplus R(A)^{\perp} = R(A) \oplus N(A^T)$ De manera similar podemos aplicarlo a $R(A^T)$ probando la propiedad 4.

RESOLVIENDO EL PROBLEMA DE MÍNIMOS CUADRADOS

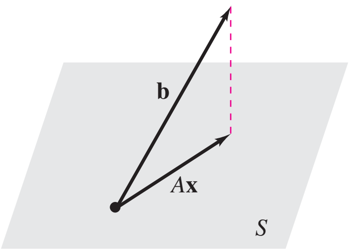


Figura 5.25

Ahora cuenta con todas las herramientas necesarias para resolver el problema de mínimos cuadrados. Recuerde que se trata de encontrar un vector **x** que minimice $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$, donde a es una matriz de $m \times n$ y **b** es un vector en R^m. Sea S el espacio columna de A: $S = R(A)$. Puede suponer que **b** no está en S, debido además a que el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ puede ser consistente. Usted busca un vector $A\mathbf{x}$ en s tal que esté lo más cercano posible a **b**, como se indica en la figura 5.25.

Del teorema 5.15, sabe que el vector deseado es la proyección de **b** sobre S. Haciendo que $A\mathbf{x} = \text{proy}_s\mathbf{b}$ se la proyección, puede ver que $A\mathbf{x} - \mathbf{b} = \text{proy}_s\mathbf{b} - \mathbf{b}$ es ortogonal a $S = R(A)$, pero esto implica que $A\mathbf{x} - \mathbf{b}$ está en $R(A)^{\perp}$, lo que es igual a $N(A^T)$ de acuerdo con el teorema 5.16. Ésta es una observación crucial: $A\mathbf{x} - \mathbf{b}$ está en el espacio nulo de A^T. Así, tenemos

$$\begin{aligned} A^T(A\mathbf{x} - \mathbf{b}) &= \mathbf{0} \\ A^TA\mathbf{x} - A^T\mathbf{b} &= \mathbf{0} \\ A^TA\mathbf{x} &= A^T\mathbf{b}. \end{aligned}$$

La solución al problema de mínimos cuadrados proviene de resolver un sistema lineal de ecuaciones $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$ de $m \times n$. Estas ecuaciones se denominan **ecuaciones normales** del problema de mínimos cuadrados $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

EJEMPLO 7 Resolución de las ecuaciones normales

Encuentre la solución del problema de mínimos cuadrados

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

presentado en el ejemplo 1.

SOLUCIÓN

Comience calculando los productos matriciales mostrados a continuación.

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix}$$

$$A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones normales son

$$A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

La solución al sistema de ecuaciones es

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

lo que implica que la recta de regresión por mínimos cuadrados para los datos es

$$y = \tfrac{3}{2}x - \tfrac{5}{3}$$

como se indica en la figura 5.26.

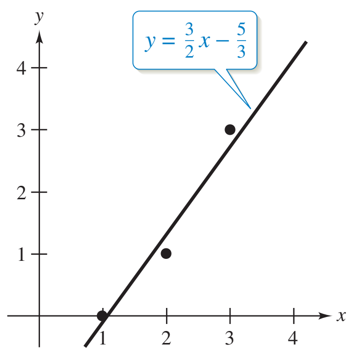


Figura 5.26

NOTA TECNOLÓGICA

Muchas aplicaciones gráficas y programas de cómputo incluyen subrutinas para determinar la recta de regresión por mínimos cuadrados para un conjunto de puntos. Si usted tiene acceso a tales herramientas, trate de verificar el resultado del ejemplo 7. Los comandos y la sintaxis de programación para estas aplicaciones/programas se proporcionan en la **Online Technology Guide**, disponible en *college.cengage.com/pic/larsonELA6e*.

Para una matriz A de $m \times n$, las ecuaciones normales forman un sistema de ecuaciones lineales de $n \times n$. Este sistema siempre es consistente, pero puede tener un número infinito de soluciones. Se puede demostrar, sin embargo, que existe una única solución si el rango de A es n.

El siguiente ejemplo ilustra cómo resolver el problema de la proyección del ejemplo 5 usando ecuaciones normales.

EJEMPLO 8 Proyección ortogonal sobre un subespacio

Encuentre la proyección ortogonal del vector

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

sobre el espacio columna S de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN

Para encontrar la proyección ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre S, primero resuelva el problema de mínimos cuadrados $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Como en el ejemplo 7, calcule los productos matriciales A^TA y $A^T\mathbf{b}$.

$$\begin{aligned} A^TA &= \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^T\mathbf{b} &= \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Las ecuaciones normales son

$$A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

la solución de estas ecuaciones es

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Finalmente, la proyección de $\mathbf{b}$ sobre S es

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{9}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

lo que concuerda con la solución obtenida en el ejemplo 5.

MODELADO MATEMÁTICO

Los problemas de mínimos cuadrados juegan un papel fundamental en el modelado matemático de fenómenos de la vida real. El siguiente ejemplo muestra cómo modelar la población mundial usando un polinomio cuadrático de mínimos cuadrados.

EJEMPLO 9 Población mundial

La tabla muestra la población de mundo (en miles de millones o millardos) de seis años. (*Fuente*: U.S. Census Bureau).

Año	1985	1990	1995	2000	2005	2010
Población (y)	4.9	5.3	5.7	6.1	6.5	6.9

Sea x el año, con $x = 5$ correspondiente a 1985. Encuentre el polinomio de regresión cuadrática de mínimos cuadrados $y = c_0 + c_1x + c_2x^2$ para estos datos y utilice el modelo para estimar la población en el año 2015.

SOLUCIÓN

Sustituyendo los puntos (5, 4.9), (10, 5.3), (15, 5.7), (20, 6.1), (25, 6.5) y (30, 6.9) en el polinomio cuadrático $y = c_0 + c_1x + c_2x^2$, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned}
c_0 + 5c_1 + 25c_2 &= 4.9\\
c_0 + 10c_1 + 100c_2 &= 5.3\\
c_0 + 15c_1 + 225c_2 &= 5.7\\
c_0 + 20c_1 + 400c_2 &= 6.1\\
c_0 + 25c_1 + 625c_2 &= 6.5\\
c_0 + 30c_1 + 900c_2 &= 6.9
\end{aligned}$$

Este genera el problema de mínimos cuadrados

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 25\\ 1 & 10 & 100\\ 1 & 15 & 225\\ 1 & 20 & 400\\ 1 & 25 & 625\\ 1 & 30 & 900 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_0\\ c_1\\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.9\\ 5.3\\ 5.7\\ 6.1\\ 6.5\\ 6.9 \end{bmatrix}.$$

Las ecuaciones normales son

$$A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 105 & 2275\\ 105 & 2275 & 55{,}125\\ 2275 & 55{,}125 & 1{,}421{,}875 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_0\\ c_1\\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35.4\\ 654.5\\ 14{,}647.5 \end{bmatrix}$$

y su solución es $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} c_0\\ c_1\\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.5\\ 0.08\\ 0 \end{bmatrix}$.

Observe que $c_2 = 0$. Así, el polinomio de mínimos cuadrados para estos datos es el polinomio lineal: $y = 4.5 + 0.08x$ Evaluando este polinomio para $x = 30$, tenemos el estimado de la población del mundo para el año 2015: $y = 4.5 + 0.08(35) = 7.3$ mil millones.

Los modelos de mínimos cuadrados pueden aparecer en muchos otros contextos. La sección 5.5 explora algunas aplicaciones de modelos de mínimos cuadrados para aproximar funciones. El siguiente ejemplo utiliza datos de la Sección 1.3 para determinar la relación entre el periodo de un planeta y su distancia media al Sol.

EJEMPLO 10 Aplicaciones en la astronomía

La tabla muestra las distancias medias x y los periodos y de los seis planetas más cercanos al Sol. Las distancias medias están dadas en unidades astronómicas y los periodos están dados en años. Encuentre un modelo para estos datos.

Planeta	*Mercurio*	*Venus*	*Tierra*	*Marte*	*Júpiter*	*Saturno*
Distancia (x)	0.387	0.723	1.000	1.524	5.203	9.555
Periodo (y)	0.241	0.615	1.000	1.881	11.860	29.420

SOLUCIÓN

Si grafica los datos como se muestran, notará que no están sobre una línea recta. Sin embargo, tomando el logaritmo de cada coordenada, obtiene puntos en la forma ($\ln x$, $\ln y$), como se muestra en la tabla.

Planeta	*Mercurio*	*Venus*	*Tierra*	*Marte*	*Júpiter*	*Saturno*
$\ln x$	-0.949	-0.324	0.0	0.421	1.649	2.257
$\ln y$	-1.423	-0.486	0.0	0.632	2.473	3.382

NOTA TECNOLÓGICA

Puede utilizar una aplicación gráfica o un programa de computación para verificar el resultado del Ejemplo 10. Por ejemplo, al usar los datos en la primer atabla y una aplicación gráfica, un programa de regresión exponencial arrojará un resultado de $y \approx 1.00008x^{1.49873}$. La **Online Technology Guide**, disponible en *college.cengage.com/pic/ larsonELA6e*.

La figura 5.27 muestra una gráfica de puntos transformados y sugiere que la recta de regresión por mínimos cuadrados puede tener un buen ajuste.

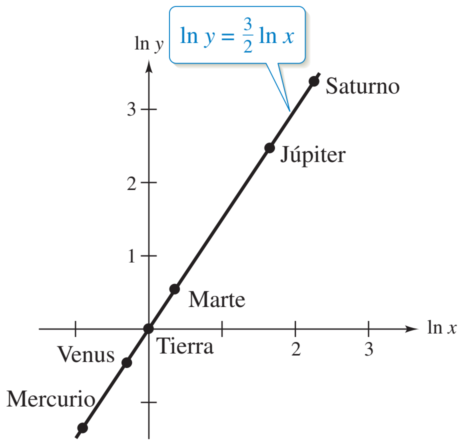


Figura 5.27

Utilizando las técnicas de esta sección,

$$\begin{aligned}
c_0 - 0.949c_1 &= -1.423\\
c_0 - 0.324c_1 &= -0.486\\
c_0 &= 0.0\\
c_0 + 0.421c_1 &= 0.632\\
c_0 + 1.649c_1 &= 2.473\\
c_0 + 2.257c_1 &= 3.382
\end{aligned}$$

usted puede encontrar que la ecuación de la recta es $\ln y = \frac{3}{2}\ln x$ o $y = x^{3/2}$.

5.4 Ejercicios

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

Recta de regresión por mínimos cuadrados En los Ejercicios 1-4, determine si los puntos son colineales. Si es así, encuentre la recta $y = c_0 + c_1x$ que concuerda con los puntos.

1. $(0, 1), (1, 3), (2, 5)$ **2.** $(0, 0), (3, 1), (4, 2)$

3. $(-1,0), (0, 1), (1, 1)$ **4.** $(-1, 5), (1, -1), (1, -4)$

Subespacios ortogonales En los ejercicios 5 a 8, determine cuál de los conjuntos es ortogonal.

5. $S_1 = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 2\\1\\-1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\1\\1 \end{bmatrix}\right\}$ $S_2 = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} -1\\2\\0 \end{bmatrix}\right\}$

6. $S_1 = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} -3\\0\\1 \end{bmatrix}\right\}$ $S_2 = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 2\\1\\6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\1\\0 \end{bmatrix}\right\}$

7. $S_1 = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{bmatrix}\right\}$ $S_2 = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} -1\\1\\-1\\1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\2\\-2\\0 \end{bmatrix}\right\}$

8. $S_1 = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 0\\0\\2\\1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\0\\1\\-2 \end{bmatrix}\right\}$ $S_2 = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 3\\2\\0\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\1\\-2\\2 \end{bmatrix}\right\}$

Determinación del complemento ortogonal y la suma directa En los ejercicios 9 a 12, encuentre el complemento ortogonal $S^{\perp}$. y (b) encuentre la suma directa $S \oplus S^{\perp}$.

9. S es el subespacio de R^3 que consta del plano xz.

10. S es el subespacio de R^5 que consta de todos los vectores cuyos tercer y cuarto componentes son cero.

11. $S = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 1\\2\\0\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\1\\0\\1 \end{bmatrix}\right\}$ **12.** $S = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 0\\1\\-1\\1 \end{bmatrix}\right\}$

13. Encuentre el complemento ortogonal de la solución al ejercicio 11 (a).

14. Encuentre el complemento ortogonal de la solución al ejercicio 12(a).

Proyección sobre un subespacio En los ejercicios 15 a 18, encuentre la proyección del vector **v** sobre el subespacio S.

15. $S = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 0\\0\\-1\\1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\1\\1\\1 \end{bmatrix}\right\}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1\\0\\1\\1 \end{bmatrix}$

16. $S = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} -1\\2\\0\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\0\\1\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\1 \end{bmatrix}\right\}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{bmatrix}$

17. $S = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 1\\0\\1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\1\\1 \end{bmatrix}\right\}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2\\3\\4 \end{bmatrix}$

18. $S = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\1\\-1\\0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0\\1\\1\\0 \end{bmatrix}\right\}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1\\2\\3\\4 \end{bmatrix}$

Subespacios fundamentales En los ejercicios 19 a 22, encuentre las bases para los cuatro subespacios fundamentales de la matriz A.

19. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **20.** $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

21. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

22. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Determinación de solución de mínimos cuadrados En los ejercicios 23 a 26, encuentre la solución por mínimos cuadrados del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

23. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1\\ 1 & 2\\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2\\0\\-3 \end{bmatrix}$

24. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2\\1\\0\\2 \end{bmatrix}$

25. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4\\-1\\0\\1 \end{bmatrix}$

26. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1\\0\\1\\-1\\0 \end{bmatrix}$

Proyección ortogonal sobre un subespacio En los Ejercicios 27 y 28, use el método del ejemplo 8 para encontrar la proyección ortogonal de $\mathbf{b} = [2\ \ -2\ \ 1]^T$ sobre el espacio columna de la matriz A.

27. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **28.** $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

Determinación de la recta de regresión por mínimos cuadrados En los ejercicios 29 a 32, encuentre la recta de regresión por mínimos cuadrados para los puntos dados. Grafique los puntos y la recta en el mismo grupo de ejes.

29. $(-1, 1), (1, 0), (3, -3)$

30. $(1, 1), (2, 3), (4, 5)$

31. $(-2, 1), (-1, 2), (0, 1), (1, 2), (2, 1)$

32. $(-2, 0), (-1, 2), (0, 3), (1, 5), (2, 6)$

Determinación del polinomio cuadrático de mínimos cuadrados En los ejercicios 33 a 36, encuentre el polinomio cuadrático de mínimos cuadrados para los datos dados.

33. $(0, 0), (2, 2), (3, 6), (4, 12)$

34. $(0, 2), \left(1, \frac{3}{2}\right), \left(2, \frac{5}{2}\right), (3, 4)$

35. $(-2, 0), (-1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 5)$

36. $(-2, 6), (-1, 5), \left(0, \frac{7}{2}\right), (1, 2), (2, -1)$

37. Títulos doctorales La tabla muestra el número de títulos doctorales y (en miles) otorgados en los Estados Unidos entre 2005 a 2008. Encuentre la recta de regresión por mínimos cuadrados para los datos. Después use el modelo para predecir el número de títulos que serán entregados en 2015. Sea t el año, con $t = 5$ correspondiente a 2005. (Fuente: U.S. National Center for Education Statistics)

Año	2005	2006	2007	2008
Doctorados, y	52.6	56.1	60.6	63.7

38. Ganancias La tabla muestra las ganancias netas y (en miles de millones de dólares) de General Dynamics Corporación desde el año 2005 hasta el año 2010. Encuentre la recta de regresión cuadrática por mínimos cuadrados y el polinomio cúbico de regresión para los datos dados. Después use el modelo para predecir las ganancias en 2015. Sea t el año, con $t = 5$ correspondiente a 2005. ¿Qué modelo parece más preciso para predecir ganancias futuras? Explique (Fuente: General Dynamics Corporation.)

Año	2005	2006	2007
Ganancias, y	21.2	24.1	27.2

Año	2008	2009	2010
Ganancias, y	29.3	32.0	32.5

39. Velocidad de galope de animales Los cuadrúpedos corren con dos tipos diferentes de movimiento: trote y galope. Un animal que trota tiene al menos una pata en el suelo en todo momento, mientras que un animal que galopa separa las cuatro patas del suelo en algún punto de la zancada. El número de zancadas por minuto al que un animal despunta del trote al galope depende del peso del animal. Use la tabla y el método del Ejemplo 10 para encontrar una ecuación que relacione el peso x de un animal (en libras) y su velocidad más baja de galope y (en zancadas por minuto).

Peso, x	25	35	50
Velocidad de galope, y	191.5	182.7	173.8

Peso, x	75	500	1000
Velocidad de galope, y	164.2	125.9	114.2

40. REMATE Explique cómo se usan la ortogonalidad, los complementos ortogonales, la proyección de un vector y los subespacios fundamentales para encontrar la solución de un problema de mínimos cuadrados.

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 41 y 42, determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, proporcione una razón o cite una expresión adecuada del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que muestre que la expresión no es cierta en todos los casos o cite del texto una expresión adecuada.

41. (a) El complemento ortogonal de R^n es el conjunto vacío.

(b) Si cada vector $\mathbf{v} \in R^n$ puede escribirse únicamente como una suma de un vector $\mathbf{s}_1$ de S_1 y un vector $\mathbf{s}_2$ de S_2, entonces R^n se denomina suma directa de S_1 y S_2.

42. (a) Si A es una matriz de $m \times n$, entonces $R(A)$ y $N(A^T)$ son subespacios ortogonales de R^n.

(b) El conjunto de todos los vectores ortogonales a todo vector en un subespacio S se denomina complemento ortogonal de S.

(c) Dada una matriz a de $m \times n$ y un vector $\mathbf{b}$ en R^m, el problema de mínimos cuadrados es encontrar $\mathbf{x}$ en R^n tal que $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2$ sea mínimo.

43. Prueba Demuestre que si S_1 y S_2 son subespacios ortogonales de R^n, entonces su intersección consta sólo del vector cero.

44. Prueba Demuestre que el complemento ortogonal de un subespacio R^n es el mismo subespacio de R^n.

45. Prueba Demuestre el teorema 5.4.

46. Prueba Demuestre que si S_1 y S_2 son subespacios de R^n y si $R^n = S_1 \oplus S_2$, entonces $S_1 \cap S_2 = \{0\}$.

5.5 Aplicaciones de los espacios con producto interno

- Encontrar el producto cruz de dos vectores en R^3.
- Encontrar la aproximación lineal o cuadrática por mínimos cuadrados de una función.
- Encontrar la aproximación de Fourier de n-ésimo orden de una función.

EL PRODUCTO CRUZ DE DOS VECTORES EN R^3

Aquí se considerará un producto vectorial con el que se puede obtener un vector en R^3 ortogonal a otros dos vectores dados. Este vector se denomina **producto cruz** y, por conveniencia, se define y calcula con vectores expresados en forma de vector unitario estándar como sigue.

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}.$$

COMENTARIO

El producto cruz se define solamente para vectores en R^3. No se define el producto cruz de dos vectores en R^2 o dos vectores en R^n, $n \neq 3$.

Definición del producto cruz de dos vectores

Sea $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ vectores en R^3. El producto cruz de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es el vector

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}.$$

Un método conveniente para recordar la fórmula del producto cruz $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es usar la siguiente forma de determinante.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \longleftarrow \text{Componentes de } \mathbf{u} \\ \longleftarrow \text{Componentes de } \mathbf{v} \end{array}$$

Técnicamente, lo anterior no es un determinante porque no todos los elementos son números reales. A pesar de ello, es de utilidad porque proporciona una manera fácil para recordar la fórmula del producto cruz. Al desarrollar por cofactores el primer renglón se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\mathbf{k} \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}\end{aligned}$$

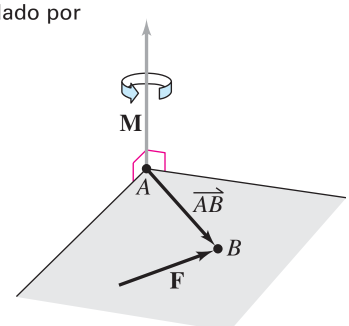
que produce la fórmula dada en la definición. Asegúrese de observar que la componente $\mathbf{j}$ esté precedida por un signo menos.

ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

En física, el producto cruz puede usarse para medir la rotación, el momento **M** de una fuerza **F** respecto a un punto A, como se muestra en la figura siguiente. Cuando el punto de aplicación de la fuerza es B, el momento de **F** respecto a A está dado por

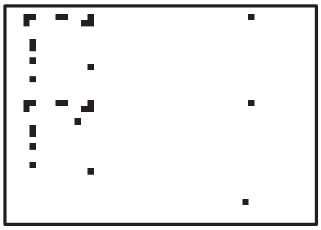
$$\mathbf{M} = \overrightarrow{AB} \times \mathbf{F}$$

donde $\overrightarrow{AB}$ representa al vector cuyo punto inicial es A y cuyo punto terminal es B. La magnitud del momento **M** mide la tendencia de $\overrightarrow{AB}$ para rotar en sentido contrario a las manecillas del reloj respecto a un eje dirigido a lo largo del vector **M**.



NOTA TECNOLÓGICA

Muchas aplicaciones gráficas y programas pueden encontrar un producto cruz. Por ejemplo, si usted usa una aplicación gráfica para verificar el resultado del Ejemplo 1(b), verá algo similar a lo siguiente.



Simulación

Para explorar mejor este concepto con un simulador electrónico y para los comandos y la sintaxis de programación para estas aplicaciones específicas y programas de cómputo relativos al ejemplo 1, por favor visite college. cengage.com/pic/larsonELA6e. Ejercicios y proyectos similares también están disponibles en este sitio

EJEMPLO 1 Determinación del producto cruz de dos vectores

Dados $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. Encuentre cada producto cruz.

a. $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ **b.** $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ **c.** $\mathbf{v} \times \mathbf{v}$

SOLUCIÓN

$$\textbf{a. } \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$
$$= 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$$

$$\textbf{b. } \mathbf{v} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$
$$= -3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$$

Observe que este resultado es el negativo del resultado del inciso (a).

$$\textbf{c. } \mathbf{v} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$
$$= 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

Los resultados del ejemplo 1 sugieren algunas propiedades *algebraicas* interesantes del producto cruz. Por ejemplo,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u}) \quad \text{y} \quad \mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Estas propiedades, junto con otras, se dan en el siguiente teorema.

TEOREMA 5.17 Propiedades algebraicas del producto cruz

Si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores en R^3 y c es un escalar, entonces las siguientes propiedades son verdaderas.

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$
2. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$
3. $c(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = c\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times c\mathbf{v}$
4. $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
5. $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
6. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$

DEMOSTRACIÓN

Se demostrará sólo la primera propiedad, dejando la demostración de las otras como ejercicio para usted. (Véanse los ejercicios 53-57.) Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}.$$

Entonces, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}\end{aligned}$$

y $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ es

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \times \mathbf{u} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} \\ &= (v_2u_3 - v_3u_2)\mathbf{i} - (v_1u_3 - v_3u_1)\mathbf{j} + (v_1u_2 - v_2u_1)\mathbf{k} \\ &= -(u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_1v_3 - u_3v_1)\mathbf{j} - (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k} \\ &= -(\mathbf{v} \times \mathbf{u}).\end{aligned}$$

La propiedad 1 del teorema 5.17 establece que los vectores $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ tienen la misma longitud pero dirección opuesta. La implicación geométrica de este resultado se analizará después de establecer algunas propiedades geométricas del producto cruz de dos vectores.

TEOREMA 5.18 Propiedades geométricas del producto cruz

Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores diferentes de cero en R^3, entonces se cumplen las siguientes propiedades.

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.
2. El ángulo θ entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ está dado por $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$ sen θ.
3. $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos si y sólo si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.
4. El paralelogramo que tiene a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ como lados adyacentes tiene un área igual a $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$.

DEMOSTRACIÓN

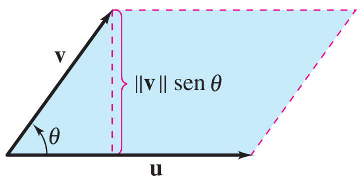


Figura 5.28

Se demuestra la propiedad 4, dejando como ejercicio para usted la demostración de las demás. (Véanse los ejercicios 58-60.) Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos lados adyacentes de un paralelogramo, como se observa en la figura 5.28. Por la propiedad 2, el área de este paralelogramo está dada por

$$\text{Área} = \overbrace{\|\mathbf{u}\|}^{\text{Base}}\,\overbrace{\|\mathbf{v}\|\,\text{sen}\,\theta}^{\text{Altura}} = \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|.$$

La propiedad 1 establece que el vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal tanto a $\mathbf{u}$ como a $\mathbf{v}$. Esto implica que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ (y $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$) es ortogonal al plano determinado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. Una forma de recordar la orientación de los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es comparándolos con los vectores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$, como se muestra en la figura 5.29. Los tres vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ forman un *sistema dextrógiro* (*de mano derecha*), mientras que los vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ forman un *sistema levógiro* (*de mano izquierda*).

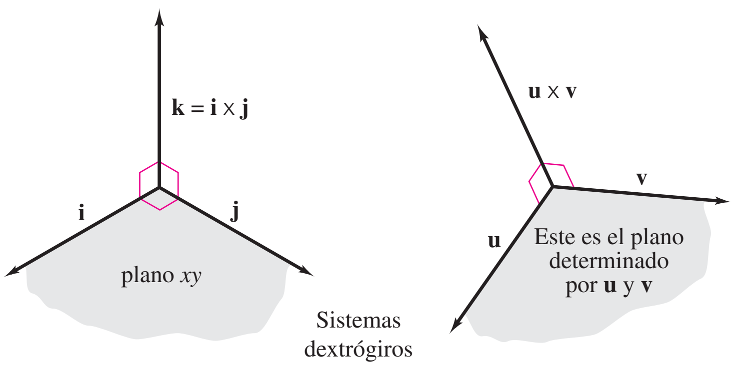


Figura 5.29

EJEMPLO 2 Determinación de un vector ortogonal a dos vectores dados

Encuentre un vector unitario que sea ortogonal tanto a

$$\mathbf{u} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}.$$

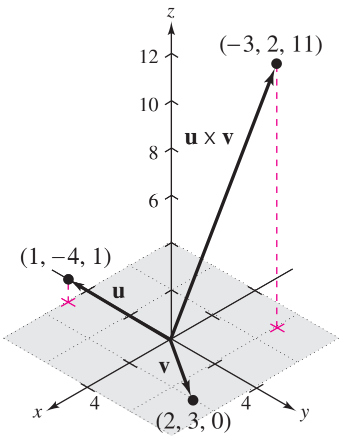


Figura 5.30

SOLUCIÓN

Por la propiedad 1 del teorema 5.18 sabemos que el producto cruz

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 11\mathbf{k}$$

es ortogonal tanto a $\mathbf{u}$ como a $\mathbf{v}$, como se observa en la figura 5.30. Luego, al dividir entre la longitud de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$,

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 11^2}$$
$$= \sqrt{134}$$

y obtenemos el vector unitario

$$\frac{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|} = -\frac{3}{\sqrt{134}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{134}}\mathbf{j} + \frac{11}{\sqrt{134}}\mathbf{k}$$

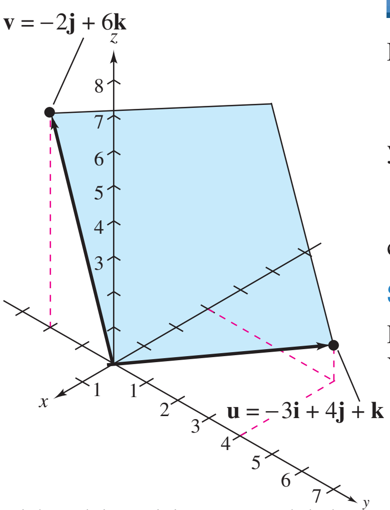
que es ortogonal tanto a $\mathbf{u}$ como a $\mathbf{v}$

$$\left(-\frac{3}{\sqrt{134}}, \frac{2}{\sqrt{134}}, \frac{11}{\sqrt{134}}\right) \cdot (1, -4, 1) = 0$$

y

$$\left(-\frac{3}{\sqrt{134}}, \frac{2}{\sqrt{134}}, \frac{11}{\sqrt{134}}\right) \cdot (2, 3, 0) = 0.$$

EJEMPLO 3 Definiendo el área de un paralelogramo



El área del paralelogramo está dada por $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \sqrt{1036}$.

Figura 5.31

Encuentre el área del paralelogramo que tiene

$$\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{v} = -2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

como lados adyacentes, tal como se observa en la figura 5.31.

SOLUCIÓN

Por la propiedad 4 del teorema 5.18 sabemos que el área de este paralelogramo es $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$. Ya que

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 26\mathbf{i} + 18\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$$

el área del paralelogramo es

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \sqrt{26^2 + 18^2 + 6^2} = \sqrt{1036} \approx 32.19 \text{ unidades cuadradas.}$$

APROXIMACIONES POR MÍNIMOS CUADRADOS (CÁLCULO)

Muchos problemas de ciencias físicas e ingeniería implican una aproximación de una función f mediante otra función g. Si f está en $C[a, b]$ (el espacio con producto interno de todas las funciones definidas sobre $[a, b]$), entonces g suele elegirse de un subespacio W de $C[a, b]$. Por ejemplo, para aproximar la función

$$f(x) = e^x, \quad 0 \le x \le 1$$

podría elegirse una de las formas siguientes para g.

1. $g(x) = a_0 + a_1x, \quad 0 \le x \le 1$ Lineal

2. $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, \quad 0 \le x \le 1$ Cuadrática

3. $g(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \operatorname{sen} x, \quad 0 \le x \le 1$ Trigonométrica

Antes de analizar métodos para determinar la función g es necesario definir cómo una función puede aproximar "mejor" otra función. Una forma natural sería requerir que el área acotada por las gráficas de f y g sobre el intervalo $[a, b]$,

$$\text{Área} = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

sea mínima con respecto a otras funciones en el subespacio W, como se observa en la figura 5.32.

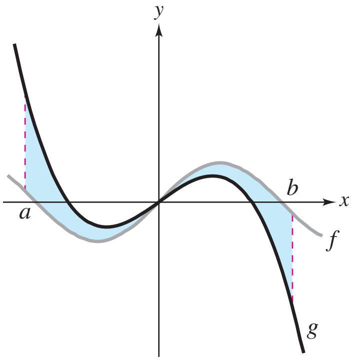


Figura 5.32

Sin embargo, como los integrandos que implican valores absolutos a menudo son difíciles de evaluar, es más común elevar al cuadrado el integrando para obtener

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]^2\, dx.$$

Con este criterio, la función g se denomina **aproximación por míninos cuadrados** de f con respecto al espacio W con producto interno.

Definición de la aproximación por mínimos cuadrados

Sea f continua sobre $[a, b]$ y sea W un subespacio de $C[a, b]$. Una función g en W se denomina **aproximación por mínimos cuadrados** de f con respecto a W si el valor de

$$I = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2\, dx$$

es mínimo con respecto a todas las demás funciones en W.

Si el subespacio W de la definición anterior es todo el espacio $C[a, b]$, entonces $g(x) = f(x)$, lo cual implica que $I = 0$.

EJEMPLO 4 Determinación de una aproximación por mínimos cuadrados

Encuentre la aproximación por mínimos cuadrados $g(x) = a_0 + a_1x$ de

$$f(x) = e^x, \quad 0 \le x \le 1.$$

SOLUCIÓN

Para esta aproximación es necesario determinar las constantes a_0 y a_1 que minimizan el valor de

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 [f(x) - g(x)]^2\,dx \\ &= \int_0^1 (e^x - a_0 - a_1x)^2\,dx. \end{aligned}$$

Al evaluar esta integral, tenemos

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (e^x - a_0 - a_1x)^2\,dx \\ &= \int_0^1 (e^{2x} - 2a_0e^x - 2a_1xe^x + a_0^2 + 2a_0a_1x + a_1^2x^2)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{2}e^{2x} - 2a_0e^x - 2a_1e^x(x-1) + a_0^2x + a_0a_1x^2 + a_1^2\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}(e^2 - 1) - 2a_0(e-1) - 2a_1 + a_0^2 + a_0a_1 + \frac{1}{3}a_1^2. \end{aligned}$$

Ahora, considerando que I es una función de las variables a_0 y a_1, por medio del cálculo se determinan los valores de a_0 y a_1 que minimizan I. Específicamente, igualando a cero las derivadas parciales

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial a_0} &= 2a_0 - 2e + 2 + a_1 \\ \frac{\partial I}{\partial a_1} &= a_0 + \frac{2}{3}a_1 - 2 \end{aligned}$$

obtenemos las dos ecuaciones lineales en a_0 y a_1 siguientes

$$\begin{aligned} 2a_0 + a_1 &= 2(e-1) \\ 3a_0 + 2a_1 &= 6 \end{aligned}$$

La solución de este sistema es

$$a_0 = 4e - 10 \approx 0.873 \quad \text{y} \quad a_1 = 18 - 6e \approx 1.690.$$

(Verifique esto.) Por consiguiente, la mejor *aproximación lineal* para $f(x) = e^x$ sobre el intervalo $[0, 1]$ está dada por

$$g(x) = 4e - 10 + (18 - 6e)x \approx 0.873 + 1.690x.$$

En la figura 5.33 se comparan las gráficas de f y g sobre $[0, 1]$.

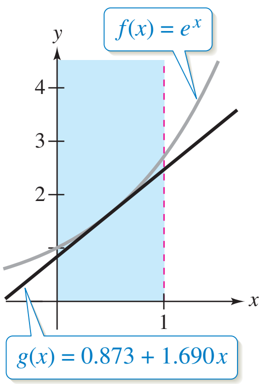


Figura 5.33

Por supuesto, la aproximación obtenida en el ejemplo 4 depende de la definición de mejor aproximación. Por ejemplo, si la definición de "mejor" hubiera sido el *polinomio de taylor de grado 1* centrado en 0.5, entonces la función de aproximación g habría sido

$$\begin{aligned} g(x) &= f(0.5) + f'(0.5)(x - 0.5) \\ &= e^{0.5} + e^{0.5}(x - 0.5) \\ &\approx 0.824 + 1.649x. \end{aligned}$$

Además, la función g obtenida en el ejemplo 4 es sólo la mejor aproximación *lineal* de f (según el criterio de mínimos cuadrados). En el ejemplo 5 se encuentra la mejor aproximación *cuadrática*.

EJEMPLO 5 Determinación de una aproximación por mínimos cuadrados

Determine la aproximación por mínimos cuadrados $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ para $f(x) = e^x$, $0 \leq x \leq 1$.

SOLUCIÓN

Para esta aproximación es necesario encontrar los valores de a_0, a_1 y a_2 que minimizan el valor de

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 [f(x) - g(x)]^2\, dx \\ &= \int_0^1 (e^x - a_0 - a_1x - a_2x^2)^2\, dx \\ &= \frac{1}{2}(e^2 - 1) + 2a_0(1 - e) + 2a_2(2 - e) \\ &\qquad + a_0^2 + a_0a_1 + \frac{2}{3}a_0a_2 + \frac{1}{2}a_1a_2 + \frac{1}{3}a_1^2 + \frac{1}{5}a_2^2 - 2a_1. \end{aligned}$$

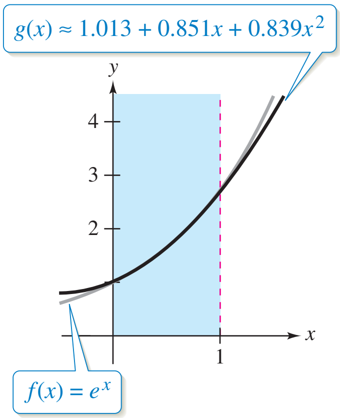


Figura 5.34

Al integrar e igualar a cero las derivadas parciales de I (con respecto a a_0, a_1 y a_2) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{aligned} 6a_0 + 3a_1 + 2a_2 &= 6(e - 1) \\ 6a_0 + 4a_1 + 3a_2 &= 12 \\ 20a_0 + 15a_1 + 12a_2 &= 60(e - 2) \end{aligned}$$

La solución de este sistema es

$$\begin{aligned} a_0 &= -105 + 39e \approx 1.013 \\ a_1 &= 588 - 216e \approx 0.851 \\ a_2 &= -570 + 210e \approx 0.839. \end{aligned}$$

(Verifique esto.) Por tanto, la función de aproximación g es $g(x) \approx 1.013 + 0.851x + 0.839x^2$. En la figura 5.34 se comparan las gráficas de f y g.

La integral I (dada en la definición de la aproximación por mínimos cuadrados) puede expresarse en forma vectorial. Para ello se aplica el producto interno definido en el ejemplo 5 de la sección 5.2:

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\, dx.$$

Con este producto interno se tiene

$$I = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2\, dx = \langle f - g, f - g\rangle = \|f - g\|^2.$$

Esto significa que la función de aproximación por mínimos cuadrados g es la función que minimiza $\|f - g\|^2$ o, de manera equivalente, que minimiza $\|f - g\|$. En otras palabras, la aproximación por mínimos cuadrados de una función f es la función g (en el subespacio W) más próxima a f en términos del producto interno $\langle f, g\rangle$. El siguiente teorema da un método para determinar la función g.

TEOREMA 5.19 Aproximación por mínimos cuadrados

Sea f continua sobre $[a, b]$ y sea W un subespacio de dimensión finita de $C[a, b]$. La función de aproximación por mínimos cuadrados de f con respecto a W está dada por

$$g = \langle f, \mathbf{w}_1\rangle\mathbf{w}_1 + \langle f, \mathbf{w}_2\rangle\mathbf{w}_2 + \cdots + \langle f, \mathbf{w}_n\rangle\mathbf{w}_n$$

donde $B = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots \mathbf{w}_n\}$ es una base ortonormal de W.

DEMOSTRACIÓN

Para demostrar que g es la función de aproximación por mínimos cuadrados de f es necesario probar que la desigualdad $\|f - g\| \leq \|f - \mathbf{w}\|$ es verdadera para cualquier vector $\mathbf{w}$ en W. Al expresar $f - g$ como

$$f - g = f - \langle f, \mathbf{w}_1\rangle\mathbf{w}_1 - \langle f, \mathbf{w}_2\rangle\mathbf{w}_2 - \cdot\cdot\cdot - \langle f, \mathbf{w}_n\rangle\mathbf{w}_n$$

se puede observar que $f - g$ es ortogonal a cada $\mathbf{w}_i$, lo cual implica que es ortogonal a cada vector en W. En particular, $f - g$ es ortogonal a $g - \mathbf{w}$. Esto permite aplicar el teorema de Pitágoras a la suma vectorial $f - \mathbf{w} = (f - g) + (g - \mathbf{w})$ para concluir que $\|f - \mathbf{w}\|^2 = \|f - g\|^2 + \|g - \mathbf{w}\|^2$. Por tanto, se concluye que $\|f - g\|^2 \leq \|f - \mathbf{w}\|^2$, lo cual entonces implica que $\|f - g\| \leq \|f - \mathbf{w}\|$.

Ahora veremos cómo se puede usar el teorema 5.19 para producir la aproximación por mínimos cuadrados obtenida en el ejemplo 4. Primero apliquemos el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt a la base estándar $\{1, x\}$ para obtener la base ortonormal $B = \left\{1, \sqrt{3}(2x - 1)\right\}$. (Verifique esto.) Luego, por el teorema 5.19 la aproximación por mínimos cuadrados para e^x en el subespacio de todas las funciones lineales está dada por

$$\begin{aligned} g(x) &= \langle e^x, 1\rangle(1) + \left\langle e^x, \sqrt{3}(2x - 1)\right\rangle\sqrt{3}(2x - 1) \\ &= \int_0^1 e^x\,dx + \sqrt{3}(2x - 1)\int_0^1 \sqrt{3}\,e^x(2x - 1)\,dx \\ &= \int_0^1 e^x\,dx + 3(2x - 1)\int_0^1 e^x(2x - 1)\,dx \\ &= 4e - 10 + (18 - 6e)x \end{aligned}$$

lo cual concuerda con el resultado obtenido en el ejemplo 4.

EJEMPLO 6 Determinación de una aproximación por mínimos cuadrados

Encuentre la aproximación por mínimos cuadrados para $f(x) = \text{sen } x$, $0 \leq x \leq \pi$, con respecto al subespacio W de funciones polinomiales de grado 2 o menos.

SOLUCIÓN

Para usar el teorema 5.19 aplique el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt a la base estándar de W, $\{1, x, x^2\}$, para obtener la base ortonormal

$$B = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sqrt{3}}{\pi\sqrt{\pi}}(2x - \pi), \frac{\sqrt{5}}{\pi^2\sqrt{\pi}}(6x^2 - 6\pi x + \pi^2)\right\}.$$

(Verifique esto.) La función de aproximación por mínimos cuadrados g esta dada por

$$g(x) = \langle f, \mathbf{w}_1\rangle\mathbf{w}_1 + \langle f, \mathbf{w}_2\rangle\mathbf{w}_2 + \langle f, \mathbf{w}_3\rangle\mathbf{w}_3$$

y queda

$$\begin{aligned} \langle f, \mathbf{w}_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\pi \text{sen } x\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \\ \langle f, \mathbf{w}_2\rangle &= \frac{\sqrt{3}}{\pi\sqrt{\pi}}\int_0^\pi \text{sen } x(2x - \pi)\,dx = 0 \\ \langle f, \mathbf{w}_3\rangle &= \frac{\sqrt{5}}{\pi^2\sqrt{\pi}}\int_0^\pi \text{sen } x(6x^2 - 6\pi x + \pi^2)\,dx = \frac{2\sqrt{5}}{\pi^2\sqrt{\pi}}(\pi^2 - 12). \end{aligned}$$

Entonces, g es

$$g(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{10(\pi^2 - 12)}{\pi^5}(6x^2 - 6\pi x + \pi^2) \approx -0.4177x^2 + 1.3122x - 0.0505.$$

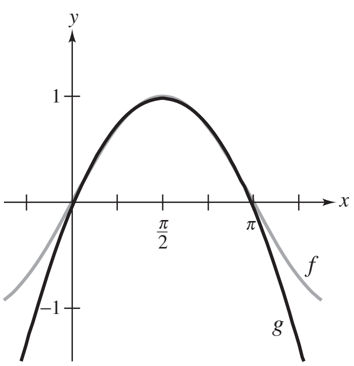


Figura 5.35

En la figura 5.35 se muestran las gráficas de f y g.

APROXIMACIONES DE FOURIER (CÁLCULO)

Ahora podemos ver un tipo especial de aproximación por mínimos cuadrados llamada **aproximación de Fourier**. Para esta aproximación, considere las funciones de la forma

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + \cdot \cdot \cdot + a_n \cos nx + b_1 \operatorname{sen} x + \cdot \cdot \cdot + b_n \operatorname{sen} nx$$

en el subespacio W de

$C[0, 2\pi]$

compartido por la base

$S = \{1, \cos x, \cos 2x, . . . , \cos nx, \operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 2x, . . . , \operatorname{sen} nx\}.$

Estos vectores $2n + 1$ son ortogonales en el espacio con producto interno $C[0, 2\pi]$ debido a que

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx = 0, \quad f \neq g$$

como lo demostramos en el ejemplo 3 de la sección 5.3. Además, normalizando cada función en esta base, podemos obtener la base ortonormal

$$\begin{aligned} B &= \{\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, . . . , \mathbf{w}_n, \mathbf{w}_{n+1}, . . . , \mathbf{w}_{2n}\} \\ &= \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, . . . , \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen} x, . . . , \frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen} nx\right\}. \end{aligned}$$

Con esta base ortonormal, usted puede aplicar el teorema 5.19 para escribir

$$g(x) = \langle f, \mathbf{w}_0\rangle\mathbf{w}_0 + \langle f, \mathbf{w}_1\rangle\mathbf{w}_1 + \cdot \cdot \cdot + \langle f, \mathbf{w}_{2n}\rangle\mathbf{w}_{2n}.$$

Los coeficientes

$a_0, a_1, . . . , a_n, b_1, . . . , b_n$

para $g(x)$ en la ecuación

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + \cdot \cdot \cdot + a_n \cos nx + b_1 \operatorname{sen} x + \cdot \cdot \cdot + b_n \operatorname{sen} nx$$

se muestran por las siguientes integrales.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \langle f, \mathbf{w}_0\rangle \frac{2}{\sqrt{2\pi}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx \\
a_1 &= \langle f, \mathbf{w}_1\rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi} f(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx \\
&\vdots \\
a_n &= \langle f, \mathbf{w}_n\rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi} f(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx \\
b_1 &= \langle f, \mathbf{w}_{n+1}\rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi} f(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen} x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{sen} x\,dx \\
&\vdots \\
b_n &= \langle f, \mathbf{w}_{2n}\rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{2\pi} f(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen} nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\,dx
\end{aligned}$$

La función $g(x)$ se denomina **aproximación de Fourier de *n*-ésimo** orden de f en el intervalo $[0, 2\pi]$. Como los coeficientes de Fourier, esta función recibe su nombre en honor del matemático francés Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830). Esto nos conduce al teorema 5.20.

TEOREMA 5.20 Aproximación de Fourier

En el intervalo $[0, 2\pi]$, la aproximación por mínimos cuadrados de una función continua f con respecto al espacio vectorial generado por

$$\{1, \cos x, \ldots, \cos nx, \operatorname{sen} x, \ldots, \operatorname{sen} nx\}$$

está dada por

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + \cdots + a_n \cos nx + b_1 \operatorname{sen} x + \cdots + b_n \operatorname{sen} nx$$

donde los **coeficientes de Fourier** $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots b_n$ son

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, dx$$

$$a_j = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos jx\, dx, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$b_j = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} jx\, dx, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

EJEMPLO 7 Determinación de una aproximación de Fourier

Encuentre la aproximación de Fourier de tercer orden de la función $f(x) = x$, $0 \le x \le 2\pi$.

SOLUCIÓN

Aplicando el teorema 5.20 tenemos

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + b_1 \operatorname{sen} x + b_2 \operatorname{sen} 2x + b_3 \operatorname{sen} 3x$$

donde

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\, dx = \frac{1}{\pi} 2\pi^2 = 2\pi$$

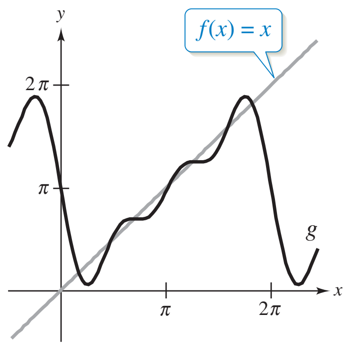
$$a_j = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x \cos jx\, dx = \left[\frac{1}{\pi j^2}\cos jx + \frac{x}{\pi j}\operatorname{sen} jx\right]_0^{2\pi} = 0$$

$$b_j = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x \operatorname{sen} jx\, dx = \left[\frac{1}{\pi j^2}\operatorname{sen} jx - \frac{x}{\pi j}\cos jx\right]_0^{2\pi} = -\frac{2}{j}.$$

Esto implica que $a_0 = 2\pi$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $b_1 = -2$, $b_2 = -\frac{2}{2} = -1$ y $b_3 = -\frac{2}{3}$. Así, tenemos

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{2\pi}{2} - 2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x - \frac{2}{3}\operatorname{sen} 3x \\ &= \pi - 2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x - \frac{2}{3}\operatorname{sen} 3x. \end{aligned}$$

En la figura 5.36 se muestra una comparación de las gráficas de f y g.



Aproximación de Fourier de tercer orden

Figura 5.36

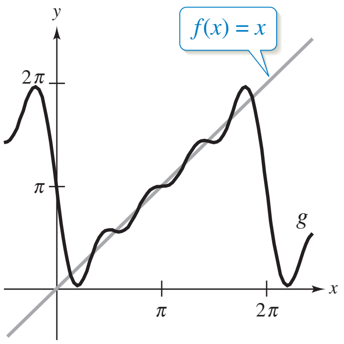
En el ejemplo 7, el patrón general de los coeficientes de Fourier parece ser $a_0 = 2\pi$, $a_1 = a_2 = \cdots a_n = 0$ y

$$b_1 = -\frac{2}{1},\ b_2 = -\frac{2}{2},\ \ldots,\ b_n = -\frac{2}{n}.$$

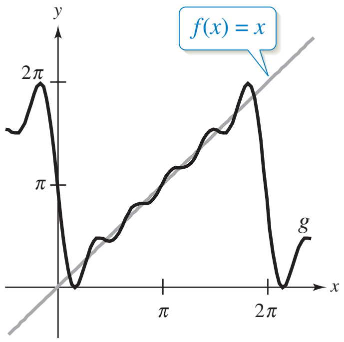
Así, la aproximación de Fourier de orden n-ésimo de $f(x) = x$ es

$$g(x) = \pi - 2\left(\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + \cdots + \frac{1}{n}\operatorname{sen} nx\right).$$

A medida que n crece, mejora la aproximación de Fourier. Por ejemplo, en la figura 5.37 se muestran las aproximaciones de Fourier de cuarto y quinto orden de $f(x) = x$, $0 \le x \le 2\pi$.



Aproximación de Fourier de cuarto orden



Aproximación de Fourier de quinto orden

Figura 5.37

En cursos avanzados se demuestra que cuando $n \to \infty$, el error de aproximación $\|f - g\|$ tiende a cero para toda x en el intervalo $(0, 2\pi)$. La *serie* infinita de $g(x)$ se llama

EJEMPLO 8 Determinación de una aproximación de Fourier

Encuentre la aproximación de Fourier de cuarto orden de $f(x) = |x - \pi|$, $0 \le x \le 2\pi$.

SOLUCIÓN

Con el teorema 5.20, los coeficientes de Fourier se encuentran como sigue

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |x - \pi|\, dx = \pi$$

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |x - \pi| \cos jx\, dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)\cos jx\, dx \\ &= \frac{2}{\pi j^2}(1 - \cos j\pi) \end{aligned}$$

$$b_j = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |x - \pi| \operatorname{sen} jx\, dx = 0$$

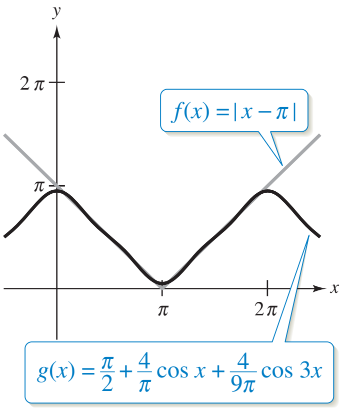


Figura 5.38

Así, $a_0 = \pi$, $a_1 = 4/\pi$, $a_2 = 0$, $a_3 = 4/9\pi$, $a_4 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = 0$, $b_3 = 0$ y $b_4 = 0$, lo cual significa que la aproximación de Fourier de cuarto orden de f es

$$g(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\cos x + \frac{4}{9\pi}\cos 3x.$$

En la figura 5.38 se comparan las gráficas de f y g

5.5 Ejercicios

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

Determinación de producto cruz En los ejercicios 1 a 6, encuentre el producto cruz de los vectores unitarios [donde $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ y $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$]. Grafique su resultado.

1. $\mathbf{j} \times \mathbf{i}$ **2.** $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$

3. $\mathbf{j} \times \mathbf{k}$ **4.** $\mathbf{k} \times \mathbf{j}$

5. $\mathbf{i} \times \mathbf{k}$ **6.** $\mathbf{k} \times \mathbf{i}$

Determinación de producto cruz En los Ejercicios 7-12, encuentre (a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, (b) $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ y (c) $\mathbf{v} \times \mathbf{v}$.

7. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$

8. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{k}$

9. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

10. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

11. $\mathbf{u} = (3, -2, 4)$, $\mathbf{v} = (1, 5, -3)$

12. $\mathbf{u} = (-2, 9, -3)$, $\mathbf{v} = (4, 6, -5)$

Determinación de producto cruz En los ejercicios 13 a 22, encuentre $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y demuestre que éste es ortogonal a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

13. $\mathbf{u} = (0, 1, -2)$, $\mathbf{v} = (1, -1, 0)$

14. $\mathbf{u} = (-1, 1, 2)$, $\mathbf{v} = (0, 1, -1)$

15. $\mathbf{u} = (12, -3, 1)$, $\mathbf{v} = (-2, 5, 1)$

16. $\mathbf{u} = (-2, 1, 1)$, $\mathbf{v} = (4, 2, 0)$

17. $\mathbf{u} = (2, -3, 1)$, $\mathbf{v} = (1, -2, 1)$

18. $\mathbf{u} = (4, 1, 0)$, $\mathbf{v} = (3, 2, -2)$

19. $\mathbf{u} = \mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{k}$

20. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j}$

21. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

22. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

Determinación de producto cruz En los ejercicios 23 a 30, utilice una aplicación gráfica con capacidades vectoriales para encontrar $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y después demuestre que éste es ortogonal a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

23. $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$, $\mathbf{v} = (2, 1, 2)$

24. $\mathbf{u} = (1, 2, -3)$, $\mathbf{v} = (-1, 1, 2)$

25. $\mathbf{u} = (0, 1, -1)$, $\mathbf{v} = (1, 2, 0)$

26. $\mathbf{u} = (0, 1, -2)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 4)$

27. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

28. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

29. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

30. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 4\mathbf{k}$

Uso del producto cruz En los Ejercicios 31-38, encuentre un vector unitario ortogonal para ambos $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

31. $\mathbf{u} = (2, -3, 4)$, $\mathbf{v} = (0, -1, 1)$

32. $\mathbf{u} = (2, -1, 3)$, $\mathbf{v} = (1, 0, -2)$

33. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$

34. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 3\mathbf{k}$

35. $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{3}{4}\mathbf{j} + \frac{1}{10}\mathbf{k}$

36. $\mathbf{u} = 7\mathbf{i} - 14\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 14\mathbf{i} + 28\mathbf{j} - 15\mathbf{k}$

37. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

38. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

Determinación del área de un paralelogramo En los ejercicios 39 a 42, encuentre el área del paralelogramo que tiene como lados adyacentes los vectores dados.

39. $\mathbf{u} = \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$

40. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$

41. $\mathbf{u} = (3, 2, -1)$, $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$

42. $\mathbf{u} = (2, -1, 0)$, $\mathbf{v} = (-1, 2, 0)$

Aplicación geométrica del producto cruz En los ejercicios 43 y 44, verifique que los puntos son los vértices de un paralelogramo y después encuentre su área.

43. $(1, 1, 1)$, $(2, 3, 4)$, $(6, 5, 2)$, $(7, 7, 5)$

44. $(2, -1, 1)$, $(5, 1, 4)$, $(0, 1, 1)$, $(3, 3, 4)$

Triple producto escalar En los ejercicios 45 a 48, halle $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$. Esta cantidad se llama **triple producto escalar** de $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$.

45. $\mathbf{u} = \mathbf{i}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j}$, $\mathbf{w} = \mathbf{k}$

46. $\mathbf{u} = -\mathbf{i}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{j}$, $\mathbf{w} = \mathbf{k}$

47. $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v} = (2, 1, 0)$, $\mathbf{w} = (0, 0, 1)$

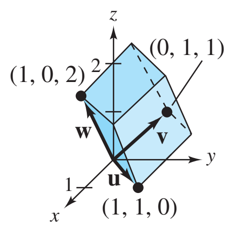
48. $\mathbf{u} = (2, 0, 1)$, $\mathbf{v} = (0, 3, 0)$, $\mathbf{w} = (0, 0, 1)$

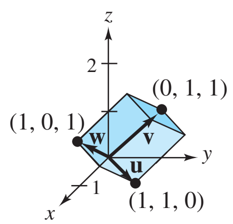
49. Volumen de un paralelepípedo Demuestre que el volumen de un paralelepípedo que tiene a $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ como lados adyacentes es el triple producto escalar $|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$.

50. Determinación del volumen de un paralelepípedo Use el resultado del Ejercicio 49 para encontrar el volumen de cada paralelepípedo.

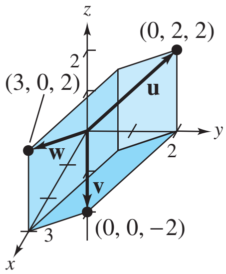
(a) $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{w} = \mathbf{i} + 2\mathbf{k}$

(b) $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$

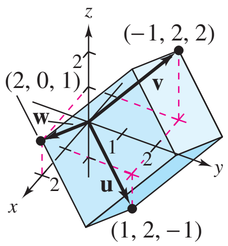




(c) $\mathbf{u} = (0, 2, 2)$
$\mathbf{v} = (0, 0, -2)$
$\mathbf{w} = (3, 0, 2)$



(d) $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$
$\mathbf{v} = (-1, 2, 2)$
$\mathbf{w} = (2, 0, 1)$



Determinación del área de un triángulo En los ejercicios 51 y 52, encuentre el área del triángulo con los vértices dados. Use el hecho de que el área del triángulo tiene a **u** y **v** como lados adyacentes dados por $A = \frac{1}{2}\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$.

51. $(1, 3, 5), (3, 3, 0), (-2, 0, 5)$

52. $(2, -3, 4), (0, 1, 2), (-1, 2, 0)$

53. Prueba Demuestre que $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$.

54. Prueba Demuestre que $c\mathbf{u} \times \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times c\mathbf{v}$.

55. Prueba Demuestre que $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

56. Prueba Demuestre que $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

57. Prueba Demuestre que $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$.

58. Prueba Demuestre que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal a **u** y **v**.

59. Prueba Demuestre que el ángulo θ entre **u** y **v** está dado por $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\| \operatorname{sen} \theta$.

60. Prueba Demuestre que $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ si y sólo si **u** y **v** son paralelos.

61. Prueba Demuestre la **identidad de Lagrange**:
$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$.

62. Prueba
(a) Demuestre que
$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}.$$
(b) Encuentre un ejemplo para el cual
$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \neq (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w}.$$

Determinación de una aproximación por mínimos cuadrados En los ejercicios 63 a 68, (a) encuentre la función lineal g de aproximación por mínimos cuadrados para la función f y (b) use una aplicación gráfica para graficar f y g. en la misma ventana de visualización.

63. $f(x) = x^2, \quad 0 \le x \le 1$

64. $f(x) = \sqrt{x}, \quad 1 \le x \le 4$

65. $f(x) = e^{2x}, \quad 0 \le x \le 1$

66. $f(x) = e^{-2x}, \quad 0 \le x \le 1$

67. $f(x) = \cos x, \quad 0 \le x \le \pi$

68. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad 0 \le x \le \pi/2$

Determinación de una aproximación por mínimos cuadrados En los Ejercicios 69 a 72, (a) encuentre la aproximación por mínimos cuadrados $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ de la función f y (b) use una aplicación gráfica para graficar f y g en la misma ventana de visualización.

69. $f(x) = x^3, \quad 0 \le x \le 1$

70. $f(x) = \sqrt{x}, \quad 1 \le x \le 4$

71. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad -\pi/2 \le x \le \pi/2$

72. $f(x) = \cos x, \quad -\pi/2 \le x \le \pi/2$

Determinación de una aproximación de Fourier En los ejercicios 73 a 84, encuentre la aproximación de Fourier del orden especificado para la función en el intervalo $[0, 2\pi]$.

73. $f(x) = \pi - x$, 3er orden

74. $f(x) = \pi - x$, 4to orden

75. $f(x) = (x - \pi)^2$, 3er orden

76. $f(x) = (x - \pi)^2$, 4to orden

77. $f(x) = e^{-x}$, 1er orden

78. $f(x) = e^{-x}$, 2do orden

79. $f(x) = e^{-2x}$, 1er orden

80. $f(x) = e^{-2x}$, 2do orden

81. $f(x) = 1 + x$, 3er orden

82. $f(x) = 1 + x$, 4to orden

83. $f(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$, 4to orden

84. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$, 4to orden

85. Use los resultados de los ejercicios 73 y 74 para encontrar la aproximación de Fourier de n-ésimo orden de
$$f(x) = \pi - x$$
en el intervalo $[0, 2\pi]$.

86. Use los resultados de los ejercicios 75 y 76 para encontrar la aproximación de Fourier de n-ésimo orden de
$$f(x) = (x - \pi)^2$$
en el intervalo $[0, 2\pi]$.

87. Use los resultados de los Ejercicios 77 y 78 para encontrar la aproximación de Fourier de n-ésimo orden de
$$f(x) = e^{-x}$$
en el intervalo $[0, 2\pi]$.

88. REMATE Explique cómo encontrar cada uno de los siguientes.
(a) El producto cruz de dos vectores en R^3
(b) La aproximación por mínimos cuadrados de una función $f \in C[a, b]$ con respecto de un subespacio W de $C[a, b]$
(c) La aproximación de Fourier de n-ésimo orden en el intervalo $[0, 2\pi]$ de una función continua f con respecto del espacio vectorial generado por
$$\{1, \cos x, \ldots, \cos nx, \operatorname{sen} x, \ldots, \operatorname{sen} nx\}$$

5 Ejercicios de repaso

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

Determinación de longitudes, producto punto y distancia En los ejercicios 1 a 8, encuentre (a) $\|\mathbf{u}\|$, (b) $\|\mathbf{v}\|$, (c) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ y $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

1. $\mathbf{u} = (1, 2), \quad \mathbf{v} = (4, 1)$
2. $\mathbf{u} = (-1, 2), \quad \mathbf{v} = (2, 3)$
3. $\mathbf{u} = (2, 1, 1), \quad \mathbf{v} = (3, 2, -1)$
4. $\mathbf{u} = (1, -1, 2), \quad \mathbf{v} = (2, 3, 1)$
5. $\mathbf{u} = (1, -2, 0, 1), \quad \mathbf{v} = (1, 1, -1, 0)$
6. $\mathbf{u} = (1, -2, 2, 0), \quad \mathbf{v} = (2, -1, 0, 2)$
7. $\mathbf{u} = (0, 1, -1, 1, 2), \quad \mathbf{v} = (0, 1, -2, 1, 1)$
8. $\mathbf{u} = (1, -1, 0, 1, 1), \quad \mathbf{v} = (0, 1, -2, 2, 1)$

Determinación de longitud y un vector unitario En los ejercicios 9 a 12 encuentre $\|\mathbf{v}\|$, así como un vector unitario en la dirección de $\mathbf{v}$.

9. $\mathbf{v} = (5, 3, -2)$
10. $\mathbf{v} = (1, -2, 1)$
11. $\mathbf{v} = (-1, 1, 2)$
12. $\mathbf{v} = (0, 2, -1)$

13. Dado el vector $\mathbf{v} = (8, 8, 6)$, encuentre u tal que
    (a) $\mathbf{u}$ tenga la misma dirección que $\mathbf{v}$ y la mitad de su longitud.
    (b) $\mathbf{u}$ tenga la dirección opuesta de $\mathbf{v}$ y un cuarto de su longitud.
    (c) $\mathbf{u}$ tenga la dirección opuesta de $\mathbf{v}$ y el doble de su longitud.
14. ¿Para qué valores de c es $\|c(2, 2, -1)\| = 3$?

Determinación del ángulo entre dos vectores En los Ejercicios 15-20, encuentre el ángulo θ entre los dos vectores.

15. $\mathbf{u} = (2, 2), \quad \mathbf{v} = (-3, 3)$
16. $\mathbf{u} = (1, -1), \quad \mathbf{v} = (0, 1)$
17. $\mathbf{u} = \left(\cos\frac{3\pi}{4}, \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right), \quad \mathbf{v} = \left(\cos\frac{2\pi}{3}, \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$
18. $\mathbf{u} = \left(\cos\frac{\pi}{6}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right), \quad \mathbf{v} = \left(\cos\frac{5\pi}{6}, \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}\right)$
19. $\mathbf{u} = (10, -5, 15), \quad \mathbf{v} = (-2, 1, -3)$
20. $\mathbf{u} = (1, 0, -3, 0), \quad \mathbf{v} = (2, -2, 1, 1)$

Determinación de vectores ortogonales En los ejercicios 21 a 24, encuentre todos los vectores ortogonales a $\mathbf{u}$.

21. $\mathbf{u} = (0, -4, 3)$
22. $\mathbf{u} = (1, -1, 2)$
23. $\mathbf{u} = (1, -2, 2, 1)$
24. $\mathbf{u} = (0, 1, 2, -1)$

25. Para $\mathbf{u} = \left(2, -\frac{1}{2}, 1\right)$ y $\mathbf{v} = \left(\frac{3}{2}, 2, -1\right)$, (a) encuentre el producto interno representado por $\langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = u_1v_1 + 2u_2v_2 + 3u_3v_3$ y (b) use este producto interno para encontrar la distancia entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.
26. Para $\mathbf{u} = \left(0, 3, \frac{1}{3}\right)$ y $\mathbf{v} = \left(\frac{4}{3}, 1, -3\right)$, (a) encuentre el producto interno representado por $\langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 2u_1v_1 + u_2v_2 + 2u_3v_3$ y (b) use este producto interno para encontrar la distancia entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.
27. Verifique la desigualdad del triángulo y la desigualdad de Cauchy-Schwarz para $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ del ejercicio 25. (Use el producto interno del ejercicio 25.)
28. Verifique la desigualdad del triángulo y la desigualdad de Cauchy-Schwarz para $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ del ejercicio 26. (Use el producto interno del ejercicio 26.)

Cálculo En los ejercicios 29 y 30, (a) encuentre el producto interno, (b) determine si los vectores son ortogonales y (c) verifique la desigualdad de Cauchy-Schwarz para los vectores.

29. $f(x) = x,\ g(x) = \dfrac{1}{x^2+1},\ \langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$
30. $f(x) = x,\ g(x) = 4x^2,\ \langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{0}^{1} f(x)g(x)\,dx$

Determinación de una proyección ortogonal En los ejercicios 31 a 36, encuentre $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$.

31. $\mathbf{u} = (2, 4), \quad \mathbf{v} = (1, -5)$
32. $\mathbf{u} = (2, 3), \quad \mathbf{v} = (0, 4)$
33. $\mathbf{u} = (1, 2), \quad \mathbf{v} = (2, 5)$
34. $\mathbf{u} = (2, 5), \quad \mathbf{v} = (0, 5)$
35. $\mathbf{u} = (0, -1, 2), \quad \mathbf{v} = (3, 2, 4)$
36. $\mathbf{u} = (1, 2, -1), \quad \mathbf{v} = (0, 2, 3)$

Aplicación del proceso de Gram-Schmidt En los ejercicios 37 a 40, utilice el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt para transformar la base en una base ortonormal. (Use el producto interno euclidiano.) para R^n y use los vectores en el orden en el cual se presentan.

37. $B = \{(1, 1), (0, 2)\}$
38. $B = \{(3, 4), (1, 2)\}$
39. $B = \{(0, 3, 4), (1, 0, 0), (1, 1, 0)\}$
40. $B = \{(0, 0, 2), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$

41. Sea $B = \{(0, 2, -2), (1, 0, -2)\}$ una base del subespacio de R^3 y sea $\mathbf{x} = (-1, 4, -2)$ un vector en el subespacio.
    (a) Escriba $\mathbf{x}$ como una combinación lineal de los vectores en B, es decir, encuentre las coordenadas de $\mathbf{x}$ relativas a B.
    (b) Use el proceso de ortonormalización de Gran-Schmidt para transformar B en un conjunto ortonormal B'.
    (c) Escriba $\mathbf{x}$ como una combinación lineal de los vectores en B', es decir, encuentre las coordenadas de $\mathbf{x}$ relativas a B'.

42. Repita el ejercicio 37 para $B = \{(-1, 2, 2), (1, 0, 0)\}$ y $\mathbf{x} = (-3, 4, 4)$.

Cálculo En los ejercicios 43 a 46, sean f y g funciones en el espacio vectorial $C[a, b]$ con el producto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

43. Demuestre que $f(x) = \text{sen}\, x$ y $g(x) = \cos x$ son ortogonales en $C[0, \pi]$.

44. Demuestre que $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ y $g(x) = 2x\sqrt{1 - x^2}$ son ortogonales en $C[-1, 1]$.

45. Sean $f(x) = x$ y $g(x) = x^3$ vectores en $C[0, 1]$.

(a) Encuentre $\langle f, g\rangle$

(b) Encuentre $\|g\|$

(c) Encuentre $d(f, g)$

(d) Ortonormalice el conjunto $B = \{f, g\}$

46. Sean $f(x) = x + 2$ y $g(x) = 15x - 8$ vectores en $C[0, 1]$.

(a) Encuentre $\langle f, g\rangle$.

(b) Encuentre $\langle -4f, g\rangle$.

(c) Encuentre $\|f\|$.

(d) Ortonormalice el conjunto $B = \{f, g\}$

47. Encuentre una base ortonormal para el siguiente subespacio euclidiano de un espacio euclidiano de tres dimensiones.

$W = \{(x_1, x_2, x_3): x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

48. Encuentre una base ortonormal para el espacio solución del sistema de ecuaciones homogéneo.

$$\begin{aligned} x + y - z + w &= 0 \\ 2x - y + z + 2w &= 0 \end{aligned}$$

49. Prueba Demuestre que si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores en R^n, entonces $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$.

$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$.

50. Prueba Demuestre que si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores en R^n, entonces $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$.

$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$.

51. Prueba Demuestre que si u y v son vectores en un espacio con producto interno tal que $\|\mathbf{u}\| \le 1$ y $\|\mathbf{v}\| \le 1$, entonces $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \le 1$.

52. Prueba Demuestre que si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores en un espacio V con producto interno, entonces

$\big|\|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|\big| \le \|\mathbf{u} \pm \mathbf{v}\|$.

53. Prueba Sea V un subespacio m-dimensional de R^n tal que $m < n$. Demuestre que cualquier vector $\mathbf{u}$ en R^n puede escribirse únicamente en la forma $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, donde $\mathbf{v}$ está en V y $\mathbf{w}$ es ortogonal a todo vector en V.

54. Sea V el subespacio en dos dimensiones de R^4 generado por $(0, 1, 0, 1)$ y $(0, 2, 0, 0)$. Escriba el vector $\mathbf{u} = (1, 1, 1, 1)$ en la forma $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, donde $\mathbf{v}$ está en V y $\mathbf{w}$ es ortogonal a todo vector en V.

55. Demostración Sea $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ un subconjunto ortonormal de R^n y sea $\mathbf{v}$ cualquier vector en R^n. Demuestre que

$$\|\mathbf{v}\|^2 \ge \sum_{i=1}^{m} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_i)^2.$$

(esta desigualdad se llama **desigualdad de Bessel**.)

56. Demostración Sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un conjunto de números reales. Use la desigualdad de Cauchy-Schwarz para demostrar que

$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \le n(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$.

57. Demostración Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores en un espacio V con producto interno. Demuestre que $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ si y sólo si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales.

58. Escriba Sea $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ un conjunto dependiente de vectores en un espacio V con producto interno. Describa el resultado de aplicar el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt a este conjunto.

59. Encuentre el complemento ortogonal $S^\perp$ del subespacio S de R^3 compartido por los dos vectores columna de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

60. Halle la proyección del vector $\mathbf{v} = [1 \quad 0 \quad -2]^T$ en el subspacio

$$S = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

61. Encuentre las bases de los cuatro subespacios fundamentales de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

62. Encuentre la recta de regresión por mínimos cuadrados para el conjunto de puntos

$\{(-2, 2), (-1, 1), (0, 1), (1, 3)\}$.

Graph the points and the line on the same set of axes.

63. Consumo de energía La tabla muestra el consumo mundial de energía y (en trillones de Btu) desde el año 2001 a 2008. Encuentre la recta de regresión por mínimos cuadrados para los datos. Después utilice el modelo para predecir el consumo de energía en 2015. Sea t el año, con $t = 1$ correspondiente a 2001. (*Fuente:* U.S. Energy Information Administration)

Año	2001	2002	2003	2004
Consumo de energía, y	400.5	410.7	425.7	448.9

Año	2005	2006	2007	2008
Consumo de energía, y	461.6	470.9	482.3	493.0

64. **Ganancias** La tabla muestra las ganancias y (en millones de dólares) para Google, Incorporated desde el año 2003 a 2010. Encuentre la regresión cuadrática por mínimos cuadrados y polinomios cúbicos para los datos. Después utilice cada modelo para predecir las ganancias en 2015. Sea t el año, con $t = 3$ correspondiente a 2003. ¿Cuál de los modelos parece más preciso para predecir ganancias futuras? (*Fuente:* Google, Incorporated.)

Año	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Ganancias, y	1.5	3.2	6.1	10.6	16.6	21.8	23.7	29.3

Determinación del producto cruz En los ejercicios 65 a 68, encuentre $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y demuestre que es ortogonal a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

65. $\mathbf{u} = (1, 1, 1), \quad \mathbf{v} = (1, 0, 0)$

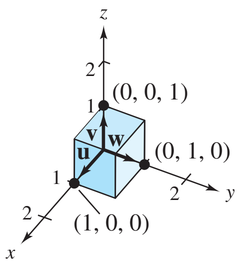
66. $\mathbf{u} = (1, -1, 1), \quad \mathbf{v} = (0, 1, 1)$

67. $\mathbf{u} = \mathbf{j} + 6\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

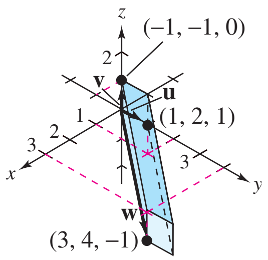
68. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

Determinación del volumen de un paralelepípedo En los Ejercicios 69-72, encuentre el volumen de un paralelepípedo. Recuerde de los Ejercicios 49 y 50 en la Sección 5.5 que el volumen de un paralelepípedo que tiene $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ como lado adyacente está dado por $|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$.

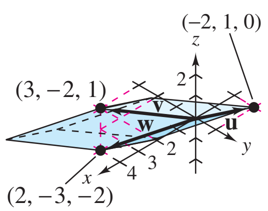
69. $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$
$\mathbf{v} = (0, 0, 1)$
$\mathbf{w} = (0, 1, 0)$



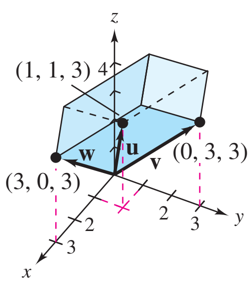
70. $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$
$\mathbf{v} = (-1, -1, 0)$
$\mathbf{w} = (3, 4, -1)$



71. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j}$
$\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$
$\mathbf{w} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$



72. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
$\mathbf{v} = 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
$\mathbf{w} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$



73. **Determinación del área de un paralelogramo** Encuentre el área del paralelogramo que tiene a

$$\mathbf{u} = (1, 3, 0) \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = (-1, 0, 2)$$

como lados adyacentes.

74. **Prueba** Demuestre que

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$$

si y sólo si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales.

Determinación de una aproximación por mínimos cuadrados En los Ejercicios 75-78, (a) encuentre la aproximación por mínimos cuadrados $g(x) = a_0 + a_1x$ de la función f, y (b) use una aplicación gráfica para graficar f y g en la misma ventana de visualización.

75. $f(x) = x^3, \quad -1 \le x \le 1$

76. $f(x) = x^3, \quad 0 \le x \le 2$

77. $f(x) = \operatorname{sen} 2x, \quad 0 \le x \le \pi/2$

78. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x, \quad 0 \le x \le \pi$

Determinación de una aproximación por mínimos cuadrados En los Ejercicios 79 y 80, (a) encuentre la aproximación por mínimos cuadrados $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ de la función f, y (b) use a aplicación gráfica para graficar f y g en la misma ventana de visualización.

79. $f(x) = \sqrt{x}, \quad 0 \le x \le 1$ **80.** $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad 1 \le x \le 2$

Determinación de una aproximación de Fourier En los ejercicios 81 y 82, encuentre la aproximación de Fourier de n-ésimo orden de la función. en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

81. $f(x) = x^2$, 1er orden **82.** $f(x) = x$, 2do orden

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 83 y 84, determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, proporcione una razón o cite una expresión adecuada del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que muestre que la expresión no es cierta en todos los casos o cite del texto una expresión adecuada.

83. (a) El producto cruz de dos vectores diferentes de cero en R^3 produce un vector ortogonal a los dos vectores que lo generan.

(b) El producto cruz de dos vectores en R^3 diferentes de cero es conmutativo.

(c) La aproximación por mínimos cuadrados de una función f es la función g (en el subespacio W) más cercana a f en términos del producto interior $\langle f, g\rangle$.

84. (a) Los vectores en R^3 $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ tienen igual longitud pero dirección opuesta.

(b) Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son dos vectores diferentes de cero en R^3, entonces $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son paralelos si y sólo si $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

(c) Un tipo especial de aproximación por mínimos cuadrados, la aproximación de Fourier, es compartida por la base $S = \{1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx, \operatorname{sen} x, \operatorname{sen} 2x, \ldots, \operatorname{sen} nx\}$.

5 Proyectos

1 La factorización *QR*

El proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt conduce a una importante factorización de matrices llamada **factorización QR**. Si A es una matriz de $m \times n$ de rango n, entonces a puede expresarse como el producto $A = QR$ de una matriz Q de $m \times n$ y una matriz R de $n \times n$, donde Q tiene columnas ortonormales y R es triangular superior.

Las columnas de A pueden ser consideradas una base del subespacio de R^m y las columnas de Q son el resultado de aplicar el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt a este conjunto de vectores columna.

Recuerde que en el ejemplo 7 de la sección 5.3, el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt se utilizó en los vectores columna de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Se obtuvo una base ortonormal para R3 , la que aquí etiquetamos como $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$.

$$\mathbf{q}_1 = \left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0\right), \ \mathbf{q}_2 = \left(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0\right), \ \mathbf{q}_3 = (0, 0, 1)$$

Estos vectores forman las columnas de la matriz Q.

$$Q = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz triangular superior R es

$$R = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{q}_1 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{q}_1 & \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{q}_1 \\ 0 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{q}_2 & \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{q}_2 \\ 0 & 0 & \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 3\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Verifique que $A = QR$.

En general, si A es una matriz de $m \times n$ de rango n con columnas $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, entonces la factorización QR de A está dada por

$$A = QR$$

$$[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{v}_n] = [\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{q}_n]\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{q}_1 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{q}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{q}_1 \\ 0 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{q}_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{v}_n \cdot \mathbf{q}_n \end{bmatrix}$$

donde las columnas $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n$ de la matriz Q de $m \times n$ son los vectores ortonormales que resultan del proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt.

1. Verifique la ecuación matricial $A = QR$ de cada matriz.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2. Sea $A = QR$ la factorización QR de la matriz A de m $\times$ n de rango n. Demuestre cómo el problema de mínimos cuadrados puede resolverse utilizando, la factorización QR.

3. Use el resultado de la parte 2 para resolver el problema de mínimos cuadrados $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ si A es la matriz de la parte 1(a) y $\mathbf{b} = [-1 \quad 1 \quad -1]^T$.

COMENTARIO

La factorización QR de una matriz forma la base para muchos algoritmos de álgebra lineal. Los algoritmos para el cálculo de eigenvalores (véase el Capítulo 7) se basan en esta factorización, así como los algoritmos para el cálculo de la recta de regresión por mínimos cuadrados para un conjunto de datos. También se debe mencionar que, en la práctica, se utilizan técnicas distintas del proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt para calcular la factorización *QR* de una matriz.

2 Matrices ortogonales y cambio de base

Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base ordenada del espacio vectorial V. Recuerde que la matriz de coordenadas de un vector $\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n$ en V es el vector columna

$$[\mathbf{x}]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Si B' es otra base de V, entonces la matriz de transición P de B' a B transforma una matriz de coordenadas relativas a B' en una matriz de coordenadas relativas a B.

$$P[\mathbf{x}]_{B'} = [\mathbf{x}]_B.$$

La cuestión que debe explorar ahora es si existen matrices de transición P que conserven la longitud de la matriz de coordenadas, es decir, dada $P[\mathbf{x}]_{B'} = [\mathbf{x}]_B$, ¿es cierto que $\|[\mathbf{x}]_{B'}\| = \|[\mathbf{x}]_B\|$?

Por ejemplo, considere la matriz de transición del ejemplo 5 de la sección 4.7,

$$P = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

relativa a la base de R^2,

$$B = \{(-3, 2), (4, -2)\} \quad \text{y} \quad B' = \{(-1, 2), (2, -2)\}.$$

Si $\mathbf{x} = (-1, 2)$, entonces $[\mathbf{x}]_{B'} = [1 \quad 0]^T$ y $[\mathbf{x}]_B = P[\mathbf{x}]_{B'} = [3 \quad 2]^T$. (Verifique esto.) Así, usando la norma euclidiana para R^2,

$$\|[\mathbf{x}]_{B'}\| = 1 \neq \sqrt{13} = \|[\mathbf{x}]_B\|.$$

Puede ver en este proyecto que si la matriz de transición P es ortogonal, entonces la norma del vector de coordenadas permanece sin cambios. Recordará haber trabajado con matrices ortogonales en la Sección 3.3 (Ejercicios 71-79) y la Sección 5.3 (Ejercicio 67).

Definición de una matriz ortogonal

La matriz cuadrada P es **ortogonal** si es invertible y $P^{-1} = P^T$.

1. Demuestre que la matriz P definida previamente no es ortogonal.
2. Demuestre que para cualquier número real θ, la matriz

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

es ortogonal.
3. Demuestre que una matriz es ortogonal si y sólo si sus columnas son ortogonales por pares.
4. Demuestre que la inversa de una matriz ortogonal es ortogonal.
5. ¿La suma de matrices ortogonales también es ortogonal? ¿El producto de matrices ortogonales es ortogonal? Ilustre sus respuestas con ejemplos apropiados.
6. Demuestre que si P es una matriz ortogonal de $m \times n$, entonces $\|P\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ para todos los vectores $\mathbf{x}$ en R^n.
7. Verifique el resultado de la parte 6 utilizando las bases $B = \{(1,0), (0,1)\}$ y

$$B' = \left\{\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right\}.$$

Examen acumulativo de capítulos 4 y 5

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

Resuelva este examen para revisar el material en los Capítulos 4 y 5. Después de que lo termine, verifique su trabajo con las respuestas al final del libro.

1. Dados los vectores $\mathbf{v} = (1, -2)$ y $\mathbf{w} = (2, -5)$, encuentre y dibuje cada vector.

(a) $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ (b) $3\mathbf{v}$ (c) $2\mathbf{v} - 4\mathbf{w}$

2. Si es posible, escriba $\mathbf{w} = (2, 4, 1)$ como una combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$. $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 3, 0)$

3. Escriba la tercera columna de la matriz como una combinación lineal de las dos primeras columnas (si es posible).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

4. Use un programa de computación o a aplicación gráfica con capacidades matriciales para escribir $\mathbf{v}$ como una combinación lineal de $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$, $\mathbf{u}_4$, $\mathbf{u}_5$ y $\mathbf{u}_6$. Después verifique su solución.

$\mathbf{v} = (10, 30, -13, 14, -7, 27)$

$\mathbf{u}_1 = (1, 2, -3, 4, -1, 2)$

$\mathbf{u}_2 = (1, -2, 1, -1, 2, 1)$

$\mathbf{u}_3 = (0, 2, -1, 2, -1, -1)$

$\mathbf{u}_4 = (1, 0, 3, -4, 1, 2)$

$\mathbf{u}_5 = (1, -2, 1, -1, 2, -3)$

$\mathbf{u}_6 = (3, 2, 1, -2, 3, 0)$

5. Demuestre que el conjunto de todas las matrices singulares de 3×3 no es un espacio vectorial.

6. Determine si el conjunto es un subespacio de R^4. $\{(x, x + y, y, y): x, y \in R\}$

7. Determine si el conjunto es un subespacio de R^3.

$\{(x, xy, y): x, y \in R\}$

8. Determine si las columnas de la matriz A generan R^4.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9. (a) Defina qué significa el decir que un conjunto de vectores es *linealmente independiente*.

(b) Determine si el conjunto S es linealmente dependiente o independiente.

$S = \{(1, 0, 1, 0), (0, 3, 0, 1), (1, 1, 2, 2), (3, -4, 2, -3)\}$

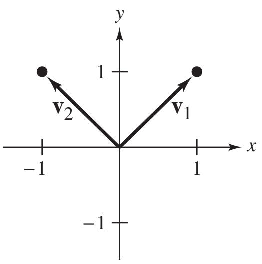


Figura para 10(b)

10. (a) Defina la *base* de un espacio vectorial.

(b) Determine si el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ mostrado en la figura de la izquierda es una base para R^2.

(c) Determine si el conjunto es una base de R^3.

$\{(1, 2, 1), (0, 1, 2), (2, 1, -3)\}$

11. Encuentre una base para el espacio solución de $A\mathbf{x} = 0$ si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

12. Encuentre las coordenadas $[\mathbf{v}]_B$ del vector $\mathbf{v} = (1, 2, -3)$ relativo a la base $B = \{(0, 1, 1), (1, 1, 1), (1, 0, 1)\}$.

13. Encuentre la matriz de transición de la base $B = \{(2, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ a la base $B' = \{(1, 1, 2), (1, 1, 1), (0, 1, 2)\}$.

14. Sea $\mathbf{u} = (1, 0, 2)$ y $\mathbf{v} = (-2, 1, 3)$.

(a) Encuentre $\|\mathbf{u}\|$.

(b) Encuentre la distancia entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

(c) Encuentre $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

(d) Encuentre el ángulo θ entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

15. Encuentre el producto interno de $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 2$ a partir de $C[0, 1]$ usando la integral

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx.$$

16. Use el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt para transformar el siguiente conjunto de vectores en una base ortonormal de R^3.

$\{(2, 0, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 2)\}$

17. Sea $\mathbf{u} = (1, 2)$ y $\mathbf{v} = (-3, 2)$. Encuentre la $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ y grafique $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ en el mismo grupo de ejes coordenados.

18. Encuentre los cuatro subespacios fundamentales de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

19. Encuentre el complemento ortogonal $S^{\perp}$ del conjunto

$$S = \text{Gen}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right).$$

20. Suponga que $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ son vectores linealmente independientes y que $\mathbf{y}$ es un vector no generado en su espacio. Demuestre que los vectores $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ y y son linealmente independientes.

21. Encuentre la recta de regresión por mínimos cuadrados para los puntos $\{(1, 1), (2, 0),(5, -5)\}$. Grafique los puntos y la recta.

22. Dos matrices, A y B, son equivalentes por renglones.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 1 & 7 & 11 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 9 & 12 \\ -1 & 2 & 1 & 3 & -5 & 16 \\ 4 & -8 & 1 & -1 & 6 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Encuentre el rango de A.

(b) Encuentre una base para el espacio renglón de A.

(c) Encuentre una base para el espacio columna de A.

(d) Encuentre una base para el espacio nulo de A.

(e) ¿Está la última columna de A en el espacio generado por las tres primeras?

(f) ¿Son las tres primeras columnas de A linealmente independientes?

(g) ¿Está la última columna de A en el espacio de las columnas 1, 3 y 4?

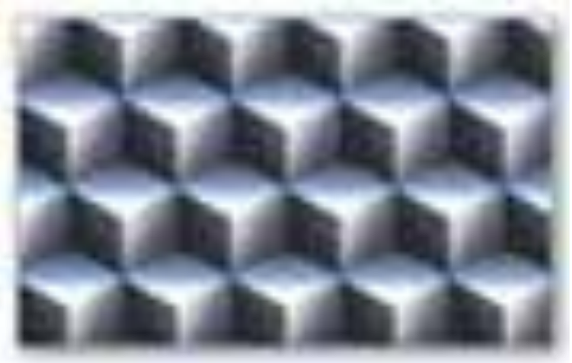
(h) ¿Son las columnas 1, 3 y 4 linealmente dependientes?

23. Sean S_1 y S_2 subespacios de dos dimensiones de R^3. ¿Es posible que $S_1 \cap S_2 = \{(0, 0, 0)\}$? Explique.

24. Sea V un espacio vectorial de dimensión n. Demuestre que cualquier conjunto de menos de n vectores no pueden generar V.

6 Transformaciones lineales

Clima (p. 325)



Gráficas por computadora (p. 332)

Diseño de circuitos (p. 316)

Sistemas de control (p. 308)

Estadística multivariada (p. 298)

En sentido de las manecillas del reloj, desde arriba a la izquierda: Matt Antonino/Shutterstock.Com; Etienne du Preez/shutterstock.com; Mark Yuill/Shutterstock.com; A1Stock /Shutterstock.com; Mau Horng/Shutterstock

6.1 Introducción a las transformaciones lineales

- Encontrar la imagen y preimagen de una función.
- Determinar que una función es una transformación lineal y encontrar una transformación lineal.

IMÁGENES Y PREIMÁGENES DE FUNCIONES

En este capítulo se analizan funciones que **transforman** (o mapean) un espacio vectorial V en un espacio vectorial W. Este tipo de función se denota por

$$T: V \to W.$$

En la que se usa la terminología estándar para funciones. Por ejemplo, V se llama **dominio** de T y W **codominio** (o contradominio) de T. Si $\mathbf{v}$ está en V y $\mathbf{w}$ está en W tal que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$, entonces $\mathbf{w}$ se llama **imagen** de $\mathbf{v}$ bajo T. El conjunto de todas las imágenes de los vectores en V se llama **rango** de T y el conjunto de todos los $\mathbf{v}$ en V tales que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ se denomina **preimagen** de $\mathbf{w}$. (Véase la figura 6.1.)

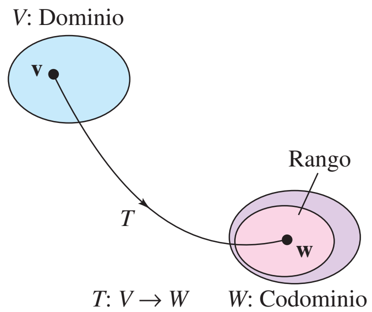


Figura 6.1

EJEMPLO 1 **Una función de R^2 a R^2**

Para todo vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ en R^2, sea $T: R^2 \to R^2$ definida por

$$T(v_1, v_2) = (v_1 - v_2, v_1 + 2v_2).$$

a. Determine la imagen de $\mathbf{v} = (-1, 2)$.

b. Determine la imagen de $\mathbf{v} = (0, 0)$.

c. Encuentre la preimagen de $\mathbf{w} = (-1, 11)$.

COMENTARIO

Para un vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ en R^n, sería técnicamente correcto usar un doble paréntesis para denotar $T(\mathbf{v})$ como $T(\mathbf{v}) = T((v_1, v_2, \ldots, v_n))$. Por conveniencia, sin embargo, se elimina un conjunto de paréntesis, para que quede

$$T(\mathbf{v}) = T(v_1, v_2, \ldots, v_n).$$

SOLUCIÓN

a. Para $\mathbf{v} = (-1, 2)$ se tiene

$$T(-1, 2) = (-1 - 2, -1 + 2(2)) = (-3, 3).$$

b. Si $\mathbf{v} = (0, 0)$ entonces

$$T(0, 0) = (0 - 0, 0 + 2(0)) = (0, 0).$$

c. Si $T(\mathbf{v}) = (v_1 - v_2, v_1 + 2v_2) = (-1, 11)$, entonces

$$\begin{aligned} v_1 - v_2 &= -1 \\ v_1 + 2v_2 &= 11. \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones tiene la solución única $v_1 = 3$ y $v_2 = 4$. Por tanto, la preimagen de $(-1, 11)$ es el conjunto en R^2 que consta solamente del vector $(3, 4)$.

TRANSFORMACIONES LINEALES

En este capítulo, la atención se centra en funciones (de un espacio vectorial a otro) que conservan las operaciones de suma vectorial y multiplicación escalar. Estas funciones se llaman **transformaciones lineales**.

Definición de transformación lineal

Sean V y W espacios vectoriales. La función

$$T: V \to W$$

se llama **transformación lineal** de V en W si las dos propiedades siguientes son verdaderas para todo $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en V y para cualquier escalar c

1. $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$
2. $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$

Se dice que una transformación lineal *conserva operaciones* porque se obtiene el mismo resultado si las operaciones de suma y multiplicación escalar se efectúan antes o después de que se aplique la transformación lineal. Aunque se utilizan los mismos símbolos para denotar las operaciones vectoriales tanto en V como en W, debe observar que las operaciones pueden ser diferentes, como se indica en el siguiente diagrama.

Suma en V | Suma en W | Multiplicación escalar en V | Multiplicación escalar en W

$$T(\underset{\text{Suma en } V}{\mathbf{u} + \mathbf{v}}) = T(\mathbf{u}) \underset{\text{Suma en } W}{+} T(\mathbf{v}) \qquad T(\underset{\substack{\text{Multiplicación}\\ \text{escalar en } V}}{c\mathbf{u}}) = \underset{\substack{\text{Multiplicación}\\ \text{escalar en } W}}{cT(\mathbf{u})}$$

EJEMPLO 2 Comprobación de una transformación lineal de R^2 a R^2

Demuestre que la función dada en el ejemplo 1 es una transformación lineal de R^2 a R^2.

$$T(v_1, v_2) = (v_1 - v_2, v_1 + 2v_2)$$

SOLUCIÓN

Para demostrar que la función T es una transformación lineal es necesario probar que conserva la suma vectorial y la multiplicación escalar. Para tal fin, sean $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ y $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ dos vectores en R^2 y sea c cualquier número real. Entonces, con las propiedades de suma vectorial y de multiplicación escalar se tiene lo siguiente.

1. Dado que $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$, se tiene

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= T(u_1 + v_1, u_2 + v_2) \\ &= ((u_1 + v_1) - (u_2 + v_2), (u_1 + v_1) + 2(u_2 + v_2)) \\ &= ((u_1 - u_2) + (v_1 - v_2), (u_1 + 2u_2) + (v_1 + 2v_2)) \\ &= (u_1 - u_2, u_1 + 2u_2) + (v_1 - v_2, v_1 + 2v_2) \\ &= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

COMENTARIO

Para una transformación lineal $T: \mathbf{V} \to V$ de un espacio vectorial a sí mismo (como en el ejemplo 2) se llama **operador lineal**.

2. Dado que $c\mathbf{u} = c(u_1, u_2) = (cu_1, cu_2)$, se tiene

$$\begin{aligned} T(c\mathbf{u}) &= T(cu_1, cu_2) \\ &= (cu_1 - cu_2, cu_1 + 2cu_2) \\ &= c(u_1 - u_2, u_1 + 2u_2) \\ &= cT(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Por consiguiente, T es una transformación lineal.

La mayoría de las funciones comunes estudiadas en cálculo no son transformaciones lineales.

EJEMPLO 3 Algunas funciones que no son transformaciones lineales

a. $f(x) = \text{sen } x$ no es una transformación lineal de R en R, porque, en general sen $(x_1 + x_2) \neq \text{sen } x_1 + \text{sen } x_2$. Por ejemplo,

$$\text{sen}[(\pi/2) + (\pi/3)] \neq \text{sen}(\pi/2) + \text{sen}(\pi/3).$$

b. $f(x) = x^2$ no es una transformación lineal de R en R, porque, en general, $(x_1 + x_2) \neq x_1^2 + x_2^2$. Por ejemplo, $(1 + 2)^2 \neq 1^2 + 2^2$.

c. $f(x) = x + 1$ no es una transformación lineal de R en R porque

$$f(x_1 + x_2) = x_1 + x_2 + 1$$

en tanto que

$$f(x_1) + f(x_2) = (x_1 + 1) + (x_2 + 1) = x_1 + x_2 + 2.$$

así, $f(x_1 + x_2) \neq f(x_1) + f(x_2)$.

COMENTARIO

La función del ejemplo 3(c) indica dos usos del término *lineal*. En cálculo, $f(x) = x + 1$ se llama función lineal porque su gráfica es una recta. Sin embargo, no es una transformación lineal del espacio vectorial R en R porque no conserva la suma ni la multiplicación escalares.

Dos transformaciones lineales simples son la **transformación cero** y la **transformación identidad**, que se definen como sigue.

1. $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, para todo $\mathbf{v}$ Transformación cero ($T: V \to W$)
2. $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$, para todo $\mathbf{v}$ Transformación identidad ($T: V \to V$)

Las comprobaciones de la linealidad de estas dos transformaciones se dejan como ejercicios. (Véase el ejercicio 77.)

Observe que la transformación lineal del ejemplo 1 tiene la propiedad de que el vector cero se transforma en sí mismo. Es decir, $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, como se muestra en el ejemplo 1(b). Esta propiedad es verdadera para todas las transformaciones lineales, como se plantea en el siguiente teorema.

COMENTARIO

Otra ventaja del teorema 6.1 es que proporciona un método rápido para identificar funciones que no son transformaciones lineales. Es decir, como una transformación lineal debe cumplir las cuatro condiciones del teorema, se concluye que si una función T no satisface cualquiera de las propiedades, entonces la función no es una transformación lineal. Por ejemplo, la función dada por

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + 1, x_2)$$

no es una transformación lineal de R^2 a R^2 porque $T(0, 0) \neq (0, 0)$.

TEOREMA 6.1 Propiedades de las transformaciones lineales

Sea T una transformación lineal de V en W, donde $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están en V. Entonces, las propiedades siguientes son verdaderas.

1. $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$
2. $T(-\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v})$
3. $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})$
4. If $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$, entonces
$T(\mathbf{v}) = T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n) = c_1T(\mathbf{v}_1) + c_2T(\mathbf{v}_2) + \cdots + c_nT(\mathbf{v}_n)$.

DEMOSTRACIÓN

Para demostrar la primera propiedad, observe que $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Entonces, se concluye que

$$T(\mathbf{0}) = T(0\mathbf{v}) = 0T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}.$$

La segunda propiedad se concluye de $-\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v}$, que implica que

$$T(-\mathbf{v}) = T[(-1)\mathbf{v}] = (-1)T(\mathbf{v}) = -T(\mathbf{v}).$$

La tercera propiedad se concluye de que $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$, que implica que

$$T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T[\mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}] = T(\mathbf{u}) + (-1)T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v}).$$

La demostración de la cuarta propiedad se deja como ejercicio.

La propiedad 4 del teorema 6.1 establece que una transformación lineal $T: V \to W$ es determinada completamente por su efecto sobre una base de V. En otras palabras, si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base para el espacio vectorial V y si $T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \ldots, T(\mathbf{v}_n)$, están dadas, entonces $T(\mathbf{v})$ está definida para *cualquier* $\mathbf{v}$ en V. El uso de esta propiedad se muestra en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Transformaciones lineales y bases

Sea $T: R^3 \to R^3$ una transformación lineal tal que

$$\begin{aligned} T(1, 0, 0) &= (2, -1, 4) \\ T(0, 1, 0) &= (1, 5, -2) \\ T(0, 0, 1) &= (0, 3, 1). \end{aligned}$$

Determine $T(2, 3, -2)$.

SOLUCIÓN

Dado que $(2, 3, -2) = 2(1, 0, 0) + 3(0, 1, 0) - 2(0, 0, 1)$, entonces la propiedad 4 del teorema 6.1 se puede usar para escribir

$$\begin{aligned} T(2, 3, -2) &= 2T(1, 0, 0) + 3T(0, 1, 0) - 2T(0, 0, 1) \\ &= 2(2, -1, 4) + 3(1, 5, -2) - 2(0, 3, 1) \\ &= (7, 7, 0). \end{aligned}$$

En el siguiente ejemplo se usa una matriz para definir una transformación lineal de R^2 a R^3. El vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ se escribe en forma matricial como

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

de modo que es posible multiplicarlo *a la izquierda* por una matriz de orden 3×2.

EJEMPLO 5 Transformación lineal definida por una matriz

La función $T: R^2 \to R^3$ se define como

$$T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

a. Determine $T(\mathbf{v})$, donde $\mathbf{v} = (2, -1)$.

b. Demuestre que T es una transformación lineal de R^2 a R^3.

SOLUCIÓN

a. Dado que $\mathbf{v} = (2, -1)$, se tiene

$$T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \underset{\text{Vector en } R^2}{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}} = \underset{\text{Vector en } R^3}{\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}}.$$

Por consiguiente, se tiene que $T(2, -1) = (6, 3, 0)$.

b. Comience por observar que T mapea un vector en R^2 a un vector en R^3. Para demostrar que T es una transformación lineal use las propiedades de la multiplicación de matrices, como se estableció en el teorema 2.3. Para cualesquiera vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en R^2, la propiedad distributiva de la multiplicación matricial sobre la Suma produce:

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}).$$

De manera semejante, para todo vector $\mathbf{u}$ en R^2 y cualquier escalar c, la propiedad conmutativa de la multiplicación escalar con la multiplicación de matrices produce

$$T(c\mathbf{u}) = A(c\mathbf{u}) = c(A\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u}).$$

El ejemplo 5 ilustra un resultado importante relacionado con la representación de las transformaciones lineales de R^n a R^m. Este resultado se presenta en dos etapas. El teorema 6.2 establece que toda matriz de $m \times n$ representa una transformación lineal de R^n a R^m. Luego, en la sección 6.3 se demostrará lo contrario: que toda transformación lineal de R^n a R^m puede representarse como una matriz de $m \times n$.

Observe que en el inciso (b) del ejemplo 5 no se hace ninguna referencia a la matriz específica a. Por consiguiente, esta comprobación sirve como demostración general del hecho de que la función definida para cualquier matriz de $m \times n$ es una transformación lineal de R^n a R^m.

COMENTARIO

La matriz cero de $m \times n$ corresponde a la transformación cero de R^n a R^m y la matriz identidad I_n de $n \times n$ corresponde a la transformación identidad de R^n a R^n.

TEOREMA 6.2 La transformación lineal definida por una matriz

Sea a una matriz de $m \times n$. La función T definida por

$$T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$$

es una transformación lineal de R^n a R^m. Para formar la multiplicación matricial con una matriz de $m \times n$, los vectores en R^n se representan por matrices de $n \times 1$ y los vectores en R^m se representan por matrices de $m \times 1$.

Asegúrese de comprender que una matriz a de $m \times n$ define una transformación lineal de R^n a R^m.

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}}_{\text{Vector en } R^n} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \cdots + a_{mn}v_n \end{bmatrix}}_{\text{Vector en } R^m}.$$

EJEMPLO 6 Transformaciones lineales dadas por matrices

La transformación lineal $T: R^n \rightarrow R^m$ está definida por $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$. Determine la dimensión de R^n y R^m para la transformación lineal dada por las siguientes matrices.

a. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ **b.** $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ **c.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

SOLUCIÓN

a. Dado que el tamaño de esta matriz es 3×3, define una transformación lineal de R^3 a R^3.

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}}_{\text{Vector en } R^2} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}}_{\text{Vector en } R^2}$$

b. Como el tamaño de esta matriz es 3×2, esta define una transformación de R^2 a R^3.

c. Puesto que el tamaño de esta matriz es 2×4, define una transformación de R^4 a R^2.

En el siguiente ejemplo se analiza un tipo común de transformación lineal de R^2 a R^2.

EJEMPLO 7 Rotación en R^2

Demuestre que la transformación lineal $T: R^2 \to R^2$ dada por la matriz

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

tiene la propiedad de rotar todo vector en R^2 en sentido contrario al de las manecillas del reloj con respecto al origen un ángulo θ.

SOLUCIÓN

Por el teorema 6.2 se sabe que T es una transformación lineal. Para demostrar que rota todo vector en R^2 un ángulo θ en sentido contrario al de las manecillas del reloj, se considera $\mathbf{v} = (x, y)$ un vector en R^2. Usando coordenadas polares $\mathbf{v}$ se puede expresar como

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (x, y) \\ &= (r\cos\alpha, r\operatorname{sen}\alpha) \end{aligned}$$

donde r es la longitud de $\mathbf{v}$ y α es el ángulo descrito en sentido contrario al de las manecillas del reloj al vector $\mathbf{v}$. Luego, al aplicar la transformación lineal T a $\mathbf{v}$ se obtiene

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}) &= A\mathbf{v} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r\cos\alpha \\ r\operatorname{sen}\alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r\cos\theta\cos\alpha - r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha \\ r\operatorname{sen}\theta\cos\alpha + r\cos\theta\operatorname{sen}\alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r\cos(\theta + \alpha) \\ r\operatorname{sen}(\theta + \alpha) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por consiguiente, el vector $T(\mathbf{v})$ tiene la misma longitud que $\mathbf{v}$. además, dado que el ángulo desde el eje x positivo a $T(\mathbf{v})$ es

$$\theta + \alpha$$

entonces $T(\mathbf{v})$ es el vector que se obtiene al rotar el vector $\mathbf{v}$ en sentido contrario al de las manecillas del reloj un ángulo θ, como se observa en la figura 6.2.

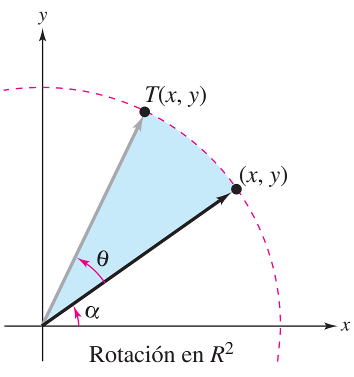


Figura 6.2

La transformación lineal del ejemplo 7 se llama **rotación** en R^2. Las rotaciones en R^2 conservan tanto la longitud vectorial como el ángulo entre dos vectores. Es decir, el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es igual al ángulo entre $T(\mathbf{u})$ y $T(\mathbf{v})$.

EJEMPLO 8 Una proyección en R^3

La transformación lineal $T: R^3 \to R^3$ representada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

se llama **proyección** en R^3. Si $\mathbf{v} = (x, y, z)$ es un vector en R^3, entonces $T(\mathbf{v}) = (x, y, 0)$. En otras palabras, T mapea todo vector en R^3 en su proyección ortogonal en el plano xy, como se muestra en la figura 6.3.

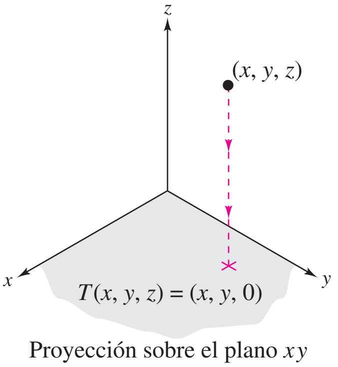


Figura 6.3

Hasta el momento sólo se han analizado transformaciones lineales de R^n a R^m o de R^n a R^n. En el resto de esta sección se considerarán algunas transformaciones lineales que implican otros espacios vectoriales diferentes de R^n.

EJEMPLO 9 Transformación lineal de $M_{m,n}$ a $M_{n,m}$

Sea $T: M_{m,n} \to M_{n,m}$ la función que mapea una matriz a de $m \times n$ en su transpuesta. Es decir,

$$T(A) = A^T.$$

Demuestre que T es una transformación lineal.

SOLUCIÓN

Sean A y B matrices de $m \times n$. Por el teorema 2.6 se tiene

$$T(A + B) = (A + B)^T = A^T + B^T = T(A) + T(B)$$

y

$$T(cA) = (cA)^T = c(A^T) = cT(A).$$

Por consiguiente, T es una transformación lineal de $M_{m,n}$ en $M_{n,m}$.

ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

Muchos métodos estadísticos multivariados pueden usar transformaciones lineales. Por ejemplo, en un *análisis de regresión múltiple*, existen dos o más variables independiente y una única variable dependiente. Una transformación lineal es útil para determinar las ponderaciones a asignar a las variables independientes para predecir el valor de la variable dependiente. A su vez, en un *análisis de la correlación canónica*, también existen dos o más variables independientes y dos o más variables dependientes. Las transformaciones lineales pueden ayudar a encontrar una combinación lineal de las variables independientes para predecir el valor de una combinación lineal de las variables dependientes.

wrangler/Shutterstock.com

EJEMPLO 10 El operador diferencial (cálculo)

Sea $C'[a, b]$ el conjunto de todas las funciones cuyas derivadas son continuas en $[a, b]$. Demuestre que el operador diferencial D_x define una transformación lineal de $C'[a, b]$ a $C[a, b]$.

SOLUCIÓN

Usando notación de operadores se escribe

$$D_x(f) = \frac{d}{dx}[f]$$

donde f está en $C'[a, b]$. Para demostrar que D_x es una transformación lineal se recurre al cálculo. Específicamente, como la derivada de la suma de dos funciones es igual a la suma de las derivadas de éstas, se tiene

$$D_x(f + g) = \frac{d}{dx}[f + g] = \frac{d}{dx}[f] + \frac{d}{dx}[g] = D_x(f) + D_x(g)$$

donde g también está en $C'[a, b]$. De manera semejante, debido a que la derivada de un múltiplo escalar de una función es igual al múltiplo escalar de la derivada, se tiene

$$D_x(cf) = \frac{d}{dx}[cf] = c\left(\frac{d}{dx}[f]\right) = cD_x(f).$$

Dado que la suma de dos funciones continuas es continua y dado que el múltiplo escalar de una función continua es continua, D_x es una transformación lineal de $C'[a, b]$ a $C[a, b]$.

La transformación lineal D_x del ejemplo 10 se llama **operador diferencial**. Para polinomios, el operador diferencial es una transformación lineal de P_n a P_{n-1} porque la derivada de un polinomio de grado n es un polinomio de grado menor o igual que $n - 1$. Es decir,

$$D_x(a_nx^n + \cdot\cdot\cdot + a_1x + a_0) = na_nx^{n-1} + \cdot\cdot\cdot + a_1.$$

El siguiente ejemplo describe una transformación lineal del espacio vectorial de funciones polinominales P en el espacio vectorial de los números reales R.

EJEMPLO 11 La integral definida como una transformación lineal (cálculo)

Sea $T{:}P \to R$ definida por

$$T(p) = \int_a^b p(x)\, dx$$

donde p es una función polinominal. Demuestre que T es una transformación lineal de P, el espacio vectorial de funciones polinómicas, en R, el espacio vectorial de números reales.

SOLUCIÓN

Por medio de las propiedades de las integrales definidas se puede escribir

$$T(p + q) = \int_a^b [p(x) + q(x)]\, dx = \int_a^b p(x)\, dx + \int_a^b q(x)\, dx = T(p) + T(q)$$

donde q es una función polinominal, y

$$T(cp) = \int_a^b [cp(x)]\, dx = c\int_a^b p(x)\, dx = cT(p).$$

Por consiguiente, T es una transformación lineal.

6.1 Ejercicios

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

Determinación de una imagen y una preimagen En los ejercicios 1 a 8 use la función dada para encontrar (a) la imagen de **v** y (b) la preimagen de **w**.

1. $T(v_1, v_2) = (v_1 + v_2, v_1 - v_2)$, $\mathbf{v} = (3, -4)$, $\mathbf{w} = (3, 19)$

2. $T(v_1, v_2) = (2v_2 - v_1, v_1, v_2)$, $\mathbf{v} = (0, 6)$, $\mathbf{w} = (3, 1, 2)$

3. $T(v_1, v_2, v_3) = (v_2 - v_1, v_1 + v_2, 2v_1)$, $\mathbf{v} = (2, 3, 0)$, $\mathbf{w} = (-11, -1, 10)$

4. $T(v_1, v_2, v_3) = (2v_1 + v_2, 2v_2 - 3v_1, v_1 - v_3)$, $\mathbf{v} = (-4, 5, 1)$, $\mathbf{w} = (4, 1, -1)$

5. $T(v_1, v_2, v_3) = (4v_2 - v_1, 4v_1 + 5v_2)$, $\mathbf{v} = (2, -3, -1)$, $\mathbf{w} = (3, 9)$

6. $T(v_1, v_2, v_3) = (2v_1 + v_2, v_1 - v_2)$, $\mathbf{v} = (2, 1, 4)$, $\mathbf{w} = (-1, 2)$

7. $T(v_1, v_2) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}v_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}v_2, v_1 + v_2, 2v_1 - v_2\right)$, $\mathbf{v} = (1, 1)$, $\mathbf{w} = \left(-5\sqrt{2}, -2, -16\right)$

8. $T(v_1, v_2) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2, v_1 - v_2, v_2\right)$, $\mathbf{v} = (2, 4)$, $\mathbf{w} = \left(\sqrt{3}, 2, 0\right)$

Transformaciones lineales En los ejercicios 9 a 22, determine si la función dada es una transformación lineal.

9. $T: R^2 \to R^2$, $T(x, y) = (x, 1)$

10. $T: R^2 \to R^2$, $T(x, y) = (x^2, y)$

11. $T: R^3 \to R^3$, $T(x, y, z) = (x + y, x - y, z)$

12. $T: R^3 \to R^3$, $T(x, y, z) = (x + 1, y + 1, z + 1)$

13. $T: R^2 \to R^3$, $T(x, y) = \left(\sqrt{x}, xy, \sqrt{y}\right)$

14. $T: R^2 \to R^3$, $T(x, y) = \left(x^2, xy, y^2\right)$

15. $T: M_{2,2} \to R$, $T(A) = |A|$

16. $T: M_{2,2} \to R$, $T(A) = a + b + c + d$, donde $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

17. $T: M_{2,2} \to R$, $T(A) = a + b - c + d$, donde $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

18. $T: M_{2,2} \to R$, $T(A) = b^2$, donde $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

19. $T: M_{3,3} \to M_{3,3}$, $T(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} A$

20. $T: M_{3,3} \to M_{3,3}$, $T(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} A$

21. $T: P_2 \to P_2$, $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_0 + a_1 + a_2) + (a_1 + a_2)x + a_2x^2$

22. $T: P_2 \to P_2$, $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + 2a_2x$

23. Sea T una transformación lineal de R^2 a R^2 tal que $T(1, 0) = (1, 1)$ y $T(0, 1) = (-1, 1)$. Encuentre $T(1, 4)$ y $T(-2, 1)$.

24. Sea T una transformación lineal de R^2 a R^2 tal que $T(1, 1) = (1, 0)$ y $T(1, -1) = (0, 1)$. Halle $T(1, 0)$ y $T(0, 2)$.

Transformación lineal y bases En los ejercicios 25 a 28, la transformación lineal $T: R^2 \to R^3$ está definida por $T(1, 0, 0) = (2, 4, -1)$, $T(0, 1, 0) = (1, 3, -2)$ y $T(0, 0, 1) = (0, -2, 2)$. Encuentre la imagen indicada.

25. $T(0, 3, -1)$

26. $T(2, -1, 0)$

27. $T(2, -4, 1)$

28. $T(-2, 4, -1)$

Transformación lineal y bases En los ejercicios 29 a 32, la transformación lineal $T: R^3 \to R^3$ está definida por $T(1, 1, 1) = (2, 0, -1)$, $T(0, -1, 2) = (-3, 2, -1)$ y $T(1, 0, 1) = (1, 1, 0)$. Encuentre la imagen indicada.

29. $T(2, 1, 0)$

30. $T(0, 2, -1)$

31. $T(2, -1, 1)$

32. $T(-2, 1, 0)$

Transformación lineal dada por una matriz En los ejercicios 33 a 38, la transformación lineal $T: R^n \to R^m$, está definida por $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$. Encuentre las dimensiones de R^n y R^m.

33. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

34. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

35. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

36. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

37. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

38. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

39. Para la transformación lineal dada en el ejercicio 33, halle (a) $T(1, 1)$, (b) la preimagen de $(1, 1)$ y (c) la preimagen de $(0, 0)$.

40. **Escriba** Para la transformación lineal dada en el ejercicio 34, encuentre (a) $T(2, 4)$, (b) la preimagen de $(-1, 2, 2)$ y (c) a continuación explique por qué el vector $(1, 1, 1)$ no tiene preimagen bajo esta transformación.

41. Para la transformación lineal dada en el ejercicio 35 encuentre (a) $T(1, 1, 1, 1)$ y (b) la preimagen de $(1, 1, 1, 1)$.

42. Para la transformación lineal dada en el ejercicio 36, determine (a) $T(1, 0, -1, 3, 0)$ y (b) la preimagen de $(-1, 8)$.

43. Para la transformación lineal dada en el ejercicio 37, encuentre a) $T(1, 0, 2, 3)$ y b) la preimagen de $(0, 0, 0)$.

44. Para la transformación lineal del Ejercicio 38, encuentre (a) $T(1, 0, 1, 0, 1)$, (b) la preimagen de $(0, 0, 0)$ y (c) la preimagen de $(1, 1, 1)$.

45. Sea T la transformación lineal de R^2 a R^2 definida por $T(x, y) = (x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta, x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta)$.

Determine (a) $T(4, 4)$ para $\theta = 45°$, (b) $T(4, 4)$ para $\theta = 30°$ y (c) $T(5, 0)$ para $\theta = 120°$.

46. Para la transformación lineal del ejercicio 45, sea $\theta = 45°$ y determine la preimagen de $\mathbf{v} = (1, 1)$.

47. Encuentre la inversa de la matriz A dada en el ejemplo 7. ¿Qué transformación lineal de R^2 en R^2 representa A^{-1}?

48. Para la transformación lineal $T: R^2 \to R^2$ dada por

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

encuentre a y b tal que $T(12, 5) = (13, 0)$.

Proyección en R^3 En los Ejercicios 49 y 50, suponga que la matriz A representa la transformación lineal $T: R^3 \to R^3$. Describa la proyección ortogonal para la cual T mapea cada vector en R^3.

49. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **50.** $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Transformación lineal dada por una matriz En los ejercicios 51-54, determine si la función que implica a la matriz A de $n \times n$ es una transformación lineal.

51. $T: M_{n,n} \to M_{n,n}$, $T(A) = A^{-1}$

52. $T: M_{n,n} \to M_{n,n}$, $T(A) = AX - XA$, donde X es una matriz fija $n \times m$

53. $T: M_{n,n} \to M_{n,m}$, $T(A) = AB$, donde B es una matriz fija $n \times m$

54. $T: M_{n,n} \to R$, $T(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cdots \cdot a_{nn}$, donde $A = [a_{ij}]$

55. Sea T una transformación lineal de P_2 a P_2 tal que $T(1) = x$, $T(x) = 1 + x$ y $T(x^2) = 1 + x + x^2$. Determine $T(2 - 6x + x_2)$.

56. Sea T una transformación lineal de $M_{2,2}$ a $M_{2,2}$ tal que

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Encuentre $T\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\right)$.

Cálculo En los ejercicios 57 a 60, sea D_x la transformación lineal de $C'[a, b]$ a $C[a, b]$ dada en el ejemplo 10. ¿Cuál de las siguientes expresiones es verdadera? Explique su razonamiento.

57. $D_x(e^{x^2} + 2x) = D_x(e^{x^2}) + 2D_x(x)$

58. $D_x(x^2 - \ln x) = D_x(x^2) - D_x(\ln x)$

59. $D_x(\operatorname{sen} 2x) = 2D_x(\operatorname{sen} x)$

60. $D_x\left(\cos \dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1}{2} D_x(\cos x)$

Cálculo En los ejercicios 61 a 64, para la transformación lineal del ejemplo 10, determine la preimagen de cada función.

61. $D_x(f) = 2x + 1$ **62.** $D_x(f) = e^x$

63. $D_x(f) = \operatorname{sen} x$ **64.** $D_x(f) = \dfrac{1}{x}$

65. **Cálculo** Sea T la transformación lineal de P a R definida por

$$T(p) = \int_0^1 p(x)\, dx.$$

Encuentre (a) $T(3x^2 - 2)$, (b) $T(x^3 - x^5)$ y (c) $T(4x - 6)$.

66. **Cálculo** Sea T la transformación lineal de P a R definida por la integral del ejercicio 65. Determine la preimagen de 1. Es decir, encuentre las funciones polinominales de grado menor o igual que dos tales que $T(p) = 1$.

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 67 y 68, determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, proporcione una razón o cite una expresión adecuada del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que muestre que la expresión no es cierta en todos los casos o cite del texto una expresión adecuada.

67. (a) La función $f(x) = \cos x$ es una trasformación lineal de R a R.

(b) Para polinomios, el operador diferencial D_x es una transformación lineal de P_n a P_{n-1}.

68. (a) La función $g(x) = x^3$ es una transformación lineal de R a R.

(b) Cualquier función lineal de la forma $f(x) = ax + b$ es una transformación lineal de R a R.

69. Escriba Suponga $T: R^2 \to R^2$ tal que $T(1, 0) = (1, 0)$ y $T(0, 1) = (0, 0)$.

(a) Determine $T(x, y)$ para (x, y) en R^2.

(b) Dé una interpretación geométrica de T.

70. Escriba Suponga $T: R^2 \to R^2$ tal que $T(1, 0) = (0, 1)$ y $T(0, 1) = (1, 0)$

(a) Determine $T(x, y)$ para (x, y) en R^2.

(b) Dé una descripción geométrica de T.

71. Prueba Sea T la función de R^2 que mapea R^2 tal que $T(\mathbf{u}) = \text{proj } \mathbf{u}$, donde $\mathbf{v} = (1, 1)$.

(a) Determine $T(x, y)$. (b) Determine $T(5, 0)$

(c) Demuestre que T es una transformación lineal de R^2 en R^3.

72. Escriba Determine $T(3, 4)$ y $T(T(3, 4))$ del ejercicio 71 y dé una interpretación geométrica del resultado.

73. Demuestre que T del ejercicio 71 está definida por la matriz

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

74. REMATE Explique cómo determinar si una función $T: V \to W$ es una transformación lineal.

75. Demostración Utilice el concepto de punto fijo de una transformación lineal $T: V \to V$. Un vector $\mathbf{u}$ es un **punto fijo** si $T(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$.

(a) Demuestre que $\mathbf{0}$ es un punto fijo de cualquier transformación lineal $T: V \to V$.

(b) Demuestre que el conjunto de puntos fijos de una transformación lineal $T: V \to V$ es un subespacio de V.

(c) Determine todos los puntos fijos de la transformación lineal $T: R^2 \to R^2$ dada por $T(x, y) = (x, 2y)$.

(d) Determine todos los puntos fijos de la transformación lineal $T: R^2 \to R^2$ dada por $T(x, y) = (y, x)$.

76. Una **traslación** en R^2 es una función de la forma $T(x, y) = (x - h, y - k)$, donde por lo menos una de las constantes h o k es diferente de cero.

(a) Muestre que una traslación en R^2 en el plano no es una transformación lineal.

(b) Para la traslación $T(x, y) = (x - 2, y + 1)$, determine las imagenes de $(0, 0)$, $(2, -1)$ y $(5, 4)$.

(c) Muestre que una traslación en R^2 en el plano no tiene puntos fijos.

77. Prueba Demuestre que (a) la transformación cero y (b) la transformación identidad son transformaciones lineales.

78. Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes en R^3. Determine una transformación lineal T de R^3 a R^3 tal que el conjunto $\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), T(\mathbf{v}_3)\}$ sea linealmente dependiente.

79. Prueba Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un conjunto de vectores linealmente dependientes en V y sea T una transformación lineal de V a V. Demuestre que el conjunto

$\{T(\mathbf{v}_1), T(\mathbf{v}_2), \ldots, T(\mathbf{v}_n)\}$

es linealmente dependiente.

80. Prueba Sea V un espacio con producto interior. Para un vector fijo $\mathbf{v}_0$ en V, defina $T: V \to R$ por $T(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle$. Demuestre que T es una transformación lineal.

81. Prueba Sea $T: M_{n,n} \to R$ definida por

$T(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$

(traza de A). Demuestre que T es una transformación lineal.

82. Sea V en espacio con producto interior con un subespacio W que tiene a $B = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ como una base ortonormal. Demuestre que la función $T: V \to W$ dada por $T(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_2 \rangle \mathbf{w}_2 + \cdots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_n \rangle \mathbf{w}_n$ es una transformación lineal. T se llama **proyección ortogonal de V sobre W**.

83. Demostración guiada Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base de un espacio vectorial V. Demuestre que si una transformación lineal $T: V \to V$ satisface $T(\mathbf{v}_i) = \mathbf{0}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces T es la transformación cero.

Inicio: para demostrar que T es la transformación cero, usted necesita demostrar que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ para todo vector $\mathbf{v}$ en V.

(i) Sea $\mathbf{v}$ un vector arbitrario en V tal que

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n.$$

(ii) Use la definición y las propiedades de las transformaciones lineales para reescribir $T(\mathbf{v})$ como una combinación lineal de $T(\mathbf{v}_i)$.

(iii) Use el hecho de que $T(\mathbf{v}i) = \mathbf{0}$ para concluir que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ haciendo T la transformación cero.

84. Demostración guiada Demuestre que $T: V \to W$ es una transformación lineal si y sólo si

$T(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = aT(\mathbf{u}) + bT(\mathbf{v})$

para todos los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ y todos los escalares a y b.

Inicio: como se trata de un enunciado "si y sólo si", necesita demostrar la expresión en ambas direcciones. Para probar que T es una transformación lineal es necesario que demuestre que la función satisface la definición de transformación lineal. En la otra dirección, suponga que T es una transformación lineal. Puede usar la definición y las propiedades de una transformación lineal para demostrar que $T(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = aT(\mathbf{u}) + bT(\mathbf{v})$.

(i) Suponga que $T(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = aT(\mathbf{u}) + bT(\mathbf{v})$. Demuestre que T conserva las propiedades de la suma vectorial y la multiplicación escalar al seleccionar los valores adecuados de a y b.

(ii) Para demostrar el enunciado en la otra dirección, suponga que T es una transformación lineal. Utilice las propiedades y la definición de una transformación lineal para demostrar que $T(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = aT(\mathbf{u}) + bT(\mathbf{v})$.

6.2 El kernel y el rango de una transformación lineal

- Encontrar el kernel de una transformación lineal.
- Encontrar una base para el rango, la nulidad y el rango de una transformación lineal.
- Determinar si una transformación lineal es uno a uno o sobre.
- Determine si los espacios vectoriales son isomórficos.

EL KERNEL DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Por el teorema 6.1, usted sabe que para cualquier transformación lineal $T: V \to W$, el vector cero en V mapea el vector cero en W. Es decir, $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. La primera cuestión que se abordará en esta sección es si existen *otros* vectores $\mathbf{v}$ tales que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. El conjunto de todos estos elementos se denomina **kernel** de T. Observe que se utiliza el símbolo $\mathbf{0}$ para representar el vector cero tanto en V como en W, aunque a menudo estos dos vectores cero son diferentes entre sí.

Definición del kernel de una transformación lineal

Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Entonces, el conjunto de todos los vectores en V que cumplen $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ se denomina **kernel** de T y se denota por $\ker(T)$.

Algunas veces el kernel de una transformación es evidente y es posible determinarlo por inspección, como se muestra en los ejemplos 1, 2, y 3.

EJEMPLO 1 Determinación del kernel de una transformación lineal

Sea $T: M_{3,2} \to M_{2,3}$ la transformación lineal que mapea una matriz A de 3×2 en su transpuesta. Es decir, $T(a) = A^T$. Encuentre el kernel de T.

SOLUCIÓN

Para esta transformación lineal, es evidente que la matriz cero de 3×2 es la única matriz en $M_{3,2}$ cuya transpuesta es la matriz cero en $M_{2,3}$. Por consiguiente, el kernel de T consta de un solo elemento: la matriz cero en $M_{3,2}$. ■

EJEMPLO 2 El kernel de las transformaciones cero e identidad

a. El kernel de la transformación cero $T: V \to W$ consta de todo V porque $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ para todo vector $\mathbf{v}$ en V. Es decir, $\ker(T) = V$.

b. El kernel de la transformación identidad $T: V \to V$ consta sólo del elemento cero. Es decir, $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$. ■

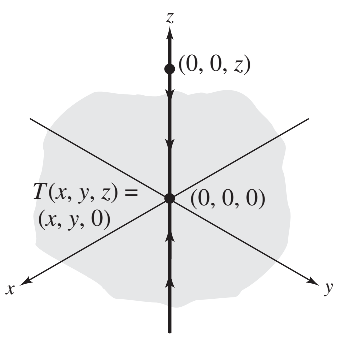
EJEMPLO 3 Determinación del kernel de una transformación lineal

Determine el kernel de la proyección $T: R^3 \to R^3$ dada por $T(x, y, z) = (x, y, 0)$.

SOLUCIÓN

Esta transformación lineal proyecta el vector (x, y, z) en R^3 en el vector $(x, y, 0)$ del plano xy. Por consiguiente, el kernel consta de todos los vectores que se encuentran sobre el eje z. Es decir,

$$\ker(T) = \{(0, 0, z): z \text{ es un número real}\}. \text{ (Véase la figura 6.4.)}$$ ■



El kernel de T es el conjunto de todos los vectores en el eje z

Figura 6.4

Hallar los kerneles de las transformaciones lineales de los ejemplos 1, 2 y 3 es relativamente fácil. Por lo general, el kernel de una transformación lineal no es tan evidente y su determinación requiere algo de trabajo, como se ilustra en los dos ejemplos siguientes.

EJEMPLO 4 Determinación del kernel de una transformación lineal

Encuentre el kernel de una transformación lineal $T: R^2 \to R^3$ definida por

$$T(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, 0, -x_1).$$

SOLUCIÓN

Para encontrar ker(T) es necesario determinar todos los $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ en R^2 tales que

$$T(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, 0, -x_1) = (0, 0, 0).$$

Lo anterior conduce al siguiente sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ -x_1 \quad\;\; &= 0 \end{aligned}$$

cuya única solución es la trivial $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Por tanto, se tiene

$$\ker(T) = \{(0, 0)\} = \{\mathbf{0}\}.$$

EJEMPLO 5 Determinación del kernel de una transformación lineal

Encuentre el kernel de la transformación lineal $T: R^3 \to R^2$ definida por $T(\mathbf{x}) = a\mathbf{x}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN

El kernel de T es el conjunto de todos los $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ en R^3 tales que $T(x_1, x_2, x_3) = (0, 0)$. A partir de esta ecuación se obtiene el siguiente sistema homogéneo.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 - x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Al escribir la matriz aumentada de este sistema en forma escalonada reducida se obtiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= x_3 \\ x_2 &= -x_3. \end{aligned}$$

Con el parámetro $t = x_3$ se obtiene la familia de soluciones

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

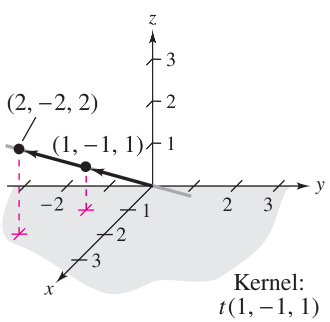


Figura 6.5

Por tanto, el kernel de T es

$\ker(T) = \{t(1, –1, 1): t$ es un número real$\} =$ espacio$\{(1, –1, 1)\}$. (Véase la Figura 6.5.)

Observe que en el ejemplo 5 el kernel de T contiene infinidad de vectores. Por supuesto, el vector cero está en ker(T), aunque el kernel también contiene vectores diferentes de cero como (1, –1, 1) y (2, –2, 2), como se ilustra en la figura 6.5. En esta figura se muestra que este kernel en particular es una recta que pasa por el origen, lo cual implica que es un subespacio de R^3. En el siguiente teorema se demuestra que el kernel de toda transformación lineal $T: V \to W$ es un subespacio de V.

TEOREMA 6.3 El kernel es un subespacio de V

El kernel de la transformación lineal $T: V \rightarrow W$ es un subespacio del dominio V.

DEMOSTRACIÓN

Del teorema 6.1 se sabe que $\ker(T)$ es un subconjunto no vacío de V. Por consiguiente, por el teorema 4.5 se puede demostrar que $\ker(T)$ es un subespacio de V al demostrar que es cerrado bajo la suma vectorial y la multiplicación escalar. Para efectuar lo anterior, sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores en el kernel de T. Entonces, $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$, lo cual implica que $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ está en el kernel. Además, si c es cualquier escalar, entonces $T(c\mathbf{u}) = c\mathbf{T}(\mathbf{u}) = c\mathbf{0} = \mathbf{0}$, lo cual implica que $c\mathbf{u}$ está en el kernel.

COMENTARIO

El kernel de T algunas veces se denomina **espacio nulo** de T.

El siguiente ejemplo muestra cómo encontrar una base para el kernel de una transformación definida por una matriz.

EJEMPLO 6 Determinando la base para el Kernel

Sea $T: R^5 \rightarrow R^4$ definida por $T(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x})$, donde $\mathbf{x}$ está en R^5 y

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Determine una base para $\ker(T)$ como subespacio de R^5.

SOLUCIÓN

Siguiendo el procedimiento mostrado en el ejemplo 5, la matriz aumentada $[a \quad \mathbf{0}]$ se reduce a la forma escalonada como se muestra a continuación.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} x_1 &= -2x_3 + x_5 \\ x_2 &= x_3 + 2x_5 \\ x_4 &= -4x_5 \end{aligned}$$

Con $x_3 = s$ y $x_5 = t$, se tiene

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s + t \\ s + 2t \\ s + 0t \\ 0s - 4t \\ 0s + t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, una base para el kernel de T está dada por $B = \{(-2, 1, 1, 0, 0), (1, 2, 0, -4, 1)\}$.

DESCUBRIMIENTO

1. ¿Cuál es el rango de la matriz A en el ejemplo 6?
2. Formule una conjetura relacionada con la dimensión del kernel, el rango y el número de columnas de A.
3. Verifique su conjetura para la matriz en el ejemplo 5.

En la solución dada en el ejemplo 6 se encontró una base para el kernel de T al resolver el sistema homogéneo dado por $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Este procedimiento es conocido: se trata del mismo procedimiento aplicado para hallar el *espacio solución* del $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. En otras palabras, el kernel de T es el espacio nulo de la matriz A, como se afirma en el siguiente corolario del teorema 6.3.

Corolario del Teorema 6.3

Sea $T: R^n \rightarrow R^m$ la transformación lineal definida por $T(\mathbf{x}) = a\mathbf{x}$. Entonces el kernel de T es igual al espacio solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

EL RANGO DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

El kernel es uno de los dos subespacios críticos asociados con una transformación lineal. El segundo es el **rango** (o alcance) de T, denotado por rango(T). Recuerde de la sección 6.1 que el rango de $T: V \to W$ es el conjunto de vectores $\mathbf{w}$ en W que son imágenes de vectores en V. Es decir,

$$\text{rango}(T) = \{T(\mathbf{v}): \mathbf{v} \text{ está en } V\}.$$

TEOREMA 6.4 El rango de T es un subespacio de W

El rango de una transformación lineal $T: V \to W$ es un subespacio de W.

DEMOSTRACIÓN

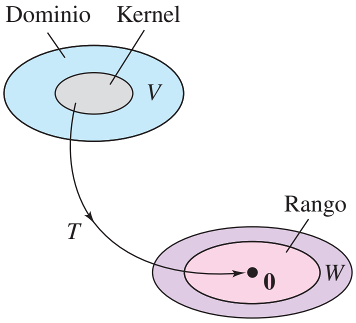


Figura 6.6

El rango de T es no vacío porque $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ implica que el rango contiene al vector cero. Para demostrar que es cerrado bajo la suma vectorial, sean $T(\mathbf{u})$ y $T(\mathbf{v})$ vectores en el rango de T. Como $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están en V, se concluye que también $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ está en V. Entonces, la suma

$$T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{u} + \mathbf{v})$$

está en el rango T.

Para demostrar la cerradura bajo la multiplicación escalar, sea $T(\mathbf{u})$ un vector T y sea c un escalar. Como $\mathbf{u}$ está en V, se deduce que también lo está $c\mathbf{u}$. Por tanto, el múltiplo escalar $cT(\mathbf{u}) = T(c\mathbf{u})$ está en el rango de T.

Observe que el kernel y el rango de una transformación lineal $T: V \to W$ son subespacios de V y W, respectivamente, como se ilustra en la figura 6.6.

Para hallar una base para el rango de una transformación lineal definida por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, se observa que el rango consta de todos los vectores $\mathbf{b}$ tales que el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente. al escribir el sistema

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

en la forma

$$A\mathbf{x} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

se observa que $\mathbf{b}$ pertenece al rango de T si y sólo si $\mathbf{b}$ es una combinación lineal de los vectores columna de A. Por tanto, *el espacio generado por las columnas de A es el mismo que el rango de T.*

Corolario del Teorema 6.4

Sea $T: R^n \to R^m$ la transformación lineal definida por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Entonces, el espacio generado por las columnas de A es igual al rango de T.

Ejemplos 4 y 5 en la Sección 4.6 usted vio dos procedimientos para determinar una base para el espacio generado por las columnas de una matriz. En el siguiente ejemplo se aplica dicho procedimiento, ejemplo 5 en la Sección 4.6 para encontrar una base para el rango de una transformación lineal definida por una matriz.

EJEMPLO 7 Determinación de una base para el rango de una transformación lineal

Para la transformación lineal $T: R^5 \to R^4$ dada en el ejemplo 6, encuentre una base para el rango de T.

SOLUCIÓN

La forma escalonada de A ya se calculó en el ejemplo 6.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como los 1 principales aparecen en las columnas 1, 2 y 4 de la matriz reducida de la derecha, los correspondientes vectores columna de A forman una base del espacio columna de A. Una base del rango de T es

$$B = \{(1, 2, -1, 0), (2, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 2)\}.$$

COMENTARIO

Si T está definida por la matriz A, entonces el rango de T es igual al rango de A, y la nulidad de T es igual a la nulidad de A, como se definió en la sección 4.6.

A continuación se dan los nombres para las dimensiones del kernel y rango de una transformación lineal.

Definición del rango y la nulidad de una transformación lineal

Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. La dimensión del kernel de T se llama **nulidad** de T y se denota como **nulidad** (T). La dimensión del rango de T se denomina **rango** de T y se denota como **rango** (T).

En los ejemplos 6 y 7 se relacionan la nulidad y el rango de T con la dimensión del dominio como se muestra a continuación.

$$\text{rango}(T) + \text{nulidad}(T) = 3 + 2 = 5 = \text{dimensión del dominio}$$

Esta relación es verdadera para cualquier transformación lineal de un espacio vectorial de dimensión finita, como se establece en el siguiente teorema.

TEOREMA 6.5 Suma del rango y la nulidad

Sea $T: V \to W$ una transformación lineal de un espacio vectorial V n-dimensional a un espacio vectorial W. Entonces, la suma de las dimensiones del rango y el kernel es igual a la dimensión del dominio. Es decir,

$$\text{rango}(T) + \text{nulidad}(T) = n \quad \text{o} \quad \text{dim(rango)} + \text{dim(kernel)} = \text{dim(dominio)}.$$

DEMOSTRACIÓN

La demostración dada aquí cubre el caso en que T esté representada por una matriz A de $m \times n$. El caso general se tratará en la siguiente sección, en la que podrá observar que cualquier transformación lineal de un espacio n-dimensional en un espacio m-dimensional puede representarse por una matriz. Para demostrar este teorema se supone que el rango de la matriz A es r. Entonces, se tiene

$$\text{rango}(T) = \text{dim(rango de } T) = \text{dim(espacio columna)} = \text{rango}(A) = r.$$

Sin embargo, por el teorema 4.17 se sabe que

$$\text{nulidad}(T) = \text{dim(kernel de } T) = \text{dim(espacio solución) de } A\mathbf{x} = \mathbf{0} = n - r.$$

Por lo tanto, se concluye que $\text{rango}(T) + \text{nulidad}(T) = r + (n - r) = n$.

EJEMPLO 8 **Determinación del rango y la nulidad de una transformación lineal**

Encuentre el rango y la nulidad de T. Sea $T: R^3 \to R^3$ una transformación lineal definida por la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN

Dado que A está en forma escalonada por renglones y contiene dos renglones diferentes de cero, su rango es igual a 2. Así el rango de T es 2 y la nulidad es dim(dominio) – rango $= 3 - 2 = 1$

Una forma de visualizar la relación entre el rango y la nulidad de una transformación lineal dada por una matriz es observar que el rango es determinado por el número de 1 principales y la nulidad por el número de variables libres (columnas sin los 1 principales). Su suma debe ser el número total de columnas de la matriz, que es la dimensión del dominio. En el ejemplo 8, las primeras dos columnas tienen 1 principales, lo que indica que el rango es 2. La tercera columna corresponde a la variable libre, lo que significa que la nulidad es 1.

EJEMPLO 9 **Determinación del rango y la nulidad de una transformación lineal**

Sea $T: R^5 \to R^7$ una transformación lineal.

a. Encuentre la dimensión del kernel de T si la dimensión del rango es 2.

b. Encuentre el rango de T si la nulidad de T es 4.

c. Encuentre el rango de T si $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$.

SOLUCIÓN

a. Por el teorema 6.5, con $n = 5$, se tiene

$$\dim(\text{kernel}) = n - \dim(\text{rango}) = 5 - 2 = 3.$$

b. De nuevo por el teorema 6.5, se tiene

$$\text{rango}(T) = n - \text{nulidad}(T) = 5 - 4 = 1.$$

c. En este caso, la nulidad de T es 0. Por tanto,

$$\text{rango}(T) = n - \text{nulidad}(T) = 5 - 0 = 5.$$

ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

Un sistema de control, como el que se muestra para una fábrica de lácteos, procesa una señal de entrada $\mathbf{x}_k$ y produce una señal de salida $\mathbf{x}_{k+1}$. Sin retroalimentación externa, la **ecuación en diferencias**

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$$

una transformación lineal donde $\mathbf{x}_i$ es un vector de $n \times 1$ y A es una matriz de $n \times n$, pueden modelar la relación entre las señales de entrada y salida. Típicamente, sin embargo, un sistema de control tiene retroalimentación externa, por lo que la relación se vuelve

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k + B\mathbf{u}_k$$

donde B es una matriz de $n \times m$ y $\mathbf{u}_k$ es un vector de entrada, o control, de $m \times 1$. Un sistema se denomina *controlable* cuando puede alcanzar cualquier estado final deseado de su estado inicial en n o menos pasos. Si A y B forman un sistema controlable, entonces el rango de la *matriz de controlabilidad*

$$[B \quad AB \quad A^2B \quad . . . \quad A^{n-1}B]$$

es igual a n.

TRANSFORMACIONES LINEALES UNO A UNO Y SOBRE

Esta sección empieza con una pregunta: ¿cuántos vectores en el dominio de una transformación lineal son mapeados al vector cero? El teorema 6.6 muestra que si el vector cero es el único vector $\mathbf{v}$ tal que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, entonces T es uno a uno. Una función $T: V \to W$ se denomina **uno a uno** si la preimagen de todo $\mathbf{w}$ en el rango consta de un solo vector, como se observa en la figura 6.7. Esto equivale a decir que T es uno a uno si y sólo si para todo $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en V, $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$ implica que $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

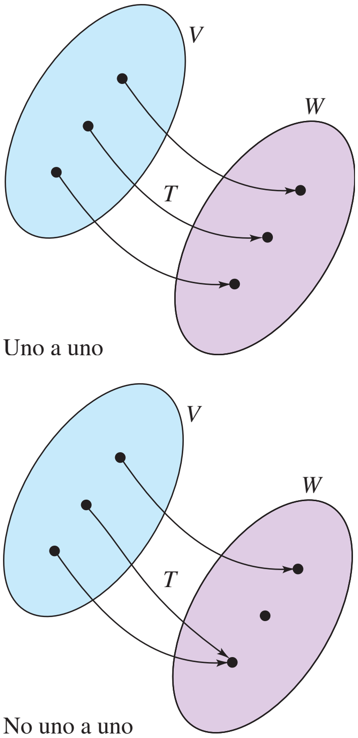


Figura 6.7

> **TEOREMA 6.6 Transformaciones lineales uno a uno**
>
> Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Entonces T es uno a uno si y sólo si $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$.

DEMOSTRACIÓN

Suponga que T es uno a uno. Entonces $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ puede tener sólo una solución: $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. En esta caso, $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$. A la inversa, suponga que $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$ y que $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$. Como T es una transformación lineal, se concluye que

$$T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}.$$

Esto implica que el vector $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ está en el kernel de T y que debe ser igual a 0. Así, $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, y se concluye que T es uno a uno.

EJEMPLO 10 Transformaciones lineales uno a uno y no uno a uno

a. La transformación lineal $T: M_{m,n} \to M_{n,m}$, definida por $T(A) = A^T$, es uno a uno, ya que su kernel consta solamente de la matriz cero de $m \times n$.

b. La transformación cero $T: R^3 \to R^3$ no es uno a uno, ya que su kernel consta de todo R^3.

Se dice que una función $T: V \to W$ es **sobre** si todo elemento en W tiene una preimagen en V. En otras palabras, T es sobre W cuando W es igual al rango de T. La demostración del siguiente teorema relacionado se deja como ejercicio (véase el ejercicio 65.)

TEOREMA 6.7 Transformaciones lineales sobre

Sea $T: V \to W$ una transformación lineal, donde W es de dimensión finita. Entonces T es sobre si y sólo si el rango de T es igual a la dimensión de W.

Para espacios vectoriales de dimensiones iguales, se puede combinar los resultados de los teoremas 6.5, 6.6 y 6.7 para obtener el siguiente teorema que relaciona los conceptos de uno a uno y sobre.

TEOREMA 6.8 Transformaciones lineales uno a uno y sobre

Sea $T: V \to W$ una transformación lineal en la que tanto el espacio vectorial V como W son de dimensión n. Entonces T es uno a uno si y sólo si es sobre.

DEMOSTRACIÓN

Si T es uno a uno, entonces por el teorema 6.6 se tiene que $\ker(T) = \{\mathbf{0}\}$ y $\dim(\ker(T)) = 0$. En este caso, por el teorema 6.5 se obtiene

$$\dim(\text{rango de } T) = n - \dim(\ker(T)) = n = \dim(W).$$

En consecuencia, por el teorema 6.7, T es sobre. De manera semejante, si T es sobre, entonces

$$\dim(\text{rango de } T) = \dim(W) = n,$$

lo cual, por el teorema 6.5, implica que $\dim(\ker(T)) = 0$. Por tanto, en virtud del teorema 6.6, T es uno a uno.

El siguiente ejemplo reúne varias ideas relacionadas con el kernel y el rango de una transformación lineal.

EJEMPLO 11 Resumen de varios resultados

La transformación lineal $T: R^n \to R^m$ está definida por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Encuentre la nulidad y el rango de T y determine si T es uno a uno, sobre o ninguna de las dos.

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **b.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ **d.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

SOLUCIÓN

Observe que cada matriz ya está en forma escalonada, de modo que el rango puede determinarse por inspección.

$T: R^n \to R^m$	Dim(dominio)	Dim(rango) Rango(T)	Dim(kernel) Nulidad(T)	Uno a uno	Sobre
a. $T: R^3 \to R^3$	3	3	0	Sí	Sí
b. $T: R^2 \to R^3$	2	2	0	Sí	No
c. $T: R^3 \to R^2$	3	2	1	No	Sí
d. $T: R^3 \to R^3$	3	2	1	No	No

ISOMORFISMOS DE ESPACIOS VECTORIALES

Espacios vectoriales diferentes como R^3 y $M_{3,1}$ pueden concebirse como "son esencialmente lo mismo con respecto a sus operaciones estándar". Dichos espacios se denominan **isomorfos** entre sí. (La palabra griega *isos* significa "igual".)

Definición de isomorfismo

Una transformación lineal $T: V \to W$ que es uno a uno y sobre se denomina **isomorfismo**. Además, si V y W son espacios vectoriales tales que existen un isomorfismo de V a W, entonces se dice que V y W son **isomorfos** entre sí.

Los espacios vectoriales isomórficos son de la misma dimensión finita y los espacios vectoriales de la misma dimensión finita son isomórficos, como afirma el siguiente teorema.

TEOREMA 6.9 Espacios isomorfos y dimensión

Dos espacios vectoriales de dimensión finita, V y W, son isomorfos si y sólo si tienen la misma dimensión.

DEMOSTRACIÓN

Suponga que V es isomorfo a W, donde la dimensión de V es n. Por la definición de espacios isomorfos, se sabe que existe una transformación lineal $T: V \to W$ uno a uno y sobre. Dado que T es uno a uno, se concluye que dim(kernel) $= 0$, lo cual también implica que

$$\text{dim(rango)} = \text{dim(dominio)} = n.$$

Además, debido a que T es sobre se puede concluir que dim(rango) $=$ dim(W) $= n$.

Para demostrar el teorema en la otra dirección se supone que tanto V como W tienen dimensión n. Sean $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base de V y $B' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ una base de W. Entonces, un vector arbitrario de V puede representarse como

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdot\cdot\cdot + c_n\mathbf{v}_n$$

y se puede definir una transformación lineal $T: V \to W$ como sigue.

$$T(\mathbf{v}) = c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \cdot\cdot\cdot + c_n\mathbf{w}_n$$

Se puede demostrar que esta transformación lineal es uno a uno y sobre. Por tanto, V y W son isomorfos.

COMENTARIO

En nuestro estudio de espacios vectoriales se ha dado mucha mayor cobertura a R^n que a cualquier otro espacio vectorial. Esta preferencia por R^n resulta de su conveniencia notacional y de los modelos geométricos disponibles para R^2 y R^3.

En el ejemplo 12 se enumeran algunos espacios vectoriales isomorfos a R^4.

EJEMPLO 12 Espacios vectoriales isomorfos

Los siguientes espacios vectoriales son isomorfos entre sí.

a. R^4 = espacio 4
b. $M_{4,1}$ = espacio de todas las matrices de 4×1
c. $M_{2,2}$ = espacio de todas las matrices de 2×2
d. P_3 = espacio de todos los polinomios de grado menor o igual que 3
e. $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, 0): x_i \text{ es un número real}\}$ (subespacio de R^5)

El ejemplo 12 establece que los elementos de los espacios enumerados se comportan de la misma forma que los vectores.

6.2 Ejercicios

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

Determinación del kernel de una transformación lineal En los ejercicios 1 a 10, encuentre el kernel de la transformación lineal.

1. $T: R^3 \to R^3, T(x, y, z) = (0, 0, 0)$
2. $T: R^3 \to R^3, T(x, y, z) = (x, 0, z)$
3. $T: R^4 \to R^4, T(x, y, z, w) = (y, x, w, z)$
4. $T: R^3 \to R^3, T(x, y, z) = (z, y, x)$
5. $T: P_3 \to R, T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_0$
6. $T: P_2 \to R, T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0$
7. $T: P_2 \to P_1, T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + 2a_2x$
8. $T: P_3 \to P_2,$
   $T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2$
9. $T: R^2 \to R^2, T(x, y) = (x + 2y, y - x)$
10. $T: R^2 \to R^2, T(x, y) = (x - y, y - x)$

Determinación de bases para el kernel y el rango En los ejercicios 11 a 18, la transformación lineal T está definida por $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$. Encuentre una base para (a) el kernel de T y (b) el rango de T.

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
12. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$
13. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$
14. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$
15. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
16. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
17. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ -4 & -3 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
18. $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Determinación de kernel, nulidad, rango y rango En los ejercicios 19 a 30, la transformación lineal T está definida por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Determine (a) ker($T$), (b) nulidad($T$), (c) rango($T$) y (d) rango ($T$).

19. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
20. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -9 & -6 \end{bmatrix}$
21. $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
22. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$
23. $A = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$
24. $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{26} & -\frac{5}{26} \\ -\frac{5}{26} & \frac{25}{26} \end{bmatrix}$
25. $A = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$
26. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
27. $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 11 \end{bmatrix}$
28. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
29. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 & 1 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -5 & 0 & 14 \\ 6 & 6 & -2 & 4 & 16 \end{bmatrix}$
30. $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 & -1 & 15 \\ 4 & 3 & 8 & 10 & -14 \\ 2 & -3 & 4 & -4 & 20 \end{bmatrix}$

Determinación de la nulidad y describir el kernel y rango En los ejercicios 31 a 38, sea $T: R^3 \to R^3$ una transformación lineal. Use la información proporcionada para hallar la nulidad de T y dé una descripción geométrica del kernel y el rango de T.

31. rango(T) = 2
32. rango(T) = 1
33. rango(T) = 0
34. rango(T) = 3
35. T es la rotación de 45° en sentido contrario al de las manecillas del reloj con respecto al eje z:
    $$T(x, y, z) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y, \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y, z\right)$$
36. T es la reflexión con respecto al plano de coordenadas yz:
    $T(x, y, z) = (-x, y, z)$
37. T es la proyección sobre el vector $\mathbf{v} = (1, 2, 2)$:
    $$T(x, y, z) = \frac{x + 2y + 2z}{9}(1, 2, 2)$$
38. T es la proyección sobre el plano de coordenadas xy:
    $T(x, y, z) = (x, y, 0)$

Determinación de la nulidad de una transformación lineal En los ejercicios 39 a 42, determine la nulidad de T.

39. $T: R^4 \to R^2$, rango$(T) = 2$
40. $T: R^5 \to R^2$, rango$(T) = 2$
41. $T: R^4 \to R^4$, rango$(T) = 0$
42. $T: P_3 \to P_1$, rango$(T) = 2$

Verificación de que T sea uno a uno y sobre En los ejercicios 43 a 46, compruebe que la matriz dada define una función lineal T uno a uno y sobre.

43. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
44. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

45. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **46.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

Determinar si *T* es uno a uno, sobre o ninguno de los dos En los Ejercicios 47 a 50, determine si la transformación lineal es uno a uno, sobre o ninguno de los dos.

47. T como se da en el ejercicio 3

48. T como se da en el ejercicio 10

49. $T: R^2 \to R^3$, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, donde A está dada en el ejercicio 21

50. $T: R^5 \to R^3$, $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, donde A está dada en el ejercicio 18

51. Identifique el elemento cero y una base estándar para cada uno de los espacios isomorfos del ejemplo 12.

52. ¿Cuáles de los siguientes espacios vectoriales son isomorfos a R^4?

(a) $M_{2,3}$ (b) P_6 (c) $C[0, 6]$

(d) $M_{6,1}$ (e) P_5

(f) $\{(x_1, x_2, x_3, 0, x_5, x_6, x_7): x_i \text{ es un número real}\}$

53. Cálculo Sea $T: P_4 \to P_3$ definida por $T(p) = p'$. ¿Cuál es el kernel de T?

54. Cálculo Sea $T: P_2 \to R$ definida por

$$T(p) = \int_0^1 p(x)\,dx.$$

¿Cuál es el kernel de T?

55. Sea $T: R^3 \to R^3$ la transformación lineal que proyecta $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v} = (2, -1, 1)$.

(a) Determine el rango y la nulidad de T.

(b) Determine una base para el kernel de T.

56. Repita el ejercicio 55 para $\mathbf{v} = (3, 0, 4)$.

57. Para la transformación $T: R^n \to R^n$ definida por $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$, ¿qué puede decir acerca del rango de T si (a) $\det(A) \neq 0$ y (b) $\det(a) = 0$?

58. REMATE Considere la transformación lineal $T: R^4 \to R^3$ representada por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Encuentre la dimensión del dominio.

(b) Encuentre la dimensión del rango.

(c) Encuentre la dimensión del kernel.

(d) ¿Es T uno a uno? Explique.

(e) ¿Es T sobre? Explique.

(f) ¿Es T un isomorfismo? Explique.

59. Sea $T: M_{n,n} \to M_{n,n}$ definida por $T(A) = A - A^T$. Demuestre que el kernel de T es el conjunto de las matrices simétricas de $n \times n$.

60. Determine una relación entre m, n, j y k tal que $M_{m,n}$ sea isomorfo a $M_{j,k}$.

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 61 y 62, determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, proporcione una razón o cite una expresión adecuada del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que muestre que la expresión no es cierta en todos los casos o cite del texto una expresión adecuada.

61. (a) Al conjunto de todos los vectores mapeados de un espacio vectorial V a otro espacio vectorial W por una transformación lineal T, se le conoce como kernel de T.

(b) El rango de una transformación lineal desde un espacio vectorial V a un espacio vectorial W es un subespacio del espacio vectorial V.

(c) Los espacios vectoriales R^3 y $M_{3,1}$ son isomorfos uno de otro.

62. (a) La dimensión de una transformación lineal T de un espacio vectorial V a un espacio vectorial W se llama rango de T.

(b) Una transformación lineal T de V a W es uno a uno si y sólo si la preimagen de toda $\mathbf{w}$ en el rango consta de un solo vector $\mathbf{v}$.

(c) Los espacios vectoriales R^2 y P_1 son isomorfos uno de otro.

63. Demostración guiada Sea B una matriz invertible de $n \times n$. Demuestre que la transformación lineal $T: M_{n,n} \to M_{n,n}$ definida por $T(A) = AB$ es un isomorfismo.

Inicio: para demostrar que la transformación lineal es un isomorfismo, usted debe probar que T es sobre y uno a uno.

(i) Como T es una transformación lineal con espacios vectoriales de igual dimensión, entonces por el teorema 6.8, sólo requiere demostrar que T es uno a uno.

(ii) Para demostrar que T es uno a uno, debe determinar el kernel de T y probar que éste es $\{\mathbf{0}\}$ (teorema 6.6). Use el hecho de que B es una matriz invertible de $n \times n$ y que $T(A) = AB$.

(iii) Concluya que T es un isomorfismo.

64. Prueba Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Demuestre que T es uno a uno si y sólo si el rango de T es igual a la dimensión de V.

65. Prueba Demuestre el Teorema 6.7.

66. Prueba Sea $T: V \to W$ una transformación lineal y sea u un subespacio de W. Demuestre que el conjunto $T^{-1}(U) = \{\mathbf{v} \in V: T(\mathbf{v}) \in U\}$ es un subespacio de V. ¿Qué es $T^{-1}(U)$ si $U = \{\mathbf{0}\}$?

67. Escriba Sea $T: R^m \to R^n$ una transformación lineal. Explique las diferencias entre los conceptos uno a uno y sobre. ¿Qué puede decir acerca de m y n acerca de T es sobre? ¿Qué puede decir de m y n si T es uno a uno?

6.3 Matrices de transformaciones lineales

- Encontrar la matriz estándar para una transformación lineal.
- Encontrar la matriz estándar para la composición de transformaciones lineales y encontrar la inversa de una transformación lineal invertible.
- Encontrar la matriz para una transformación lineal respecto a una base no estándar.

LA MATRIZ ESTÁNDAR PARA UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

¿Cuál de las siguientes representaciones de $T: R^3 \to R^3$ es mejor?

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 - x_3, -x_1 + 3x_2 - 2x_3, 3x_2 + 4x_3)$$

o

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}?$$

La segunda presentación es mejor que la primera al menos por tres razones: es más fácil de escribir, más fácil de leer y se adapta con mayor facilidad para ser utilizada en computadora. Más tarde se verá que la representación matricial de una transformación lineal también ofrece algunas ventajas teóricas. En esa sección se verá que para transformaciones lineales que implican espacios vectoriales de dimensión finita la representación matricial siempre es posible.

La clave para representar una transformación lineal $T: V \to W$ por medio de una matriz es determinar cómo actúa T sobre una base de V. Una vez que se conoce la imagen de todo vector de la base es posible aplicar las propiedades de las transformaciones lineales para determinar $T(\mathbf{v})$ para todo $\mathbf{v}$ en V.

Recuerde que la base estándar de R^n, escrita en notación vector columna, está definida por

$$B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

TEOREMA 6.10 Matriz estándar de una transformación lineal

Sea $T: R^n \to R^m$ una transformación lineal tal que para los vectores de base estándar $\mathbf{e}_i$ de R^n,

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, T(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, T(\mathbf{e}_n) = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Entonces la matriz de $m \times n$ cuyas n columnas corresponden a $T(\mathbf{e}_i)$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

es tal que $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ para toda $\mathbf{v}$ en R^n. A se denomina **matriz estándar** para T.

DEMOSTRACIÓN

Para demostrar que $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v}$ en R^n se escribe

$$\mathbf{v} = [v_1 \quad v_2 \quad . \; . \; . \quad v_n]^T = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \cdot \cdot \cdot + v_n\mathbf{e}_n.$$

Dado que T es una transformación lineal, se tiene

$$\begin{aligned} T(\mathbf{v}) &= T(v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \cdot \cdot \cdot + v_n\mathbf{e}_n) \\ &= T(v_1\mathbf{e}_1) + T(v_2\mathbf{e}_2) + \cdot \cdot \cdot + T(v_n\mathbf{e}_n) \\ &= v_1T(\mathbf{e}_1) + v_2T(\mathbf{e}_2) + \cdot \cdot \cdot + v_nT(\mathbf{e}_n). \end{aligned}$$

Por otra parte, el producto matricial $A\mathbf{v}$ está dado como

$$\begin{aligned} A\mathbf{v} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + a_{m2}v_2 + \cdots + a_{mn}v_n \end{bmatrix} \\ &= v_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + v_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \\ &= v_1T(\mathbf{e}_1) + v_2T(\mathbf{e}_2) + \cdot \cdot \cdot + v_nT(\mathbf{e}_n). \end{aligned}$$

Por consiguiente, $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ para cada $\mathbf{v}$ en R^n.

EJEMPLO 1 Determinación de la matriz estándar de una transformación lineal

Determine la matriz estándar de la transformación lineal $T: R^3 \rightarrow R^2$ definida por

$$T(x, y, z) = (x - 2y, 2x + y).$$

SOLUCIÓN

Se empieza por encontrar las imágenes de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$.

Notación Vectorial	Notación Matricial
$T(\mathbf{e}_1) = T(1, 0, 0) = (1, 2)$	$T(\mathbf{e}_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
$T(\mathbf{e}_2) = T(0, 1, 0) = (-2, 1)$	$T(\mathbf{e}_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$
$T(\mathbf{e}_3) = T(0, 0, 1) = (0, 0)$	$T(\mathbf{e}_3) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

COMENTARIO

Como verificación, se observa que

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - 2y \\ 2x + y \end{bmatrix}$$

lo cual es equivalente a

$T(x, y, z) = (x - 2y, 2x + y).$

Por el teorema 6.10, las columnas de A constan de $T(\mathbf{e}_1)$, $T(\mathbf{e}_2)$ y $T(\mathbf{e}_3)$, por lo que se tiene

$$A = [T(\mathbf{e}_1) \quad T(\mathbf{e}_2) \quad T(\mathbf{e}_3)] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Con algo de práctica se puede determinar por inspección la matriz estándar de una transformación lineal como la del ejemplo 1. Así, la matriz estándar de la transformación lineal definida por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2 + 5x_3, 2x_1 + 3x_3, 4x_1 + x_2 - 2x_3)$$

se encuentra usando los coeficientes de x_1, x_2 y x_3 para formar los renglones de A como se muestra enseguida.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longleftarrow \quad 1x_1 - 2x_2 + 5x_3 \\ \longleftarrow \quad 2x_1 + 0x_2 + 3x_3 \\ \longleftarrow \quad 4x_1 + 1x_2 - 2x_3 \end{array}$$

EJEMPLO 2 Determinación de la matriz estándar de una transformación lineal

La transformación lineal $T: R^2 \rightarrow R^2$ se obtiene al proyectar cada punto de R^2 sobre el eje x, como se muestra en la figura 6.8. Encuentre la matriz estándar de T.

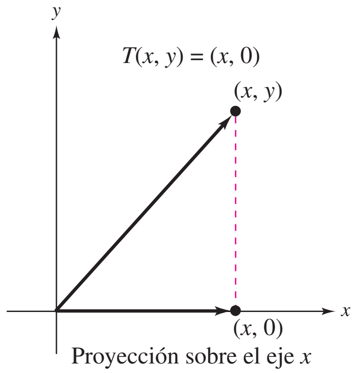


Figura 6.8

SOLUCIÓN

Esta transformación lineal está definida por

$$T(x, y) = (x, 0).$$

así, la matriz estándar de T es

$$A = [T(1, 0) \quad T(0, 1)]$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz estándar de la transformación cero de R^n a R^m es la matriz cero de $m \times n$ y la matriz estándar de la transformación identidad de R^n a R^n es I_n.

ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

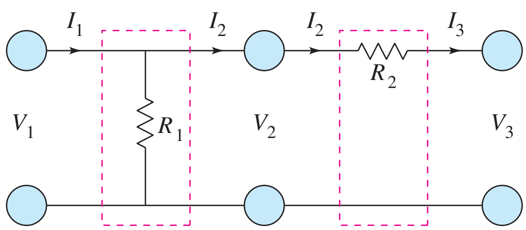
Las redes en escalera son herramientas útiles para los ingenieros eléctricos involucrados en el diseño de circuitos. En una red en escalera, el voltaje de salida V y la corriente I de un circuito son el voltaje de entrada y corriente del circuito contiguo. En la red en escalera que se muestra a continuación, las transformaciones lineales pueden relacionar la entrada y salida de un circuito individual (contenido en una caja punteada). Usando las Leyes de Voltaje y Corriente de Kirchhoff y la Ley de Ohm,

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/R_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} V_3 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -R_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}.$$

Una *composición* puede relacionar la entrada y salida de la red en escalera entera, es decir, V_1 e I_1 a V_3 e I. La discusión de la composición de transformaciones lineales comienza en la siguiente página.



any_keen/Shutterstock.com

COMPOSICIÓN DE TRANSFORMACIONES LINEALES

La **composición,** T, de $T_1: R^n \to R^m$ con $T_2: R^m \to R^p$ se define como

$$T(\mathbf{v}) = T_2(T_1(\mathbf{v}))$$

donde $\mathbf{v}$ es un vector en R^n. Esta composición se denota por

$$T = T_2 \circ T_1.$$

El dominio de T se define como el dominio de T_1. Además, la composición no está definida a menos de que el rango de T_1 esté contenido en el dominio de T_2, como se observa en la figura 6.9.

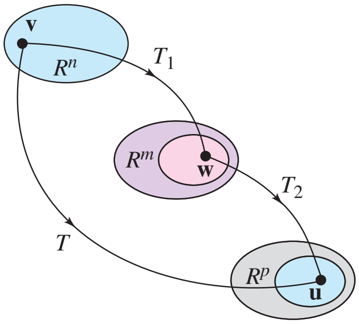


Figura 6.9

El siguiente teorema recalca la utilidad de las matrices para representar transformaciones lineales. El teorema no sólo establece que la composición de dos transformaciones lineales es una transformación lineal, sino también que la matriz estándar de la composición es el producto de las matrices estándar de las dos transformaciones lineales originales.

TEOREMA 6.11 Composición de transformaciones lineales

Sean $T_1: R^n \to R^m$ y $T_2: R^m \to R^p$ transformaciones lineales con matrices estándar A_1 y A_2. La **composición** $T: R^n \to R^p$ definida por $T(\mathbf{v}) = T_2(T_1(\mathbf{v}))$, es una transformación lineal. Además, la matriz estándar A de T está definida como el producto matricial

$$A = A_2 A_1.$$

DEMOSTRACIÓN

Para demostrar que T es una transformación lineal, sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores en R^n y sea c cualquier escalar. Entonces, como T_1 y T_2 son transformaciones lineales, se puede escribir

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= T_2(T_1(\mathbf{u}+\mathbf{v})) \\
&= T_2(T_1(\mathbf{u}) + T_1(\mathbf{v})) \\
&= T_2(T_1(\mathbf{u})) + T_2(T_1(\mathbf{v})) \\
&= T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) \\
T(c\mathbf{v}) &= T_2(T_1(c\mathbf{v})) \\
&= T_2(cT_1(\mathbf{v})) \\
&= cT_2(T_1(\mathbf{v})) \\
&= cT(\mathbf{v}).
\end{aligned}$$

Luego, para demostrar que A_2A_1 es la matriz estándar de T, se aplica la propiedad asociativa de la multiplicación de matrices para escribir

$$T(\mathbf{v}) = T_2(T_1(\mathbf{v})) = T_2(A_1\mathbf{v}) = A_2(A_1\mathbf{v}) = (A_2A_1)\mathbf{v}.$$

El teorema 6.11 puede generalizarse para abarcar la composición de n transformaciones lineales. Es decir, si las matrices estándar de $T_1, T_2, \ldots T_n$ son $A_1, A_2, \ldots, A_n$, entonces la matriz estándar de la composición $T(\mathbf{v}) = T_n(T_{n-1} \cdots (T_2(T_1(\mathbf{v}))) \cdots)$ está definida por $A = A_nA_{n-1} \ldots A_2A_1$.

Dado que la multiplicación de matrices no es conmutativa, el orden es importante al formar la composición de transformaciones lineales. En general, la composición de $T_2 \circ T_1$ no es igual a $T_1 \circ T_2$, como se demuestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 La matriz estándar de una composición

Sean T_1 y T_2 transformaciones lineales de R^3 a R^3 tales que

$$T_1(x, y, z) = (2x + y, 0, x + z) \quad \text{y} \quad T_2(x, y, z) = (x - y, z, y).$$

Determine las matrices estándar de las composiciones $T = T_2 \circ T_1$ y $T' = T_1 \circ T_2$.

SOLUCIÓN

Las matrices estándar de T_1 y T_2 son

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Así, por el teorema 6.11, la matriz estándar de T está definida por

$$\begin{aligned} A &= A_2A_1 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y la matriz estándar de T' está definida por

$$\begin{aligned} A' &= A_2A_1 \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Otra ventaja de la representación matricial es que puede expresar la **inversa** de una transformación lineal. Antes de mostrar cómo funciona esto, se da la siguiente definición.

Definición de transformación lineal inversa

Si $T_1: R^n \to R^n$ y $T_2: R^n \to R^n$ son transformaciones lineales tales que para todo $\mathbf{v}$ en R^n,

$$T_2(T_1(\mathbf{v})) = \mathbf{v} \quad \text{y} \quad T_1(T_2(\mathbf{v})) = \mathbf{v}$$

entonces T_2 se denomina **inversa** de T_1, y se dice que T_1 es **invertible**.

No toda transformación lineal tiene inversa. Si la transformación T_1 es invertible, entonces la inversa es única y se expresa T_1^{-1}.

Así como la inversa de una función de una variable real puede concebirse como si deshiciera lo que hizo la función, la inversa de una transformación lineal T puede concebirse como si deshiciera la mapeo efectuado por T. Por ejemplo, si T es una transformación lineal de R^3 a R^3 tal que

$$T(1, 4, -5) = (2, 3, 1)$$

y si existe T^{-1}, entonces T^{-1} mapea a (2, 3, 1) de regreso a su preimagen bajo T. Es decir,

$$T^{-1}(2, 3, 1) = (1, 4, -5).$$

El siguiente teorema establece que una transformación lineal es invertible si y sólo si es un isomorfismo (uno a uno y sobre). Se le pide que demuestre este teorema en el ejercicio 56.

COMENTARIO

Muchas otras condiciones son equivalentes a las tres mencionadas en este teorema; consulte el resumen de condiciones equivalentes para matrices cuadradas dado en la sección 4.6.

TEOREMA 6.12 Existencia de una transformación inversa

Sea $T: R^n \to R^n$ una transformación lineal con matriz estándar A. Entonces, las condiciones siguientes son equivalentes.

1. T es invertible.
2. T es un isomorfismo.
3. A es invertible.

Además, si T es invertible con matriz estándar A, entonces la matriz estándar de T^{-1} es A^{-1}.

EJEMPLO 4 Determinación de la inversa de una transformación lineal

La transformación lineal $T: R^3 \to R^3$ está definida por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 3x_2 + x_3, 3x_1 + 3x_2 + x_3, 2x_1 + 4x_2 + x_3).$$

Demuestre que T es invertible y encuentre su inversa.

SOLUCIÓN

La matriz estándar de T es

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando las técnicas para la inversión de matrices (vea la sección 2.3), puede encontrar que A es invertible y que su inversa es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Por consiguiente, T es invertible y su matriz estándar es A^{-1}.

Utilizando la matriz estándar para la inversa usted puede determinar la regla para T^{-1} mediante el cálculo de la imagen de un vector arbitrario $\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3)$.

$$A^{-1}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 \\ -x_1 + x_3 \\ 6x_1 - 2x_2 - 3x_3 \end{bmatrix}$$

En otras palabras

$$T^{-1}(x_1, x_2, x_3) = (-x_1 + x_2, -x_1 + x_3, 6x_1 - 2x_2 - 3x_3).$$

BASES NO ESTÁNDAR Y ESPACIOS VECTORIALES EN GENERAL

A continuación se considerará el problema más general de hallar una matriz para una transformación lineal $T: V \to W$, donde B y B' son bases ordenadas de V y W, respectivamente. Recuerde que la matriz de coordenadas de $\mathbf{v}$ con respecto a B se donota por $[\mathbf{v}]_B$. Para representar la transformación lineal T, A debe multiplicarse por una *matriz de coordenadas con respecto a* B. El resultado de la multiplicación es una *matriz de coordenadas con respecto a* B'. Es decir, $[T(\mathbf{v})]_{B'} = a[\mathbf{v}]_B$. A se denomina **matriz de T con respecto a las bases B y B'**.

Para determinar la matriz A se aplica un procedimiento similar al usado para hallar la matriz estándar de T. Es decir, las imágenes de los vectores en B se escriben como matrices de coordenadas con respecto a la base B'. Estas matrices de coordenadas forman las columnas de A.

Matriz de transformación para bases no estándar

Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita con bases B y B', respectivamente, donde

$$B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}.$$

Si $T: V \to W$ es una transformación lineal tal que

$$[T(\mathbf{v}_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, [T(\mathbf{v}_2)]_{B'} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, [T(\mathbf{v}_n)]_{B'} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

entonces la matriz de $m \times n$ cuyas n columnas corresponden a $[T(\mathbf{v}_i)]_{B'}$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

es tal que $[T(\mathbf{v})]_{B'} = A[\mathbf{v}]_B$ para todo $\mathbf{v}$ en V.

EJEMPLO 5 Determinación de una matriz con respecto a bases no estándar

Sea $T: R^2 \to R^2$ una transformación lineal definida por $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 - x_2)$. Encuentre la matriz de T con respecto a las bases

$$B = \{\overset{\mathbf{v}_1}{(1, 2)}, \overset{\mathbf{v}_2}{(-1, 1)}\} \quad \text{y} \quad B' = \{\overset{\mathbf{w}_1}{(1, 0)}, \overset{\mathbf{w}_2}{(0, 1)}\}.$$

SOLUCIÓN

Por definición de T, se tiene

$$T(\mathbf{v}_1) = T(1, 2) = (3, 0) = 3\mathbf{w}_1 + 0\mathbf{w}_2$$
$$T(\mathbf{v}_2) = T(-1, 1) = (0, -3) = 0\mathbf{w}_1 - 3\mathbf{w}_2.$$

las matrices de coordenadas de $T(\mathbf{v}_1)$ y $T(\mathbf{v}_2)$ con respecto a B' son

$$[T(\mathbf{v}_1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [T(\mathbf{v}_2)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

La matriz de T con respecto a B y B' se forma al usar estas matrices de coordenadas como columnas para obtener

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

EJEMPLO 6 Aplicación de una matriz para representar una transformación lineal

Para la transformación lineal $T: R^2 \to R^2$ dada en el ejemplo 5, use la matriz A para encontrar $T(\mathbf{v})$, donde $\mathbf{v} = (2, 1)$.

SOLUCIÓN

Con la base $B = \{(1, 2), (-1, 1)\}$, se encuentra que $\mathbf{v} = (2, 1) = 1(1, 2) - 1(-1, 1)$, lo cual implica que

$$[\mathbf{v}]_B = [1 \quad -1]^T.$$

así, $[T(\mathbf{v})]_{B'}$ es

$$A[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Por consiguiente, como $B' = \{(1, 0), (0, 1)\}$, se concluye que

$$T(\mathbf{v}) = 3(1, 0) + 3(0, 1) = (3, 3).$$

Intente comprobar este resultado calculando directamente $T(\mathbf{v})$ por medio de la definición de T dada en el ejemplo 5: $T(2, 1) = (2 + 1, 2(2) - 1) = (3, 3)$.

En el caso especial donde $V = W$ y $B = B'$, la matriz A se denomina **matriz de T con respecto a la base B**. En estos casos la matriz de la transformación identidad es simplemente I_n. Para ver lo anterior, sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Dado que la transformación identidad mapea todo $\mathbf{v}_i$ consigo mismo se tiene $[T(\mathbf{v}_1)]_B = [1 \quad 0 \cdots 0]^T$, $[T(\mathbf{v}_2)]_B = [0 \quad 1 \cdots 0]^T, \ldots, [T(\mathbf{v}_n)]_B = [1 \quad 0 \cdots 1]^T$ y se concluye que $A = I_n$.

En el siguiente ejemplo se construye una matriz que representa el operador diferencial analizado en el ejemplo 10 de la sección 6.1.

EJEMPLO 7 Una matriz para el operador diferencial (cálculo)

Sea $D_x: P_2 \to P_1$ el operador diferencial que mapea un polinomio cuadrático p de grado menor o igual que 2 en su derivada p'. Determine la matriz de D_x por medio de las bases

$$B = \{1, x, x^2\} \quad \text{y} \quad B' = \{1, x\}.$$

SOLUCIÓN

Las derivadas de los vectores básicos son

$$\begin{aligned} D_x(1) &= 0 = 0(1) + 0(x) \\ D_x(x) &= 1 = 1(1) + 0(x) \\ D_x(x^2) &= 2x = 0(1) + 2(x). \end{aligned}$$

Así, las matrices de coordenadas con respecto a B' son

$$[D_x(1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [D_x(x)]_{B'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [D_x(x^2)]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

y la matriz para D_x es

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Note que esta matriz produce la derivada de un polinomio cuadrático $p(x) = a + bx + cx^2$.

$$Ap = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 2c \end{bmatrix} \Rightarrow b + 2cx = D_x[a + bx + cx^2]$$

6.3 Ejercicios

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

La matriz estándar para una transformación lineal En los ejercicios 1 a 6, determine la matriz estándar de la transformación lineal de T.

1. $T(x, y) = (x + 2y, x - 2y)$
2. $T(x, y) = (2x - 3y, x - y, y - 4x)$
3. $T(x, y, z) = (x + y, x - y, z - x)$
4. $T(x, y) = (4x + y, 0, 2x - 3y)$
5. $T(x, y, z) = (3x - 2z, 2y - z)$
6. $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$

Determinación de la imagen de un vector En los ejercicios 7 a 10, utilice la matriz estándar para la transformación lineal T para determinar la imagen del vector $\mathbf{v}$.

7. $T(x, y, z) = (2x + y, 3y - z)$, $\mathbf{v} = (0, 1, -1)$
8. $T(x, y) = (x + y, x - y, 2x, 2y)$, $\mathbf{v} = (3, -3)$
9. $T(x, y) = (x - y, x + 2y, y)$, $\mathbf{v} = (2, -2)$
10. $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_3, x_2 - x_4, x_3 - x_1, x_2 + x_4)$, $\mathbf{v} = (1, 2, 3, -2)$

Determinación de la matriz estándar y la imagen En los ejercicios 11 a 22, (a) encuentre la matriz estándar A de la transformación lineal T, (b) use A para encontrar la imagen del vector $\mathbf{v}$ y (c) trace la gráfica de $\mathbf{v}$ y su imagen.

11. T es la reflexión a través del origen en R^2: $T(x, y) = (-x, -y)$, $\mathbf{v} = (3, 4)$.
12. T es la reflexión en la recta $y = x$ en R^2: $T(x, y) = (y, x)$, $\mathbf{v} = (3, 4)$.
13. T es la reflexión en el eje y en R^2: $T(x, y) = (-x, y)$, $\mathbf{v} = (2, -3)$.
14. T es la reflexión en el eje x en R^2: $T(x, y) = (x, -y)$, $\mathbf{v} = (4, -1)$.
15. T es la rotación de 45° en sentido contrario al de las manecillas del reloj en R^2, $\mathbf{v} = (2, 2)$.
16. T es la rotación de 120° en sentido contrario al de las manecillas del reloj en R^2, $\mathbf{v} = (2, 2)$.
17. T es la rotación de 60° (θ es negativo) en el sentido de las manecillas del reloj en R^2, $\mathbf{v} = (1, 2)$.
18. T es la rotación de 30° (θ es negativo) en el sentido de las manecillas del reloj en R^2, $\mathbf{v} = (2, 1)$.
19. T es la reflexión a través del plano de coordenadas xy en R^3: $T(x, y, z) = (x, y, -z)$ $\mathbf{v} = (3, 2, 2)$.
20. T es la reflexión a través del plano de coordenadas yz en R^3: $T(x, y, z) = (-x, y, z)$, $\mathbf{v} = (2, 3, 4)$.
21. T es la proyección sobre el vector $\mathbf{w} = (3, 1)$ en R^2: $T(\mathbf{v}) = \text{proy}_{\mathbf{w}}\mathbf{v}$, $\mathbf{v} = (1, 4)$.
22. T es la proyección sobre el vector $\mathbf{w} = (3, 1)$ en R^2: $T(\mathbf{v}) = 2\,\text{proy}_{\mathbf{w}}\mathbf{v} - \mathbf{v} = (1, 4)$.

Determinación de la matriz estándar y la imagen En los Ejercicios 23 a 26, (a) encuentre la matriz estándar A para la transformación lineal T y (b) use A para encontrar la imagen del vector $\mathbf{v}$. Use un programa de computación o una aplicación gráfica para verificar su resultado.

23. $T(x, y, z) = (2x + 3y - z, 3x - 2z, 2x - y + z)$, $\mathbf{v} = (1, 2, -1)$
24. $T(x, y, z) = (3x - 2y + z, 2x - 3y, y - 4z)$, $\mathbf{v} = (2, -1, -1)$
25. $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, x_3, x_1 + 2x_2 - x_4, x_4)$, $\mathbf{v} = (1, 0, 1, -1)$
26. $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2, x_2 - x_1, 2x_3 - x_4, x_1)$, $\mathbf{v} = (0, 1, -1, 1)$

Determinación de matrices estándar para composiciones En los ejercicios 27 a 30, encuentre las matrices estándar de $T = T_2 \circ T_1$ y $T' = T_1 \circ T_2$.

27. $T_1: R^2 \to R^2$, $T_1(x, y) = (x - 2y, 2x + 3y)$
    $T_2: R^2 \to R^2$, $T_2(x, y) = (y, 0)$
28. $T_1: R^3 \to R^3$, $T_1(x, y, z) = (x, y, z)$
    $T_2: R^3 \to R^3$, $T_2(x, y, z) = (0, x, 0)$
29. $T_1: R^2 \to R^3$, $T_1(x, y) = (-x + 2y, x + y, x - y)$
    $T_2: R^3 \to R^2$, $T_2(x, y, z) = (x - 3y, z + 3x)$
30. $T_1: R^2 \to R^3$, $T_1(x, y) = (x, y, y)$
    $T_2: R^3 \to R^2$, $T_2(x, y, z) = (y, z)$

Determinación de la inversa de una transformación lineal En los ejercicios 31 a 36, determine si la transformación lineal dada es invertible. En caso afirmativo, encuentre su inversa.

31. $T(x, y) = (-2x, 2y)$
32. $T(x, y) = (2x, 0)$
33. $T(x, y) = (x + y, 3x + 3y)$
34. $T(x, y) = (x + y, x - y)$
35. $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$
36. $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - 2x_2, x_2, x_3 + x_4, x_3)$

Determinación de la imagen de dos formas En los ejercicios 37 a 42, encuentre $T(\mathbf{v})$ usando (a) la matriz estándar y (b) la matriz con respeto a B y B'.

37. $T: R^2 \to R^3$, $T(x, y) = (x + y, x, y)$, $\mathbf{v} = (5, 4)$,
    $B = \{(1, -1), (0, 1)\}$,
    $B' = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$
38. $T: R^3 \to R^2$, $T(x, y, z) = (x - y, y - z)$, $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$,
    $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$, $B' = \{(1, 2), (1, 1)\}$
39. $T: R^3 \to R^4$, $T(x, y, z) = (2x, x + y, y + z, x + z)$,
    $\mathbf{v} = (1, -5, 2)$, $B = \{(2, 0, 1), (0, 2, 1), (1, 2, 1)\}$,
    $B' = \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\}$

40. $T: R^4 \rightarrow R^2$,
$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, x_4 - x_1)$,
$\mathbf{v} = (4, -3, 1, 1)$,
$B = \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)\}$,
$B' = \{(1, 1), (2, 0)\}$

41. $T: R^3 \rightarrow R^3$, $T(x, y, z) = (x + y + z, 2z - x, 2y - z)$,
$\mathbf{v} = (4, -5, 10)$,
$B = \{(2, 0, 1), (0, 2, 1), (1, 2, 1)\}$,
$B' = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$

42. $T: R^2 \rightarrow R^2$, $T(x, y) = (2x - 12y, x - 5y)$, $\mathbf{v} = (10, 5)$,
$B = B' = \{(4, 1), (3, 1)\}$

43. Sea $T: P_2 \rightarrow P_3$ definida por $T(p) = xp$. Encuentre la matriz de T con respecto a las bases $B = \{1, x, x^2]$ y $B' = \{1, x, x^2, x^3\}$.

44. Sea $T: P_2 \rightarrow P_2$ definida por $T(p) = x^2 p$. Encuentre la matriz de T con respecto a las bases $B = \{1, x, x^2\}$ y $B' = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$.

45. **Cálculo** Sea $B = \{1, x, e^x, xe^x\}$ una base de un subespacio W del espacio de funciones continuas, y sea D_x el operador diferencial sobre W. Encuentre la matriz para D_x con respecto a la base B.

46. **Cálculo** Repita el ejercicio 45 para $B = \{e^{2x}, xe^{2x}, x^2e^{2x}\}$.

47. **Cálculo** Use la matriz del ejercicio 45 para evaluar $D_x[3x - 2xe^x]$.

48. **Cálculo** Use la matriz del ejercicio 46 para evaluar $D_x[5e^{2x} - 3xe^{2x} + x^2e^{2x}]$.

49. **Cálculo** Sea $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ una base de P_3 y sea $T: P_3 \rightarrow P_4$ la transformación lineal definida por

$$T(x^k) = \int_0^x t^k\, dt.$$

(a) Encuentre la matriz a para T con respecto a B y la base estándar para P_4.

(b) Use A para integrar $p(x) = 6 - 2x + 3x^3$.

50. **REMATE** Explique cómo encontrar lo siguiente.

(a) La matriz estándar para una transformación lineal

(b) Una composición de transformaciones lineales

(c) La inversa de una transformación lineal

(d) La matriz de transformación respecto a bases no estándar

51. Sea $T: M_{2,3} \rightarrow M_{3,2}$ definida por $T(A) = A^T$.

(a) Determine la matriz de T con respecto a las bases estándar de $M_{2,3}$ y $M_{3,2}$.

(b) Demuestre que T es un isomorfismo.

(c) Encuentre la matriz para la inversa de T.

52. Sea T una transformación lineal tal que $T(\mathbf{v}) = k\mathbf{v}$ para $\mathbf{v}$ en R^n. Encuentre la matriz estándar para T.

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 53 y 54, determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, proporcione una razón o cite una expresión adecuada del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que muestre que la expresión no es cierta en todos los casos o cite del texto una expresión adecuada.

53. (a) Si $T: R^n \rightarrow R^n$ es una transformación lineal

$$T[\mathbf{e}_1] = [a_{11} \quad a_{21} \quad . \; . \; . \quad a_{m1}]^T$$
$$T[\mathbf{e}_2] = [a_{12} \quad a_{22} \quad . \; . \; . \quad a_{m2}]^T$$
$$\vdots$$
$$T[\mathbf{e}_n] = [a_{1n} \quad a_{2n} \quad . \; . \; . \quad a_{mn}]^T$$

entonces la matriz A de $m \times n$ cuyas columnas corresponden a $T(\mathbf{e}_i)$ y es tal que $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v}$ en R^n es llamada matriz estándar para T.

(b) Todas las transformaciones lineales T tienen un inversa única T^{-1}.

54. (a) La composición T de las transformaciones lineales T_1 y T_2, definida por $T(\mathbf{v}) = T_2(T_1(\mathbf{v}))$, está definida si el rango de T_1 cae dentro del dominio de T_2.

(b) En general, las composiciones $T_2 \circ T_1$ y $T_1 \circ T_2$ tienen la misma matriz estándar A.

55. **Demostración guiada** Sean $T_1: V \rightarrow V$ y $T_2: V \rightarrow V$ transformaciones lineales uno a uno. Demuestre que la composición $T = T_2 \circ T_1$ es uno a uno y que T^{-1} existe y es igual $T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$.

Inicio: para demostrar que T es uno a uno puede utilizar la definición de la transformación uno a uno y demostrar que $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$ implica que $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Para el segundo enunciado, primero debe aplicar los teoremas 6.8 y 6.12 para demostrar que T es invertible y después demostrar que $T \circ (T_1^{-1} \circ T_2^{-1})$ y $(T_1^{-1} \circ T_2^{-1}) \circ T$ son trasformaciones identidad.

(i) Sea $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$. Recuerde que $(T_2 \circ T_1)(\mathbf{v}) = T_2(T_1(\mathbf{v}))$ para todo vector $\mathbf{v}$. Utilice el hecho de que T_2 y T_1 son uno a uno para concluir que $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

(ii) Utilice los teoremas 6.8 y 6.12 para demostrar que T_1, T_2 y T son todas transformaciones invertibles. Por ende, T_1^{-1} y T_2^{-1} existen.

(iii) Forme la composición $T' = T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$. Esta es una transformación lineal de V a V. Para demostrar que esto es la inversa de T, debe determinar qué composición de T con T' en ambos lados resulta en una transformación identidad.

56. **Prueba** Demuestre el teorema 6.12.

57. **Escriba** ¿Siempre es preferible utilizar las bases estándar de R^n? Analice las ventajas y desventajas de usar diferentes bases.

58. **Escriba** Regrese al teorema 4.19 y reescríbalo en términos de lo que haya aprendido en este capítulo.

6.4 Matrices de transición y semejanza

- Encontrar y usar una matriz para una transformación lineal.
- Demostrar que dos matrices son similares y usar las propiedades de matrices similares.

LA MATRIZ PARA UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

En la sección 6.3 se vio que la matriz de la transformación lineal $T: V \to V$ depende de la base de V. En otras palabras, la matriz de T con respecto a una base B es diferente de la matriz de T con respecto a otra base B'.

Uno de los problemas clásicos del álgebra lineal es el siguiente: ¿es posible hallar una base B tal que la matriz de T con respecto a B sea diagonal? La solución de este problema se analiza en el capítulo 7. En esta sección se presentan los fundamentos para resolver el problema. Usted verá cómo están relacionadas las matrices de una transformación lineal con respecto a dos bases diferentes. En esta sección A, A', P y P^{-1} representan las cuatro matrices cuadradas siguientes.

1. Matriz de T con respecto a B: A

2. Matriz de T con respecto a B': A'

3. Matriz de transición de B' a B: P

4. Matriz de transición de B a B': P^{-1}

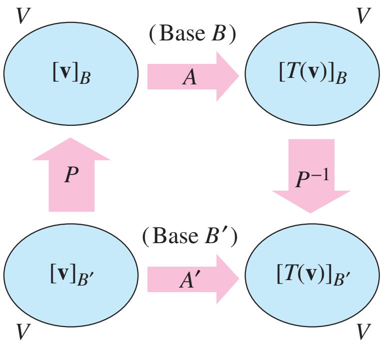


Figura 6.10

Observe que en la figura 6.10 hay dos formas de llegar de la matriz de coordenadas $[\mathbf{v}]_{B'}$ a la matriz de coordenadas $[T(\mathbf{v})]_{B'}$. Una forma es directa, por medio de la matriz A' para obtener

$$A'[\mathbf{v}]_{B'} = [T(\mathbf{v})]_{B'}.$$

La otra forma es indirecta, por medio de las matrices P, A y P^{-1} para obtener

$$P^{-1}AP[\mathbf{v}]_{B'} = [T(\mathbf{v})]_{B'}.$$

Esto implica que $A' = P^{-1}AP$. Esta relación se demuestra en el ejemplo 1.

EJEMPLO 1 **Determinación de una matriz de una transformación lineal**

Encuentre la matriz A' para $T:R^2 \to R^2$, $T(x_1, x_2) = (2x_1 - 2x_2, -x_1 + 3x_2)$, con respecto a la base $B' = \{(1, 0), (1, 1)\}$.

SOLUCIÓN

La matriz estándar para T es $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Además, aplicando las técnicas de la sección 4.7, usted puede determinar que la matriz de transición de B' a la base estándar $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ es

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La inversa de esta matriz es la matriz de transición de B a B'.

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz de T con respecto a B' es

$$A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

En el ejemplo 1 la base B es la base estándar para R^2. En el siguiente ejemplo tanto B como B' son bases no estándar.

EJEMPLO 2 Determinación de una matriz para una transformación lineal

Sea $B = \{(-3, 2), (4, -2)\}$ y $B' = \{(-1, 2), (2, -2)\}$ bases de R^2, y sea

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$$

la matriz de $T: R^2 \rightarrow R^2$ con respecto a B. Encuentre a', la matriz de T con respecto a B'.

SOLUCIÓN

En el ejemplo 5 de la sección 4.7 encontró que $P = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ y $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.

Por consiguiente, la matriz de T con respecto a B' es

$$A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

El diagrama de la figura 6.10 debe ayudarle a recordar el cometido de las matrices A, A', P y P^{-1}.

EJEMPLO 3 Aplicación de una matriz para una transformación lineal

Para la transformación lineal $T: R^2 \rightarrow R^2$ dada en el ejemplo 2, encuentre $[\mathbf{v}]_B$, $[T(\mathbf{v})]_B$ y $[T(\mathbf{v})]_{B'}$ para el vector $\mathbf{v}$ cuya matriz de coordenadas es $[\mathbf{v}]_{B'} = [-3 \quad -1]^T$.

SOLUCIÓN

Para hallar $[\mathbf{v}]_B$ se aplica la matriz de transición P de B' a B.

$$[\mathbf{v}]_B = P[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Para encontrar $[T(\mathbf{v})]_B$, $[\mathbf{v}]_B$ se multiplica por la matriz A para obtener

$$[T(\mathbf{v})]_B = A[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -7 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 \\ -14 \end{bmatrix}.$$

Para hallar $[T(\mathbf{v})]_{B'}$, multiplique $[T(\mathbf{v})]_B$ por P^{-1} para obtener

$$[T(\mathbf{v})]_{B'} = P^{-1}[T(\mathbf{v})]_B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -21 \\ -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o multiplique $[\mathbf{v}]_{B'}$, por A' para obtener

$$[T(\mathbf{v})]_{B'} = A'[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

COMENTARIO

Resulta instructivo observar que la transformación T en los ejemplos 2 y 3 está representada por la regla $T(x, y) = \left(x - \frac{3}{2}y, 2x + 4y\right)$. Verifique los resultados del ejemplo 3 al demostrar que $\mathbf{v} = (1, -4)$ y $T(\mathbf{v}) = (7, -14)$.

ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

En la Sección 2.5 usted estudió matrices estocásticas y matrices de estado. Una **cadena Markov** es una secuencia $\{\mathbf{x}_n\}$ de matrices de estado que son vectores de probabilidad relacionados por la transformación lineal $\mathbf{x}_{k+1} = P\mathbf{x}_k$, donde P, la matriz de transición de un estado al siguiente, es una matriz estocástica [pij]. Por ejemplo, suponga que se ha establecido, después de un estudio extensivo de los registros climáticos, que la probabilidad p_{21} de que un día de tormenta siga a un día soleado es de 0.1 y la probabilidad p_{22} de que un día de tormenta siga a un día de tormenta es de 0.2. La matriz de transición se puede escribir como $P = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.8 \\ 0.1 & 0.2 \end{bmatrix}$.

gregg williams/Shutterstock.com

MATRICES SEMEJANTES

Dos matrices cuadradas A y A' relacionadas por la ecuación $A' = P^{-1}AP$ se denominan **matrices semejantes**, como se indica en la siguiente definición.

Definición de matrices semejantes

Para matrices cuadradas A y A' de orden n, se dice que A' es **semejante** a A si existe una matriz invertible P tal que $A' = P^{-1}AP$.

Si A' es semejante a A, entonces también es cierto que A es semejante a A', como se plantea en el siguiente teorema. Por tanto, tiene sentido decir simplemente que **A y A' son semejantes**.

TEOREMA 6.13 Propiedades de las matrices semejantes

Sean A, B y C matrices cuadradas de orden n. Entonces, las siguientes propiedades son verdaderas.

1. A es semejante a A.
2. Si A es semejante a B, entonces B es semejante a A.
3. Si A es semejante a B y B es semejante a C, entonces A es semejante a C.

DEMOSTRACIÓN

La primera propiedad se concluye del hecho de que $A = I_nAI_n$. Para demostrar la segunda propiedad, se escribe

$$\begin{aligned} A &= P^{-1}BP \\ PAP^{-1} &= P(P^{-1}BP)P^{-1} \\ PAP^{-1} &= B \\ Q^{-1}AQ &= B, \text{ donde } Q = P^{-1}. \end{aligned}$$

La demostración de la tercera propiedad se deja como ejercicio. (Véase el ejercicio 29.)

A partir de la definición de semejanza se concluye que dos matrices cualesquiera que representen la misma transformación lineal $T: V \to V$ con respecto a bases diferentes deben ser semejantes.

EJEMPLO 4 Matrices semejantes

a. Del ejemplo 1, las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A' = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

son semejantes porque $A' = P^{-1}AP$, donde $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

b. Del ejemplo 2, las matrices

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

son semejantes porque $A' = P^{-1}AP$, donde $P = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Hemos visto que la matriz de una transformación lineal $T: V \to V$ depende de la base utilizada para V. Esta observación conduce de manera natural a la pregunta: ¿qué elección de base hará lo más sencilla posible la matriz de T? ¿Siempre es la base *estándar*? No necesariamente, como se demuestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 **Comparación de dos matrices de una transformación lineal**

Suponga que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

es la matriz de $T: R^3 \to R^3$ con respecto a la base estándar. Encuentre la matriz de T con respecto a la base $B' = \{(1, 1, 0), (1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$.

SOLUCIÓN

La matriz de transición de B' a la matriz estándar tiene columnas que constan de los vectores en B',

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y se concluye que

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por consiguiente, la matriz de T con respecto a B' es

$$\begin{aligned} A' &= P^{-1}AP \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Observe que la matriz A' es diagonal.

Las matrices diagonales presentan ventajas computacionales sobre las no diagonales. Por ejemplo, para la matriz diagonal

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

la k-ésima potencia de D es

$$D^k = \begin{bmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{bmatrix}.$$

Una matriz diagonal es su propia transpuesta. Además, si todos los elementos de la diagonal son diferentes de cero, entonces la inversa de una matriz diagonal es la matriz cuyos elementos de la diagonal principal son los recíprocos de los elementos correspondientes en la matriz original. Con tales ventajas computacionales, es importante hallar formas (en caso de ser posible) de elegir una base de V para que la matriz de transformación sea diagonal, como en el ejemplo 5. Este problema lo abordará en el capítulo siguiente.

6.4 Ejercicios

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

Determinación de una matriz para una transformación lineal En los ejercicios 1 a 8, encuentre la matriz A' para T con respecto a la base B'.

1. $T: R^2 \to R^2,\ T(x, y) = (2x - y, y - x),$
$B' = \{(1, -2), (0, 3)\}$

2. $T: R^2 \to R^2,\ T(x, y) = (2x + y, x - 2y),$
$B' = \{(1, 2), (0, 4)\}$

3. $T: R^2 \to R^2,\ T(x, y) = (x + y, 4y),$
$B' = \{(-4, 1), (1, -1)\}$

4. $T: R^2 \to R^2,\ T(x, y) = (x - 2y, 4x),$
$B' = \{(-2, 1), (-1, 1)\}$

5. $T: R^3 \to R^3,\ T(x, y, z) = (x, y, z),$
$B' = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$

6. $T: R^3 \to R^3,\ T(x, y, z) = (0, 0, 0),$
$B' = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$

7. $T: R^3 \to R^3,$
$T(x, y, z) = (x - y + 2z, 2x + y - z, x + 2y + z),$
$B' = \{(1, 0, 1), (0, 2, 2), (1, 2, 0)\}$

8. $T: R^3 \to R^3,\ T(x, y, z) = (x, x + 2y, x + y + 3z),$
$B' = \{(1, -1, 0), (0, 0, 1), (0, 1, -1)\}$

9. Sean $B = \{(1, 3), (-2, -2)\}$ y $B' = \{(-12, 0), (-4, 4)\}$ bases de R^2, y sea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

la matriz para $T: R^2 \to R^2$ respecto a B.

(a) Determine la matriz de transición P de B' a B.

(b) Aplique las matrices A y P para encontrar $[\mathbf{v}]_B$ y $[T(\mathbf{v})]_{B'}$, donde

$[\mathbf{v}]_{B'} = [-1 \quad 2]^T.$

(c) Determine A' (la matriz para T respecto a B') y P^{-1}.

(d) Encuentre $[T(\mathbf{v})]_{B'}$ de dos formas.

10. Repita el ejercicio 9 para $B = \{(1, 1), (-2, 3)\}$, $B' = \{(1, -1), (0, 1)\}$ y

$[\mathbf{v}]_{B'} = [1 \quad -3]^T.$

(Use la matriz A dada en el ejercicio 9.)

11. Sean $B = \{(1, 2), (-1, -1)\}$ y $B' = \{(-4, 1), (0, 2)\}$ bases para R^2, y sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

la matriz de $T: R^2 \to R^2$ con respecto a B.

(a) Encuentre la matriz de transición P de B' a B.

(b) Use las matrices A y P para encontrar $[\mathbf{v}]_B$ y $[T(\mathbf{v})]_{B'}$, donde

$[\mathbf{v}]_{B'} = [-1 \quad 4]^T.$

(c) Encuentre A' (la matriz de T con respecto a B') y P^{-1}.

(d) Encuentre $[T(\mathbf{v})]_{B'}$ de dos formas.

12. Repita el ejercicio 11 para $B = \{(1, -1), (-2, 1)\}$, $B' = \{(-1, 1), (1, 2)\}$ y

$[\mathbf{v}]_{B'} = [1 \quad -4]^T.$

(Utilice la matriz A dada en el ejercicio 11.)

13. Sean $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ y $B' = \{(1, 0, 0), (0, 1,0), (0, 0, 1)\}$ bases de R^3, y sea

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

la matriz de $T: R^3 \to R^3$ con respecto a B.

(a) Encuentre la matriz de transición P de B' a B.

(b) Use las matrices A y P para encontrar $[\mathbf{v}]_B$ y $[T(\mathbf{v})]_{B'}$, donde

$[\mathbf{v}]_{B'} = [1 \quad 0 \quad -1]^T.$

(c) Encuentre A' (la matriz de T con respecto a B') y P^{-1}.

(d) Encuentre $[T(\mathbf{v})]_{B'}$ de dos formas.

14. Repita el ejercicio 13 para

$B = \{(1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1)\},$

$B' = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\},$

y

$[\mathbf{v}]_{B'} = [2 \quad 1 \quad 1]^T.$

(Use la matriz A dada en el ejercicio 13.)

Matrices similares En los Ejercicios 15-18, use la matriz P para demostrar que las matrices A y A' son similares.

15. $P = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 12 & 7 \\ -20 & -11 \end{bmatrix}, A' = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

16. $P = A = A' = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

17. $P = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 0 & 9 & 6 \end{bmatrix}, A' = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 0 \\ 10 & 4 & 0 \\ 0 & 12 & 6 \end{bmatrix}$

18. $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Matriz diagonal para una transformación lineal En los Ejercicios 19 y 20, suponga que A es la matriz para T: $R^3 \to R^3$ respecto a la base estándar. Encuentre la matriz diagonal A' para T respecto a la base B'.

19. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$B' = \{(-1, 1, 0), (2, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

20. $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$,

$B' = \{(1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1)\}$

21. Prueba Demuestre que si A y B son semejantes, entonces $|A| = |B|$. ¿Es cierto lo inverso?

22. Ilustre el resultado del ejercicio 21 por medio de las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 11 & 7 & 10 \\ 10 & 8 & 10 \\ -18 & -12 & -17 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix},$$

donde $B = P^{-1}AP$.

23. Prueba Demuestre que si A y B son similares, entonces existe una matriz P tal que $B^k = P^{-1}A^kP$.

24. Use el resultado de ejercicio 23 para determinar B^4, donde $B = P^{-1}AP$ para las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 & -15 \\ 2 & 7 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

25. Determine todas las matrices de $n \times n$ que son semejantes a I_n.

26. Prueba Demuestre que si A es idempotente y B es semejante a A, entonces B es idempotente. (Una matriz A de $n \times n$ es idempotente si $A = A^2$.)

27. Prueba Sea A una matriz de $n \times n$ tal que $A^2 = O$. Demuestre que si B es semejante a A, entonces $B^2 = O$.

28. Prueba Sea $B = P^{-1}AP$. Demuestre que si $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$, entonces $PBP^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

29. Prueba Complete la demostración del teorema 6.13 al demostrar que si A es semejante a B y B es semejante a C, entonces A es semejante a C.

30. Escriba Suponga que A y B son semejantes. Explique por qué tienen el mismo rango.

31. Prueba Demuestre que si A y B son semejantes, entonces A^T es semejante a B^T.

32. Prueba Sean A y B matrices semejantes. Demuestre que A^T y B^T son semejantes, si A es no singular, entonces también B es no singular y A^{-1} y B^{-1} son semejantes.

33. Prueba Sea $A = CD$, donde C es una matriz invertible de $n \times n$. Demuestre que la matriz DC es semejante a A.

34. Prueba Sea $B = P^{-1}AP$, donde $A = [a_{ij}]$, $P = [p_{ij}]$ y B es una matriz diagonal con elementos de diagonal principal $b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{mn}$. Demuestre que

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{bmatrix} = b_{ii} \begin{bmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{bmatrix}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$.

35. Escriba Sea $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base del espacio vectorial V, sea B' la base estándar y considere la transformación identidad I: $V \to V$. ¿Qué puede decir acerca de la matriz para I respecto a B? ¿Respecto a B'? ¿Cuándo el dominio tiene la base B y el rango tiene la base B'?

36. REMATE

(a) Dadas dos bases B y B' para un espacio vectorial V y la matriz A para la transformación lineal T: $V \to V$ respecto a B, explique cómo obtener la matriz de coordenadas $[T(\mathbf{v})]_{B'}$ de la matriz de coordenadas $[\mathbf{v}]_{B'}$, donde $\mathbf{v}$ es un vector en V.

(b) Explique cómo determinar si dos matrices cuadradas A y A' de orden n son similares.

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 37 y 38, determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, proporcione una razón o cite una expresión adecuada del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que muestre que la expresión no es cierta en todos los casos o cite del texto una expresión adecuada.

37. (a) La matriz para una transformación lineal A' con respecto a la base B' es igual al producto $P^{-1}AP$, donde P^{-1} es la matriz de transición de B a B', A es la matriz para la transformación lineal respecto a la base B y P es la matriz de transición de B' a B.

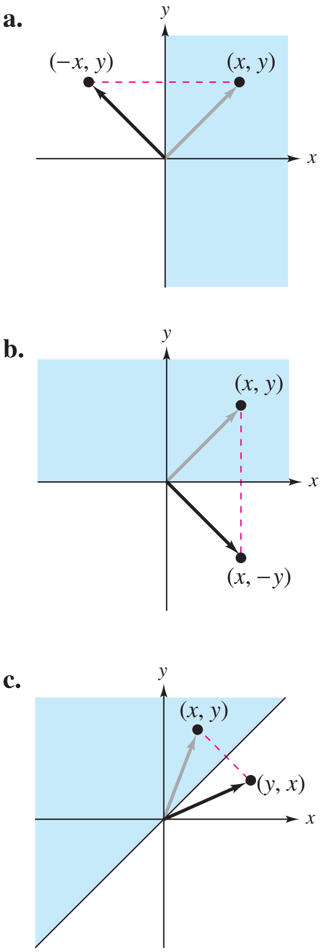
(b) Dos matrices que representan la misma transformación lineal T: $V \to V$ con respecto a diferentes bases no son necesariamente semejantes.

38. (a) La matriz para una transformación lineal A respecto a la base B es igual al producto $PA'P^{-1}$, donde P es la matriz de transición de B' a B, A' es la matriz para la transformación lineal respecto a la base B' y P^{-1} es la matriz de transición de B a B'.

(b) La base estándar para R^n siempre forma la matriz de coordenadas más sencilla posible para la transformación lineal T.

6.5 Aplicaciones de las transformaciones lineales

- Identificar transformaciones lineales definidas por reflexiones, expansiones, contracciones o deslizamientos en R^2.
- Usar una transformación lineal para rotar una figura en R^3.



Reflexiones en R^2
Figura 6.11

GEOMETRÍA DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES EN R^2

En esta sección se dan interpretaciones geométricas de transformaciones lineales representadas por matrices elementales de 2×2. Siguiendo el resumen de los varios tipos de matrices elementales de 2×2, hay ejemplos que examinan cada tipo de matriz con mayor detalle.

Matrices elementales de transformaciones lineales en R^2

Reflexión en el eje y

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reflexión en el eje x

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Reflexión en la recta $y = x$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Expansión horizontal $(k > 1)$ o contracción $(0 < k < 1)$

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Expansión vertical $(k > 1)$ o contracción $(0 < k < 1)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

Deformación horizontal

$$A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Deformación vertical

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 1 Reflexiones en R^2

Las transformaciones definidas por las siguientes matrices se denominan **reflexiones**. Éstas tienen el efecto de mapear un punto del plano xy a su imagen "especular" con respecto a uno de los ejes de coordenadas o a la recta definida por $y = x$, como se muestra en la figura 6.11.

a. Reflexión en el eje y:

$$T(x, y) = (-x, y)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

b. Reflexión en el eje x:

$$T(x, y) = (x, -y)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

c. Reflexión en la recta $y = x$:

$$T(x, y) = (y, x)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 2 Expansiones y contracciones en R^2

Las transformaciones definidas por las siguientes matrices se denominan **expansiones** o **contracciones**, según del valor del escalar positivo k.

a. Contracciones y expansiones horizontales: $T(x, y) = (kx, y)$

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ y \end{bmatrix}$$

b. Contracciones y expansiones verticales: $T(x, y) = (x, ky)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ ky \end{bmatrix}$$

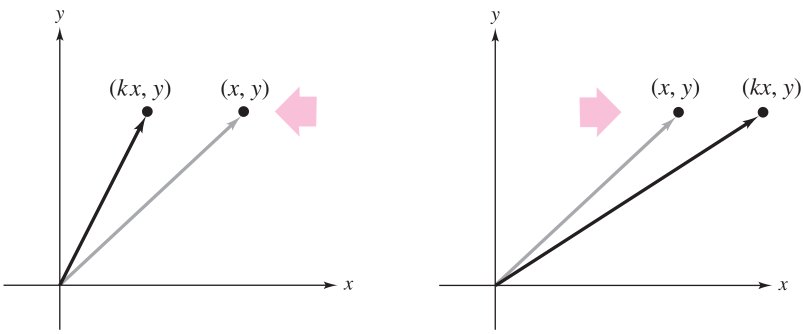
Observe que en las figuras 6.12 y 6.13 la distancia se desplaza el punto (x, y) debido a una contracción o una expansión es proporcional a su coordenada x o y. Por ejemplo, bajo la transformación definida por

$$T(x, y) = (2x, y)$$

el punto (1, 3) se movería una unidad a la derecha, pero el punto (4, 3) se desplazaría cuatro unidades a la derecha. Bajo la transformación representada por

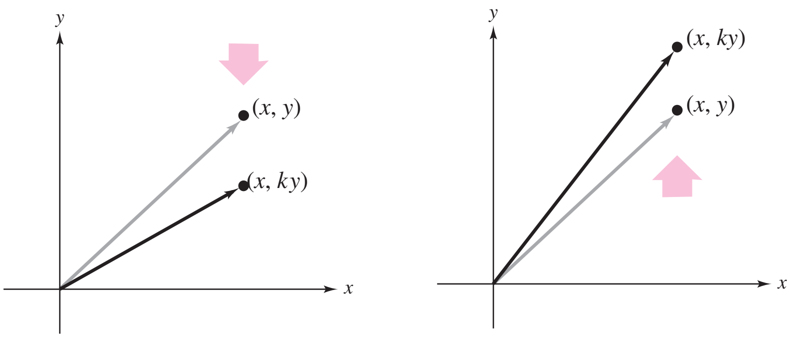
$$T(x, y) = \left(x, \tfrac{1}{2}y\right)$$

el punto (1, 4) se movería dos unidades hacia abajo, pero el punto (1, 2) se movería una unidad hacia abajo.



Contracción $(0 < k < 1)$ Expansión $(k > 1)$

Figura 6.12



Contracción $(0 < k < 1)$ Expansión $(k > 1)$

Figura 6.13

El tercer tipo de transformación lineal en el plano que corresponde a una matriz elemental se llama **deformación**, como se describe en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Deformaciones en R^2

Las transformaciones definidas por las siguientes matrices son deformaciones.

$$T(x, y) = (x + ky, y) \qquad\qquad T(x, y) = (x, y + kx)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + ky \\ y \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ kx + y \end{bmatrix}$$

a. La deformación horizontal definida por

$$T(x, y) = (x + 2y, y)$$

se muestra en la figura 6.14. Bajo esta transformación, los puntos del semiplano superior se "deforman" a la derecha una cantidad proporcional a su coordenada y. Los puntos en el semiplano inferior de "deforman" a la izquierda una cantidad proporcional al valor absoluto de su coordenada y. Bajo esta transformación, los puntos sobre el eje x permanecen en su sitio.

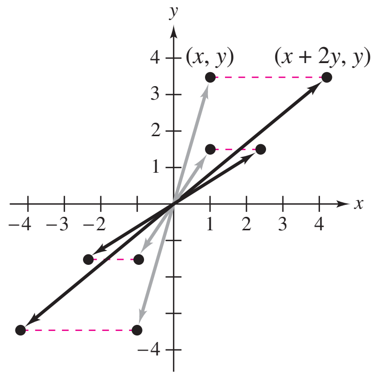


Figura 6.14

b. Una deformación vertical representada por

$$T(x, y) = (x, y + 2x)$$

En este caso, los puntos del semiplano derecho se "deforman" hacia arriba una cantidad proporcional a su coordenada x. Los puntos del semiplano izquierdo se "deforman" hacia abajo una cantidad proporcional al valor absoluto de su coordenada x. Los puntos sobre el eje y permanecen inmóviles.

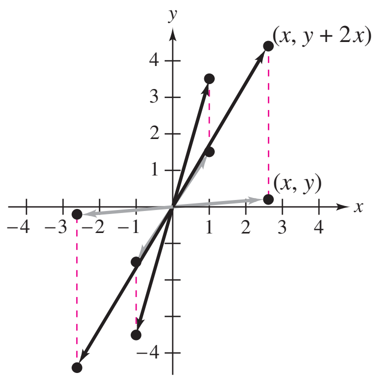
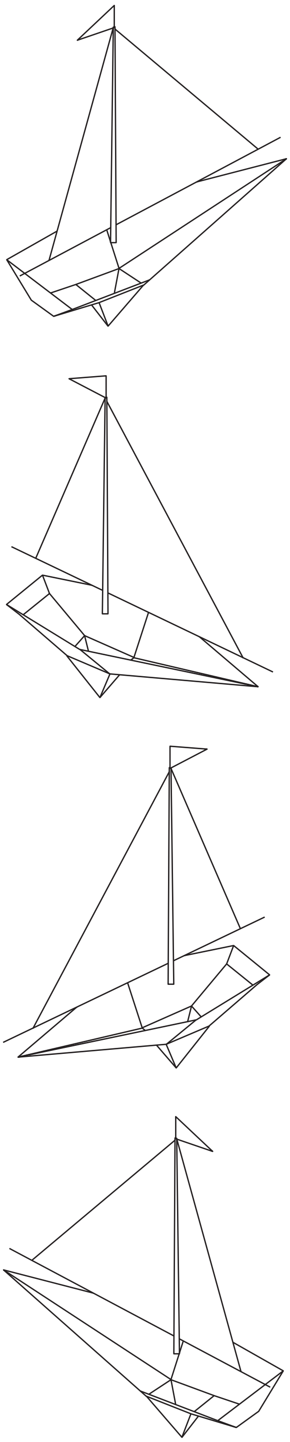


Figura 6.15



ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

El uso de gráficas por computadora es común entre los diseñadores en muchos campos. Al usar programas para computadora, un diseñador puede "observar" un objeto antes de crearlo físicamente. Las transformaciones lineales pueden ser útiles en gráficas por computadora. Como un ejemplo sencillo, la imagen del barco de juguete que se muestra en la figura de la izquierda fue creada usando solamente 23 puntos en R^3. La mayoría de los programas gráficos puede usar un mínimo de información para generar vistas de una imagen desde cualquier perspectiva, así como color, sombras y representaciones, según sea necesario. Las transformaciones lineales, específicamente aquéllas que producen rotaciones en R^3 pueden representar las distintas vistas. El resto de esta sección discute la rotación en R^3.

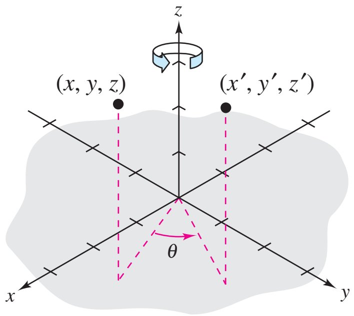


Figura 6.16

ROTACIÓN EN R^3

En el ejemplo 7 de la sección 6.1 vimos cómo se puede utilizar una transformación lineal para rotar figuras en el plano. Aquí veremos cómo se pueden usar las transformaciones lineales para rotar figuras en R^3.

Suponga que desea rotar el punto (x, y, z) un ángulo θ en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor del eje z, como se observa en la figura 6.16. Al designar las coordenadas del punto rotado como (x', y', z'), se tiene

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta \\ x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta \\ z \end{bmatrix}.$$

El ejemplo 4 describe cómo utilizar esa matriz para rotar una figura completa en el espacio de tres dimensiones.

EJEMPLO 4 Rotación alrededor de eje *z*

Los ocho vértices del prisma rectangular mostrado en la Figura 6.17 son como sigue.

$V_1(0, 0, 0)$ $V_2(1, 0, 0)$
$V_3(1, 2, 0)$ $V_4(0, 2, 0)$
$V_5(0, 0, 3)$ $V_6(1, 0, 3)$
$V_7(1, 2, 3)$ $V_8(0, 2, 3)$

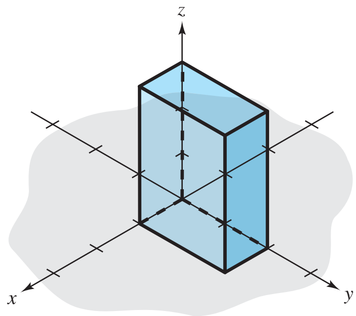


Figura 6.17

Encuentre las coordenadas de la caja cuando se hace girar en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor del eje z los ángulos siguientes (a) $\theta = 60°$, (b) $\theta = 90°$ y (c) $\theta = 120°$.

SOLUCIÓN

a. La matriz que produce una rotación de 60° es

$$A = \begin{bmatrix} \cos 60° & -\operatorname{sen} 60° & 0 \\ \operatorname{sen} 60° & \cos 60° & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Al multiplicar esta matriz por los vectores columna correspondientes a cada vértice produce los siguientes vértices rotados.

$V_1'(0, 0, 0)$ $V_2'(0.5, 0.87, 0)$ $V_3'(-1.23, 1.87, 0)$ $V_4'(-1.73, 1, 0)$
$V_5'(0, 0, 3)$ $V_6'(0.5, 0.87, 3)$ $V_7'(-1.23, 1.87, 3)$ $V_8'(-1.73, 1, 3)$

La Figura 6.18(a) muestra una gráfica del prisma rotado.

b. La matriz que produce una rotación de 90° es

$$A = \begin{bmatrix} \cos 90° & -\operatorname{sen} 90° & 0 \\ \operatorname{sen} 90° & \cos 90° & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y en la figura 6.18(b) se muestra la gráfica del prisma rotado.

c. La matriz que produce una rotación de 120° es

$$A = \begin{bmatrix} \cos 120° & -\operatorname{sen} 120° & 0 \\ \operatorname{sen} 120° & \cos 120° & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y en la figura 6.18(c) se muestra la gráfica del prisma rotado.

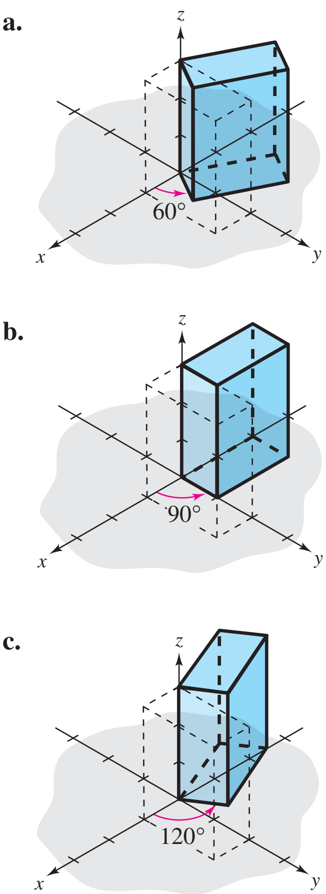
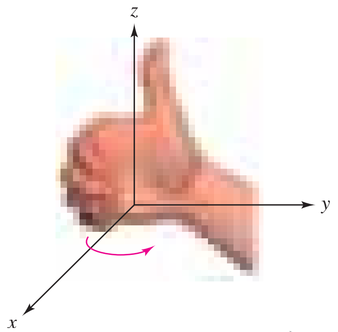


Figura 6.18

COMENTARIO

Para ilustrar la regla de la mano derecha, imagine el pulgar de su mano derecha apuntando en la dirección positiva de un eje. Los dedos cerrados apuntarán en la dirección de la rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj. La figura siguiente muestra la rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj en torno al eje z.



En el ejemplo 4 utilizamos matrices para efectuar una rotación alrededor del eje z. De manera semejante, es posible usar matrices para rotar figuras alrededor del eje x o del eje y. A continuación se resumen los tres tipos de rotación.

Rotación alrededor del eje x	Rotación alrededor del eje y	Rotación alrededor del eje z
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

En cada caso, la rotación está orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj (usando la "regla de la mano derecha") respecto al eje indicado, como se muestra en la figura 6.19.

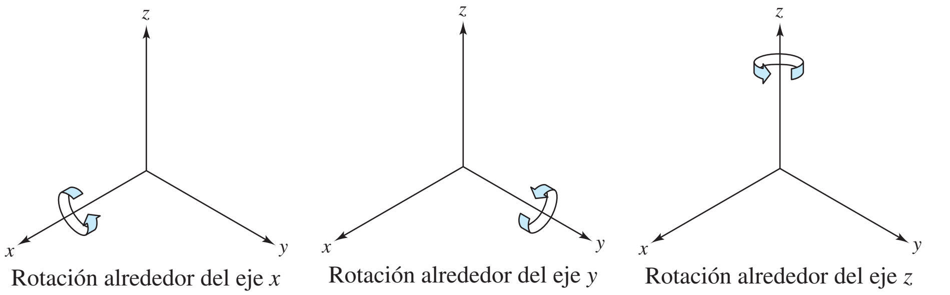


Figure 6.19

EJEMPLO 5 Rotaciones alrededor de los ejes *x* y *y*

a. La matriz que rota un punto 90° alrededor del eje x es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 90^\circ & -\operatorname{sen} 90^\circ \\ 0 & \operatorname{sen} 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La figura 6.20(a) muestra el prisma del ejemplo 4 rotado 90° alrededor del eje x.

b. La matriz que rota un punto 90° alrededor del eje y es

$$A = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & 0 & \operatorname{sen} 90^\circ \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen} 90^\circ & 0 & \cos 90^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La figura 6.20(b) muestra el prisma del ejemplo 4 rotado 90° alrededor del eje y.

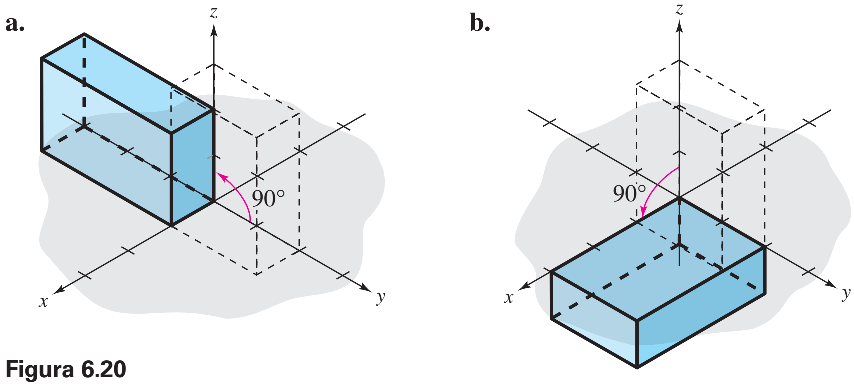


Figura 6.20

Simulación

Explore más acerca de este concepto con una simulación electrónica disponible en *college.cengage.com/pic/larsonELA6e*.

Las rotaciones alrededor de los ejes de coordenadas pueden combinarse a fin de producir cualquier vista de un objeto. Por ejemplo, en la figura 6.21 se observa la rotación que se obtiene al rotar primero la caja del ejemplo 4 90° alrededor del eje y y luego rotándola 120° alrededor de eje z.

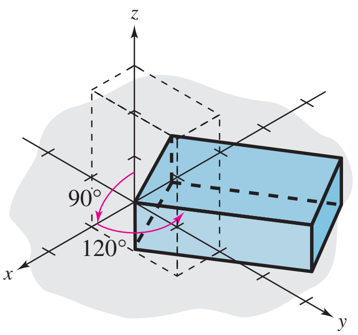


Figura 6.21

6.4 Ejercicios

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

1. Sea $T: R^2 \to R^2$ una reflexión en el eje x. Encuentre las imágenes de los siguientes vectores.

(a) $(3, 5)$ (b) $(2, -1)$ (c) $(a, 0)$
(d) $(0, b)$ (e) $(-c, d)$ (f) $(f, -g)$

2. Sea $T: R^2 \to R^2$ una reflexión en el eje y. Encuentre las imágenes de los siguientes vectores.

(a) $(2, 5)$ (b) $(-4, -1)$ (c) $(a, 0)$
(d) $(0, b)$ (e) $(c, -d)$ (f) (f, g)

3. Sea $T: R^2 \to R^2$ una reflexión en la recta $y = x$. Determine las imágenes de los siguientes vectores.

(a) $(0, 1)$ (b) $(-1, 3)$ (c) $(a, 0)$
(d) $(0, b)$ (e) $(-c, d)$ (f) $(f, -g)$

4. Sea $T: R^2 \to R^2$ una reflexión en la recta $y = -x$. Determine las imágenes de los siguientes vectores.

(a) $(-1, 2)$ (b) $(2, 3)$ (c) $(a, 0)$
(d) $(0, b)$ (e) $(e, -d)$ (f) $(-f, g)$

5. Sean $T(1, 0) = (2, 0)$ y $T(0, 1) = (0, 1)$.

(a) Determine $T(x, y)$ para cualquier (x, y).
(b) Proporcione una descripción geométrica de T.

6. Sean $T(1, 0) = (1, 1)$ y $T(0, 1) = (0, 1)$.

(a) Determine $T(x, y)$ para cualquier (x, y).
(b) Proporcione una descripción geómetrica de T.

Identificación y representación de una transformación En los ejercicios 7 a 14, (a) identifique la transformación y (b) represente gráficamente la transformación para un vector arbitrario en R^2.

7. $T(x, y) = (x, y/2)$ **8.** $T(x, y) = (x/4, y)$
9. $T(x, y) = (4x, y)$ **10.** $T(x, y) = (x, 3y)$
11. $T(x, y) = (x + 3y, y)$ **12.** $T(x, y) = (x + 4y, y)$
13. $T(x, y) = (x, 5x + y)$
14. $T(x, y) = (x, 4x + y)$

Determinación de puntos fijos de una transformación lineal En los ejercicios 15 a 22, encuentre todos los puntos fijos de la transformación lineal dada. El vector $\mathbf{v}$ es un punto fijo de T si $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$.

15. Una reflexión en eje el y.
16. Una reflexión en eje el x.
17. Una reflexión en la recta $y = x$.
18. Una reflexión en la recta $y = -x$.
19. Una contracción vertical.
20. Una expansión horizontal.
21. Una deformación horizontal.
22. Una deformación vertical.

Trazo de una imagen del cuadrado unitario En los ejercicios 23 a 28, trace la imagen del cuadrado unitario cuyos vértices son los puntos (0, 0), (1, 0), (1, 1) y (0, 1) bajo la transformación dada.

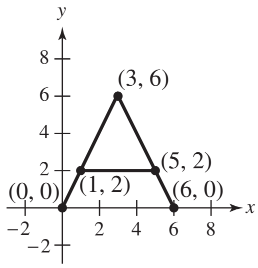
23. T es una reflexión en el eje x.
24. T es una reflexión en la recta $y = x$.
25. T es la contracción definida por $T(x, y) = (x/2, y)$.
26. T es la expansión definida por $T(x, y) = (x, 3y)$.
27. T es la deformación definida por $T(x, y) = (x + 2y, y)$.
28. T es la deformación definida por $T(x, y) = (x, y + 3x)$.

Trazo de una imagen de un rectángulo En los ejercicios 29 a 34, trace la imagen del rectángulo cuyos vértices son los puntos (0, 0), (0, 2), (1, 2) y (1, 0) bajo la transformación dada.

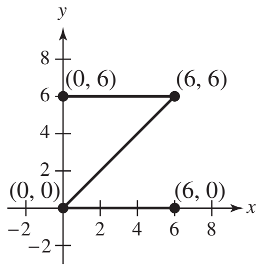
29. T es una reflexión en el eje y.
30. T es una reflexión en la recta $y = x$.
31. T es la contracción definida por $T(x, y) = (x, y/2)$.
32. T es la expansión definida por $T(x, y) = (2x, y)$.
33. T es la deformación definida por $T(x, y) = (x + y, y)$.
34. T es la deformación definida por $T(x, y) = (x, y + 2x)$.

Trazo de una imagen de una figura En los ejercicios 35 a 38, trace cada una de las imágenes con los vértices dados bajo transformaciones específicas.

(a)



(b)



35. T es la deformación representada por $T(x, y) = (x + y, y)$.
36. T es la deformación representada por $T(x, y) = (x, x + y)$.
37. T es la expansión y contracción representada por

$$T(x, y) = \left(2x, \tfrac{1}{2}y\right).$$

38. T es la expansión y contracción representada por

$$T(x, y) = \left(\tfrac{1}{2}x, 2y\right).$$

39. La transformación lineal definida por una matriz diagonal cuyos elementos en la diagonal principal son positivos se denomina **amplificación**. Encuentre las imágenes de (1, 0), (0, 1) y (2, 2) bajo la transformación A e interprete gráficamente los resultados.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

40. Repita el ejercicio 39 para la transformación lineal definida por

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Proporcionar una descripción geométrica En los ejercicios 41 a 46, proporcione una descripción geométrica de la transformación lineal definida por la matriz elemental dada.

41. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **42.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

43. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **44.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

45. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ **46.** $A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Proporcionar una descripción geométrica En los ejercicios 47 y 48, proporcione una interpretación geométrica de la transformación lineal definida por el producto matricial dado.

47. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

48. $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Determinación de una matriz para producir una rotación En los ejercicios 49 a 52, determine la matriz que produce la rotación indicada.

49. 30° alrededor del eje z. **50.** 60° alrededor del eje x.

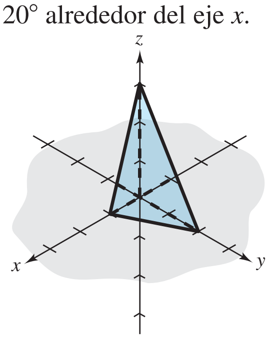
51. 60° alrededor del eje y. **52.** 120° alrededor del eje x.

Determinación de la imagen de un vector En los ejercicios 53 a 56, determine la imagen del vector (1, 1, 1) para la rotación indicada.

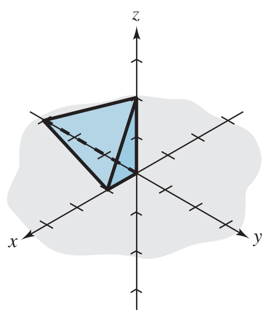
53. 30° alrededor del eje z. **54.** 60° alrededor del eje x.

55. 60° alrededor del eje y. **56.** 120° alrededor del eje x.

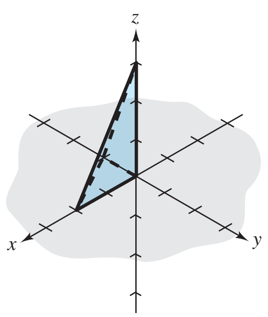
Determinación de una rotación En los ejercicios 57 a 62, determine qué rotación simple en sentido contrario al de las manecillas del reloj, alrededor del eje x, y o z produce el tetraedro indicado. La figura a la derecha muestra el tetraedro antes de la rotación.



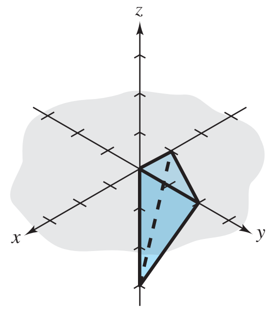
57.



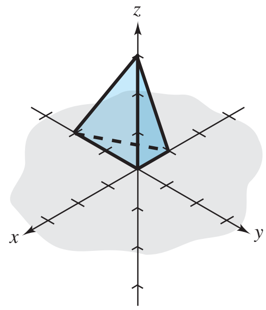
58.



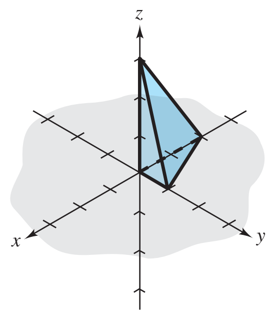
59.



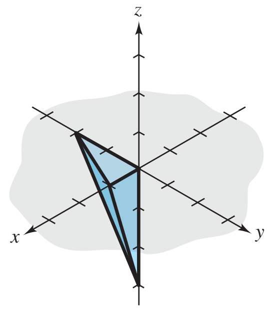
60.



61.



62.



Determinación de una matriz para producir un par de rotaciones En los ejercicios 63 a 67, determine la matriz que produce el par de rotaciones indicadas. Después encuentre la imagen del vector (1, 1, 1) bajo estas rotaciones.

63. 90° alrededor del eje x seguida de 90° alrededor del eje y.

64. 45° alrededor del eje y seguida de 90° alrededor del eje z.

65. 30° alrededor del eje z seguida de 60° alrededor del eje y.

66. 45° alrededor del eje z seguida de 135° alrededor del eje x.

67. 120° en torno al eje x seguido por 135° en torno al eje z.

68. REMATE Describa la transformación definida por cada matriz. Asuma que k y θ son escalares positivos.

(a) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $k > 1$

(e) $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $0 < k < 1$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$, $k > 1$

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$, $0 < k < 1$ (h) $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$ (j) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

(k) $\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$

(l) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6 Ejercicios de repaso

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

Determinación de una imagen y una preimagen En los ejercicios 1 a 4, encuentre (a) la imagen de **v** y (b) la preimagen de **w** para la transformación lineal.

1. $T: R^2 \to R^2$, $T(v_1, v_2) = (v_1, v_1 + 2v_2)$, $\mathbf{v} = (2, -3)$, $\mathbf{w} = (4, 12)$
2. $T: R^2 \to R^2$, $T(v_1, v_2) = (v_1 + v_2, 2v_2)$, $\mathbf{v} = (4, -1)$, $\mathbf{w} = (8, 4)$
3. $T: R^3 \to R^3$, $T(v_1, v_2, v_3) = (0, v_1 + v_2, v_2 + v_3)$, $\mathbf{v} = (-3, 2, 5)$, $\mathbf{w} = (0, 2, 5)$
4. $T: R^3 \to R^3$, $T(v_1, v_2, v_3) = (v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3)$, $\mathbf{v} = (-2, 1, 2)$, $\mathbf{w} = (0, 1, 2)$

Transformaciones lineales y matrices estándar En los ejercicios 5 a 12, determine si la función es una transformación lineal. En caso afirmativo, determine su matriz estándar A.

5. $T: R^2 \to R^2$, $T(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, -x_1 - x_2)$
6. $T: R^2 \to R^2$, $T(x_1, x_2) = (x_1 + 3, x_2)$
7. $T: R^2 \to R^2$, $T(x, y) = (x - 2y, 2y - x)$
8. $T: R^2 \to R^2$, $T(x, y) = (x + y, y)$
9. $T: R^2 \to R^2$, $T(x, y) = (x + h, y + k)$, $h \neq 0$ or $k \neq 0$ (traslación en R^2)
10. $T: R^2 \to R^2$, $T(x, y) = (|x|, |y|)$
11. $T: R^3 \to R^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_1)$
12. $T: R^3 \to R^3$, $T(x, y, z) = (z, y, x)$
13. Sea T una transformación lineal de R^2 a R^2 tal que $T(2, 0) = (1, 1)$ y $T(0, 3) = (3, 3)$. Determine $T(1, 1)$ y $T(0, 1)$.
14. Sea T una transformación lineal de R^3 a R tal que $T(1, 1, 1) = 1$, $T(1, 1, 0) = 2$ y $T(1, 0, 0) = 3$. Determine $T(0, 1, 1)$.
15. Sea T una transformación lineal de R^2 a R^2 tal que $T(1, 1) = (2, 3)$ y $T(2, –1) = (1, 0)$. Determine $T(0, –1)$.
16. Sea T una transformación lineal de R^2 a R^2 tal que $T(1, –1) = (2, –3)$ y $T(0,2) = (0, 8)$. Determine $T(2, 4)$.

Transformación lineal dada por una matriz En los ejercicios 17 a 24, defina la transformación lineal. Para cada matriz a, (a) determine la dimensión de R^n y la de R^m, (b) encuentre la imagen $T(\mathbf{v})$ del vector **v** dado y (c) encuentre la preimagen del vector **w** dado.

17. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = (6, 1, 1)$, $\mathbf{w} = (3, 5)$
18. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = (5, 2, 2)$, $\mathbf{w} = (4, 2)$
19. $A = [1 \quad 1]$, $\mathbf{v} = (2, 3)$, $\mathbf{w} = 4$
20. $A = [2 \quad -1]$, $\mathbf{v} = (1, 2)$, $\mathbf{w} = -1$
21. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = (2, 1, -5)$, $\mathbf{w} = (6, 4, 2)$
22. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = (8, 4)$, $\mathbf{w} = (5, 2)$
23. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = (2, 2)$, $\mathbf{w} = (4, -5, 0)$
24. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = (1, 2)$, $\mathbf{w} = (2, -5, 12)$
25. Use la matriz estándar de la rotación R^2 en contra del sentido de las manecillas del reloj para girar 90° alrededor del origen el triángulo cuyos vértices son (3, 5), (5, 3) y (3, 0). Grafique los triángulos.
26. Rote 90° el triángulo del ejercicio 25 alrededor del punto (5, 3) en contra del sentido de las manecillas del reloj. Grafique los triángulos.

Determinación de bases para el kernel y rango En los ejercicios 27 a 30, determine una base para (a) ker(T) y (b) rango (T).

27. $T: R^4 \to R^3$,
$$T(w, x, y, z) = (2w + 4x + 6y + 5z, -w - 2x + 2y, 8y + 4z)$$
28. $T: R^3 \to R^3$, $T(x, y, z) = (x + 2y, y + 2z, z + 2x)$
29. $T: R^3 \to R^3$, $T(x, y, z) = (x, y + 2z, z)$
30. $T: R^3 \to R^3$, $T(x, y, z) = (x + y, y + z, x - z)$

Determinación de kernel, nulidad, rango y rango En los Ejercicios 31-34, defina la transformación lineal T por $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$. Determine (a) ker($T$), (b) nulidad($T$), (c) rango($T$) y (d) rango($T$),

31. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
32. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$
33. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$
34. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
35. Dados $T: R^5 \to R^3$ y nulidad(T) = 2, encuentre el rango(T).
36. Dados $T: P_5 \to P_3$ y nulidad(T) = 4, encuentre el rango(T).
37. Dados $T: P_4 \to R^5$ y rango(T) = 3, encuentre la nulidad(T).
38. Dados $T: M_{2,2} \to M_{2,2}$ y rango(T) = 3, encuentre la nulidad(T).

Determinación de una potencia de una matriz estándar En los ejercicios 39 a 42, encuentre la potencia indicada de A, la matriz estándar de T.

39. $T: R^3 \to R^3$, reflexión en el plano xy. Encuentre A^2.

40. $T: R^3 \to R^3$, proyección sobre el plano xy. Encuentre A^2.

41. $T: R^2 \to R^2$, rotación de un ángulo θ en contra del sentido del movimiento de las manecillas del reloj. Encuentre A^3.

42. **Cálculo** $T: P^3 \to P^3$, operador diferencial D_x. Encuentre A^2.

Determinación de matrices estándar para composiciones En los ejercicios 43 y 44, encuentre las matrices estándar para $T = T_1 \circ T_2$ y $T' = T_2 \circ T_1$.

43. $T_1: R^2 \to R^3,\ T_1(x, y) = (x, x + y, y)$

$T_2: R^3 \to R^2,\ T_2(x, y, z) = (0, y)$

44. $T_1: R \to R^2,\ T_1(x) = (x, 3x)$

$T_2: R^2 \to R,\ T_2(x, y) = (y + 2x)$

Determinación de la inversa de una transformación lineal En los ejercicios 45 a 48, determine si la transformación T tiene inversa. Si es así, encuentre su inversa.

45. $T: R^2 \to R^2,\ T(x, y) = (0, y)$

46. $T: R^2 \to R^2$,

$T(x, y) = (x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta, x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta)$

47. $T: R^2 \to R^2,\ T(x, y) = (x, -y)$

48. $T: R^3 \to R^2,\ T(x, y, z) = (x + y, y - z)$

Transformaciones uno a uno, sobre e invertibles En los ejercicios 49 a 52, determine si la transformación lineal representada por la matriz A es (a) uno a uno, (b)sobre y (c) invertible.

49. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ **50.** $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

51. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **52.** $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 5 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Determinación de la imagen de dos formas En los ejercicios 53 y 54, determine $T(\mathbf{v})$ aplicando (a) la matriz estándar y (b) la matriz con respecto a B y B'.

53. $T: R^2 \to R^3,\ T(x, y) = (-x, y, x + y),\ \mathbf{v} = (0, 1)$,

$B = \{(1, 1), (1, -1)\},\ B' = \{(0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 0)\}$

54. $T: R^2 \to R^2,\ T(x, y) = (2y, 0),\ \mathbf{v} = (-1, 3)$,

$B = \{(2, 1), (-1, 0)\},\ B' = \{(-1, 0), (2, 2)\}$

Determinación de un matriz para una transformación lineal En los Ejercicios 55 y 56, encuentre la matriz A' para T respecto a la base B'.

55. $T: R^2 \to R^2$,

$T(x, y) = (x - 3y, y - x),\ B' = \{(1, -1), (1, 1)\}$

56. $T: R^3 \to R^3,\ T(x, y, z) = (x + 3y, 3x + y, -2z)$,

$B' = \{(1, 1, 0), (1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$

Matrices similares En los Ejercicios 57 y 58, use la matriz P para demostrar que las matrices A y A' son similares.

57. $P = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 18 & -19 \\ 11 & -12 \end{bmatrix},\ A' = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

58. $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},\ A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

59. Sea $T: R^3 \to R^3$ definida por $T(\mathbf{v}) = \text{proy}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$, en donde $\mathbf{u} = (0, 1, 2)$.

(a) Determine A, la matriz estándar de T.

(b) Sea S la transformación lineal representada por $I - A$. Demuestre que S es de la forma $S(\mathbf{v}) = \text{proy}_{\mathbf{w}_1}\mathbf{v} + \text{proj}_{\mathbf{w}_2}\mathbf{v}$ donde $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$ son vectores fijos en R^3.

(c) Demuestre que el kernel de T es igual al rango de S.

60. Sea $T: R^2 \to R^2$ definida por $T(\mathbf{v}) = \text{proy}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$, donde $\mathbf{u} = (4, 3)$.

(a) Determine A, la matriz estándar de T, y demuestre que $A^2 = A$.

(b) Demuestre que $(I - A)^2 = I - A$.

(c) Encuentre $A\mathbf{v}$ e $(I - A)\mathbf{v}$ para $\mathbf{v} = (5, 0)$.

(d) Trace la gráfica de $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $A\mathbf{v}$ e $(I - A)\mathbf{v}$.

61. Sean S y T transformaciones lineales de V a W. Demuestre que $S + T$ y kT son transformaciones lineales, en donde $(S + T)(\mathbf{v}) = S(\mathbf{v}) + T(\mathbf{v})$ y $(kT)(\mathbf{v}) = kT(\mathbf{v})$.

62. **Prueba** Sea $T: R^2 \to R^2$ tal que $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, donde A es una matriz de 2×2 (tal transformación se denomina una **transformación afín**). Demuestre que T es una transformación lineal si y sólo si $\mathbf{b} = 0$.

Suma de dos transformaciones lineales En los ejercicios 63 y 65, la suma $S + T$ de dos transformaciones lineales $S: V \to W$ y $T: V \to W$ se define como $(S + T)(\mathbf{v}) = S(\mathbf{v}) + T(\mathbf{v})$.

63. **Prueba** Demuestre que $\text{rango}(S + T) \leq \text{rango}(S) + \text{rango}(T)$.

64. Proporcione un ejemplo para cada uno de los siguientes casos.

(a) $\text{rango}(S + T) = \text{rango}(S) + \text{rango}(T)$.

(b) $\text{rango}(S + T) < \text{rango}(S) + \text{rango}(T)$.

65. **Prueba** Sea $T: P_3 \to R$ tal que
$T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$.

(a) Demuestre que T es lineal.

(b) Determine el rango y la nulidad de T.

(c) Determine una base para el kernel de T.

66. **Prueba** Sean $T: V \to U$ y $S: U \to W$ transformaciones lineales.

(a) Demuestre que el kernel de T está contenido en el kernel de $S \circ T$.

(b) Demuestre que si $S \circ T$ es sobre, entonces también lo es S.

67. Sea V un espacio vectorial con producto interno. Para un vector $\mathbf{v}_0$ fijo diferente de cero en V, sea $T: V \to R$ la transformación lineal $T(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle$. Determine el kernel y el rango de T. Luego, determine la nulidad de T.

68. Cálculo Sea $B = \{1, x, \text{sen } x, \cos x\}$ una base de un subespacio W del espacio de funciones continuas, y sea D_x el operador diferencial sobre W. Encuentre la matriz de D_x con respecto a la base B. Encuentre el rango y el kernel de D_x.

69. Escriba ¿Los espacios vectoriales R^4, $M_{2,2}$ y $M_{1,4}$ son exactamente lo mismo? Describa sus similitudes y diferencias.

70. Cálculo Sea $T: P_3 \to P_3$ definida por $T(p) = p(x) + p'(x)$. Encuentre el rango y la nulidad de T.

Identificación y representación de una transformación En los ejercicios 71 a 76, (a) identifique la transformación y (b) represente geométricamente la transformación para un vector arbitrario en R^2.

71. $T(x, y) = (x, 2y)$ **72.** $T(x, y) = (x + y, y)$

73. $T(x, y) = (x, y + 3x)$ **74.** $T(x, y) = (5x, y)$

75. $T(x, y) = (x + 5y, y)$ **76.** $T(x, y) = \left(x, y + \frac{3}{2}x\right)$

Trazo de una imagen de un triángulo En los ejercicios 77 a 80, trace la imagen del triángulo cuyos vértices son los puntos (0, 0), (1, 0) y (0, 1) bajo la transformación dada.

77. T es una reflexión en el eje x.

78. T es la expansión definida por $T(x, y) = (2x, y)$.

79. T es la deformación definida por $T(x, y) = (x + 3y, y)$.

80. T es la deformación definida por $T(x, y) = (x, y + 2x)$.

Proporcionar una descripción geométrica En los ejercicios 81 y 82, proporcione una descripción geométrica de la transformación lineal definida por el producto matricial dado.

81. $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

82. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

Determinación de una matriz para producir una rotación En los ejercicios 83 a 86, encuentre la matriz que produce la rotación indicada y luego determine la imagen del vector (1, – 1, 1).

83. 45° alrededor del eje z. **84.** 90° alrededor del eje x.

85. 60° alrededor del eje x. **86.** 30° alrededor del eje y.

Determinación de una matriz para producir un par de rotaciones En los ejercicios 87 a 90, determine la matriz que produce el par de rotaciones indicadas.

87. 60° alrededor del eje x seguida por 30° alrededor de eje z.

88. 120° alrededor del eje y seguida por 45° alrededor del eje z.

89. 30° alrededor del eje y seguida por 45° alrededor del eje z.

90. 60° alrededor del eje x seguida por 60° alrededor del eje z.

Determinación de una imagen de un cubo unitario En los ejercicios 91 a 94, determine la imagen del cubo unitario cuyos vértices son (0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1) y (0, 1, 1) cuando es rotado el ángulo indicado.

91. 45° alrededor de eje z.

92. 90° alrededor del eje x.

93. 30° alrededor del eje x.

94. 120° alrededor del eje z.

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 95 a 98, determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, proporcione una razón o cite una expresión adecuada del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que muestre que la expresión no es cierta en todos los casos o cite del texto una expresión adecuada.

95. (a) Las transformaciones lineales denominadas reflexiones que mapean un punto sobre el plano xy a su imagen especular a lo largo de la recta $y = x$ están definidas por la matriz estándar $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) Las transformaciones lineales llamadas expansiones o contracciones horizontales están definidas por la matriz $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) La matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ puede rotar un punto 60° alrededor del eje x.

96. (a) Las transformaciones lineales denominadas reflexiones que mapean un punto sobre el plano xy a su imagen especular a lo largo del eje x están definidas por la matriz estándar $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(b) Las transformaciones lineales llamadas expansiones o contracciones verticales están definidas por la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$.

(c) La matriz $\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$ puede rotar un punto 30° alrededor del eje y.

97. (a) En cálculo, toda función lineal es también una transformación de $R^2 \to R^2$.

(b) Se dice que una transformación lineal es sobre, si y sólo si para toda $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en V, $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v})$ implica que $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

(c) Debido a las ventajas computacionales, es mejor elegir una base para V tal que la matriz de transformación sea diagonal.

98. (a) En el caso de polinomios, el operador diferencial D_x es una transformación lineal de P_n a P_{n-1}.

(b) El conjunto de todos los vectores $\mathbf{v}$ en V que satisfacen $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ es denominado kernel de T.

(c) La matriz A estándar de la composición de dos transformaciones lineales $T(\mathbf{v}) = T_2(T_1(\mathbf{v}))$ es el producto de la matriz estándar para T_2 y la matriz estándar para T_1.

6 Proyectos

Sea ℓ la recta $ax + by = 0$ en R^2. La transformación lineal L: $R^2 \to R^2$ que mapea un punto (x, y) a su imagen especular en ℓ se llama **reflexión** en ℓ. (Véase la Figura 6.22.) El objetivo de estos dos proyectos es encontrar la matriz por su reflexión respecto a la base estándar.

1 Reflexiones en el plano R^2 (I)

En este proyecto usted usará matrices de transición para determinar la matriz estándar para la reflexión L en la recta $ax + by = 0$.

1. Determine la matriz estándar de L para la recta $x = 0$.
2. Determine la matriz estándar de L para la recta $y = 0$.
3. Determine la matriz estándar de L para la recta $x - y = 0$.
4. Considere la recta ℓ representada por $x - 2y = 0$. Encuentre un vector $\mathbf{v}$ paralelo a ℓ y otro vector $\mathbf{w}$ ortogonal a ℓ. Determine la matriz A para la reflexión de ℓ respecto a la base ordenada $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$. Por último, utilice la matriz de transición apropiada para hallar la matriz para la reflexión respecto a la base estándar. Use esta matriz para encontrar las imágenes de los puntos $(2, 1)$, $(-1, 2)$ y $(5, 0)$.
5. Considere la recta general ℓ representada por $ax + by = 0$. Sea $\mathbf{v}$ un vector paralelo a ℓ y sea $\mathbf{w}$ un vector ortogonal a ℓ. Determine la matriz A para la reflexión en ℓ respecto a la base ordenada $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$. Por último, utilice la matriz de transición apropiada para hallar la matriz para la reflexión con respecto a la base estándar.
6. Determine la matriz estándar para la reflexión en la recta $3x + 4y = 0$. Utilice esta matriz para hallar las imágenes de los puntos $(3, 4)$, $(-4, 3)$ y $(0, 5)$.

2 Reflexiones en el plano R^2 (II)

En este segundo proyecto, utilice proyecciones para determinar la matriz estándar para la reflexión L en la recta $ax + by = 0$ (Véase la Figura 6.23.). Recuerde que la proyección del vector $\mathbf{u}$ sobre el vector $\mathbf{v}$ está representada por

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\mathbf{v}.$$

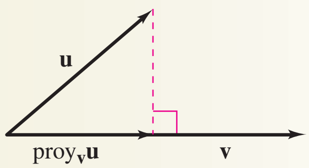


Figura 6.23

1. Encuentre la matriz estándar para la proyección sobre el eje y, ℓ es decir, determine la matriz estándar para $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ si $\mathbf{v} = (0, 1)$.
2. Determine la matriz estándar para la proyección sobre el eje x.
3. Considere la recta ℓ representada por $x - 2y = 0$. Encuentre un vector $\mathbf{v}$ paralelo a ℓ y otro vector $\mathbf{w}$ ortogonal a ℓ. Determine la matriz A para la proyección sobre ℓ respecto a la base ordenada $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$. Por último, utilice la matriz de transición apropiada para hallar la matriz para la proyección respecto a la base estándar. Use esta matriz para encontrar $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$ para los casos $\mathbf{u} = (2, 1)$, $\mathbf{u} = (-1, 2)$ y $\mathbf{u} = (5, 0)$.
4. Considere la recta general ℓ representada por $ax + by = 0$. Sea $\mathbf{v}$ un vector paralelo a y sea $\mathbf{w}$ un vector ortogonal a ℓ. Determine la matriz A para la proyección sobre respecto a la base ordenada $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$. Por último, utilice la matriz de transición apropiada para hallar la matriz para la proyección respecto a la base estándar.
5. Utilice la figura 6.24 para demostrar que $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} + L(\mathbf{u}))$, donde L es la reflexión en la recta ℓ. Resuelva esta ecuación para L y compare su respuesta con la fórmula del primer proyecto.

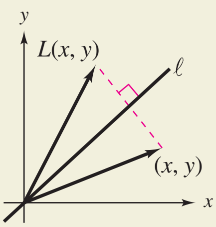


Figura 6.22

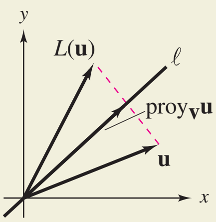


Figura 6.24

7 Eigenvalores y eigenvectores

Arquitectura (p. 382)

Población de conejos (p. 373)

Máximos y mínimos relativos (p. 369)

Genética (p. 359)

Difusión (p. 348)

En sentido de las manecillas del reloj, desde arriba a la izquierda: Anikakodydkova/www.shutterstock.com; ostill/www.shutterstock.com; marema/www.shutterstock.com; Shi Yali/www.shutterstock.com; yienkeat/www.shutterstock.com

7.1 Eigenvalores y eigenvectores

- Verificar eigenvalores y sus correspondientes eigenvectores.
- Encontrar eigenvalores y sus correspondientes eigenespacios.
- Usar la ecuación característica para encontrar eigenvalores y eigenvectores y encontrar los eigenvalores y eigenvectores de una matriz triangular.
- Encontrar los eigenvalores y eigenvectores de una transformación lineal.

EL PROBLEMA DEL EIGENVALOR

En esta sección se introduce uno de los problemas más importantes del álgebra lineal, el **problema del eigenvalor**. Su pregunta central es la siguiente. Si A es una matriz de $n \times n$, ¿hay vectores $\mathbf{x}$ diferentes de cero en R^n tales que $A\mathbf{x}$ sea un múltiplo escalar de $\mathbf{x}$? El escalar, denotado por la letra griega lambda (λ), se llama **eigenvalor** de la matriz A y el vector $\mathbf{x}$ diferente de cero se llama **eigenvector** de A correspondiente a λ. Los términos *eigenvalor* y *eigenvector* provienen del término alemán *eigenwert*, cuyo significado es "valor propio". Por tanto, se tiene

$$A\mathbf{x} = \overset{\boxed{\text{Eigenvalor}}}{\lambda}\mathbf{x}.$$

Eigenvector

Los eigenvalores y los eigenvectores tienen muchas aplicaciones importantes, muchas de las cuales se estudiarán a lo largo de este capítulo. Por el momento se dará una interpretación geométrica del problema en R^2. Si λ es un eigenvalor de una matriz A y $\mathbf{x}$ es un eigenvector de A correspondiente a λ, entonces la multiplicación de $\mathbf{x}$ por la matriz A produce un vector $\lambda\mathbf{x}$ paralelo a $\mathbf{x}$, como se muestra en la figura 7.1.

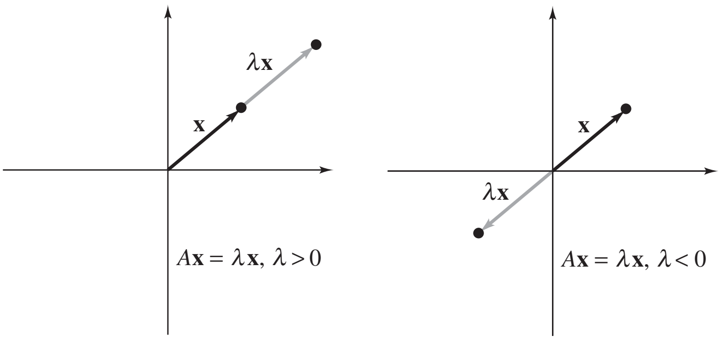


Figura 7.1

COMENTARIO

Sólo se presentan eigenvalores reales en este capítulo.

> **Definición de eigenvalor y eigenvector**
>
> Sea A una matriz de $n \times n$. El escalar λ se denomina **eigenvalor** de A si existe un vector $\mathbf{x}$ diferente de cero tal que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. El vector $\mathbf{x}$ se llama **eigenvector** de A correspondiente a λ.

Advierta que un *eigenvector* no puede ser cero. Si fuese $\mathbf{x}$ el vector cero, entonces la definición carecería de sentido, porque $A\mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$ se cumple para todos los valores reales de λ. Sin embargo, sí es posible un *eigenvalor* de $\lambda = 0$ (véase el ejemplo 2).

Una matriz puede tener más de un eigenvalor, como se muestra en los ejemplos 1 y 2.

EJEMPLO 1 Comprobación de los eigenvalores y eigenvectores

Para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

compruebe que $\mathbf{x}_1 = (1, 0)$ es un eigenvector de A correspondiente al eigenvalor $\lambda_1 = 2$, y que $\mathbf{x}_2 = (0, 1)$ es un eigenvector de A correspondiente al eigenvalor $\lambda_2 = -\lambda$.

SOLUCIÓN

Al multiplicar $\mathbf{x}_1$ a la izquierda por A produce

$$A\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \underbrace{2}_{\text{Eigenvalor}}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{Eigenvector}}.$$

Así, $\mathbf{x}_1 = (1, 0)$ es un eigenvector de A correspondiente al eigenvalor $\lambda_1 = 2$. De manera semejante, al multiplicar $\mathbf{x}_2$ por A se obtiene

$$A\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, $\mathbf{x}_2 = (0, 1)$ es un eigenvector de A correspondiente al eigenvalor $\lambda_2 = -1$.

EJEMPLO 2 Verificación de eigenvalores y de eigenvectores

Para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

verifique que

$$\mathbf{x}_1 = (-3, -1, 1) \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2 = (1, 0, 0)$$

son eigenvectores de A y encuentre sus eigenvalores correspondientes.

SOLUCIÓN

Al multiplicar $\mathbf{x}_1$ a la izquierda por A se obtiene

$$A\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, $\mathbf{x}_1 = (-3, -1, 1)$ es un eigenvector de A correspondiente al eigenvalor $\lambda_1 = 0$. De manera semejante, al multiplicar $\mathbf{x}_2$ a la izquierda por A se obtiene

$$A\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Así, $\mathbf{x}_2 = (1, 0, 0)$ es un eigenvector de A correspondiente al eigenvalor $\lambda_2 = 1$.

DESCUBRIMIENTO

1. En el ejemplo 2, $\lambda_2 = 1$ es un eigenvalor de la matriz A. Calcule el determinante de la matriz $\lambda_2 I - A$, donde I es la matriz identidad de 3×3.
2. Repita este ejercicio para otro eigenvalor $\lambda_1 = 0$.
3. En general, si λ es un eigenvalor de la matriz A ¿cuál es el valor de $|\lambda I - A|$?

EIGENESPACIOS O ESPACIOS CARACTERÍSTICOS

Aunque en los ejemplos 1 y 2 se presenta solamente el eigenvector de cada eigenvalor, cada uno de los cuatro eigenvalores de los ejemplos 1 y 2 tiene infinidad de eigenvectores. Así, en el ejemplo 1 los vectores (2, 0) y (–3, 0) son eigenvectores de A correspondientes al eigenvalor 2. De hecho, si A es una matriz de $n \times n$ con un eigenvalor λ y un eigenvector correspondiente $\mathbf{x}$, entonces todo múltiplo escalar de $\mathbf{x}$ diferente de cero también es un eigenvector de A. Lo anterior puede observarse al considerar un escalar c diferente de cero, con lo que se obtiene

$$A(c\mathbf{x}) = c(A\mathbf{x}) = c(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(c\mathbf{x}).$$

También es cierto que si $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ son eigenvectores correspondientes al *mismo* eigenvalor λ, entonces su suma también es un eigenvector correspondiente a λ, ya que

$$A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = \lambda\mathbf{x}_1 + \lambda\mathbf{x}_2 = \lambda(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2).$$

En otras palabras, el conjunto de todos los eigenvectores de un eigenvalor λ dado, junto con el vector cero, es un subespacio de R^n. Este subespacio especial de R^n se llama **eigenespacio** de λ.

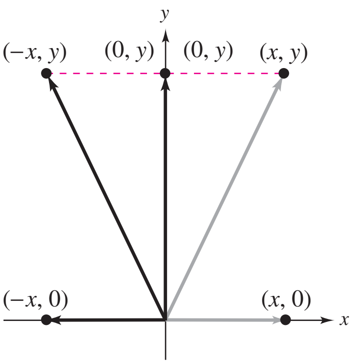
TEOREMA 7.1 Los eigenvectores de λ forman un subespacio

Si A es una matriz de $n \times n$ con un eigenvalor λ, entonces el conjunto de todos los eigenvectores de λ, junto con el vector cero,

$$\{\mathbf{x}\text{: } \mathbf{x} \text{ es un eigenvector de } \lambda\} \cup \{\mathbf{0}\}$$

es un subespacio de R^n. Este subespacio se llama **eigenespacio** de λ.

Determinar los eigenvalores y los eigenespacios correspondientes de una matriz puede ser difícil. Sin embargo, algunas veces se pueden determinar eigenvalores y eigenespacios por simple inspección, como se muestra en el ejemplo 3.



A refleja los vectores en el eje *y*

Figura 7.2

EJEMPLO 3 Determinación geométrica de eigenespacios en R^2

Determine los eigenvalores y los correspondientes eigenespacios de $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

Geométricamente, multiplicar un vector (x, y) en R^2 por la matriz A corresponde a una reflexión en el eje y. Es decir, si $\mathbf{v} = (x, y)$, entonces

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}.$$

La figura 7.2 ilustra el hecho de que los únicos vectores reflejados sobre múltiplos escalares de ellos mismos son aquellos que están sobre el eje x o sobre el eje y.

Para un vector sobre el eje x

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ 0 \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$$

El eigenvalor es $\lambda_1 = -1$.

Para un vector sobre el eje y

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$$

El eigenvalor es $\lambda_2 = 1$.

COMENTARIO

La solución geométrica dada en el ejemplo 3 no es típica del problema general del eigenvalor. A continuación se describe un método general.

Por tanto, los eigenvectores correspondientes a $\lambda_1 = -1$ son los vectores diferentes de cero que están sobre el eje x y los eigenvectores correspondientes a $\lambda_2 = 1$ son los vectores diferentes de cero que están sobre el eje y. Esto implica que el eigenespacio correspondiente a $\lambda_1 = -1$ es el eje x y que el eigenespacio correspondiente a $\lambda_2 = 1$ es el eje y.

DETERMINACIÓN DE EIGENVALORES Y EIGENVECTORES

Para determinar los eigenvalores y los eigenvectores de una matriz A de $n \times n$, sea I la matriz identidad de $n \times n$. Al escribir la ecuación $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ en la forma $\lambda I\mathbf{x} = A\mathbf{x}$ se obtiene $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Este sistema homogéneo de ecuaciones tiene soluciones diferentes de cero si y sólo si la matriz de coeficientes $(\lambda I - A)$ *no* es invertible; es decir, si y sólo si el determinante de $(\lambda I - A)$ es cero. Por tanto, se puede establecer el siguiente teorema.

COMENTARIO

Debido a que el grado del polinomio característico de A es igual a n, entonces A puede tener cuando mucho n eigenvalores distintos. El teorema fundamental del álgebra establece que un polinomio de n-ésimo grado tiene precisamente n raíces. Estas n raíces, sin embargo, incluyen raíces repetidas y raíces complejas. En este capítulo nos ocuparemos sólo de lo concerniente a las raíces reales de polinomios característicos, es decir, eigenvalores reales.

TEOREMA 7.2 Eigenvalores y eigenvectores de una matriz

Sea A una matriz de $n \times n$

1. Un eigenvalor de A es un escalar λ tal que $\det(\lambda i - A) = 0$.
2. Los eigenvectores de A correspondientes a λ son las soluciones diferentes de cero de $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

La ecuación $\det(\lambda I - A) = 0$ se llama **ecuación característica** de A. Además, cuando se desarrolla en forma de polinomio, éste

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$$

se llama **polinomio característico** de A. Esta definición establece que los eigenvalores de una matriz de $n \times n$ corresponden a las raíces del polinomio característico de A.

EJEMPLO 4 Determinación de eigenvalores y eigenvectores

Encuentre los eigenvalores y los correspondientes eigenvectores de $A = \begin{bmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

La ecuación característica de A es

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 12 \\ -1 & \lambda + 5 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda - 10 + 12 = (\lambda + 1)(\lambda + 2).$$

Así, la ecuación característica es $(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$, con lo que se obtienen $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -2$ como eigenvalores de A. Para determinar los eigenvectores correspondientes se aplica el método de eliminación de Gauss-Jordan para resolver dos veces el sistema lineal homogéneo dado por $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$: primero para $\lambda = \lambda_1 = -1$ y en seguida para $\lambda = \lambda_2 = -2$. Para $\lambda_1 = -1$, la matriz de coeficientes es

$$(-1)I - A = \begin{bmatrix} -1 - 2 & 12 \\ -1 & -1 + 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 12 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

que se reduce por renglones a $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, con lo que se prueba que $x_1 - 4x_2 = 0$. Si $x_2 = t$, usted puede concluir que todo eigenvector de λ_1 es de la forma

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \neq 0.$$

Para $\lambda_2 = -2$ se tiene

$$(-2)I - A = \begin{bmatrix} -2 - 2 & 12 \\ -1 & -2 + 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Con $x_2 = t$, se concluye que todo eigenvector de λ_2 es de la forma

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \neq 0.$$

COMENTARIO

Intente verificar que $A\mathbf{x} = \lambda_i\mathbf{x}$ para los eigenvalores y eigenvectores determinados en este ejemplo.

Los sistemas homogéneos que aparecen cuando usted determina eigenvectores siempre conducen a una matriz reducida por renglones que tiene al menos un renglón de ceros, debido a que este sistema debe tener soluciones no triviales. Los pasos utilizados para determinar los eigenvalores y los correspondientes eigenvectores de una matriz se resumen a continuación.

Determinación de eigenvalores y eigenvectores

Sea A una matriz de $n \times n$.

1. Forme la ecuación característica $|\lambda I - A| = 0$. Será una ecuación polinomial de grado n en la variable λ.
2. Determine las raíces reales de la ecuación característica. Éstas son los eigenvalores de A.
3. Para todo eigenvalor λ_i, determine los eigenvectores correspondientes a λ_i al resolver el sistema homogéneo $(\lambda_i I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Para llevar a cabo lo anterior se requiere reducir por renglones una matriz de $n \times n$. La forma resultante escalonada reducida por renglones debe contener por lo menos un renglón de ceros.

Encontrar los eigenvalores de una matriz de $n \times n$ implica la factorización de un polinomio de n-ésimo grado. Una vez que se ha determinado un eigenvalor, hallar los eigenvectores correspondientes es una aplicación directa del proceso de eliminación de Gauss-Jordan.

EJEMPLO 5 Determinación de eigenvalores y eigenvectores

Encuentre los eigenvalores y los eigenvectores correspondientes de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

¿Cuál es la dimensión del eigenespacio de cada eigenvalor?

SOLUCIÓN

La ecuación característica de A es

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 2)^3. \end{aligned}$$

Así, la ecuación característica es $(\lambda - 2)^3 = 0$. Por tanto, el único eigenvalor es $\lambda = 2$. Para encontrar los eigenvectores asociados con $\lambda = 2$, resuelva el sistema lineal homogéneo representado por $(2I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$$2I - A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lo anterior implica que $x_2 = 0$. con los parámetros $s = x_1$ y $t = x_3$, se encuentra que los eigenvectores de $\lambda = 2$ son de la forma

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad s \text{ y } t \text{ son ambos diferentes de cero.}$$

Dado que $\lambda = 2$ tiene dos eigenvectores linealmente independientes, entonces la dimensión de su eigenespacio es 2.

Si un eigenvalor λ_i ocurre como una *raíz múltiple* (k veces) del polinomio característico, entonces se dice que λ_i tiene **multiplicidad** k. Esto implica que $(\lambda - \lambda_i)^k$ es un factor del polinomio característico y que $(\lambda - \lambda_i)^{k+1}$ no es un factor del polinomio característico. Así, en el ejemplo 5 el eigenvalor $\lambda = 2$ tiene multiplicidad 3.

También observe en el ejemplo 5 que la dimensión del eigenespacio de $\lambda = 2$ es 2. En general, la multiplicidad de un eigenvalor es mayor o igual que la dimensión de su eigenespacio. (En el ejercicio 61, se le pide demostrar esto.)

EJEMPLO 6 Determinación de eigenvalores y eigenvectores

Determine los eigenvalores de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -10 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

y encuentre una base para cada uno de los espacios característicos correspondientes.

SOLUCIÓN

El polinomio característico de A es

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & -5 & 10 \\ -1 & 0 & \lambda - 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

Así, la ecuación característica es $(\lambda - 1)^2 (\lambda - 2) (\lambda - 3) = 0$ y los eigenvalores son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 3$ (observe que $\lambda_1 = 1$ tiene multiplicidad 2).

Usted puede encontrar una base para el eigenespacio de $\lambda_1 = 1$ como sigue.

$$(1)I - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Con $s = x_2$ y $t = x_4$ se obtiene

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0s - 2t \\ s + 0t \\ 0s + 2t \\ 0s + t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Una base del eigenespacio correspondiente a $\lambda_1 = 1$ es

$B_1 = \{(0, 1, 0, 0), (-2, 0, 2, 1)\}$. Base para $\lambda_1 = 1$

Para $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 3$ se sigue el mismo patrón para obtener las bases del eigenespacio.

$B_2 = \{(0, 5, 1, 0)\}$ Base para $\lambda_2 = 2$

$B_3 = \{(0, -5, 0, 1)\}$. Base para $\lambda_3 = 3$

NOTA TECNOLÓGICA

Muchos programas de computación y aplicaciones gráficas cuentan con programas para aproximar eigenvalores y eigenvectores de una matriz de $n \times n$. Intente usar una aplicación gráfica o un programa de computación para encontrar los eigenvalores y eigenvectores en el ejemplo 6. Cuando determine eigenvectores, su aplicación gráfica o programa de computación podría producir una matriz en la cual las columnas sean múltiplos escalares de los eigenvectores que usted obtendría con cálculos manuales. **Online Technology Guide** disponible en college.cengage.com/pic/larsonELA6e.

La determinación de eigenvalores y de eigenvectores para matrices de orden $n \geq 4$ puede ser tediosa. Adicionalmente, usar el procedimiento que se siguió en el ejemplo 6 en una computadora puede introducir errores de redondeo. En consecuencia, puede ser más eficiente usar métodos numéricos para aproximar los eigenvalores de matrices grandes. Estos métodos numéricos pueden consultarse en textos de álgebra lineal avanzada y de análisis numérico.

Hay algunos tipos de matrices para los cuales es fácil encontrar los eigenvalores. El siguiente teorema establece que los eigenvalores de una matriz triangular de $n \times n$ son los elementos en la diagonal principal. Su demostración surge a partir del hecho de que el determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de su diagonal.

TEOREMA 7.3 Eigenvalores de matrices triangulares

Si A es una matriz triangular de $n \times n$, entonces sus eigenvalores son sus elementos en la diagonal principal.

EJEMPLO 7 Determinación de eigenvalores de matrices triangulares y diagonales

Determine los eigenvalores de las siguientes matrices.

a. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

SOLUCIÓN

a. Sin usar el teorema 7.3 se encuentra que

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda - 1 & 0 \\ -5 & -3 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 3).$$

Así, los eigenvalores son $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = -3$, que simplemente son los elementos de la diagonal principal de A.

b. En este caso se aplica el teorema 7.3 para concluir que los eigenvalores son los elementos de la diagonal principal $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = -4$ y $\lambda_5 = 3$.

ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

Los eigenvalores y eigenvectores son útiles para modelar fenómenos de la vida real. Por ejemplo, suponga que en un experimento para determinar la difusión de un fluido de un matraz a otro a través de una membrana permeable y después, desde el segundo matraz, los investigadores determinan que la taza de flujo entre matraces es el doble del volumen de fluido en el primer matraz y la taza de flujo desde el segundo matraz es tres veces el volumen de fluido en el segundo matraz. El siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales, donde y_i representa el volumen de fluido en el matraz i, modela esta situación.

$$\begin{aligned} y_1' &= -2y_1 \\ y_2' &= 2y_1 - 3y_2 \end{aligned}$$

En la Sección 7.4 usted usará eigenvalores y eigenvectores para resolver tales sistemas de ecuaciones diferenciales lineales. Por ahora, verifique que la solución de este sistema es

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1e^{-2t} \\ y_2 &= 2C_1e^{-2t} + C_2e^{-3t}. \end{aligned}$$

Shi Yali/www.shutterstock.com

EIGENVALORES Y EIGENVECTORES DE TRANSFORMACIONES LINEALES

Esta sección empezó con la definición de eigenvalores y eigenvectores en términos de matrices. Sin embargo hubiera sido posible definirlos en términos de transformaciones lineales. Un número λ se denomina **eigenvalor** de una transformación lineal T: $V \to V$ si hay un vector $\mathbf{x}$ diferente de cero tal que $T(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$. El vector $\mathbf{x}$ se denomina **eigenvector** de T correspondiente a λ y el conjunto de todos los eigenvectores de λ (con el vector cero) se denomina **eigenespacio** de λ.

Considere la transformación lineal T: $R^3 \to R^3$, cuya matriz con respecto a la base estándar es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Base estándar:
$B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

En el ejemplo 5 de la sección 6.4 se encontró que la matriz de T con respecto a la base $B' = \{(1, 1, 0), (1, -1, 0), (0, 0, 1)$ es la matriz diagonal

$$A' = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Base no estándar:
$B' = \{(1, 1, 0), (1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$

Para una transformación T dada, ¿cómo podemos determinar una base B' cuya matriz correspondiente sea diagonal? El siguiente ejemplo nos da una indicación de la respuesta.

EJEMPLO 8 Determinación de eigenvalores y eigenespacios

Encuentre los eigenvalores y los eigenespacios de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN

como

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -3 & 0 \\ -3 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = [(\lambda - 1)^2 - 9](\lambda + 2) = (\lambda - 4)(\lambda + 2)^2$$

los eigenvalores de A son $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = -2$. Los eigenespacios de estos dos eigenvalores son $B_1 = \{(1, 1, 0\}$ y $B_2 = \{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$, respectivamente (verifique esto).

El ejemplo 8 ilustra dos resultados. Sea T: $R^3 \to R^3$ la transformación lineal cuya matriz estándar es A y sea B' la base de R^3 integrada por los tres eigenvectores linealmente independientes correspondiendo a los eigenvalores de A, entonces el resultado es como sigue.

1. La matriz A' para P con respecto a la base B', es diagonal.

$$A' = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Eigenvalores de A

Base no estándar:
$B' = \{(1, 1, 0), (1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$

Eigenvectores de A

2. Los elementos en la diagonal principal de la matriz A' son los eigenvalores de A.

En la siguiente sección se formalizan estos dos resultados y también se caracterizan las transformaciones lineales que es posible representar por matrices diagonales.

7.1 Ejercicios

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

Verificación de eigenvalores y eigenvectores En los ejercicios 1 a 8, compruebe que λ_i es un eigenvalor de A y $\mathbf{x}_i$ es un eigenvector correspondiente.

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = 2, \mathbf{x}_1 = (1, 0)$; $\lambda_2 = -2, \mathbf{x}_2 = (0, 1)$

2. $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = -1, \mathbf{x}_1 = (1, 1)$; $\lambda_2 = 2, \mathbf{x}_2 = (5, 2)$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = 0, \mathbf{x}_1 = (1, -1)$; $\lambda_2 = 2, \mathbf{x}_2 = (1, 1)$

4. $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = 2, \mathbf{x}_1 = (1, 1)$; $\lambda_2 = -3, \mathbf{x}_2 = (-4, 1)$

5. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = 2, \mathbf{x}_1 = (1, 0, 0)$; $\lambda_2 = -1, \mathbf{x}_2 = (1, -1, 0)$; $\lambda_3 = 3, \mathbf{x}_3 = (5, 1, 2)$

6. $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = 5, \mathbf{x}_1 = (1, 2, -1)$; $\lambda_2 = -3, \mathbf{x}_2 = (-2, 1, 0)$; $\lambda_3 = -3, \mathbf{x}_3 = (3, 0, 1)$

7. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = 1, \mathbf{x}_1 = (1, 1, 1)$

8. $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = 4, \mathbf{x}_1 = (1, 0, 0)$; $\lambda_2 = 2, \mathbf{x}_2 = (1, 2, 0)$; $\lambda_3 = 3, \mathbf{x}_3 = (-2, 1, 1)$

9. Use A, λ_i y $\mathbf{x}_i$ del ejercicio 3 para demostrar que
(a) $A(c\mathbf{x}_1) = 0(c\mathbf{x}_1)$ para cualquier número real c.
(b) $A(c\mathbf{x}_2) = 2(c\mathbf{x}_2)$ para cualquier número real c.

10. Use A, λ_i y y $\mathbf{x}$ del ejercicio 5 para demostrar que
(a) $A(c\mathbf{x}_1) = 2(c\mathbf{x}_1)$ para cualquier número real c.
(b) $A(c\mathbf{x}_2) = -(c\mathbf{x}_2)$ para cualquier número real c.
(c) $A(c\mathbf{x}_3) = 3(c\mathbf{x}_3)$ para cualquier número real c.

Determinación de eigenvectores En los ejercicios 11 a 14, determine si $\mathbf{x}$ es un eigenvector

11. $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$
(a) $\mathbf{x} = (1, 2)$
(b) $\mathbf{x} = (2, 1)$
(c) $\mathbf{x} = (1, -2)$
(d) $\mathbf{x} = (-1, 0)$

12. $A = \begin{bmatrix} -3 & 10 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$
(a) $\mathbf{x} = (4, 4)$
(b) $\mathbf{x} = (-8, 4)$
(c) $\mathbf{x} = (-4, 8)$
(d) $\mathbf{x} = (5, -3)$

13. $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$
(a) $\mathbf{x} = (2, -4, 6)$
(b) $\mathbf{x} = (2, 0, 6)$
(c) $\mathbf{x} = (2, 2, 0)$
(d) $\mathbf{x} = (-1, 0, 1)$

14. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 9 \end{bmatrix}$
(a) $\mathbf{x} = (1, 1, 0)$
(b) $\mathbf{x} = (-5, 2, 1)$
(c) $\mathbf{x} = (0, 0, 0)$
(d) $\mathbf{x} = (2\sqrt{6} - 3, -2\sqrt{6} + 6, 3)$

Determinación geométrica de eigenespacios en R^2 En los Ejercicios 15 y 16, use el método mostrado en el ejemplo 3 para encontrar el(los) eigenvalor(es) y correspondiente(s) eigenespacio(s) de A.

15. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

16. $A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ecuación característica, eigenvalores y eigenvectores En los ejercicios 17 a 28, determine (a) la ecuación característica y (b) los eigenvalores (y los correspondientes eigenvectores) de la matriz.

17. $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -6 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -3 & -4 & 9 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 \\ -4 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ -2 & \frac{13}{2} & -10 \\ \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & 8 \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Determinación de eigenvalores En los ejercicios 29 a 38, use una aplicación gráfica con capacidad matricial o un programa de cómputo para determinar los eigenvalores de la matriz.

29. $\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 5 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

32. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 5 \\ -2 & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

33. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$

34. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

35. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 6 & 9 \\ 4 & 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$ **36.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

37. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

38. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Eigenvalores de matrices triangulares y diagonales En los Ejercicios 39-42, encuentre los eigenvalores de la matriz triangular o diagonal.

39. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **40.** $\begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

41. $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ **42.** $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$

Eigenvalores y eigenvectores de transformaciones lineales En los Ejercicios 43-46, considere la transformación lineal T: $R^n \to R^n$ cuya matriz A respecto a la base estándar está dada. Encuentre (a) los eigenvalores de A, (b) una base para cada uno de los correspondientes eigenespacios y (c) la matriz A' para T respecto a la base B', donde B' está formada por los vectores base que se encuentran en el inciso (b).

43. $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ **44.** $A = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

45. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ **46.** $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 5 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

Teorema de Cayley-Hamilton En los ejercicios 47 a 50, demuestre el teorema de Cayley-Hamilton para la matriz dada. El **teorema** de **Cayley-Hamilton** establece que una matriz satisface su ecuación característica. Por ejemplo, la ecuación característica de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

es $\lambda^2 - 6\lambda + 11 = 0$ y, por consiguiente, en virtud del teorema, se tiene $A^2 - 6A + 11I_2 = O$.

47. $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ **48.** $\begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

49. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **50.** $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

51. Ejecute las siguientes verificaciones computacionales sobre los eigenvalores determinados en los ejercicios impares 17-27.
(a) La suma de los eigenvalores n es igual a la traza de la matriz (recuerde que la **traza** de una matriz es la suma de las entradas diagonales principales la matriz).
(b) El producto de los n eigenvalores es igual a $|A|$.
(Cuando λ es un eigenvalor de multiplicidad k, recuerde ingresarlo k veces en la suma o producto de estas verificaciones.)

52. Ejecute las siguientes verificaciones computacionales sobre los eigenvalores determinados en los ejercicios pares 18-28.
(a) La suma de los eigenvalores n es igual a la traza de la matriz (recuerde que la **traza** de una matriz es la suma de las entradas diagonales principales la matriz).
(b) El producto de los n eigenvalores es igual a $|A|$.
(Si λ es un eigenvalor de multiplicidad k, recuerde ingresarlo k veces en la suma o producto de estas verificaciones.)

53. Demuestre que si A es una matriz de $n \times n$ cuyo i-ésimo renglón es idéntico al i-ésimo renglón de I, entonces 1 es un eigenvalor de A.

54. Prueba Demuestre que $\lambda = 0$ es un eigenvalor de A si y sólo si A es singular.

55. Prueba Para una matriz invertible A demuestre que A y A^{-1} tienen los mismos eigenvectores. ¿cómo se relacionan los eigenvalores de A con los eigenvalores de A^{-1}?

56. Prueba Demuestre que A y A^T tienen los mismos eigenvalores. ¿Los eigenespacios son iguales?

57. Prueba Demuestre que el término constante del polinomio característico es $\pm\ |A|$.

58. Defina T: $R^2 \to R^2$ por $T(\mathbf{v}) = \text{proj}_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$, donde $\mathbf{u}$ es un vector fijo en R^2. Demuestre que los eigenvalores de A (la matriz estándar de T) son 0 y 1.

59. Demostración guiada Demuestre que una matriz triangular es singular si y sólo si sus eigenvalores son reales y diferentes de cero.

Inicio: como este es un enunciado “si y sólo si”, usted debe probar que el enunciado es cierto en ambas direcciones. repase los teoremas 3.2 y 3.7.
(i) Para demostrar el enunciado en una dirección, suponga que la matriz triangular A es no singular. Aplique sus conocimientos sobre matrices triangulares no singulares y determinantes para concluir que los elementos de la diagonal principal de A son diferentes de cero.
(ii) Ya que A es triangular, usted puede aplicar el teorema 7.3 y el inciso (i) para concluir que los eigenvalores son reales y diferentes de cero.
(iii) Para probar el enunciado en la otra dirección, suponga que los eigenvalores de la matriz triangular A son reales y diferentes de cero. repita los incisos (i) y (ii) en orden inverso para demostrar que A es no singular.

60. Demostración guiada Demuestre que si $A^2 = O$, entonces 0 es el único eigenvalor de A.

Inicio: usted necesita probar que si existen un vector $\mathbf{x}$ diferente de cero y un número real λ tal que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, entonces si $A^2 = O$, λ debe ser 0.

(i) Ya que $A^2 = A \cdot A$, puede escribir $A^2\mathbf{x}$ como $A(A(\mathbf{x}))$.

(ii) Use el hecho de que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ y las propiedades de la multiplicación de matrices para concluir que $A^2\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x}$.

(iii) Ya que A^2 es la matriz nula, usted puede concluir que λ debe ser cero.

61. Prueba Demuestre que la multiplicidad de un eigenvalor es mayor que o igual a la dimensión de su eigenespacio.

62. REMATE Una matriz A de $n \times n$ tiene la ecuación característica

$$|\lambda I - A| = (\lambda + 2)(\lambda - 1)(\lambda - 3)^2 = 0.$$

(a) ¿Cuáles son los eigenvalores de A?

(b) ¿Cuál es el orden de A? Explique.

(c) ¿Es $\lambda I - A$ singular? Explique.

(d) ¿Es A singular? Explique (*pista:* use el resultado del Ejercicio 54).

63. Si los eigenvalores de

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 1$ ¿cuáles son los posibles valores de a y d?

64. Demuestre que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

no tiene eigenvalores.

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 65 y 66, determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, proporcione una razón o cite una expresión adecuada del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que muestre que la expresión no es cierta en todos los casos o cite del texto una expresión adecuada.

65. (a) El escalar λ es un eigenvalor de una matriz A de $n \times n$ si existe un vector $\mathbf{x}$ tal que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

(b) Para encontrar los eigenvalores de una matriz A de $n \times n$, resuelva la ecuación característica $\det(\lambda I - A) = 0$.

66. (a) Geométricamente, si λ es un eigenvalor de la matriz A y $\mathbf{x}$ es un eigenvector de A correspondiente a λ, entonces multiplicar $\mathbf{x}$ por A genera un vector $\lambda\mathbf{x}$ paralelo a $\mathbf{x}$.

(b) Si A es una matriz de $n \times n$ con un eigenvalor λ, entonces el conjunto de todos los eigenvectores de λ es un subespacio de R^n.

Determinación de la dimensión de un eigenespacio En los ejercicios 67 a 70, determine la dimensión del eigenespacio correspondiente al eigenvalor $\lambda = 3$.

67. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **68.** $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

69. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **70.** $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

71. Cálculo Sea $T: C'[0, 1] \to C[0, 1]$ definida por $T(f) = f'$. Demuestre que $\lambda = 1$ es un eigenvalor de T con su correspondiente eigenvector $f(x) = e^x$.

72. Cálculo Para la transformación lineal dada en el ejercicio 71, determine el eigenvalor correspondiente al eigenvector de $f(x) = e^{-2x}$.

73. Sea $T: P_2 \to P_2$ definida por

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (-3a_1 + 5a_2) + (-4a_0 + 4a_1 - 10a_2)x + 4a_2x^2.$$

Determine los eigenvalores y los eigenvectores de T con respecto a la base estándar $\{1, x, x^2\}$.

74. Sea $T: P_2 \to P_2$ definida por

$$T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (2a_0 + a_1 - a_2) + (-a_1 + 2a_2)x - a_2x.$$

Determine los eigenvalores y los eigenvectores de T con respecto a la base estándar $\{1, x, x^2\}$.

75. Sea $T: M_{2,2} \to M_{2,2}$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a - c + d & b + d \\ -2a + 2c - 2d & 2b + 2d \end{bmatrix}.$$

Determine los eigenvalores y los eigenvectores de T con respecto a la base estándar

$$B = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

76. Encuentre todos los valores del ángulo θ para los que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

tiene eigenvalores reales. interprete geométricamente su respuesta.

77. ¿Cuáles son los posibles eigenvalores de una matriz idempotente? (Recuerde que una matriz cuadrada A es idempotente cuando $A^2 = A$).

78. ¿Cuáles son los posibles eigenvalores de una matriz nilpotente? (Recuerde que una matriz cuadrada A es nilpotente si existe un entero positivo k tal que $A^k = 0$).

79. Prueba Sea A una matriz de $n \times n$ tal que la suma de los elementos de cada renglón es una constante fija r. Demuestre que r es un eigenvalor de A. Ilustre este resultado con un ejemplo específico.

7.2 Diagonalización

- Encontrar los eigenvalores de matrices similares, determinar si una matriz A es diagonalizable y encontrar una matriz P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.
- Encontrar, para una transformación lineal $T: V \to V$, una base B para V tal que la matriz para T respecto a B sea diagonal.

EL PROBLEMA DE LA DIAGONALIZACIÓN

En la sección anterior se analizó el problema del eigenvalor. En esta sección abordaremos otro problema clásico del álgebra lineal, llamado **problema de diagonalización**. En términos de matrices,* el problema es este: para una matriz cuadrada A, ¿existe una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal?

Recuerde de la sección 6.4 que dos matrices cuadradas A y B son **semejantes** si existe una matriz invertible P tal que $B = P^{-1}AP$.

Las matrices semejantes a las matrices diagonales se llaman **diagonalizables**.

Definición de matriz diagonalizable

Una matriz de $n \times n$ es **diagonalizable** si A es semejante a una matriz diagonal. Es decir, A es diagonalizable si existe una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP$ es una matriz diagonal.

Dada esta definición, el problema de diagonalización puede plantearse como sigue. ¿Qué matrices cuadradas son diagonalizables? Resulta evidente que toda matriz D es diagonalizable, ya que la matriz identidad I puede funcionar como P para obtener $D = I^{-1} Di$. El ejemplo 1 muestra otro caso de una matriz diagonalizable.

EJEMPLO 1 **Una matriz diagonalizable**

La matriz del ejemplo 5 de la sección 6.4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

es diagonalizable, ya que

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tiene la propiedad

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Como se indicó en el ejemplo 8 de la sección anterior, el problema del eigenvalor está estrechamente relacionado con el problema de diagonalización. Los dos teoremas siguientes ilustran más esta relación. El primer teorema establece que matrices semejantes deben tener los mismos eigenvalores.

*Al final de esta sección se considera el problema de la diagonalización expresado en términos de transformaciones lineales.

TEOREMA 7.4 Matrices semejantes tienen los mismos eigenvalores

Si A y B son matrices semejantes de $n \times n$, entonces tienen los mismos eigenvalores.

DEMOSTRACIÓN

Dado que A y B son semejantes, entonces existe una matriz invertible P tal que $B = P^{-1}AP$. En virtud de las propiedades de los determinantes, se concluye que

$$\begin{aligned} |\lambda I - B| &= |\lambda I - P^{-1}AP| \\ &= |P^{-1}\lambda IP - P^{-1}AP| \\ &= |P^{-1}(\lambda I - A)P| \\ &= |P^{-1}||\lambda I - A||P| \\ &= |P^{-1}P||\lambda I - A| \\ &= |\lambda I - A|. \end{aligned}$$

Pero esto significa que A y B tienen el mismo polinomio característico. Por tanto, deben tener los mismos eigenvalores.

COMENTARIO

Este ejemplo establece que las matrices A y D son semejantes. Intente comprobar que $D = P^{-1}AP$ por medio de las matrices

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

y

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

De hecho, las columnas de P son precisamente los eigenvectores de A correspondientes a los eigenvalores 1, 2 y 3.

EJEMPLO 2 Determinación de los eigenvalores de matrices semejantes

Las matrices A y D son semejantes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Use el teorema 7.4 para hallar los eigenvalores de A.

SOLUCIÓN

Como D es una matriz diagonal, entonces sus eigenvalores son simplemente los elementos que están en su diagonal principal; es decir, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Además, dado que A es semejante a D, por el teorema 7.4 se sabe que tiene los mismos eigenvalores. Puede verificar esto al demostrar que el polinomio característico de A es $|\lambda I - A| = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$.

Las dos matrices diagonalizables dadas en los ejemplos 1 y 2 proporcionan una pista para resolver el problema de la diagonalización. Ambas matrices poseen un conjunto de tres eigenvectores linealmente independientes. (Véase el ejemplo 3.) Esto es característico de las matrices diagonalizables, como se establece en el teorema 7.5.

TEOREMA 7.5 Condición para la diagonalización

Una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable si y sólo si tiene n eigenvectores linealmente independientes.

DEMOSTRACIÓN

Primero, asuma que A es diagonalizable. Entonces existe una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP = D$ es diagonal. Al hacer que los vectores columna de P sean $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ y que los elementos en la diagonal principal de D sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, se obtiene

$$PD = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} = [\lambda_1\mathbf{p}_1 \quad \lambda_2\mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \lambda_n\mathbf{p}_n].$$

Como $P^{-1}AP = D$, $AP = PD$, lo cual implica

$$[A\mathbf{p}_1 \quad A\mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad A\mathbf{p}_n] = [\lambda_1\mathbf{p}_1 \quad \lambda_2\mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \lambda_n\mathbf{p}_n].$$

En otras palabras, $A\mathbf{p}_i = \lambda_i\mathbf{p}_i$ para todo vector columna $\mathbf{p}_i$. Lo anterior significa que los vectores columna $\mathbf{p}_i$ de P son eigenvectores de A. Además, dado que P es invertible, sus vectores columna son linealmente independientes. Así, A tiene n eigenvectores linealmente independientes.

A la inversa, suponga que A tiene n eigenvectores linealmente independientes $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, . . . , $\mathbf{p}_n$ con eigenvectores correspondientes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Sea P la matriz cuyas columnas son esos n eigenvectores. Es decir, $P = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \cdots \mathbf{p}_n]$. Como todo $\mathbf{p}_i$ es un eigenvector de A, entonces se tiene $A\mathbf{p}_i = \lambda_i\mathbf{p}_i$ y

$$AP = A[\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_n] = [\lambda_1\mathbf{p}_1 \quad \lambda_2\mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \lambda_n\mathbf{p}_n].$$

La matriz del lado derecho de esta ecuación puede escribirse como el siguiente producto matricial.

$$AP = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = PD$$

Por último, dado que los vectores $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ son linealmente independientes, entonces P es invertible y se puede escribir la ecuación $AP = PD$ como $P^{-1}AP = D$, lo cual significa que A es diagonalizable.

Un resultado importante de la demostración anterior es que para las matrices diagonalizables, *las columnas de P constan de los n eigenvectores linealmente independientes*. El ejemplo 3 verifica esta importante propiedad para las matrices los ejemplos 1 y 2.

EJEMPLO 3 Matrices diagonalizables

a. La matriz A del ejemplo 1 tiene los siguientes eigenvalores y correspondientes eigenvectores.

$$\lambda_1 = 4, \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \lambda_2 = -2, \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \lambda_3 = -2, \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matriz P cuyas columnas corresponden a estos eigenvectores es

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Además, como P es equivalente por renglones a la matriz identidad, los eigenvectores $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ y $\mathbf{p}_3$ son linealmente independientes.

b. La matriz A del ejemplo 2 tiene los siguientes eigenvalores y correspondientes eigenvectores.

$$\lambda_1 = 1, \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \lambda_2 = 2, \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \lambda_3 = 3, \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

La matriz P cuyas columnas corresponden a estos eigenvectores es

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Otra vez, como P es equivalente por renglones a la matriz identidad, los eigenvectores $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ y $\mathbf{p}_3$ son linealmente independientes.

La segunda parte de la demostración del teorema 7.5 y el ejemplo 3 sugieren los pasos siguientes para diagonalizar una matriz.

Pasos para diagonalizar una matriz cuadrada de $n \times n$

Sea A una matriz de $n \times n$.

1. Determine n eigenvectores linealmente independientes $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ de A (si es posible) con eigenvalores correspondientes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Si no existen n eigenvectores linealmente independientes, entonces A no es diagonalizable.
2. Sea P la matriz de $n \times n$, cuyas columnas son tales eigenvectores. Es decir, $P = [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \cdots \mathbf{p}_n]$.
3. La matriz diagonal $D = P^{-1}AP$ tendrá los eigenvalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ en su diagonal principal (y ceros en el resto). Observe que el orden de los eigenvectores usados para formar P determina el orden en que aparecen los eigenvalores en la diagonal principal de D.

EJEMPLO 4 Una matriz no diagonalizable

Demuestre que la matriz A es diagonalizable

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Y luego determine una matriz P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

SOLUCIÓN

El polinomio característico de A es $|\lambda I - A| = (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 3)$. (Verifique esto.) Por tanto, los eigenvalores de A son $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$ y $\lambda_3 = 3$. A partir de estos eigenvalores se obtienen las siguientes formas escalonadas reducidas por renglones y sus correspondientes eigenvectores.

Eigenvector

$$2I - A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$-2I - A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -1 & -5 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$3I - A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Forme la matriz P, cuyas columnas son los eigenvectores recién obtenidos.

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz es no singular (revise esto), lo cual implica que los eigenvectores son linealmente independientes y A es diagonalizable. Entonces, se sigue que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

EJEMPLO 5 Diagonalización de una matriz

Demuestre que la siguiente matriz A es diagonalizable.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -10 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Luego, determine una matriz P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

SOLUCIÓN

En el ejemplo 6 de la sección 7.1 encontró que los tres eigenvalores $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 3$ de A producen los eigenvectores.

$$\lambda_1: \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \lambda_2: \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda_3: \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matriz cuyas columnas constan de estos eigenvectores es

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dado que P es invertible (compruébelo), sus vectores columna constituyen un conjunto linealmente independiente. Por tanto, A es diagonalizable, y se tiene

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

EJEMPLO 6 Una matriz no diagonalizable

Demuestre que la siguiente matriz no es diagonalizable.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Como A es triangular, entonces los eigenvalores son simplemente los elementos de la diagonal principal. Así, el único eigenvalor es $\lambda = 1$. La matriz $(I - A)$ tiene la siguiente forma escalonada reducida por renglones.

$$I - A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esto implica que $x_2 = 0$, y al hacer $x_1 = t$ se encuentra que todo eigenvector de A es de la forma

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, A no contiene dos eigenvectores linealmente independientes y, entonces, se concluye que A no es diagonalizable.

COMENTARIO

La condición establecida en el teorema 7.6 es suficiente pero no necesaria para la diagonalización, como se demostró en el ejemplo 5. En otras palabras, una matriz diagonalizable no requiere tener eigenvalores distintos.

Para que una matriz cuadrada A de orden n sea diagonalizable, la suma de las dimensiones de los eigenespacios debe ser igual a n. Una forma en que puede suceder lo anterior es si A tiene n eigenvalores distintos. Así, tenemos el siguiente teorema.

TEOREMA 7.6 Condición suficiente para la diagonalización

Si una matriz A de $n \times n$ tiene n eigenvalores distintos, entonces los correspondientes eigenvectores son linealmente independientes y A es diagonalizable.

DEMOSTRACIÓN

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ n eigenvalores distintos de A correspondientes a los eigenvectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$. Para empezar, suponga que el conjunto de eigenvectores es linealmente dependiente. Además, considere que los eigenvectores están ordenados de modo que los m primeros son linealmente independientes y los $m + 1$ primeros son linealmente dependientes, donde $m < n$. Así, $\mathbf{x}_{m+1}$ se puede expresar como una combinación lineal de los m primeros eigenvectores:

$$\mathbf{x}_{m+1} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_m\mathbf{x}_m \qquad \text{Ecuación 1}$$

donde no todos lo c_i son cero. Al multiplicar ambos lados de la ecuación 1 por A se obtiene

$$A\mathbf{x}_{m+1} = Ac_1\mathbf{x}_1 + Ac_2\mathbf{x}_2 + \cdots + Ac_m\mathbf{x}_m.$$

Debido a que $A\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2, \ldots, m + 1$ se tiene

$$\lambda_{m+1}\mathbf{x}_{m+1} = c_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_m\lambda_m\mathbf{x}_m. \qquad \text{Ecuación 2}$$

En tanto que al multiplicar la ecuación 1 por λ_{m+1} se obtiene

$$\lambda_{m+1}\mathbf{x}_{m+1} = c_1\lambda_{m+1}\mathbf{x}_1 + c_2\lambda_{m+1}\mathbf{x}_2 + \cdots + c_m\lambda_{m+1}\mathbf{x}_m. \qquad \text{Ecuación 3}$$

Luego, al restar la ecuación 2 de la ecuación 3 se obtiene

$$c_1(\lambda_{m+1} - \lambda_1)\mathbf{x}_1 + c_2(\lambda_{m+1} - \lambda_2)\mathbf{x}_2 + \cdots + c_m(\lambda_{m+1} - \lambda_m)\mathbf{x}_m = \mathbf{0}$$

y al aplicar el hecho de que los primeros m eigenvectores son linealmente independientes, puede concluir que todos los coeficientes de esta ecuación deber ser cero. Es decir,

$$c_1(\lambda_{m+1} - \lambda_1) = c_2(\lambda_{m+1} - \lambda_2) = \cdots = c_m(\lambda_{m+1} - \lambda_m) = 0.$$

Como todos los eigenvalores son distintos, concluimos que $c_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Pero este resultado contradice la hipótesis de que $\mathbf{x}_{m+1}$ puede escribirse como una combinación lineal de los m primeros eigenvectores. Por tanto, el conjunto de eigenvectores es linealmente independiente y por el teorema 7.5 se concluye que A es diagonalizable. ■

EJEMPLO 7 Determinación de si una matriz es diagonalizable

Determine si la siguiente matriz A es diagonalizable.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

como A es una matriz triangular, entonces sus eigenvalores son los elementos que están en su diagonal principal,

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 0, \qquad \lambda_3 = -3.$$

Además debido a que estos tres valores son distintos, por el teorema 7.6 se concluye que A es diagonalizable. ■

DIAGONALIZACIÓN Y TRANSFORMACIONES LINEALES

Hasta el momento, en esta sección el problema de diagonalización se ha considerado en términos de matrices. En términos de transformaciones lineales, el problema de diagonalización puede plantearse como sigue. Para una transformación lineal

$$T: V \to V$$

¿existe una base B de V tal que la matriz de T con respecto a B sea diagonal? La respuesta es "sí", siempre que la matriz estándar de T sea diagonalizable.

EJEMPLO 8 Determinación de una base

Sea $T: R^3 \to R^3$ la transformación lineal definida por

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 - x_3, x_1 + 3x_2 + x_3, -3x_1 + x_2 - x_3).$$

En caso de ser posible, halle una base B para R^3 tal que la matriz de T con respecto a B sea diagonal.

SOLUCIÓN

La matriz estándar de T está dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Del ejemplo 4 usted sabe que A es diagonalizable. Así, para formar la base B pueden usarse los tres eigenvectores linealmente independientes determinados en el ejemplo 4. Es decir,

$$B = \{(-1, 0, 1), (1, -1, 4), (-1, 1, 1)\}.$$

La matriz para T respecto a estas bases es

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

La genética es la ciencia de la herencia. Una mezcla de química y biología, la genética intenta explicar la evolución hereditaria y el movimiento de los genes entre generaciones con base en el ácido desoxirribonucleico (ADN) de una especie. La investigación en el área de la genética llamada *genética de población*, enfocada en las estructuras genéticas de poblaciones específicas, es especialmente popular en la actualidad. Tal investigación ha conducido a un mejor entendimiento de los tipos de herencia genética. Por ejemplo, en los humanos, un tipo de herencia genética se denomina *herencia ligada al cromosoma X* (o *herencia ligada al sexo*), que se refiere a los genes recesivos en el cromosoma *X*. Los machos tienen un cromosoma *X* y uno *Y*; las hembras tienen dos cromosomas *X*. Si un macho tiene un gen defectuoso en el cromosoma *X*, entonces su rasgo correspondiente se expresará porque no hay un gen normal en el cromosoma *Y* que reprima su actividad. Con las hembras, el rasgo no se expresará a menos de que esté presente en ambos cromosomas *X*, lo cual es raro. Por ello las enfermedades o condiciones heredadas usualmente suceden en los machos; de ahí el término *herencia ligada al sexo*. Algunas de éstas incluyen hemofilia A, distrofia muscular de Duchenne, daltonismo rojo-verde y calvicie hereditaria. Los eigenvalores y diagonalización matricial pueden ser útiles para elaborar modelos matemáticos para describir la herencia ligada al cromosoma X en una población dada.

7.2 Ejercicios

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

Matrices diagonalizables y eigenvalores En los ejercicios 1 a 6, (a) compruebe que A es diagonalizable al calcular $P^{-1}AP$ y (b) use el resultado del inciso (a) y el Teorema 7.4 para encontrar los eigenvalores de A.

1. $A = \begin{bmatrix} -11 & 36 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 0.80 & 0.10 & 0.05 & 0.05 \\ 0.10 & 0.80 & 0.05 & 0.05 \\ 0.05 & 0.05 & 0.80 & 0.10 \\ 0.05 & 0.05 & 0.10 & 0.80 \end{bmatrix}$,

$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Diagonalización de una matriz En los ejercicios 7 a 14 para cada matriz A, determine (en caso de ser posible) una matriz P no singular tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal. Compruebe que $P^{-1}AP$ es una matriz diagonal con los eigenvalores en la diagonal principal.

7. $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

(Véase el ejercicio 17, sección 7.1.)

8. $A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$

(Véase el ejercicio 19, sección 7.1.)

9. $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(Véase el ejercicio 21, sección 7.1.)

10. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

(Véase el ejercicio 22, sección 7.1.)

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -6 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

(Véase el ejercicio 23, sección 7.1.)

12. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -3 & -4 & 9 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$

(Véase el ejercicio 24, sección 7.1.)

13. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

14. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Mostrar que una matriz no es diagonalizable En los ejercicios 15 a 22, demuestre que la matriz dada no es diagonalizable.

15. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(Véase el ejercicio 37, sección 7.1.)

22. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(Véase el ejercicio 38, sección 7.1.)

Determinar una condición suficiente para la diagonalización En los ejercicios 23 a 26, encuentre los eigenvalores de la matriz y determine si hay un número suficiente para garantizar que la matriz es diagonalizable. (recuerde que la matriz puede ser diagonalizable aun cuando no esté garantizada por el teorema 7.6.)

23. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & -9 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Determinación de una base En los ejercicios 27 a 30, encuentre una base B para el dominio de T tal que la matriz de T con respecto a B sea diagonal.

27. $T: R^2 \to R^2$: $T(x, y) = (x + y, x + y)$

28. $T: R^3 \to R^3$: $T(x, y, z) = (-2x + 2y - 3z, 2x + y - 6z, -x - 2y)$

29. $T: P_1 \to P_1$: $T(a + bx) = a + (a + 2b)x$

30. $T: P_2 \to P_2$:
$T(c + bx + ax^2) = (2c + a) + (3b + 4a)x + ax^2$

31. **Prueba** Sean A una matriz diagonalizable de $n \times n$ y P una matriz invertible de $n \times n$ tales que $B = P^{-1}AP$ sea la forma diagonal de A. Demuestre que (b) $A^k = PB^kP^{-1}$, donde k es un entero positivo.

32. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ n eigenvalores distintos de la matriz A de $n \times n$. Aplique el resultado del ejercicio 31 para determinar los eigenvalores de A^k.

Determinación de una potencia de una matriz En los ejercicios 33 a 36, use el resultado del ejercicio 31 para hallar la potencia indicada de A_k.

33. $A = \begin{bmatrix} 10 & 18 \\ -6 & -11 \end{bmatrix}, A^6$ **34.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, A^7$

35. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -3 & -4 & 9 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}, A^8$

36. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}, A^5$

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 37 y 38, determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, proporcione una razón o cite una expresión adecuada del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que muestre que la expresión no es cierta en todos los casos o cite del texto una expresión adecuada.

37. (a) Si A y B son matrices semejantes de $n \times n$, entonces siempre tienen el mismo polinomio característico.

(b) El hecho de que una matriz A de $n \times n$ tenga n distintos eigenvalores no garantiza que A sea diagonalizable.

38. (a) Si A es una matriz diagonalizable, entonces tiene n eigenvectores linealmente independientes.

(b) Si una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable, entonces debe tener n eigenvalores distintos.

39. ¿Son semejantes las dos matrices siguientes? En caso afirmativo, determine una matriz P tal que $B = P^{-1}AP$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

40. **Cálculo** Si x es un número real, entonces e^x puede definirse mediante la serie

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdot \cdot \cdot .$$

De manera semejante, si X es una matriz cuadrada, entonces e^X puede definirse mediante la serie

$$e^X = I + X + \frac{1}{2!}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \frac{1}{4!}X^4 + \cdot \cdot \cdot .$$

Evalúe e^X, donde X es la siguiente matriz cuadrada.

(a) $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $X = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

41. **Escriba** ¿Puede una matriz ser semejante a dos matrices diagonales distintas? Explique su respuesta.

42. **Prueba** Demuestre que si A es diagonalizable, entonces A^T también lo es.

43. **Prueba** Demuestre que si A es diagonalizable con n eigenvalores reales $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, entonces $|A| = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$.

44. **Prueba** Demuestre que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

es diagonalizable si $-4bc < (a - d)^2$ y no diagonalizable si $-4bc > (a - d)^2$.

45. **Demostración guiada** Demuestre que si los eigenvalores de una matriz diagonalizable A son todos ± 1, entonces la matriz es igual a su inversa.

Inicio: para demostrar que la matriz A es igual a su inversa, use el hecho de que existe una matriz invertible P tal que $D = P^{-1}AP$, donde D es la matriz diagonal con ± 1 a lo largo de su diagonal principal.

(i) Sea $D = P^{-1}AP$, donde D es una matriz diagonal con ± 1 a lo largo de su diagonal principal.

(ii) Encuentre A en términos de P, P^{-1} y D.

(iii) Aplique las propiedades de la inversa de un producto de matrices y el hecho de que D es diagonal y se expande para hallar A^{-1}.

(iv) Concluya que $A^{-1} = A$.

46. **Demostración guiada** Demuestre que las matrices nilpotentes diferentes de cero no son diagonalizables.

Inicio: del ejercicio 78 en la sección 7.1, usted sabe que 0 es el único eigenvalor de la matriz nilpotente A. Demuestre que es imposible para A ser diagonalizable.

(i) Suponga que A es diagonalizable, así que existe una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP = D$, donde D es la matriz cero.

(ii) Encuentre A en términos de P, P^{-1} y D.

(iii) Encuentre una contradicción y concluya que las matrices nilpotentes diferentes de cero no son diagonalizables.

47. **Prueba** Demuestre que si A es una matriz diagonalizable no singular, entonces A^{-1} también es diagonalizable.

48. **REMATE** Explique cómo determinar si una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable usando (a) matrices similares, (b) eigenvectores y (c) eigenvalores distintos.

Demuestre que la matriz no es diagonalizable. En los ejercicios 49 y 50, escriba un enunciado breve explicando su razonamiento

49. $\begin{bmatrix} 3 & k \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, k \neq 0$ **50.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k & 0 \end{bmatrix}, k \neq 0$

7.3 Matrices simétricas y diagonalización ortogonal

- Reconocer matrices simétricas y aplicar sus propiedades.
- Reconocer matrices ortogonales y aplicar sus propiedades.
- Encontrar una matriz ortogonal P que diagonalice ortogonalmente una matriz simétrica A.

MATRICES SIMÉTRICAS

Para casi todas las matrices, es posible avanzar bastante en el procedimiento de diagonalización antes de poder decidir finalmente si la diagonalización es factible. Una excepción es una matriz triangular con elementos diferentes en la diagonal principal. Esta matriz puede identificarse como diagonalizable por simple inspección. En esta sección se estudiará otro tipo de matriz que se garantiza es diagonalizable: una matriz **simétrica**.

Definición de matriz simétrica

Una matriz cuadrada A es **simétrica** si es igual a su transpuesta: $A = A^T$.

EJEMPLO 1 Matrices simétricas y matrices no simétricas

Las matrices A y B son simétricas, pero la matriz c no lo es.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Las matrices no simétricas tienen algunas propiedades especiales que en general no poseen las matrices simétricas.

1. Una matriz no simétrica puede no ser diagonalizable.
2. Una matriz no simétrica puede tener eigenvalores que no sean reales. Por ejemplo, la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

tiene como ecuación característica $\lambda^2 + 1 = 0$. Por tanto, sus eigenvalores son los números imaginarios $\lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = -i$.

3. Para una matriz no simétrica, el número de eigenvectores linealmente independientes correspondientes a un eigenvalor puede ser menor que la multiplicidad del eigenvalor (véase el ejemplo 6, sección 7.2).

Las matrices simétricas no exhiben estas tres propiedades.

TEOREMA 7.7 Eigenvalores de las matrices simétricas

Si A es una matriz simétrica de $n \times n$, entonces las siguientes propiedades son verdaderas.

1. A es diagonalizable.
2. Todos los eigenvalores de A son reales.
3. Si λ es un eigenvalor de A con multiplicidad k, entonces λ tiene k eigenvectores linealmente independientes. Es decir, el eigenespacio de λ es de dimensión k.

DESCUBRIMIENTO

1. Seleccione una matriz cuadrada arbitraria y calcule sus eigenvalores.
2. ¿Puede determinar una matriz para la que los eigenvalores no sean reales?
3. Ahora seleccione una matriz simétrica arbitraria y calcule sus eigenvalores.
4. ¿Puede determinar una matriz simétrica para la que los eigenvalores no sean reales?
5. ¿Qué puede concluir acerca de los eigenvalores de una matriz simétrica?

COMENTARIO

El teorema 7.7 se denomina **teorema espectral real** y el conjunto de eigenvalores de A se denomina **espectro** de A.

Una demostración general del teorema 7.7 rebasa los límites de este libro. Sin embargo, el siguiente ejemplo comprueba que toda matriz simétrica de 2×2 es diagonalizable.

EJEMPLO 2 Los eigenvalores y los eigenvectores de una matriz simétrica de 2×2

Demuestre que la matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$$

es diagonalizable.

SOLUCIÓN

El polinomio característico de A es

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - a & -c \\ -c & \lambda - b \end{vmatrix} \\ &= \lambda^2 - (a + b)\lambda + ab - c^2. \end{aligned}$$

Como es cuadrático en λ, este polinomio tiene por discriminante

$$\begin{aligned} (a + b)^2 - 4(ab - c^2) &= a^2 + 2ab + b^2 - 4ab + 4c^2 \\ &= a^2 - 2ab + b^2 + 4c^2 \\ &= (a - b)^2 + 4c^2. \end{aligned}$$

Dado que este discriminante es la suma de dos cuadrados, deber ser cero o positivo. Si $(a - b)^2 + 4c^2 = 0$, entonces $a = b$ y $c = 0$, lo cual implica que A ya es diagonal. Es decir

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$

Por otra parte, si $(a - b)^2 + 4c^2 > 0$, entonces por la fórmula cuadrática el polinomio característico de A tiene dos raíces reales distintas, lo cual implica que A tiene dos eigenvalores distintos. Por tanto, A es diagonalizable también en este caso.

EJEMPLO 3 Dimensiones de los eigenespacios de una matriz simétrica

Determine los eigenvalores de la matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

y determine las dimensiones de los eigenespacios correspondientes.

SOLUCIÓN

El polinomio característico de A está dado por

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2(\lambda - 3)^2.$$

SAsí, los eigenvalores de A son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 3$. Dado que cada uno de estos eigenvalores tiene multiplicidad 2, por el teorema 7.7 se sabe que también los eigenespacios correspondientes son de dimensión 2. Específicamente, la base del eigenespacio de $\lambda_1 = -1$ es $B_1 = \{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$ y la base del eigenespacio de $\lambda_2 = 3$ es $B_2 = \{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1)\}$.

MATRICES ORTOGONALES

Para diagonalizar una matriz cuadrada A es necesario hallar una matriz *invertible* P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal. Para matrices simétricas, la matriz P puede elegirse de modo que tenga la propiedad especial de que $P^{-1} = P^T$. Esta propiedad matricial poco común se define como sigue.

Definición de una matriz ortogonal

Una matriz cuadrada P se denomina **ortogonal** si es invertible y si

$$P^{-1} = P^T.$$

EJEMPLO 4 Matrices ortogonales

a. La matriz $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ es ortogonal porque $P^{-1} = P^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

b. La matriz

$$P = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

es ortogonal ya que

$$P^{-1} = P^T = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}.$$

En los incisos (a) y (b) del ejemplo 4 las columnas de las matrices P forman conjuntos ortogonales en R^2 y R^3, respectivamente. Esto sugiere el siguiente teorema.

TEOREMA 7.8 Propiedad de las matrices ortogonales

Una matriz P de $n \times n$ es ortogonal si y sólo si sus vectores columna forman un conjunto ortonormal.

DEMOSTRACIÓN

Suponga que los vectores columna de P forman un conjunto ortonormal:

$$\begin{aligned} P &= [\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_n] \\ &= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces el producto P^TP es de la forma

$$P^TP = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_n \\ \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{p}_2 & \cdots & \mathbf{p}_n \cdot \mathbf{p}_n \end{bmatrix}.$$

Dado que el conjunto

$$\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$$

es ortonormal, se tiene

$$\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j = 0,\ i \neq j \quad \text{y} \quad \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_i = \|\mathbf{p}_i\|^2 = 1.$$

Por tanto, la matriz compuesta de productos punto es de la forma

$$P^TP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I_n.$$

Lo anterior implica que $P^T = P^{-1}$ y se concluye que P es ortogonal.

Por el contrario, si P es ortogonal usted puede retroceder los pasos anteriores para verificar que los vectores columna de P forman un conjunto ortonormal.

EJEMPLO 5 Una matriz ortogonal

Demuestre que

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

es ortogonal al probar que $PP^T = I$. Luego, demuestre que los vectores columna de P constituyen un conjunto ortonormal.

SOLUCIÓN

Como

$$PP^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix} = I_3$$

se concluye que $P^T = P^{-1}$, por lo que P es ortogonal. Además, al hacer

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix},\ \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{4}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix},\ \text{y} \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

se obtiene

$$\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{p}_3 = 0$$

y

$$\|\mathbf{p}_1\| = \|\mathbf{p}_2\| = \|\mathbf{p}_3\| = 1.$$

Por consiguiente, $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ es un conjunto ortonormal, como lo garantiza el teorema 7.8.

Es posible demostrar que para una matriz simétrica los eigenvectores correspondientes a distintos eigenvalores son ortogonales. Esta propiedad se establece en el siguiente teorema.

TEOREMA 7.9 Propiedad de las matrices simétricas

Sea A una matriz simétrica de $n \times n$. Si λ_1 y λ_2, son eigenvalores distintos de A entonces sus eigenvectores correspondientes $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ son ortogonales.

DEMOSTRACIÓN

Sean λ_1 y λ_2 eigenvalores distintos de A con eigenvectores correspondientes $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$. Así, $A\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1$ y $A\mathbf{x}_2 = \lambda_2\mathbf{x}_2$. Para demostrar el teorema, es útil empezar con la siguiente forma matricial del producto punto $\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1^T \cdot \mathbf{x}_2$ (Véase la Sección 5.1.) Ahora puede escribir

$$\begin{aligned}
\lambda_1(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2) &= (\lambda_1\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{x}_2 \\
&= (A\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{x}_2 \\
&= (A\mathbf{x}_1)^T\mathbf{x}_2 \\
&= (\mathbf{x}_1^T A^T)\mathbf{x}_2 \\
&= (\mathbf{x}_1^T A)\mathbf{x}_2 && \text{Como } A \text{ es simétrica } A = A^T \\
&= \mathbf{x}_1^T(A\mathbf{x}_2) \\
&= \mathbf{x}_1^T(\lambda_2\mathbf{x}_2) \\
&= \mathbf{x}_1 \cdot (\lambda_2\mathbf{x}_2) \\
&= \lambda_2(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2).
\end{aligned}$$

Esto implica que $(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2) = 0$ y, como $\lambda_1 \neq 12$, se concluye que $\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = 0$. Por consiguiente, $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ son ortogonales.

EJEMPLO 6 Eigenvectores de una matriz simétrica

Demuestre que dos eigenvectores cualesquiera de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

correspondientes a eigenvalores distintos son ortogonales.

SOLUCIÓN

El polinomio característico de A es

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 4)$$

lo cual implica que los eigenvalores de A son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 4$. Todo eigenvector correspondiente a $\lambda_1 = 2$ es de la forma

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} s \\ -s \end{bmatrix}, \quad s \neq 0$$

y todo eigenvector correspondiente a $\lambda_2 = 4$ es de la forma

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}, \quad t \neq 0.$$

por consiguiente

$$\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = st - st = 0$$

y se concluye que $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ son ortogonales.

DIAGONALIZACIÓN ORTOGONAL

Una matriz es **diagonalizable ortogonalmente** si existe una matriz ortogonal P tal que $P^{-1}AP = D$ es diagonal. El siguiente teorema importante establece que el conjunto de matrices diagonalizables ortogonalmente es precisamente el conjunto de matrices simétricas.

TEOREMA 7.10 Teorema fundamental de las matrices simétricas

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces A es diagonalizable ortogonalmente y tiene eigenvalores reales si y sólo si A es simétrica.

DEMOSTRACIÓN

La demostración del teorema en una dirección es bastante directa. Es decir, si se supone que A es diagonalizable ortogonalmente, entonces existe una matriz ortogonal P tal que $D = P^{-1}AP$ es diagonal. Además, como $P^{-1} = P^T$, se tiene

$$\begin{aligned} A &= PDP^{-1} \\ &= PDP^T \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} A^T &= (PDP^T)^T \\ &= (P^T)^T D^T P^T \\ &= PDP^T \\ &= A. \end{aligned}$$

Por consiguiente, A es simétrica.

La demostración del teorema en la otra dirección es más complicada, pero es importante porque es constructiva. Suponga que A es simétrica. Si A tiene un eigenvalor λ de multiplicidad k, entonces por el teorema 7.7 1 tiene k eigenvectores linealmente independientes. Mediante el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt, este conjunto de k vectores puede usarse para formar una base ortonormal de eigenvectores del eigenespacio correspondiente a λ. Este procedimiento se repite para cada eigenvalor de A. La colección de todos los eigenvectores resultantes es ortogonal debido al teorema 7.9 y, por el proceso de normalización, se sabe que la colección también es ortonormal. Luego, sea P la matriz cuyas columnas constan de estos n eigenvectores ortonormales. Por el teorema 7.8, P es una matriz ortogonal. Finalmente, por el teorema 7.5, es posible concluir que $P^{-1}AP$ es diagonal. Así, A es diagonalizable ortogonalmente. ■

EJEMPLO 7 Determinación de si una matriz es diagonalizable ortogonalmente

¿Cuál de las siguientes matrices es diagonalizable ortogonalmente?

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \\ -1 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN

Por el teorema 7.10, las únicas matrices diagonalizables ortogonalmente son las simétricas: A_1 y A_4. ■

Mencionamos que la segunda parte de la demostración del teorema 7.10 es *constructiva*. Es decir, da los pasos a seguir para diagonalizar ortogonalmente una matriz simétrica. Estos pasos se resumen a continuación.

Diagonalización ortogonal de una matriz simétrica

Sea A una matriz simétrica de $n \times n$.

1. Determine todos los eigenvalores de A y la multiplicidad de cada uno.
2. Para *cada* eigenvalor de multiplicidad 1, elija un eigenvector unitario. (Elija cualquier eigenvector y después normalícelo.)
3. Para cada eigenvalor de multiplicidad $k \geq 2$, encuentre un conjunto de k eigenvectores linealmente independientes. (Por el teorema 7.7 se sabe que esto es posible). Si este conjunto no es ortonormal, aplique el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt.
4. La composición de los pasos 2 y 3 da un conjunto ortonormal de n eigenvectores. Use estos eigenvectores para formar las columnas de P. La matriz $P^{-1}AP = P^TAP = D$ será diagonal. (Los elementos en la diagonal principal de D son los eigenvalores de A).

EJEMPLO 8 Diagonalización ortogonal

Determine una matriz P que diagonalice ortogonalmente a $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN

1. El polinomio característico de A es

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 3)(\lambda - 2).$$

Por tanto, los eigenvalores son $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = 2$.

2. Para cada eigenvalor se encuentra un eigenvector al convertir la matriz $\lambda I - A$ a la forma escalonada reducida por renglones.

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \text{Eigenvector} \\ -3I - A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} & \longrightarrow & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \longrightarrow & \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ 2I - A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} & \longrightarrow & \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \longrightarrow & \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Los eigenvectores $(-2, 1)$ y $(1, 2)$ constituyen una base *ortogonal* de R^2. Normalice cada uno de estos vectores para obtener una base *ortonormal*.

$$\mathbf{p}_1 = \frac{(-2, 1)}{\|(-2, 1)\|} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \qquad \mathbf{p}_2 = \frac{(1, 2)}{\|(1, 2)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

3. Debido a que la multiplicidad de cada eigenvalor es 1, se pasa directamente al paso 4.

4. Usando $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$ como vectores columna, se construye la matriz P.

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Compruebe que P diagonaliza ortogonalmente a A calculando $P^{-1}AP = P^TAP$.

$$P^TAP = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

EJEMPLO 9 Diagonalización ortogonal

Encuentra una matriz P que diagonalice ortogonalmente

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

SOLUCIÓN

1. El polinomio característico de A, $|\lambda i - A| = (\lambda - 3)^2(\lambda + 6)$ produce los eigenvalores $\lambda_1 = -6$ y $\lambda_2 = 3$. La multiplicidad de λ_1 es 1 y la multiplicidad de λ_2 es 2.

2. Un eigenvector para λ_1 es $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 2)$, que se normaliza a

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

3. Dos eigenvectores para λ_2 son $\mathbf{v}_2 = (2, 1, 0)$ y $\mathbf{v}_3 = (-2, 0, 1)$. Observe que $\mathbf{v}_1$ es ortogonal a $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$, como se garantiza por el teorema 7.9. Los eigenvectores $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$, sin embargo, no son ortogonales entre sí. Para encontrar dos vectores característicos ortonormales para λ_2 se aplica el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt como se muestra a continuación.

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 = (2, 1, 0)$$

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \left(\frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2}\right)\mathbf{w}_2 = \left(-\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1\right)$$

Estos vectores se normalizan para

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w}_2\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w}_3\|} = \left(-\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}\right).$$

4. La matriz P tiene como vectores columna a $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ y $\mathbf{u}_3$.

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

Una verificación muestra que $P^{-1}AP = P^TAP = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

La *matriz Hessiana* es una matriz simétrica que puede ser útil para determinar máximos y mínimos relativos de funciones de múltiples variables. Para una función f de dos variables x y y —es decir, una superficie en R^3— la matriz Hessiana tiene la forma

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}.$$

El determinante de esta matriz, evaluado en un punto para el f_x y f_y son cero, es la expresión usada en la Segunda Prueba de Parciales para extremos relativos.

Tacu Alexei/www.shutterstock.com

7.3 Ejercicios

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

Determinar si una matriz es simétrica En los ejercicios 1 a 6, determine si la matriz dada es simétrica.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -5 & 3 & 6 \\ -4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 11 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 5 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Demostración En los Ejercicios 7-10, demuestre que la matriz simétrica es diagonalizable.

7. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix}$

9. $A = \begin{bmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & 0 \\ a & 0 & a \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{bmatrix}$

Determinación de eigenvalores y dimensiones de eigenespacios En los ejercicios 11 a 22, encuentre los eigenvalores de la matriz simétrica dada. Para cada eigenvalor, determine la dimensión del eigenespacio correspondiente.

11. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Determinar si una matriz es ortogonal En los ejercicios 23 a 32, determine si la matriz dada es ortogonal. Si la matriz es ortogonal, entonces demuestre que los vectores columna de la matriz forman un conjunto ortonormal.

23. $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} -4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & -17 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{2} \\ 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 & \frac{3\sqrt{7}}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{3\sqrt{7}}{8} & 0 & 0 & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$

32. $\begin{bmatrix} \frac{1}{10}\sqrt{10} & 0 & 0 & -\frac{3}{10}\sqrt{10} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{10}\sqrt{10} & 0 & 0 & \frac{1}{10}\sqrt{10} \end{bmatrix}$

Eigenvectores de una matriz simétrica En los Ejercicios 33-38, demuestre que dos eigenvectores cualesquiera de la matriz simétrica correspondientes a eigenvalores distintos son ortogonales.

33. $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

34. $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

35. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

36. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

37. $\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

38. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Matrices diagonalizables ortogonalmente En los Ejercicios 39-42, determine si la matriz es diagonalizable ortogonalmente.

39. $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

40. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

41. $\begin{bmatrix} 5 & -3 & 8 \\ -3 & -3 & -3 \\ 8 & -3 & 8 \end{bmatrix}$

42. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Diagonalización ortogonal En los ejercicios 43 a 52, encuentre una matriz ortogonal P tal que P^TAP diagonalice A. Compruebe que P^TAP da la forma diagonal correcta.

43. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

44. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

45. $A = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$

46. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

47. $A = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 10 \\ 10 & 5 & 0 \\ 10 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

48. $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

49. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

50. $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

51. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

52. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 53 y 54, determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, proporcione una razón o cite una expresión adecuada del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que muestre que la expresión no es cierta en todos los casos o cite del texto una expresión adecuada.

53. (a) Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces A es simétrica si y sólo si A es ortogonalmente diagonalizable.

(b) Los eigenvectores correspondientes a distintos eigenvalores son ortogonales para matrices simétricas.

54. (a) Una matriz cuadrada P es ortogonal si es invertible, es decir, si $P^{-1} = P^T$.

(b) Si A es una matriz simétrica de $n \times n$, entonces A tiene eigenvalores reales.

55. Prueba Demuestre que si A y B son matrices ortogonales de $n \times n$, entonces AB y BA son ortogonales.

56. Prueba Demuestre que si una matriz simétrica A solamente tiene un eigenvalor λ, entonces $A = \lambda I$.

57. Prueba Demuestre que si A es una matriz ortogonal, entonces A^T y A^{-1} también lo son.

58. REMATE Considere la siguiente matriz.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \\ -5 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

(a) ¿A es simétrica? Explique.

(b) ¿A es diagonalizable? Explique.

(c) ¿Los eigenvalores de A son reales? Explique.

(d) Los eigenvalores de A son distintos. ¿Cuáles son las dimensiones de los eigenespacios correspondientes? Explique.

(e) ¿A es ortogonal? Explique.

(f) Para los eigenvalores de A, ¿los eigenvectores correspondientes son ortogonales? Explique.

(g) ¿A es diagonalizable ortogonalmente? Explique.

59. Determine A^TA y AA^T para la siguiente matriz. ¿Qué observa?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

7.4 Aplicaciones de los eigenvalores y los eigenvectores

- Modelar crecimiento poblacional usando una matriz de transición de edad y vector de distribución de edad y encontrar vector de distribución de edad estable.
- Usar una ecuación matricial para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.
- Encontrar la matriz de una forma cuadrática y usar el Teorema de Ejes Principales para realizar una rotación de ejes para una superficie cónica y una cuádrica.

CRECIMIENTO DE UNA POBLACIÓN

Las matrices pueden aplicarse para elaborar modelos que describan el crecimiento de alguna población. El primer paso es agrupar la población en clases de edad de la misma duración. Por ejemplo, si el tiempo que vive un miembro de la población es L años, entonces las clases de edad se representan por los n intervalos siguientes representa las clases de edad.

$$\left[0, \frac{L}{n}\right) \qquad \text{Primera clase de edad}$$

$$\left[\frac{L}{n}, \frac{2L}{n}\right) \qquad \text{Segunda clase de edad}$$

$$\vdots$$

$$\left[\frac{(n-1)L}{n}, L\right] \qquad n\text{-ésima clase de edad}$$

El número de elementos de la población en cada clase de edad se representa entonces por el **vector de distribución de edades**.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \qquad \begin{array}{l} \text{Número en la primera clase de edad} \\ \text{Número en la segunda clase de edad} \\ \vdots \\ \text{Número en la } n\text{-ésima clase de edad} \end{array}$$

Durante un periodo de L/n años, la *probabilidad* de que un elemento de la clase de la i-ésima edad sobreviva para convertirse en un miembro de la clase $(i + 1)$ está dada por p_i, donde

$$0 \leq p_i \leq 1, \ i = 1, 2, \ldots, n - 1.$$

El *número promedio* de descendencia producido por un miembro de la clase de la i-ésima edad está dado por b_i, donde

$$0 \leq b_i, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Estos números pueden escribirse en forma matricial como se muestra a continuación.

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

Al multiplicar esta **matriz de transición de edades** por el vector de distribución de edades durante un periodo específico obtenemos el vector de distribución de edades para el siguiente periodo. Es decir,

$$A\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i+1}.$$

Este procedimiento se ilustra en el ejemplo 1.

EJEMPLO 1 Un modelo del crecimiento de una población

Un población de conejos tiene las siguientes características.

a. La mitad de conejos sobrevive el primer año. De éstos, la mitad sobrevive el segundo año. La duración máxima de vida es 3 años.

b. Durante el primer año los conejos no producen descendencia. El número medio de descendencia es 6 durante el segundo año y 8 durante el tercer año.

La población ahora consta de 24 conejos en la clase de la primera edad, 24 en la segunda y 20 en la tercera, ¿cuántos habrá en cada clase de edad en un año?

SOLUCIÓN

El vector actual de distribución de edades es

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 24 \\ 24 \\ 20 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 0 \le \text{edad} < 1 \\ 1 \le \text{edad} < 2 \\ 2 \le \text{edad} \le 3 \end{matrix}$$

y la matriz de transición de edades es

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 8 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Después de un año el vector de distribución de edades será

$$\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 8 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 24 \\ 24 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 304 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix}. \quad \begin{matrix} 0 \le \text{edad} < 1 \\ 1 \le \text{edad} < 2 \\ 2 \le \text{edad} \le 3 \end{matrix}$$

COMENTARIO

Si el patrón de crecimiento del ejemplo 1 continúa durante otro año, entonces la población de conejos sería

$$\mathbf{x}_3 = A\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 168 \\ 152 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

A partir de los vectores de distribución de edades $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ y $\mathbf{x}_3$ se observa que el porcentaje de conejos en las tres clases de edad cambia cada año. Para lograr un patrón de crecimiento estable, uno en el que el porcentaje en cada clase de edad permanezca igual cada año, el $(n + 1)$-ésimo vector de distribución de edades debe ser un múltiplo escalar del n-ésimo vector de distribución de edades. Es decir, $x_{n+1} = A\mathbf{x}_n = \lambda\mathbf{x}_n$. El Ejemplo 2 muestra cómo resolver este problema.

EJEMPLO 2 Determinación de una distribución estable de edades

Encuentre una distribución estable de edades para la población del ejemplo 1.

SOLUCIÓN

Para resolver este problema es necesario encontrar un eigenvalor λ y un correspondiente eigenvector $\mathbf{x}$ tales que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. El polinomio característico de A es

$$|\lambda I - A| = (\lambda + 1)^2(\lambda - 2)$$

(revise esto), lo cual implica que los eigenvalores son –1 y 2. Con el valor positivo, se hace $\lambda = 2$. Verifique que los eigenvectores correspondientes sean de la forma

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16t \\ 4t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 16 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por ejemplo, si $t = 2$, entonces el vector inicial de distribución de edades sería

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 32 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 0 \le \text{edad} < 1 \\ 1 \le \text{edad} < 2 \\ 2 \le \text{edad} \le 3 \end{matrix}$$

y el vector de distribución de edades para el año siguiente sería

$$\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 8 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 32 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 64 \\ 16 \\ 4 \end{bmatrix}. \quad \begin{matrix} 0 \le \text{edad} < 1 \\ 1 \le \text{edad} < 2 \\ 2 \le \text{edad} \le 3 \end{matrix}$$

Observe que la proporción de las tres clases de edad sigue siendo de 16:4:1, y por tanto el porcentaje de la población de cada clase permanece igual.

Simulación

Más adelante explore este concepto con una simulación electrónica disponible en college.*cengage.com/pic/larsonELA6e*.

SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES (CÁLCULO)

Un **sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden** es de la forma

$$\begin{aligned}
y_1{}' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n\\
y_2{}' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n\\
&\vdots\\
y_n{}' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n
\end{aligned}$$

donde cada y_i es una función de t y $y_i{}' = \dfrac{dy_i}{dt}$. Si hace

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} y_1{}'\\ y_2{}'\\ \vdots\\ y_n{}' \end{bmatrix}$$

entonces el sistema puede escribirse en forma matricial como

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}.$$

EJEMPLO 3 Resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales.

$$\begin{aligned}
y_1{}' &= 4y_1\\
y_2{}' &= -y_2\\
y_3{}' &= 2y_3
\end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Del cálculo, usted sabe que la solución de la ecuación diferencial $y' = ky$ es

$$y = Ce^{kt}.$$

Por consiguiente, la solución del sistema es

$$\begin{aligned}
y_1 &= C_1e^{4t}\\
y_2 &= C_2e^{-t}\\
y_3 &= C_3e^{2t}.
\end{aligned}$$

La forma matricial del sistema de ecuaciones diferenciales lineales del ejemplo 3 es $y' = Ay$, o

$$\begin{bmatrix} y_1{}'\\ y_2{}'\\ y_3{}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, los coeficientes de t en las soluciones $y_i = {}^{c}{}_{i}e^{\lambda_i t}$ están dados por los *eigenvalores* de la matriz A.

Si A es una matriz *diagonal*, entonces la solución de

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$$

puede obtenerse de inmediato, como el ejemplo 3. Si A *no* es diagonal, entonces la solución requiere un poco más de trabajo. Primero se intenta encontrar una matriz P que diagonalice A. Luego, el cambio de variables dado por $\mathbf{y} = P\mathbf{w}$ y $\mathbf{y}' = P\mathbf{w}'$ produce

$$P\mathbf{w}' = \mathbf{y}' = A\mathbf{y} = AP\mathbf{w} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{w}' = P^{-1}AP\mathbf{w}$$

donde $P^{-1}AP$ es una matriz diagonal. Este procedimiento se demuestra en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales.

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= 6y_1 - y_2 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Primero se encuentra una matriz P que diagonalice $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$. Los eigenvalores de A son $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = 5$, con eigenvectores correspondientes $\mathbf{p}_1 = [1 \quad -3]^T$ y $\mathbf{p}_2 = [1 \quad 1]^T$. Diagonalice A utilizando la matriz P cuyas columnas constan de $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$ para obtener

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

El sistema representado por $\mathbf{w}' = P^{-1}AP\mathbf{w}$ tiene la forma siguiente.

$$\begin{bmatrix} w_1' \\ w_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} w_1' &= -3w_1 \\ w_2' &= 5w_2 \end{aligned}$$

La solución de este sistema de ecuaciones es

$$\begin{aligned} w_1 &= C_1 e^{-3t} \\ w_2 &= C_2 e^{5t}. \end{aligned}$$

Para volver a las variables originales y_1 y y_2 se emplea la sustitución $\mathbf{y} = P\mathbf{w}$ y se escribe

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

lo cual implica que la solución es

$$\begin{aligned} y_1 &= w_1 + w_2 = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{5t} \\ y_2 &= -3w_1 + w_2 = -3C_1 e^{-3t} + C_2 e^{5t}. \end{aligned}$$

Si A tiene eigenvalores con multiplicidad mayor que 1 o si A tiene eigenvalores complejos, entonces la técnica para resolver el sistema debe ser modificada.

1. *Eigenvalores con multiplicidad mayor que* 1: la matriz de coeficientes del sistema

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -4y_1 + 4y_2 \end{aligned} \quad \text{es} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

El único eigenvalor de A es $\lambda = 2$ y la solución del sistema de ecuaciones diferenciales lineales es

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t} \\ y_2 &= (2C_1 + C_2)e^{2t} + 2C_2 t e^{2t}. \end{aligned}$$

2. *Eigenvalores complejos*: la matriz de coeficientes del sistema

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_2 \\ y_2' &= y_1 \end{aligned} \quad \text{es} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Los eigenvalores de A son $\lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = -i$ y la solución del sistema de ecuaciones diferenciales lineales es

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t \\ y_2 &= -C_2 \cos t + C_1 \operatorname{sen} t. \end{aligned}$$

Intente comprobar estas soluciones al obtener las derivadas y sustituir en el sistema original de ecuaciones.

FORMAS CUADRÁTICAS

Los eigenvalores y los eigenvectores pueden usarse para resolver el problema de rotación de ejes presentando en la sección 4.8. Recuerde que la clasificación de la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \qquad \text{Ecuación cuadrática}$$

es bastante directa en la medida en que la ecuación no contenga término xy (esto es, $b = 0$). Sin embargo, si la ecuación contiene un término xy entonces la clasificación se logra más fácilmente al efectuar primero una rotación de ejes que elimine el término xy. La ecuación resultante (con respecto a los nuevos ejes $x'y'$) será entonces de la forma

$$a'(x')^2 + c'(y')^2 + d'x' + e'y' + f' = 0.$$

Verá que los coeficientes a' y c' son los eigenvalores de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}.$$

La expresión

$$ax^2 + bxy + cy^2 \qquad \text{Forma cuadrática}$$

se denomina **forma cuadrática** asociada con la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

y la matriz A se denomina **matriz de la forma cuadrática**. Observe que la matriz A es *simétrica* por definición. Además, la matriz A será diagonal si y sólo si su forma cuadrática correspondiente no tiene término xy, como se ilustra en el ejemplo 5.

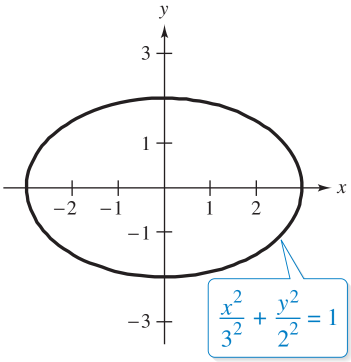


Figura 7.3

EJEMPLO 5 Determinación de la matriz de una forma cuadrática

Encuentre la matriz de la forma cuadrática asociada con cada una de las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a. $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ **b.** $13x^2 - 10xy + 13y^2 - 72 = 0$

SOLUCIÓN

a. Como $a = 4$, $b = 0$ y $c = 9$, entonces la matriz es

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}. \qquad \text{Matriz diagonal (sin término } xy\text{)}$$

b. Como $a = 13$, $b = -10$ y $c = 13$, la matriz es

$$A = \begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{bmatrix}. \qquad \text{Matriz no diagonal (con término } xy\text{)}$$

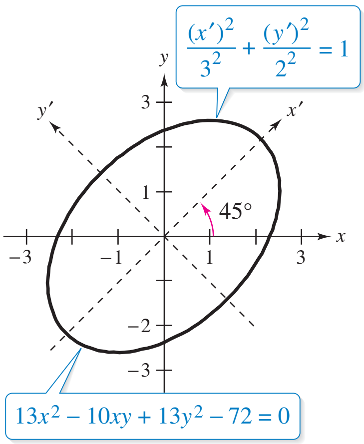


Figura 7.4

En forma estándar, la ecuación $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ es

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

que corresponde a la ecuación de la elipse mostrada en la figura 7.3. Aunque no es evidente por simple inspección, la gráfica de la ecuación $13x^2 - 10xy + 13y^2 - 72 = 0$ es semejante. De hecho, si los ejes x y y se rotan 45° en sentido contrario al de las manecillas del reloj para formar un nuevo sistema de coordenadas $x'y'$, entonces esta ecuación toma la forma

$$\frac{(x')^2}{3^2} + \frac{(y')^2}{2^2} = 1$$

que corresponde a la ecuación de la elipse mostrada en la figura 7.4.

Para ver cómo se puede usar la matriz de una forma cuadrática para efectuar una rotación de ejes, sea

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Entonces la expresión cuadrática $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ puede escribirse en forma matricial como sigue.

$$X^TAX + [d \quad e]X + f = [x \quad y]\begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + [d \quad e]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + f$$
$$= ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

Si $b = 0$, entonces no es necesaria ninguna rotación. Pero si $b \neq 0$, entonces como A es simétrica, puede aplicar el teorema 7.10 para concluir que existe una matiz ortogonal P tal que $P^TAP = D$ es diagonal. Por tanto, si hace

$$P^TX = X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

se concluye que $X = PX'$, y se tiene $X^TAX = (PX')^TA(PX') = (X')^TP^TAPX' = (X')^TDX'$.

La elección de la matriz P debe hacerse con cuidado, ya que si P es ortogonal, entonces su determinante es ± 1. Se puede demostrar (véase el ejercicio 65) que si P se elige de modo que $|P| = 1$, entonces P será de la forma

$$P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

donde θ da el ángulo de rotación de la cónica medida desde el eje x positivo al eje x' positivo. Lo anterior conduce al **teorema de los ejes principales**.

COMENTARIO

Advierta que el producto matricial $[d \quad e]PX'$ es de la forma

$(d\cos\theta + e\operatorname{sen}\theta)x'$
$+ (-d\operatorname{sen}\theta + e\cos\theta)y'$.

Teorema de los ejes principales

Para una cónica cuya ecuación es $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, la rotación definida por $X = PX'$ elimina el término xy si P es una matriz ortogonal, con $|P| = 1$, que diagonaliza a A. Es decir,

$$P^TAP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

donde λ_1 y λ_2 son eigenvalores de A. La ecuación de la cónica rotada está dada por

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + [d \quad e]PX' + f = 0.$$

EJEMPLO 6 Rotación de una cónica

Efectúe una rotación de ejes para eliminar el término xy en la ecuación cuadrática

$$13x^2 - 10xy + 13y^2 - 72 = 0.$$

SOLUCIÓN

La matriz de la forma cuadrática asociada con esta ecuación es

$$A = \begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{bmatrix}.$$

Como el polinomio característico de A es $(\lambda - 8)(\lambda - 18)$ (revise esto), se concluye que los eigenvalores de A son $\lambda_1 = 8$ y $\lambda_2 = 18$. Por tanto, la ecuación de la cónica rotada es

$$8(x')^2 + 18(y')^2 - 72 = 0$$

lo cual, cuando se escribe en la forma estándar

$$\frac{(x')^2}{3^2} + \frac{(y')^2}{2^2} = 1$$

se identifica como la ecuación de una elipse (véase la figura 7.4).

En el ejemplo 6 los eigenvectores de la matriz A son

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que se puede normalizar para formar las columnas de P, como sigue

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Primero, observe que $|P| = 1$, lo cual implica que P es una rotación. Además, en vista de que $\cos 45° = 1/\sqrt{2} = \operatorname{sen} 45°$, el ángulo of rotación es 45°, como se muestra en la figura 7.4.

La matriz ortogonal P especificada en el teorema de los ejes principales no es única. Sus elementos dependen del orden de los eigenvalores λ_1 y λ_2 y de la elección posterior de los eigenvectores $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$. Así, en la solución del ejemplo 6 hubiera funcionado cualquiera de las siguientes elecciones de P.

$$\begin{array}{cc} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 8,\ \lambda_2 = 18 \qquad \lambda_1 = 18,\ \lambda_2 = 8 \qquad \lambda_1 = 18,\ \lambda_2 = 8$$

$$\theta = 225° \qquad \theta = 135° \qquad \theta = 315°$$

Para cualquiera de estas elecciones de P, la gráfica de la cónica rotada será, por supuesto, la misma (véase la figura 7.5).

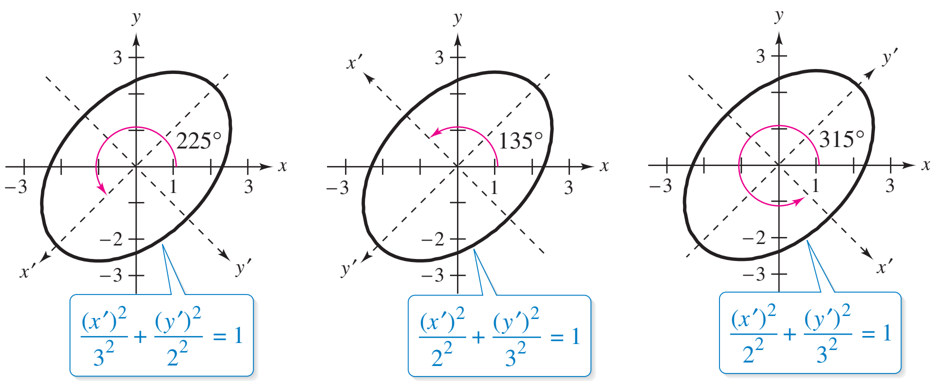


Figura 7.5

A continuación se resumen los pasos usados en la aplicación del teorema de los ejes principales.

1. Forme la matriz A y determine sus eigenvalores λ_1 y λ_2.
2. Encuentre los eigenvectores correspondientes a λ_1 y λ_2 normalícelos para formar las columnas de P.
3. Si $|P| = -1$, entonces multiplique -1 por una de las columnas de P para obtener una matriz de la forma

$$P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

4. El ángulo θ representa el ángulo de rotación de la cónica.
5. La ecuación de la cónica rotada es $\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + [d \quad e]PX' + f = 0$.

En el ejemplo 7 se muestra cómo aplicar el teorema de los ejes principales para rotar una cónica cuyo centro se ha trasladado lejos del origen.

EJEMPLO 7 Rotación de una cónica

Efectúe una rotación de ejes para eliminar el término xy de la ecuación cuadrática

$$3x^2 - 10xy + 3y^2 + 16\sqrt{2}x - 32 = 0.$$

SOLUCIÓN

La matriz de la forma cuadrática asociada con esta ecuación es

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Los eigenvalores de A son

$$\lambda_1 = 8 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -2$$

con eigenvectores correspondientes

$$\mathbf{x}_1 = (-1, 1) \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2 = (-1, -1).$$

Esto implica que la matriz P es

$$P = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \text{ donde } |P| = 1.$$

Como $\cos 135° = -1/\sqrt{2}$ y $\operatorname{sen} 135° = 1/\sqrt{2}$, puede concluir que el ángulo de rotación es 135°. Por último, a partir del producto matricial

$$[d \quad e]PX' = [16\sqrt{2} \quad 0]\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

$$= -16x' - 16y'$$

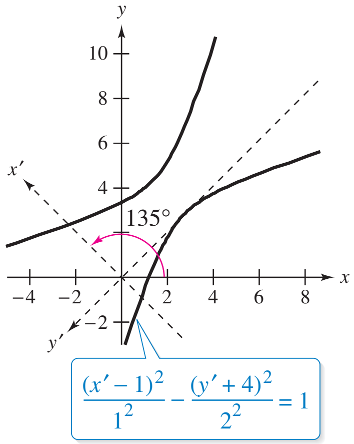


Figura 7.6

se puede concluir que la ecuación de la cónica rotada es

$$8(x')^2 - 2(y')^2 - 16x' - 16y' - 32 = 0.$$

En forma estándar, la ecuación

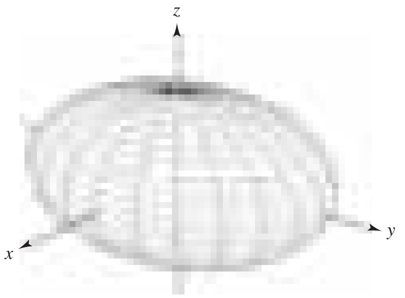
$$\frac{(x'-1)^2}{1^2} - \frac{(y'+4)^2}{2^2} = 1$$

se identifica como la ecuación de una hipérbola, cuya gráfica se observa en la figura 7.6.

Las formas cuadráticas también pueden usarse para analizar ecuaciones de superficies cuádricas en R^3 las cuales son la analogía de las secciones cónicas pero en tres dimensiones. La ecuación de una superficie cuádrica en R^3 es un polinomio de segundo grado de la forma

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0.$$

Hay seis tipos básicos de superficies cuádricas: elipsoides, hiperboloides de una hoja, hiperboloides de dos hojas, conos elípticos, paraboloides elípticos y paraboloides hiperbólicos. La intersección de una superficie con un plano, llamada **traza** de la superficie en el plano, es útil para ayudar a visualizar la gráfica de la superficie en el espacio. Los seis tipos básicos de superficies cuádricas, junto con sus trazas, se muestran en las dos páginas siguientes.

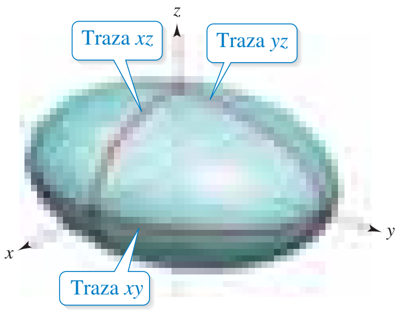


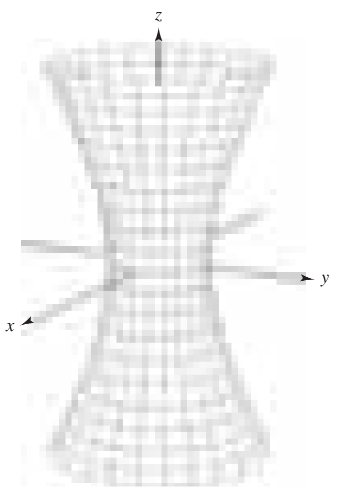
Elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Traza	*Plano*
Elipse	Paralelo al plano xy
Elipse	Paralelo al plano xz
Elipse	Paralelo al plano yz

La superficie es una esfera si a 5 b 5 $c \neq 0$.



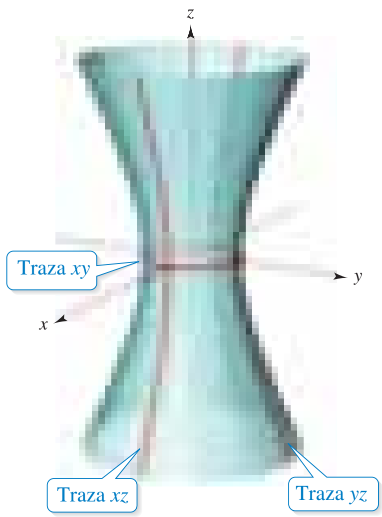


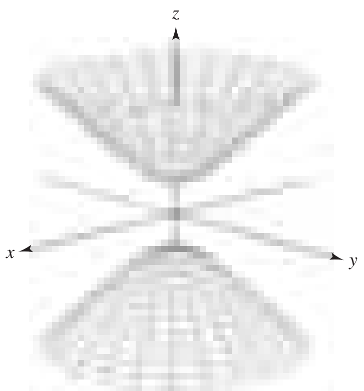
Hiperboloide de una hoja

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Traza	*Plano*
Elipse	Paralelo al plano xy
Hipérbola	Paralelo al plano xz
Hipérbola	Paralelo al plano yz

El eje del hiperboloide corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo.



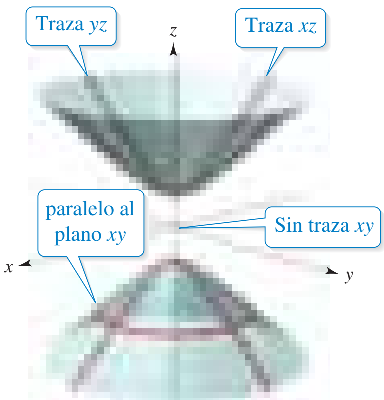


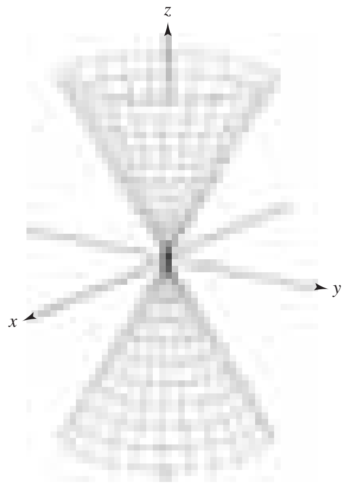
Hiperboloide de dos hojas

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Traza	*Plano*
Elipse	Paralelo al plano xy
Hipérbola	Paralelo al plano xz
Hipérbola	Paralelo al plano yz

El eje del hiperboloide corresponde a la variable cuyo coeficiente es positivo. No existe una traza en el plano coordenado perpendicular a este eje.



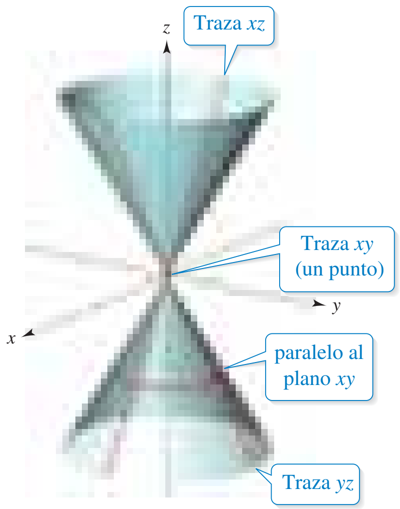


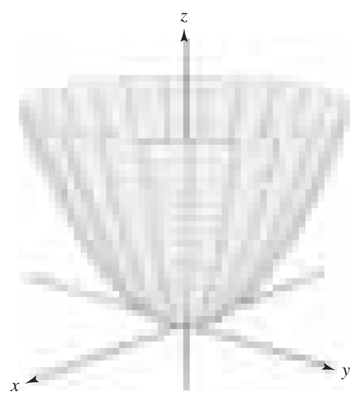
Cono elíptico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Traza	*Plano*
Elipse	Paralelo al plano *xy*
Hipérbola	Paralelo al plano *xz*
Hipérbola	Paralelo al plano *yz*

El eje del cono corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo. Las trazas en los planos coordenados paralelos a este eje son rectas de intersección.



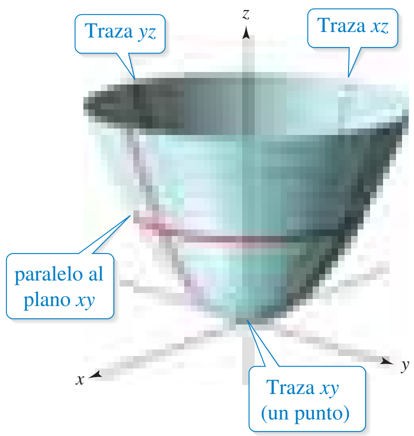


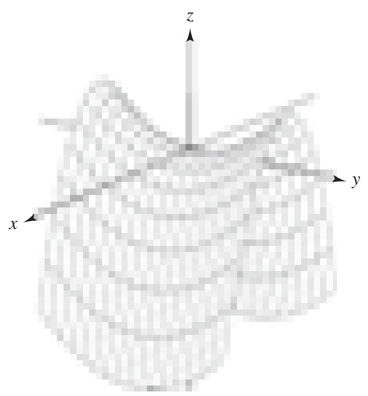
Paraboloide elíptico

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Traza	*Plano*
Elipse	Paralelo al plano *xy*
Parábola	Paralelo al plano *xz*
Parábola	Paralelo al plano *yz*

El eje del paraboloide corresponde a la variable elevada a la primera potencia.



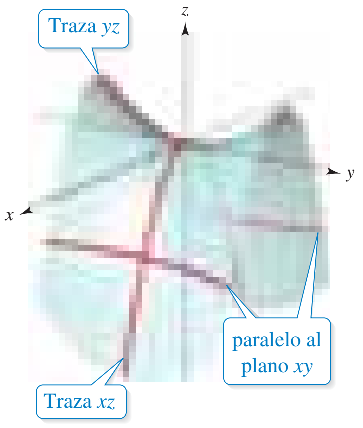


Paraboloide hiperbólico

$$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$$

Traza	*Plano*
Hipérbola	Paralelo al plano *xy*
Parábola	Paralelo al plano *xz*
Parábola	Paralelo al plano *yz*

El eje del paraboloide corresponde a la variable elevada a la primera potencia.



ÁLGEBRA LINEAL APLICADA

Una parte de la arquitectura más inusual del mundo recurre a superficies cuádricas. Por ejemplo, la *Catedral Metropolitana Nossa Senhora Aparecida*, una catedral ubicada en Brasilia, Brasil, tiene la forma de un hiperboloide de una hoja. Fue diseñada por el arquitecto ganador del Premio Pritzker Oscar Niemeyer y dedicada en 1970. Las dieciséis columnas idénticas de acero curvo, con un peso de 90 toneladas cada una, pretenden representar dos manos que se alzan hacia el cielo. En los espacios triangulares de diez metros de ancho por treinta de alto que forman las columnas, se encuentran piezas de vidrio semitransparente polarizado, que permiten el paso de la luz al interior en casi toda la altura de las columnas.

La forma cuadrática de la ecuación

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz + gx + hy + iz + j = 0 \qquad \text{Superficie cuádrica}$$

es definida como

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz. \qquad \text{Forma cuadrática}$$

La matriz correspondiente es

$$A = \begin{bmatrix} a & \frac{d}{2} & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & b & \frac{f}{2} \\ \frac{e}{2} & \frac{f}{2} & c \end{bmatrix}.$$

En su versión tridimensional, el teorema de los ejes principales relaciona los eigenvalores y los eigenvectores de A con la ecuación de la superficie rotada, como se muestra en el ejemplo 8.

EJEMPLO 8 Rotación de una superficie cuádrica

Realice una rotación de los ejes para eliminar el término xz en la ecuación cuadrática

$$5x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 8xz - 36 = 0.$$

SOLUCIÓN

La matriz A asociada con esta ecuación cuadrática es

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

cuyos eigenvalores son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$ y $\lambda_3 = 9$. Así, en el sistema rotado x', y', z', la ecuación cuadrática es $(x')^2 + 4\,(y')^2 + 9\,(z')^2 - 36 = 0$. Que en la forma estándar es

$$\frac{(x')^2}{6^2} + \frac{(y')^2}{3^2} + \frac{(z')^2}{2^2} = 1.$$

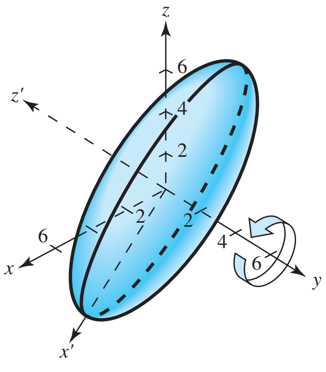


Figura 7.7

La gráfica de esta ecuación es un elipsoide. Como se muestra en la figura 7.7, los ejes x', y', z' representan una rotación de 45° en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor del eje y. Además, la matriz ortogonal

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

cuyas columnas son los eigenvectores de A, tiene la propiedad de que P^TAP es diagonal.

7.4 Ejercicios

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

Determinación de los vectores de distribución de edad En los ejercicios 1 a 6, use la matriz A de transición de edades y el vector $\mathbf{x}_1$ de distribución de edades para encontrar los vectores de distribución de edades $\mathbf{x}_2$ y $\mathbf{x}_3$.

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ \frac{1}{16} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 160 \\ 160 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 4 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 24 \\ 24 \\ 24 \\ 24 \\ 24 \end{bmatrix}$

7. Encuentre un vector de distribución de edades estable para la matriz de transición de edades del ejercicio 1.

8. Encuentre un vector de distribución de edades estable para la matriz de transición de edades del ejercicio 2.

9. Encuentre un vector de distribución de edades estable para la matriz de transición de edades del ejercicio 3.

10. Encuentre un vector de distribución de edades estable para la matriz de transición de edades del ejercicio 4.

11. Encuentre un vector de distribución de edad estable para la matriz de transición de edad en el ejercicio 5.

12. Encuentre un vector de distribución de edad estable para la matriz de transición de edad en el ejercicio 6.

13. **Modelo de crecimiento poblacional** Una población presenta las siguientes características.

(a) Un total de 75% de la población sobrevive el primer año. De este 75%, 25% sobrevive el segundo año. La duración máxima de la vida es tres años.

(b) El número promedio de descendencia de cada miembro de la población es 2 el primer año, 4 el segundo y 2 el tercero.

Actualmente, la población consta de 160 elementos en cada una de las tres clases de edad. ¿Cuántos habrá en cada clase de edad en un año? ¿Y en dos años?

14. **Modelo de crecimiento poblacional** Una población presenta las siguientes características.

(a) Un total de 80% de la población sobrevive el primer año. De este 80%, 25% sobrevive el segundo año. La duración máxima de la vida es tres años.

(b) El número promedio de descendencia de cada miembro de la población es 3 el primer año, 6 el segundo y 3 el tercero.

Actualmente, la población consta de 120 elementos en cada una de las tres clases de edad. ¿Cuántos habrá en cada clase de edad en un año? ¿Y en dos años?

15. **Modelo de crecimiento poblacional** Una población presenta las siguientes características.

(a) Un total de 60% de la población sobrevive el primer año. De este 60%, 50% sobrevive el segundo año. La duración máxima de la vida es tres años.

(b) El número promedio de descendencia de cada miembro de la población es 2 el primer año, 5 el segundo y 2 el tercero.

Actualmente, la población consta de 100 elementos en cada una de las tres clases de edad. ¿Cuántos habrá en cada clase de edad en un año? ¿Y en dos años?

16. Determine el límite (en caso de existir) de $A^n\mathbf{x}_1$ cuando n tiende a infinito para las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}$$

Solución de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales En los ejercicios 17 a 28, resuelva el sistema dado de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

17. $\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 \\ y_2' &= y_2 \end{aligned}$

18. $\begin{aligned} y_1' &= -5y_1 \\ y_2' &= 4y_2 \end{aligned}$

19. $\begin{aligned} y_1' &= -4y_1 \\ y_2' &= -\tfrac{1}{2}y_2 \end{aligned}$

20. $\begin{aligned} y_1' &= \tfrac{1}{2}y_1 \\ y_2' &= \tfrac{1}{8}y_2 \end{aligned}$

21. $\begin{aligned} y_1' &= -y_1 \\ y_2' &= 6y_2 \\ y_3' &= y_3 \end{aligned}$

22. $\begin{aligned} y_1' &= 5y_1 \\ y_2' &= -2y_2 \\ y_3' &= -3y_3 \end{aligned}$

23. $\begin{aligned} y_1' &= -12y_1 \\ y_2' &= -6y_2 \\ y_3' &= 7y_3 \end{aligned}$

24. $\begin{aligned} y_1' &= -\tfrac{2}{3}y_1 \\ y_2' &= -\tfrac{3}{5}y_2 \\ y_3' &= -8y_3 \end{aligned}$

25. $\begin{aligned} y_1' &= -0.3y_1 \\ y_2' &= 0.4y_2 \\ y_3' &= -0.6y_3 \end{aligned}$

26. $\begin{aligned} y_1' &= \pi y_1 \\ y_2' &= -\pi y_2 \\ y_3' &= \pi^2 y_3 \end{aligned}$

27. $\begin{aligned} y_1' &= 7y_1 \\ y_2' &= 9y_2 \\ y_3' &= -7y_3 \\ y_4' &= -9y_4 \end{aligned}$

28. $\begin{aligned} y_1' &= -0.1y_1 \\ y_2' &= -\tfrac{7}{4}y_2 \\ y_3' &= -2\pi y_3 \\ y_4' &= \sqrt{5}y_4 \end{aligned}$

Solución de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales En los ejercicios 29 a 36, resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

29. $\begin{aligned} y_1' &= y_1 - 4y_2 \\ y_2' &= 2y_2 \end{aligned}$

30. $\begin{aligned} y_1' &= y_1 - 4y_2 \\ y_2' &= -2y_1 + 8y_2 \end{aligned}$

31. $\begin{aligned} y_1' &= y_1 + 2y_2 \\ y_2' &= 2y_1 + y_2 \end{aligned}$

32. $\begin{aligned} y_1' &= y_1 - y_2 \\ y_2' &= 2y_1 + 4y_2 \end{aligned}$

33. $\begin{aligned} y_1' &= -3y_2 + 5y_3 \\ y_2' &= -4y_1 + 4y_2 - 10y_3 \\ y_3' &= 4y_3 \end{aligned}$

34. $\begin{aligned} y_1' &= -2y_1 + y_3 \\ y_2' &= 3y_2 + 4y_3 \\ y_3' &= y_3 \end{aligned}$

35. $\begin{aligned} y_1' &= y_1 - 2y_2 + y_3 \\ y_2' &= 2y_2 + 4y_3 \\ y_3' &= 3y_3 \end{aligned}$

36. $\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + y_2 + y_3 \\ y_2' &= y_1 + y_2 \\ y_3' &= y_1 + y_3 \end{aligned}$

Escribir un sistema y verificar la solución general En los ejercicios 37 a 40, escriba el sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden representado por la ecuación matricial $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Luego, compruebe la solución general indicada.

37. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{aligned} y_1 &= C_1e^t + C_2te^t \\ y_2 &= C_2e^t \end{aligned}$

38. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{aligned} y_1 &= C_1e^t \cos t + C_2e^t \operatorname{sen} t \\ y_2 &= -C_2e^t \cos t + C_1e^t \operatorname{sen} t \end{aligned}$

39. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$,

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 + C_2 \cos 2t + C_3 \operatorname{sen} 2t \\ y_2 &= 2C_3 \cos 2t - 2C_2 \operatorname{sen} 2t \\ y_3 &= -4C_2 \cos 2t - 4C_3 \operatorname{sen} 2t \end{aligned}$$

40. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$,

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1e^t + C_2te^t + C_3t^2e^t \\ y_2 &= (C_1 + C_2)e^t + (C_2 + 2C_3)te^t + C_3t^2e^t \\ y_3 &= (C_1 + 2C_2 + 2C_3)e^t + (C_2 + 4C_3)te^t + C_3t^2e^t \end{aligned}$$

Determinación de la matriz de una forma cuadrática En los ejercicios 41 a 46, obtenga la matriz de la forma cuadrática asociada con la ecuación dada.

41. $x^2 + y^2 - 4 = 0$

42. $x^2 - 4xy + y^2 - 4 = 0$

43. $9x^2 + 10xy - 4y^2 - 36 = 0$

44. $12x^2 - 5xy - x + 2y - 20 = 0$

45. $10xy - 10y^2 + 4x - 48 = 0$

46. $16x^2 - 4xy + 20y^2 - 72 = 0$

Determinación de la matriz de una forma cuadrática En los ejercicios 47 a 52, obtenga la matriz A de la forma cuadrática asociada con la ecuación dada. En cada caso, encuentre los eigenvalores de A y una matriz ortogonal P tal que P^TAP sea diagonal.

47. $2x^2 - 3xy - 2y^2 + 10 = 0$

48. $5x^2 - 2xy + 5y^2 + 10x - 17 = 0$

49. $13x^2 + 6\sqrt{3}\,xy + 7y^2 - 16 = 0$

50. $3x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2 + 2x + 2\sqrt{3}y = 0$

51. $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 60x - 80y + 100 = 0$

52. $17x^2 + 32xy - 7y^2 - 75 = 0$

Rotación de una cónica En los ejercicios 53 a 60, use el teorema de los ejes principales para efectuar una rotación de ejes que elimine el término xy en la ecuación cuadrática dada. Identifique la cónica rotada resultante y dé su ecuación en el nuevo sistema de coordenadas.

53. $13x^2 - 8xy + 7y^2 - 45 = 0$

54. $x^2 + 4xy + y^2 - 9 = 0$

55. $2x^2 - 4xy + 5y^2 - 36 = 0$

56. $7x^2 + 32xy - 17y^2 - 50 = 0$

57. $2x^2 + 4xy + 2y^2 + 6\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + 4 = 0$

58. $8x^2 + 8xy + 8y^2 + 10\sqrt{2}x + 26\sqrt{2}y + 31 = 0$

59. $xy + x - 2y + 3 = 0$

60. $5x^2 - 2xy + 5y^2 + 10\sqrt{2}x = 0$

Rotación de una superficie cuádrica En los ejercicios 61 a 64, determine la matriz A de la forma cuadrática asociada con la ecuación dada. Luego, encuentre la ecuación de la superficie en el sistema $x'y'z'$ rotado.

61. $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 8z^2 - 16 = 0$

62. $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 1 = 0$

63. $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2yz - 1 = 0$

64. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 8 = 0$

65. Sea P una matriz ortogonal de 2×2 tal que $|P| = 1$. Demuestre que existe un número θ, $0 \leq \theta < 2\pi$, tal que

$$P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

66. **REMATE** Explique lo siguiente.

(a) Cómo modelar el crecimiento poblacional usando una matriz de transición de edad y un vector de distribución de edad y cómo encontrar un vector de distribución de edad estable.

(b) Cómo usar una ecuación matricial para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

(c) Cómo usar el Teorema de Ejes Principales para realizar una rotación de ejes para una superficie cónica y una cuádrica.

7 Ejercicios de repaso

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

Ecuación característica, eigenvalores y base En los ejercicios 1 a 6, obtenga (a) la ecuación característica de A, (b) los eigenvalores reales de A y (c) una base para el eigenespacio correspondiente a cada valor eigenvalor.

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ **2.** $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 9 & 4 & -3 \\ -2 & 0 & 6 \\ -1 & -4 & 11 \end{bmatrix}$ **4.** $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **6.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Ecuación característica, eigenvalores y base En los ejercicios 7 y 8, use una aplicación gráfica o un programa de cómputo para hallar (a) la ecuación característica de A, (b) los eigenvalores reales de A y (c) una base para el eigenespacio correspondiente a cada eigenvalor.

7. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **8.** $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Determinar si una matriz es diagonalizable En los ejercicios 9 a 14, determine si A es diagonalizable. En caso afirmativo, obtenga una matriz P no singular tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ **10.** $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

11. $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **12.** $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

13. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **14.** $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

15. ¿Para cuál(es) valor(es) de a la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & 1 \end{bmatrix}$$

presenta las siguientes características?

(a) A tiene un eigenvalor de multiplicidad 2.

(b) A tiene –1 y 2 como eigenvalores.

(c) A tiene eigenvalores reales.

16. Demuestre que si $0 < \theta < \pi$ entonces la transformación de una rotación de un ángulo θ en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj no tiene eigenvalores reales.

Escriba En los ejercicios 17 a 20, explique por qué la matriz dada no es diagonalizable.

17. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **18.** $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

19. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **20.** $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Determinar si dos matrices son similares En los ejercicios 21 a 24, determine si las matrices dadas son semejantes. De ser así, obtenga una matriz P tal que $A = P^{-1}BP$.

21. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

22. $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$

23. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

24. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 3 & -5 & -3 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Determinación de matrices simétricas y ortogonales En los ejercicios 25 a 30, determine si la matriz dada es simétrica, ortogonal, ambas cosas o ninguna de ellas.

25. $A = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ **26.** $A = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$

27. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **28.** $A = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$

29. $A = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

30. $A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$

Eigenvectores de una matriz simétrica En los Ejercicios 31-34, demuestre que dos eigenvectores cualesquiera de la matriz simétrica correspondientes a eigenvalores distintos son ortogonales.

31. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ **32.** $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

33. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **34.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Matrices diagonalizables ortogonalmente En los Ejercicios 35 y 36, determine si la matriz es diagonalizable ortogonalmente.

35. $\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

36. $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix}$

Diagonalización ortogonal En los ejercicios 37 a 42, obtenga una matriz ortogonal P que diagonalice a A. Verifique que P^TAP arroje la forma diagonal apropiada.

37. $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ **38.** $A = \begin{bmatrix} 8 & 15 \\ 15 & -8 \end{bmatrix}$

39. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **40.** $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

41. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **42.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Vector de probabilidad de estado estable En los ejercicios 43 a 50, obtenga un vector de probabilidad de estado estable (en caso de existir) para la matriz dada. Un eigenvector $\mathbf{v}$ de una matriz A de $n \times n$ se llama **vector de probabilidad de estado estable** si $A\mathbf{v} = \mathbf{v}$ y la suma de las componentes de $\mathbf{v}$ es igual a 1.

43. $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ **44.** $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$

45. $A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}$ **46.** $A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & 0.8 \end{bmatrix}$

47. $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ **48.** $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

49. $A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.7 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$ **50.** $A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.4 & 0.0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.6 \end{bmatrix}$

51. Prueba Demuestre que si A es una matriz simétrica de $n \times n$, entonces P^TAP es simétrica para cualquier matriz P de $n \times n$.

52. Demuestre que la ecuación característica de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & -\frac{a_2}{a_n} & -\frac{a_3}{a_n} & \cdots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}$$

$a_n \neq 0$, es $p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_2\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$. A se llama **matriz acompañante** del polinomio p.

Determinación de la matriz acompañante y eigenvalores En los ejercicios 53 y 54, use el resultado del ejercicio 52 para encontrar la matriz acompañante A del polinomio dado y determine los eigenvalores de A.

53. $p(\lambda) = -9\lambda + 4\lambda^2$

54. $p(\lambda) = 189 - 120\lambda - 7\lambda^2 + 2\lambda^3$

55. La ecuación característica de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

es $\lambda^2 - 10\lambda^2 + 24 = 0$. Como $A^2 - 10A + 24I_2 = O$, se puede obtener potencias de A mediante el siguiente procedimiento.

$A^2 = 10A - 24I_2$, $A^3 = 10A^2 - 24A$,
$A^4 = 10A^3 - 24A^2, \ldots$

Use este procedimiento para determinar las matrices A^2 y A^3.

56. Repita el ejercicio 55 para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 4 & -3 \\ -2 & 0 & 6 \\ -1 & -4 & 11 \end{bmatrix}.$$

57. Prueba Sea A una matriz de $n \times n$.

(a) Demuestre o refute que un eigenvector de A es también un eigenvector de A_2.

(b) Demuestre o refute que un eigenvector de A^2 es también un eigenvector de A.

58. Prueba Sea A una matriz de $n \times n$. Demuestre que si $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, entonces $\mathbf{x}$ es un eigenvector de $(A + cI)$ ¿cuál es el eigenvalor correspondiente?

59. Prueba Sean A y B matrices de $n \times n$. Demuestre que si A no es singular, entonces AB es semejante a BA.

60. Demostración

(a) Obtenga una matriz simétrica B tal que $B^2 = A$ para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) Generalice el resultado del inciso (a) demostrando que si A es una matriz simétrica de $n \times n$ con eigenvalores positivos, entones existe una matriz simétrica B tal que $B^2 = A$.

61. Determine una matriz ortogonal P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

62. Escriba Sea A una matriz idempotente de $n \times n$ (es decir, $A^2 = A$). Describa los eigenvalores de A.

63. Escriba La siguiente matriz tiene un eigenvalor $\lambda = 2$ de multiplicidad 4.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & b & 0 \\ 0 & 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) ¿Bajo que condiciones A es diagonizable?

(b) ¿Bajo que condiciones el eigenespacio de $\lambda = 2$ tiene dimensión 1? ¿2? ¿3?

64. Determine todas las matrices simétricas de $n \times n$ cuyo único eigenvalor sea 0.

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 65 y 66, determine cuál de las expresiones es verdadera o falsa. Si la expresión es verdadera, proporcione una razón o cite una expresión adecuada del texto. Si la expresión es falsa, proporcione un ejemplo que muestre que la expresión no es cierta en todos los casos o cite del texto una expresión adecuada.

65. (a) Un eigenvector de una matriz A de $n \times n$ es un vector $\mathbf{x}$ diferente de cero en R^n tal que $A\mathbf{x}$ es un múltiplo escalar de $\mathbf{x}$.

(b) Matrices semejantes pueden o no tener los mismos eigenvalores.

(c) Para diagonalizar una matriz cuadrada A, usted necesita encontrar una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP$ es diagonal.

66. (a) Un eigenvalor de una matriz A es un escalar λ tal que $\det(\lambda I - A) = 0$.

(b) Un eigenvector puede ser el vector cero $\mathbf{0}$.

(c) Una matriz A es diagonalizable ortogonalmente si existe una matriz ortogonal P tal que $P^{-1}AP = D$ es diagonal.

Determinación los vectores de distribución de edad En los ejercicios 67 a 70, use la matriz A de transición de edades y el vector $\mathbf{x}_1$ de distribución de edades para hallar los vectores de distribución de edades $\mathbf{x}_2$ y $\mathbf{x}_3$. Luego, obtenga una distribución estable de edades para la población.

67. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \end{bmatrix}$

68. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 32 \\ 32 \end{bmatrix}$

69. $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 12 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 300 \\ 300 \\ 300 \end{bmatrix}$

70. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 240 \\ 240 \\ 240 \end{bmatrix}$

71. Modelo de crecimiento poblacional Una población presenta las siguientes características.

(a) Un total de 90% de la población sobrevive el primer año. De este 90%, 75% sobrevive el segundo año. La duración máxima de la vida es tres años.

(b) El número promedio de descendencia de cada miembro de la población es 4 el primer año, 6 el segundo y 2 el tercero.

Actualmente, la población consta de 120 miembros en cada una de las tres clases de edad. ¿Cuántos habrá en cada clase de edad en un año? ¿Y en dos años?

72. Modelo de crecimiento poblacional Una población presenta las siguientes características.

(a) Un total de 75% de la población sobrevive el primer año. De este 75%, 60% sobrevive el segundo año. La duración máxima de la vida es tres años.

(b) El número promedio de descendencia de cada miembro de la población es 4 el primer año, 8 el segundo y 2 el tercero.

Actualmente, la población consta de 120 elementos en cada una de las tres clases de edad. ¿Cuántos habrá en cada clase de edad en un año? ¿Y en dos años?

Solución de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales En los ejercicios 73 a 78, resuelva el sistema dado de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

73. $y_1' = 3y_1$
$y_2' = 8y_2$
$y_3' = -8y_3$

74. $y_1' = 10y_1$
$y_2' = -0.1y_2$
$y_3' = \sqrt{2}y_3$
$y_4' = \frac{3}{4}y_4$

75. $y_1' = y_1 + 2y_2$
$y_2' = 0$

76. $y_1' = 3y_1$
$y_2' = y_1 - y_2$

77. $y_1' = y_2$
$y_2' = y_1$
$y_3' = 0$

78. $y_1' = 6y_1 - y_2 + 2y_3$
$y_2' = 3y_2 - y_3$
$y_3' = y_3$

Rotación de una cónica En los ejercicios 79 a 82, (a) obtenga la matriz A de la forma cuadrática asociada con la ecuación dada, (b) obtenga una matriz ortogonal P tal que P^TAP sea diagonal, (c) use el Teorema de Ejes Principales para realizar una rotación de ejes para eliminar el término xy en la ecuación cuadrática y (d) trace la gráfica de cada ecuación.

79. $x^2 + 3xy + y^2 - 3 = 0$

80. $x^2 - \sqrt{3}xy + 2y^2 - 10 = 0$

81. $xy - 2 = 0$

82. $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 400x - 300y = 0$

7 Proyectos

1 Crecimiento poblacional y sistemas dinámicos (I)

Los sistemas de ecuaciones diferenciales a veces aparecen en aplicaciones biológicas de crecimiento poblacional de varias especies animales. Estas ecuaciones se denominan **sistemas dinámicos** debido a que describen los cambios en un sistema como funciones del tiempo. Suponga que durante el tiempo t está estudiando las poblaciones de tiburones depredadores $y_1(t)$ y la de peces pequeños presa $y_2(t)$. Un modelo sencillo para el crecimiento relativo de estas poblaciones es

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= ay_1(t) + by_2(t) \qquad \text{Depredador} \\ y_2'(t) &= cy_1(t) + dy_2(t) \qquad \text{Presa} \end{aligned}$$

donde a, b, c y d son constantes. Generalmente, las constantes a y d son positivas, ya que reflejan la tasa de crecimiento de especies individuales. Si las especies están en una relación depredador-presa, entonces $b > 0$ y $c < 0$ indican que un incremento en los peces presa y_2 puede provocar un incremento en y_1, mientras que un incremento en los tiburones depredador y_1 puede causar una disminución en y_2.

Suponga que el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales lineales representa los modelos de las poblaciones iniciales de tiburones $y_1(t)$ y peces $y_2(t)$ con las poblaciones iniciales en el tiempo $t = 0$.

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 0.5y_1(t) + 0.6y_2(t) \qquad y_1(0) = 36 \\ y_2'(t) &= -0.4y_1(t) + 3.0y_2(t) \qquad y_2(0) = 121 \end{aligned}$$

1. Aplique las técnicas de diagonalización de este capítulo para determinar las poblaciones $y_1(t)$ y $y_2(t)$ en cualquier tiempo $t > 0$.
2. Interprete las soluciones en términos de tendencia de largo plazo para las dos especies. ¿Al final una de las especies desaparecerá? ¿Por qué sí o por qué no?
3. Grafique las soluciones $y_1(t)$ y $y_2(t)$ sobre el dominio $0 \le t \le 3$.
4. Explique por qué el cociente $y_2(t)/\,y_1(t)$ se aproxima al límite cuando t se incrementa.

2 La sucesión de Fibonacci

La **sucesión de Fibonacci** debe su nombre al matemático italiano Leonardo Fibonacci de Pisa (1170 -1250). La forma más simple de esta sucesión es definir los dos primeros términos como $x_1 = 1$ y $x_2 = 1$ y luego definir el n-ésimo término como la suma de sus dos predecesores inmediatos. Es decir, $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$. Así, el tercer término es $2 = 1 + 1$, el cuarto es $3 = 2 + 1$, etc. La fórmula $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ se denomina *fórmula recursiva* porque los $n - 1$ primeros términos deben calcularse antes de que sea posible calcular el n-ésimo termino. En este proyecto, usted utilizará eigenvalores y diagonalización para deducir una fórmula explícita para el n-ésimo término de la sucesión de Fibonacci.

1. Calcular los primeros 12 términos de la sucesión de Fibonacci.
2. Explique por qué la matriz identidad $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{n-1} + x_{n-2} \\ x_{n-1} \end{bmatrix}$ puede utilizarse para generar recursivamente la sucesión de Fibonacci.
3. Empiece con $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, para demostrar que $A^{n-2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix}$, donde $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
4. Encuentre una matriz P que diagonalice a A.
5. Deduzca una fórmula explícita para el n-ésimo término de la sucesión de Fibonacci. Use esta fórmula para calcular x_1, x_2 y x_3.
6. Determine el límite de x_n/x_{n-1} cuando n se aproxima a infinito. ¿Reconoce este número?

COMENTARIO

Puede aprender más acerca de los sistemas dinámicos y modelado poblacional en numerosos libros de ecuaciones diferenciales. Usted puede aprender más acerca de los números de Fibonacci en numerosos libros de teoría de números. Puede encontrar interesante revisar el *Fibonacci Quarterly*, publicación oficial de la Fibonacci Association.

Examen acumulativo de capítulos 6 y 7

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

Resuelva este examen para revisar el material en los Capítulos 6 y 7. Después de realizarlo, verifique su trabajo con las respuestas al final del libro.

En los Ejercicios 1 y 2, determine si la función es una transformación lineal.

1. $T: R^3 \to R^2,\ T(x, y, z) = (2x, x + y)$

2. $T: M_{2,2} \to R,\ T(A) = |A + A^T|$

3. Sea $T: R^n \to R^m$ la transformación lineal definida por $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Encuentre las dimensiones de R^n y R^m.

4. Sea $T: R^2 \to R^3$ una transformación lineal definida por $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine (a) $T(1, -2)$ y (b) la preimagen de $(5, -5, 0)$.

5. Determine el kernel de la transformación lineal

$T: R^4 \to R^4,\ T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_2, x_2 - x_1, 0, x_3 + x_4)$.

6. Sea $T: R^4 \to R^2$ la transformación lineal representada por $T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Determine una base para (a) el kernel de T, (b) el rango de T y (c) determine el rango y la nulidad de T.

En los ejercicios 7 a 10, la matriz estándar para la transformación lineal representada por T.

7. $T(x, y) = (3x + 2y, 2y - x)$

8. $T(x, y, z) = (x + y, y + z, x - z)$

9. $T(x, y, z) = (3z - 2y, 4x + 11z)$

10. $T(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$

11. Determine la matriz A estándar de la transformación lineal $\text{proy}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}: R^2 \to R^2$ que proyecta un vector arbitrario $\mathbf{u}$ sobre el vector $\mathbf{v}$ $[1 \quad -1]^T$ como se muestra en la figura 7.8. Use esta matriz para hallar las imágenes de los vectores $(1, 1)$ y $(-2, 2)$.

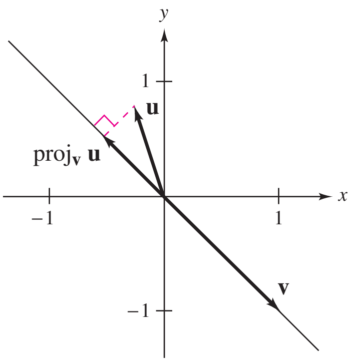


Figura para 11

12. Sea $T: R^2 \to R^2$ la transformación lineal definida por una rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj de 30° en R^2.

(a) Encuentre la matriz estándar A para la transformación lineal.

(b) Use A para encontrar la imagen del vector $\mathbf{v} = (1, 2)$.

(c) Trace la gráfica de $\mathbf{v}$ y su imagen.

En los Ejercicios 13 y 14, encuentre las matrices estándar para $T = T_2 \to T_1$ y $T' = T_1 \to T_2$.

13. $T_1: R^2 \to R^2,\ T_1(x, y) = (x - 2y, 2x + 3y)$

$T_2: R^2 \to R^2,\ T_2(x, y) = (2x, x - y)$

14. $T_1: R^3 \to R^3,\ T_1(x, y, z) = (x + 2y, y - z, -2x + y + 2z)$

$T_2: R^3 \to R^3,\ T_2(x, y, z) = (y + z, x + z, 2y - 2z)$

15. Determine la inversa de la transformación lineal $T: R^2 \to R^2$ representada por $T(x, y) = (x - y, 2x + y)$. Compruebe que $(T^{-1} \circ T)(3, -2) = (3, -2)$.

16. Determine si la transformación lineal $T: R^3 \to R^3$ definida por $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_1 + x_3)$ es invertible. Si es así, entonces encuentre su inversa.

17. Determine la matriz de la transformación lineal $T(x,y) = (y, 2x, x + y)$ respecto a las bases $B = \{(1, 1),(1, 0)\}$ para R^2 y $B' = \{(1, 0, 0),(1, 1, 0),(1, 1, 1)\}$ para R^3. Utilice esta matriz para hallar la imagen del vector (0, 1).

18. Sean $B = \{(1, 0),(0, 1)\}$ y $B' = \{(1, 1),(1, 2)\}$ bases para R^2.

(a) Determine la matriz A de $T: R^2 \to R^2$, $T(x, y) = (x - 2y, x + 4y)$ respecto a la base B.

(b) Determine la matriz P de transición de B' a B.

(c) Determine la matriz A' de T respecto a la base B'.

(d) Determine $[T(\mathbf{v})]_{B'}$ si $[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$.

(e) Verifique su respuesta en el inciso (d) encontrando $[\mathbf{v}]_B$ y $[T(\mathbf{v})]_B$.

En los ejercicios 19 a 22, los eigenvalores y los correspondientes eigenvectores de la matriz.

19. $\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

En los Ejercicios 23 y 24, encuentre una matriz P no singular tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

23. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

24. $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 \\ -4 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

25. Encuentre una base B para R^3 tal que la matriz para $T: R^3 \to R^3$, $T(x, y, z) = (2x - 2z, 2y - 2z, 3x - 3z)$ respecto a B es diagonal.

26. Determine una matriz ortogonal P tal que P^TAP diagonalice la matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

27. Use el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt para hallar una matriz ortogonal P tal que P^TAP diagonalice la matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

28. Resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales.

$$y_1' = y_1$$
$$y_2' = 3y_2$$

29. Encuentre la matriz de la forma cuadrática asociada con la ecuación cuadrática

$$4x^2 - 8xy + 4y^2 - 1 = 0.$$

30. Una población presenta las siguientes características.

(a) Un total de 80% de la población sobrevive el primer año. De este 80%, 40% sobrevive el segundo año. La duración máxima de la vida es tres años.

(b) El número promedio de descendencia de cada miembro de la población es 3 el primer año, 6 el segundo y 3 el tercero.

Actualmente, la población consta de 150 elementos en cada una de las tres clases de edad. ¿Cuántos habrá en cada clase de edad en un año? ¿Y en dos años?

31. Defina una *matriz ortogonal*.

32. Demuestre que si A es semejante a B y A es diagonalizable, entonces B es diagonalizable.

Apéndice Inducción matemática y otras formas de demostraciones

- Usar el Principio de Inducción Matemática para probar afirmaciones que implican un entero positivo *n*.
- Demostrar por contradicción que una afirmación matemática es verdadera.
- Usar un contraejemplo para demostrar que una afirmación matemática es falsa.

INDUCCIÓN MATEMÁTICA

En este apéndice estudiará algunas estrategias básicas para escribir demostraciones matemáticas (inducción matemática, demostración por contradicción) y el uso de contra ejemplos.

El Ejemplo 1 ilustra la necesidad lógica para usar la inducción matemática.

EJEMPLO 1 Suma de enteros impares

Utilice el patrón para proponer una fórmula para la suma de los n primeros enteros impares.

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1+3 &= 4 \\ 1+3+5 &= 9 \\ 1+3+5+7 &= 16 \\ 1+3+5+7+9 &= 25 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Observe que las sumas del lado derecho son iguales a los cuadrados 1^2, 2^2, 3^2, 4^2 y 5^2. Analizando este patrón, parece que la suma S_n de los primeros enteros nones n es

$$S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Aunque esta fórmula es válida, es importante señalar que el reconocer un patrón y luego simplemente concluir que debe ser válido para todos los valores de n, lógicamente no es un método válido de demostración. Existe un gran número de ejemplos en los que aparece un patrón desarrollado para valores pequeños de n y luego, en algún punto, el patrón falla. Uno de los casos más famosos de esto fue la conjetura del matemático francés Pierre de Fermat (1601–1655), quien especuló que todos los números de la forma

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

son primos. Para $n = 0, 1, 2, 3$ y 4 la conjetura es cierta.

$$F_0 = 3 \qquad F_1 = 5 \qquad F_2 = 17 \qquad F_3 = 257 \qquad F_4 = 65{,}537$$

El tamaño del siguiente número de Fermat ($F_5 = 4294967297$) es tan grande que le dificultó a Fermat determinar si era primo o no. Otro reconocido matemático, Leonhard Euler (1707–1783), encontró más tarde la factorización

$$F_5 = 4{,}294{,}967{,}297 = (641)(6{,}700{,}417)$$

lo que demostró que F_5 no es primo y que la conjetura de Fermat es falsa.

Sólo porque una regla, patrón o fórmula parezca funcionar para algunos valores de n, usted no puede decidir simplemente que es válida para todos los valores de n sin pasar por una *prueba legítima*. Un método legítimo de demostración de tales conjeturas es el **principio de inducción matemática**.

Principio de inducción matemática

Sea P_n una expresión que implica al entero positivo n. Si

1. P_1 es cierto y
2. para cada entero positivo k, la verdad de P_k implica la verdad de P_{k+1},

entonces la afirmación P_n debe ser cierta para todo entero positivo n.

En el siguiente ejemplo, se aplica el principio de inducción matemática para demostrar la conjetura del ejemplo 1.

EJEMPLO 2 Uso de inducción matemática

Use inducción matemática para demostrar que la siguiente fórmula.

$$S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

SOLUCIÓN

La inducción matemática consiste de dos partes. Primero, usted debe demostrar que la fórmula es válida cuando $n = 1$.

1. Cuando $n = 1$, la fórmula es válida ya que $S_1 = 1 = 1^2$.

   La segunda parte de la inducción matemática tiene dos pasos. El primero es suponer que la fórmula es válida para algún entero k (la **hipótesis de inducción**). El segundo paso es usar esta suposición para demostrar que la fórmula es válida para el siguiente entero, $k + 1$.

2. Suponiendo que la fórmula

   $$S_k = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2k - 1) = k^2$$

   es cierta, usted debe demostrar que la fórmula $S_{k+1} = (k + 1)^2$ es cierta.

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] \\ &= [1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2k - 1)] + (2k + 2 - 1) \\ &= S_k + (2k + 1) && \text{Agrupar términos para formar } S_k. \\ &= k^2 + 2k + 1 && \text{Sustituir } k^2 \text{ por } S_k. \\ &= (k + 1)^2 \end{aligned}$$

Combinando los resultados de los incisos (1) y (2), puede concluir por inducción matemática que la fórmula es válida para todos los enteros positivos n.

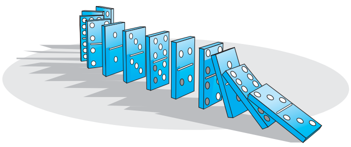


Figura A.1

Una ilustración bien conocida utilizada para explicar por qué la inducción matemática funciona es la línea sinfín de fichas de dominó mostrada en la figura de la izquierda. Si la línea contiene un número infinito de fichas de dominó, entonces es claro que usted no puede derribar la línea entera de fichas golpeando *una a la vez*. Suponga, sin embargo, que esto es cierto para cada ficha de dominó que derriba a la que la sigue. Entonces, usted puede golpearlas y derribarlas todas simplemente empujando la primera y comenzar una reacción en cadena.

La inducción matemática funciona de la misma manera. Si la validez de P_k implica la validez de P_{k+1} y si P_1 es cierta, entonces la reacción en cadena procede como sigue:

P_1 implica P_2

P_2 implica P_3

P_3 implica P_4 y así sucesivamente.

En el siguiente ejemplo podrá ver la demostración de una fórmula muy utilizada en cálculo.

EJEMPLO 3 Uso de inducción matemática

Use inducción matemática para demostrar la fórmula para la suma de los primeros n cuadrados.

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

SOLUCIÓN

1. La fórmula es válida cuando $n = 1$, ya que

$$S_1 = 1^2 = \frac{1(1+1)[2(1)+1]}{6} = \frac{1(2)(3)}{6} = 1.$$

2. Suponiendo que la fórmula es cierta para k

$$S_k = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

usted debe demostrar que también es cierta para $k + 1$,

$$S_{k+1} = \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Para hacer esto, escriba S_{k+1} como la suma de S_k y el término $(k + 1)$-ésimo de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
S_{k+1} &= (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + k^2) + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 && \text{Hipótesis de inducción} \\
&= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} && \text{Combinar fracciones y simplificar.} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} && S_k \text{ implica } S_{k+1}.
\end{aligned}$$

Combinando los resultados de los incisos (1) y (2), puede concluir por inducción matemática que la fórmula es válida para *todos* los n enteros positivos.

Muchas de las demostraciones en álgebra lineal utilizan inducción matemática. He aquí un ejemplo del capítulo 2.

EJEMPLO 4 Uso de inducción matemática en álgebra lineal

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son matrices invertibles, demuestre la generalización del teorema 2.9.

$$(A_1A_2A_3 \cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdots A_3^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1}$$

SOLUCIÓN

1. La fórmula es válida de manera trivial cuando $n = 1$, ya que $A_1^{-1} = A_1^{-1}$.

2. Suponiendo que la fórmula es válida para k, $(A_1A_2A_3 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_3^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1}$, usted debe demostrar que es válida para $k + 1$. Para hacer esto, utilice el teorema 2.9, el cual dice que el inverso del producto de dos matrices invertibles es el producto de sus inversas en orden regresivo.

$$\begin{aligned}
(A_1A_2A_3 \cdots A_kA_{k+1})^{-1} &= [(A_1A_2A_3 \cdots A_k)A_{k+1}]^{-1} \\
&= A_{k+1}^{-1}(A_1A_2A_3 \cdots A_k)^{-1} && \text{Teorema 2.9} \\
&= A_{k+1}^{-1}(A_k^{-1} \cdots A_3^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1}) && \text{Hipótesis de inducción} \\
&= A_{k+1}^{-1}A_k^{-1} \cdots A_3^{-1}A_2^{-1}A_1^{-1} && S_k \text{ implica } S_{k+1}.
\end{aligned}$$

Combinando los resultados de los incisos (1) y (2), puede concluir por inducción matemática que la fórmula es válida para *todos* los n enteros positivos.

DEMOSTRACIÓN POR CONTRADICCIÓN

Una segunda estrategia básica para escribir una demostración es la *demostración por contradicción*. En lógica matemática, la demostración por contradicción es descrita por la equivalencia siguiente.

p implica q si y sólo si q no implica p.

Una manera de demostrar que q es una afirmación válida es suponiendo que q no es cierta. Si esto lo conduce a que la afirmación que usted conoce es falsa, entonces ha demostrado que q es cierta.

El siguiente ejemplo muestra cómo aplicar la demostración por contradicción para probar que $\sqrt{2}$ es irracional.

EJEMPLO 5 Uso de la demostración por contradicción

Demuestre que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

SOLUCIÓN

Comience suponiendo que $\sqrt{2}$ *no* es un número irracional. $\sqrt{2}$ es racional y puede ser escrito como el cociente de dos enteros a y b ($b \neq 0$) que no tienen factor común.

$\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ Suponga que $\sqrt{2}$ es un número racional.

$2b^2 = a^2$ Multiplique cada lado y multiplicar por b^2.

Esto implica que 2 es un factor de a^2. Así, 2 también es un factor de a. Sea $a = 2c$.

$2b^2 = (2c)^2$ Sustituya $2c$ por a

$b^2 = 2c^2$ Simplifique y divida cada lado entre 2.

Esto implica que 2 es factor de b^2 y también lo es de b. Por tanto, 2 es un factor de a y b. Pero esto es imposible porque a y b no tienen factor común. Esto hace imposible que $\sqrt{2}$ sea un número racional. Usted puede concluir que $\sqrt{2}$ debe ser un número irracional.

EJEMPLO 6 Uso de la demostración por contradicción

COMENTARIO

La demostración por contradicción no es una técnica nueva. Euclides elaboró la prueba del Ejemplo 6 alrededor del 300 a.C.

Un entero positivo mayor que 1 es un número *primo* sólo si sus factores positivos son 1 y él mismo. Demuestre que existe un número infinito de números primos.

SOLUCIÓN

Suponga que existe sólo un número finito de números primos, $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Considere el número $N = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$. Este número es primo o compuesto. Si es compuesto, entonces puede ser factorizado como el producto de números primos. Pero ninguno de estos $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ divide en pares al número N. N es por sí mismo un número primo y usted debe hallar un nuevo número primo lo cual contradice la suposición de que existen sólo n números primos.

Existe un número infinito de números primos.

Usted puede utilizar la demostración por contradicción para probar un gran número de problemas en álgebra lineal.

EJEMPLO 7 Uso de la demostración por contradicción en álgebra lineal

Sean A y B matrices de $n \times n$ tales que AB es singular. Demuestre si A o B es singular.

SOLUCIÓN

Suponga que ninguna, A o B, es singular. Como usted sabe que una matriz es singular si y sólo si su determinante es cero, $\det(A)$ y $\det(B)$ son números reales diferentes de cero. Por el teorema 3.5, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Por tanto, $\det(AB)$ es diferente de cero al ser el producto de dos números reales diferentes de cero. Esto contradice la afirmación de que AB es una matriz singular. Por ello, puede concluir que la suposición está equivocada y que A o B debe ser singular.

USO DE CONTRAEJEMPLOS

En ocasiones, usted puede refutar una afirmación empleando un *contraejemplo*. En este caso, cuando Euler refutó la conjetura de Fermat acerca de los números primos de la forma $F_n = 2^{2^n} + 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, utilizó el contraejemplo $F_5 = 4\,294\,9672\,97$, el cual no es un número primo.

EJEMPLO 8 Uso de un contraejemplo

Use un contraejemplo para demostrar que la afirmación es falsa.

Todo número impar es número primo.

SOLUCIÓN

Ciertamente, usted puede hacer una lista con muchos números impares que son números primos (3, 5, 7, 11), pero la afirmación que aparece líneas arriba no es válida, puesto que 9 es non, pero no es un número primo. El número 9 es un contraejemplo.

Los contraejemplos se pueden emplear para rebatir afirmaciones en álgebra lineal, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 9 Uso de un contraejemplo en álgebra lineal

Utilice un contraejemplo para demostrar que la afirmación es falsa.

Si A y B son matrices singulares cuadradas de orden n, entonces $A + B$ es una matriz singular de orden n.

SOLUCIÓN

Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. A y B son singulares de orden 2, pero

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es la matriz identidad de orden 2, la cual no es singular.

EJEMPLO 10 Usar un contraejemplo en álgebra lineal

Use un contraejemplo para demostrar que la afirmación es falsa.

El conjunto de todas las matrices de 2×2 de la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

con las operaciones estándar es un espacio vectorial.

COMENTARIO

Recuerde que a fin de que un conjunto sea un espacio vectorial, debe satisfacer *cada uno* de los diez axiomas en la definición de un espacio vectorial (véase la Sección 4.2).

SOLUCIÓN

Para demostrar que el conjunto de matrices de la forma dada no es un espacio vectorial, sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

Tanto A como B están en la forma dada, pero la suma de estas matrices,

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 9 & 11 \end{bmatrix}$$

no lo está. Esto significa que el conjunto no tiene cierre bajo adición, por lo que no satisface el primer axioma en la definición.

Ejercicios

Consulte www.CalcChat.com para las soluciones de los ejercicios nones.

Uso de la inducción matemática En los ejercicios 1 a 4, utilice inducción matemática para demostrar que la fórmula es válida para todos los enteros positivos n.

1. $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

2. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

3. $3 + 7 + 11 + \cdots + (4n - 1) = n(2n + 1)$

4. $\left(1 + \dfrac{1}{1}\right)\left(1 + \dfrac{1}{2}\right)\left(1 + \dfrac{1}{3}\right) \cdots \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = n + 1$

Proponer una fórmula y usar la inducción matemática En los ejercicios 5 y 6, proponga una fórmula para la suma de los n primeros términos de la sucesión. Luego utilice inducción matemática para demostrar que la fórmula es válida.

5. $2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ \ldots$

6. $\dfrac{1}{1 \cdot 2},\ \dfrac{1}{2 \cdot 3},\ \dfrac{1}{3 \cdot 4},\ \ldots$

Uso de la inducción matemática con desigualdades En los ejercicios 7 y 8, use inducción matemática para demostrar la desigualdad para los valores enteros indicados de n.

7. $n! > 2^n, \quad n \geq 4$

8. $\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}, \quad n \geq 2$

9. Uso de la inducción matemática Use la inducción matemática para demostrar que para todos los enteros $n > 0$.

$$a^0 + a^1 + a^2 + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}, \quad a \neq 1.$$

10. Uso de la inducción matemática en álgebra lineal (Del capítulo 2) Utilice inducción matemática para demostrar que $(A_1A_2A_3 \cdots A_n)^T = A_n^T \cdots A_1^TA_2^TA_3^T$, suponiendo que $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ son matrices de tamaño tal que las multiplicaciones están definidas.

11. Uso de la inducción matemática en álgebra lineal (Del capítulo 3) Utilice inducción matemática para demostrar que $|A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n|\ |A_1|\ |A_2| = |A_3| \cdots |A_n|$, donde $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ son matrices cuadradas del mismo tamaño.

12. Uso de la inducción matemática en álgebra lineal (Del Capítulo 6) Use la inducción matemática para demostrar que, si las matrices estándar de las transformaciones lineales $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_n$ son $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ respectivamente, entonces la matriz estándar para la composición

$$T(\mathbf{v}) = T_n(T_{n-1} \cdots (T_3(T_2(T_1(\mathbf{v})))) \cdots)$$

está representada por

$$A = A_nA_{n-1} \cdots A_3A_2A_1.$$

Utilizar la demostración por contradicción En los ejercicios 13 a 19, use la demostración por contradicción para probar la afirmación.

13. Si p es un entero y p^2 es impar, entonces p es impar. (*Sugerencia*: un número impar puede escribirse como $2n + 1$, donde n es un entero.)

14. Si a y b son números reales y $a \leq b$, entonces $a + c \leq b + c$.

15. Si a, b y c son números reales tales que $ac \geq bc$ y $c > 0$, entonces $a \geq b$.

16. Si a y b son números reales y $1 < a < b$, entonces $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.

17. Si a y b son números reales y $(a + b)^2 = a^2 + b^2$, entonces $a = 0$ o $b = 0$ o $a = b = 0$.

18. Si a es un número real y $0 < a < 1$, entonces $a^2 < a$.

19. Use la demostración por contradicción para probar que la suma de un número racional y uno irracional es irracional.

20. Utilizar la demostración por contradicción en álgebra lineal (Del Capítulo 3) Use la demostración por contradicción para demostrar que, si A y B son matrices cuadradas de orden n tales que $\det(AB) = 1$, entonces tanto A como B son no singulares.

21. Utilizar la demostración por contradicción en álgebra lineal (Del capítulo 4) Use la demostración por contradicción para probar que en un espacio vectorial dado, el vector nulo es único.

22. Utilizar la demostración por contradicción en álgebra lineal (Del capítulo 4) Sea $S = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ un conjunto linealmente independiente. Use la demostración por contradicción para probar que el conjunto $\{\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}\}$ es linealmente independiente.

Utilizar un contraejemplo En los ejercicios 23 a 30, use un contraejemplo para demostrar que la afirmación es falsa.

23. Si a y b son números reales y $a < b$, entonces $a^2 < b^2$.

24. El producto de dos números irracionales es irracional.

25. Si a y b son números reales tales que $a \neq 0$ y $b \neq 0$, entonces $(a + b)^3 = a^3 + b^3$.

26. Si f es una función polinomial y $f(a) = f(b)$, entonces $a = b$.

27. Si f y g son funciones derivables y $y = f(x)g(x)$, entonces $y' = f'(x)g'(x)$.

28. (Del capítulo 2) Si A, B y C son matrices y $AC = BC$, entonces $A = B$.

29. (Del capítulo 3) Si A es una matriz, entonces $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

30. (Del Capítulo 4) El conjunto de todas las matrices de 3×3 de la forma $\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ c & 2 & d \\ e & f & 0 \end{bmatrix}$ con las operaciones estándar es un espacio vectorial.

Respuestas a los ejercicios impares seleccionados

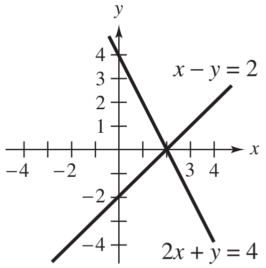
Capítulo 1

Sección 1.1 *(página 10)*

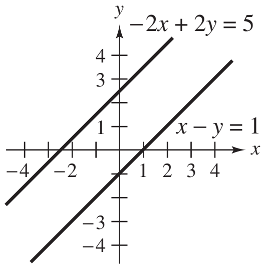
1. Lineal **3.** No lineal **5.** No lineal

7. $x = 2t$
$y = t$

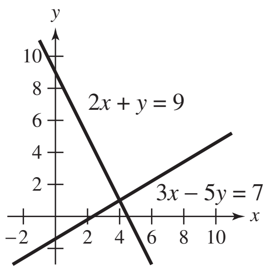
9. $x = 1 - s - t$
$y = s$
$z = t$

11.


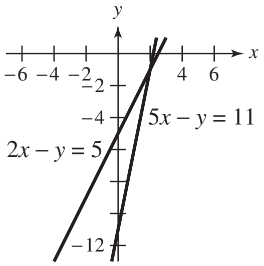
$x = 2$
$y = 0$

13.


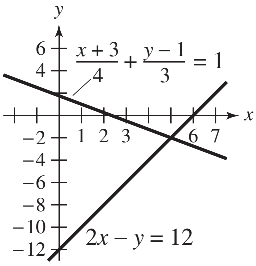
No es solución

15.


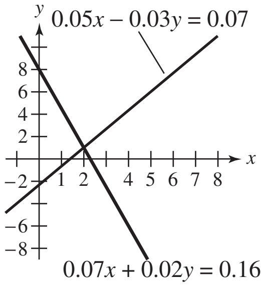
$x = 4$
$y = 1$

17.


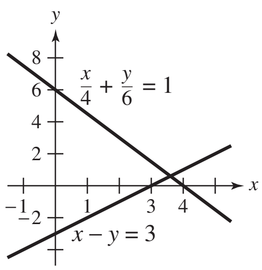
$x = 2$
$y = -1$

19.


$x = 5$
$y = -2$

21.


$x = 2$
$y = 1$

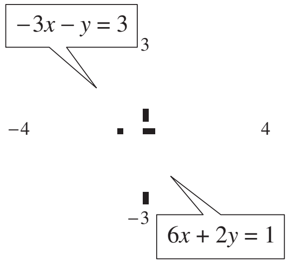
23.


$x = \frac{18}{5}$
$y = \frac{3}{5}$

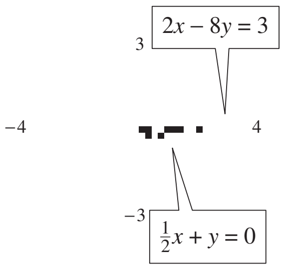
25. $x_1 = 5$
$x_2 = 3$

27. $x = \frac{3}{2}$
$y = \frac{3}{2}$
$z = 0$

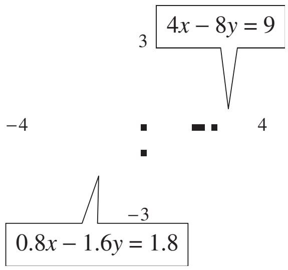
29. $x_1 = -t$
$x_2 = 2t$
$x_3 = t$

31. (a)


(b) Inconsistente

33. (a)


(b) Consistente
(c) $x = \frac{1}{2}$
$y = -\frac{1}{4}$
(d) $x = \frac{1}{2}$
$y = -\frac{1}{4}$
(e) Las soluciones son las mismas.

35. (a)


(b) Consistente
(c) Hay un número infinito de soluciones.
(d) $x = \frac{9}{4} + 2t$
$y = t$
(e) Las soluciones son consistentes.

37. $x_1 = -1$
$x_2 = -1$

39. $u = 40$
$v = 40$

41. $x = -\frac{1}{3}$
$y = -\frac{2}{3}$

43. $x = 14$
$y = -2$

45. $x_1 = 8$
$x_2 = 7$

47. $x = 1$
$y = 2$
$z = 3$

49. No es solución

51. $x_1 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}t$
$x_2 = 4t - 1$
$x_3 = t$

53. No es solución

55. $x = 1$
$y = 0$
$z = 3$
$w = 2$

57. $x_1 = -15$
$x_2 = 40$
$x_3 = 45$
$x_4 = -75$

59. $x_1 = \frac{1}{5}$
$x_2 = -\frac{4}{5}$
$x_3 = \frac{1}{2}$

61. Este sistema debe tener al menos una solución, ya que $x = y = z = 0$ es una solución obvia.
Solución: $x = 0$
$y = 0$
$z = 0$
El sistema tiene exactamente una solución.

63. Este sistema debe tener al menos una solución, ya que $x = y = z = 0$ es una solución obvia.
Solución: $x = -\frac{3}{5}t$
$y = \frac{4}{5}t$
$z = t$
Este sistema tiene un número infinito de soluciones.

65. Jugo de manzana: 95.5 mg
Jugo de naranja: 81.9 mg

67. (a) Verdadero. Usted puede describir todo el conjunto solución usando una representación paramétrica.
$ax + by = c$
Seleccionando $y = t$ como la variable libre, la solución es
$x = \frac{c}{a} - \frac{b}{a}t$, $y = t$ donde t es cualquier número real.
(b) Falso. Por ejemplo, considere el sistema
$x_1 + x_2 + x_3 = 1$
$x_1 + x_2 + x_3 = 2$
el cual es un sistema inconsistente.
(c) Falso. Un sistema consistente puede tener sólo una solución.

69. $3x_1 - x_2 = 4$
$-3x_1 + x_2 = -4$
(La respuesta no es única.)

71. $x = 3$
$y = -4$

73. $x = \dfrac{2}{5 - t}$
$y = \dfrac{1}{4t - 1}$
$z = \dfrac{1}{t}$, donde $t \neq 5, \frac{1}{4}, 0$

75. $x = \cos\theta$
$y = \operatorname{sen}\theta$

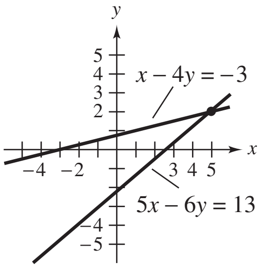
77. $k = -2$

79. Toda $k \neq \pm 1$ **81.** $k = \frac{8}{3}$ **83.** $k = 1, -2$

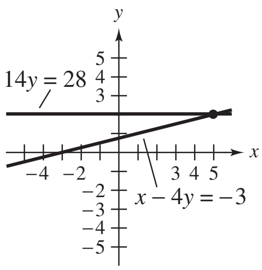
85. (a) Tres rectas se intersectan en un punto
(b) Tres rectas coincidentes
(c) Tres rectas que no tienen punto común

87. Las respuestas pueden variar. (*Sugerencia*: seleccione tres valores de x y resuelva el sistema de ecuaciones lineales resultante para las variables a, b y c.)

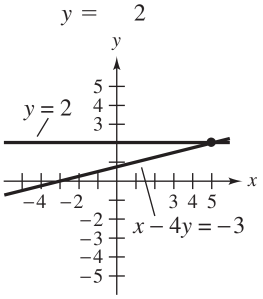
89.
$x - 4y = -3$
$5x - 6y = 13$



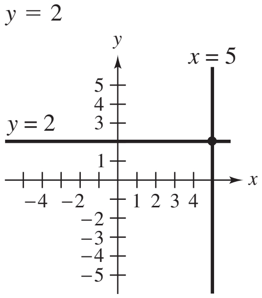
$x - 4y = -3$
$14y = 28$



$x - 4y = -3$
$y = 2$



$x = 5$
$y = 2$



Todos los puntos de intersección son los mismos.

91. $x = 39\,600$
$y = 398$
Las gráficas son erróneas porque, mientras aparecen paralelas cuando las ecuaciones se resuelven para y, tienen pendientes ligeramente diferentes.

Sección 1.2 *(página 22)*

1. 3×3 **3.** 2×4 **5.** 4×5

7. Sume 5 veces el segundo renglón al primer renglón.

9. Sume 4 veces el segundo renglón al tercer renglón. Intercambie el primer y el segundo renglón.

11. $x_1 = 0$
$x_2 = 2$

13. $x_1 = 2$
$x_2 = -1$
$x_3 = -1$

15. $x_1 = 1$
$x_2 = 1$
$x_3 = 0$

17. $x_1 = -26$
$x_2 = 13$
$x_3 = -7$
$x_4 = 4$

19. Reducida a la forma escalonada por renglones.

21. No en la forma escalonada por renglones.

23. No en la forma escalonada por renglones.

25. $x = 3$
$y = 2$

27. No tiene solución

29. $x = 4$
$y = -2$

31. $x_1 = 4$
$x_2 = -3$
$x_3 = 2$

33. No tiene solución

35. $x = 100 + 96t - 3s$
$y = s$
$z = 54 + 52t$
$w = t$

37. $x = 0$
$y = 2 - 4$
$z = t$

39. $x_1 = 2$
$x_2 = -2$
$x_3 = 3$
$x_4 = -5$
$x_5 = 1$

41. $x_1 = 0$
$x_2 = -t$
$x_3 = t$

43. $x_1 = -t$
$x_2 = s$
$x_3 = 0$
$x_4 = t$

45. \$100,000 a 9%
\$250,000 a 10%
\$150,000 a 12%

47. Aumentada
(a) Dos ecuaciones con dos variables
(b) Todos los reales $k \neq -\frac{4}{3}$
Coeficiente
(a) Dos ecuaciones con tres variables
(b) Todos los reales k

49. (a) $a + b + c = 0$
(b) $a + b + c \neq 0$
(c) No es posible

51. (a) $x = \frac{8}{3} - \frac{5}{6}t$
$y = -\frac{8}{3} + \frac{5}{6}t$
$z = t$
(b) $x = \frac{18}{7} - \frac{11}{14}t$
$y = -\frac{20}{7} + \frac{13}{14}t$
$z = t$
(c) $x = 3 - t$
$y = -3 + t$
$z = t$
(d) Cada sistema tiene un número infinito de soluciones.

53. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

55. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

57. (a) Verdadero. En la notación $m \times n$, m es el número de renglones de la matriz. Así, una matriz de 6×3 tiene seis renglones.
(b) Verdadero. Al inicio de la página 16, el enunciado dice "Esto demuestra que toda matriz es equivalente a una matriz en la forma escalonada por renglones".
(c) Falso. Considere la forma escalonada por renglones

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

la cual genera la solución $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ y $x_4 = 3$.
(d) Verdadero. El teorema 1.1 establece que si un sistema homogéneo tiene menos ecuaciones que variables, entonces tiene un número infinito de soluciones.

59. Sí, es posible:
$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

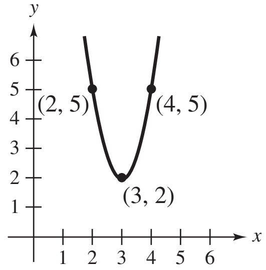
61. $ad - bc \neq 0$ **63.** $\lambda = 1, 3$

65. Los renglones tienen que ser intercambiados. La primera operación elemental con renglones es redundante, así que sólo debe usar la segunda y tercera operaciones elementales por renglón.

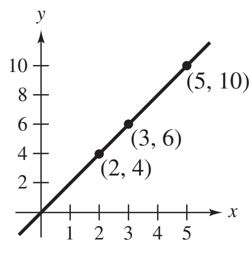
67. (a) Una matriz inconsistente en la forma escalonada por renglones puede tener un reglón que conste sólo de ceros excepto el último.
(b) Una matriz para un sistema con soluciones infinitas tendría un renglón únicamente de ceros o más de una columna sin ningún 1 principal.

Sección 1.3 *(página 32)*

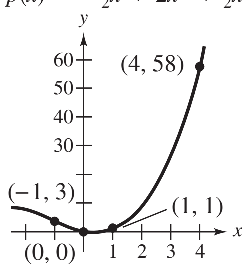
1. (a) $p(x) = 29 - 18x + 3x^2$
(b)



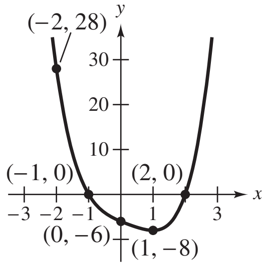
3. (a) $p(x) = 2x$
(b)



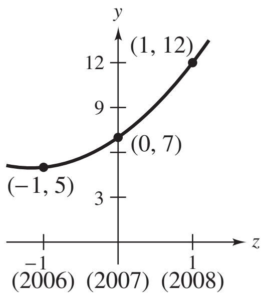
5. (a) $p(x) = -\frac{3}{2}x + 2x^2 + \frac{1}{2}x^3$
(b)



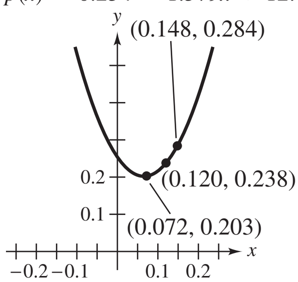
7. (a) $p(x) = -6 - 3x + x^2 - x^3 + x^4$
(b)



9. (a) Sea $z = x - 2007$.
$p(z) = 7 + \frac{7}{2}z + \frac{3}{2}z^2$
$p(x) = 7 + \frac{7}{2}(x - 2007) + \frac{3}{2}(x - 2007)^2$
(b)



11. (a) $p(x) = 0.254 - 1.579x + 12.022x^2$
(b)



13. $p(x) = -\dfrac{4}{\pi^2}x^2 + \dfrac{4}{\pi}x$

sen $\dfrac{\pi}{3} \approx \dfrac{8}{9} \approx 0.889$

(El valor real es $\sqrt{3}/2 \approx 0.866$.)

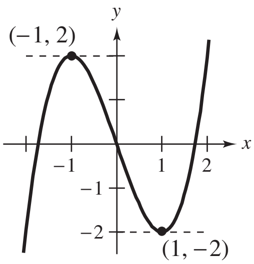
15. $(x - 5) + (y - 10)^2 = 65$

17. $281 + 3(x - 2000) - 0.02(x - 2000)2$; 2020: 333 millones; 2030: 353 millones

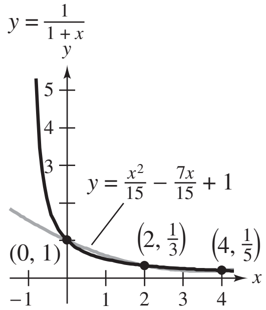
19. (a) Usando $z = x - 2000$,
$$a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = 10{,}526$$
$$a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 = 11{,}330$$
$$a_0 + 5a_1 + 25a_2 + 125a_3 = 12{,}715$$
$$a_0 + 6a_1 + 36a_2 + 216a_3 = 12{,}599$$
(b) $32{,}420 - 17{,}538.5(x - 2000) + 4454.5(x - 2000)^2 - 347(x - 2000)^3$
No. Resuelva el sistema. Respuesta de muestra: El modelo predice que las ganancias caerán durante los próximos años y serán negativas en 2008.

21. Las respuestas varían:
$$p(-1) = a_0 - a_1 + a_2 = 0$$
$$p(0) = a_0 = 0$$
$$p(1) = a_0 + a_1 + a_2 = 0$$
$$a_0 = a_1 = a_2 = 0$$

23. $p(x) = -3x + x^3$



25. (a) $p(x) = 1 - \frac{7}{15}x + \frac{1}{15}x^2$
(b) $p(x) = 1 + x$



27. (a) $x_1 = s$, $x_2 = t$, $x_3 = 600 - s$, $x_4 = s - t$, $x_5 = 500 - t$, $x_6 = s$, $x_7 = t$
(b) $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 600$, $x_4 = 0$, $x_5 = 500$, $x_6 = 0$, $x_7 = 0$
(c) $x_1 = 0$, $x_2 = -500$, $x_3 = 600$, $x_4 = 500$, $x_5 = 1000$, $x_6 = 0$, $x_7 = -500$

29. (a) $x_1 = 100 + t$, $x_2 = -100 + t$, $x_3 = 200 + t$, $x_4 = t$
(b) $x_1 = 100$, $x_2 = -100$, $x_3 = 200$, $x_4 = 0$
(c) $x_1 = 200$, $x_2 = 0$, $x_3 = 300$, $x_4 = 100$

31. $I_1 = 0$
$I_2 = 1$
$I_3 = 1$

33. (a) $I_1 = 1$, $I_2 = 2$, $I_3 = 1$
(b) $I_1 = 0$, $I_2 = 1$, $I_3 = 1$

35. $T_1 = 37.5°$, $T_2 = 45°$, $T_3 = 25°$, $T_4 = 32.5°$

37. $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{3}{x+1} - \dfrac{2}{(x+1)^2}$

39. $x = 2$
$y = 2$
$\lambda = -4$

Ejercicios de repaso *(página 35)*

1. No lineal **3.** Lineal **5.** No lineal

7. $x = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}s - \frac{3}{2}t$
$y = s$
$z = t$

9. $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{2}$ **11.** $x = -12$, $y = -8$ **13.** $x = 0$, $y = 0$

15. No tiene solución

17. $x = 0$, $y = 0$ **19.** $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{4}{5}$ **21.** 2×3

23. $x_1 = -2t$
$x_2 = t$
$x_3 = 0$

25. Forma escalonada por renglones (no reducida).

27. No en la forma escalonada por renglones.

29. $x = 2$, $y = -3$, $z = 3$ **31.** $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{3}$, $z = 1$ **33.** $x = 4 + 3t$, $y = 5 + 2t$, $z = t$

35. No tiene solución **37.** $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = -3$, $x_4 = -2$ **39.** $x = 0$, $y = 2 - 4t$, $z = t$

41. $x = 1$, $y = 0$, $z = 4$, $w = -2$ **43.** $x_1 = 2t$, $x_2 = -3t$, $x_3 = t$ **45.** $x_1 = -4t$, $x_2 = -\frac{1}{2}t$, $x_3 = t$

47. $k = \pm 1$

49. (a) $b = 2a$ y $a \neq -3$
(b) $b \neq 2a$
(c) $a = -3$ y $b = -6$

51. Utilice un método de eliminación para obtener ambas matrices en la forma escalonada reducida. Las dos matrices son equivalentes por renglones, ya que cada renglón es equivalente por renglones a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

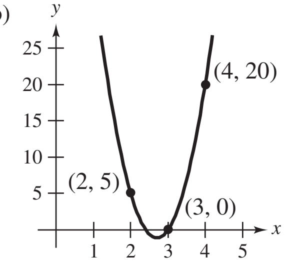
53. $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & \cdots & 2-n \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

55. (a) Falso. Vea la página 3, ejemplo 2.
(b) Verdadero. Vea la página 5, ejemplo 4(b).

57. 6 anotaciones, 6 patadas de punto extra, 1 gol de campo

59.
$$\begin{aligned} A + B \phantom{{}+C} &= 8 \\ -2A \phantom{{}+B} + C &= 0 \\ A - B + C &= 0 \end{aligned}$$
$A = 2$, $B = 6$, $C = 4$

61. (a) $p(x) = 90 - \frac{135}{2}x + \frac{25}{2}x^2$
(b)



63. $p(x) = 50 + \frac{15}{2}x + \frac{5}{2}x^2$
(El primer año está representado por $x = 0$.)
Ventas en el cuarto año: $p(3) = 95$

65. (a)
$$\begin{aligned} a_0 \phantom{{}+4a_1+16a_2} &= 80 \\ a_0 + 4a_1 + 16a_2 &= 68 \\ a_0 + 80a_1 + 6400a_2 &= 30 \end{aligned}$$

(b) y (c) $a_0 = 80$
$a_1 = -\frac{25}{8}$
$a_2 = \frac{1}{32}$
por tanto, $y = \frac{1}{32}x^2 - \frac{25}{8}x + 80.$

(d) Los resultados para (b) y (c) son los mismos.

(e) Hay precisamente una función polinomial de grado $n - 1$ (o menor) que ajusta n diferentes puntos.

67. $I_1 = \frac{5}{13}$
$I_2 = \frac{6}{13}$
$I_3 = \frac{1}{13}$

Capítulo 2

Sección 2.1 *(página 48)*

1. $x = -4, y = 22$

3. $x = 2, y = 3$

5. (a) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 5 & -10 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{15}{2} \end{bmatrix}$

7. (a) $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 9 \\ -2 & 15 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 3 & -1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 12 & -2 \\ 4 & 8 \\ -6 & 10 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 11 & -6 \\ 5 & 3 \\ -7 & 0 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 4 & \frac{7}{2} \\ 0 & 7 \\ -\frac{1}{2} & \frac{25}{2} \end{bmatrix}$

9. (a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 7 & 8 & 7 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 4 & 8 & 10 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 6 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & 8 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 3 & \frac{1}{2} \\ 6 & 6 & \frac{9}{2} \\ 2 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$

11. (a), (b), (d), y (e) No es posible

(c) $\begin{bmatrix} 12 & 0 & 6 \\ -2 & -8 & 0 \end{bmatrix}$

13. (a) $c_{21} = -6$ (b) $c_{13} = 29$

15. $x = 3,\ y = 2,\ z = 1$

17. (a) $\begin{bmatrix} 0 & 15 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 31 & 14 \end{bmatrix}$

19. (a) $\begin{bmatrix} -8 & -2 & -5 \\ 4 & 8 & 17 \\ -20 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 9 & 5 & 4 \\ 3 & 11 & -5 \\ -17 & -1 & -16 \end{bmatrix}$

21. (a) No es posible (b) $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 10 & 16 \\ 26 & 46 \end{bmatrix}$

23. (a) $[12]$ (b) $\begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

25. (a) $\begin{bmatrix} -1 & 19 \\ 4 & -27 \\ 0 & 14 \end{bmatrix}$ (b) No es posible

27. (a) $\begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 26 \end{bmatrix}$ (b) No es posible

29. (a) $\begin{bmatrix} 60 & 72 \\ -20 & -24 \\ 10 & 12 \\ 60 & 72 \end{bmatrix}$ (b) No es posible

31. 3×4 **33.** 4×2 **35.** 3×2

37. No definida, los tamaños no coinciden.

39. $x_1 = t, x_2 = \frac{5}{4}t, x_3 = \frac{3}{4}t$

41. $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$

43. $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -36 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 6 \end{bmatrix}$

45. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & -5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -6 \\ 17 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

47. $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ 8 \\ -16 \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

49. $\mathbf{b} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix}$

(La respuesta no es única.)

51. $\mathbf{b} = 1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

53. $\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ **55.** $a = 7, b = -4, c = -\frac{1}{2}, d = \frac{7}{2}$

57. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

59. $AB = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$

$BA = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$

61. Prueba **63.** 2 **65.** 4 **67.** Prueba

69. $w = z, x = -y$

71. Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$.

entonces la ecuación matricial se expande a

$\begin{bmatrix} a_{11} + a_{21} & a_{12} + a_{22} \\ a_{11} + a_{21} & a_{12} + a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Como $a_{11} + a_{21} = 1$ y $a_{11} + a_{21} = 0$ ambas no pueden ser verdaderas, entonces puede concluir que no hay solución.

73. (a) $A^2 = \begin{bmatrix} i^2 & 0 \\ 0 & i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$A^3 = \begin{bmatrix} i^3 & 0 \\ 0 & i^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$

$A^4 = \begin{bmatrix} i^4 & 0 \\ 0 & i^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $B^2 = \begin{bmatrix} -i^2 & 0 \\ 0 & -i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$

75. Prueba **77.** Prueba

79. [\$1037.50 \$1400.00 \$1012.50]

Cada elemento representa la ganancia total de cada punto de venta.

81. $\begin{bmatrix} 0.40 & 0.15 & 0.15 \\ 0.28 & 0.53 & 0.17 \\ 0.32 & 0.32 & 0.68 \end{bmatrix}$

P^2 da las proporciones de la población votante que cambió de partido o se mantuvo leal a su partido desde la primera elección hasta la tercera.

83. $\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$

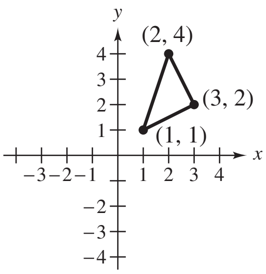
85. (a) Verdadero. En la página 43 ". . . para que el producto de dos matrices esté definido, el número de columnas de la primera matriz debe ser igual al número de renglones de la segunda".

(b) Verdadero. En la página 46 ". . . el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente si y sólo si $\mathbf{b}$ puede ser expresada como . . . una combinación lineal, donde los coeficientes de la combinación son una solución del sistema".

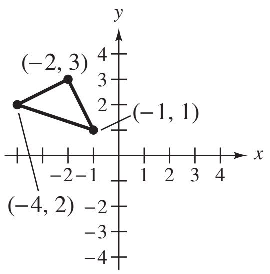
87. (a) $AT = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

$AAT = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -1 & -4 & -2 \end{bmatrix}$

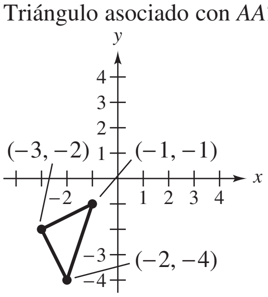
Triángulo asociado con T



Triángulo asociado con AT



Triángulo asociado con AAT



La matriz de transformación A rota el triángulo 90° en sentido contrario a las manecillas del reloj en torno al origen.

(b) Dado el triángulo asociado con AAT, la transformación que produciría el triángulo asociado con AT sería una rotación de 90° en sentido de las manecillas del reloj en torno al origen. Otra rotación tal produciría el triángulo asociado con T.

Sección 2.2 *(página 59)*

1. $\begin{bmatrix} -8 & -7 \\ 15 & -1 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} -24 & -4 & 12 \\ -12 & 32 & 12 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} 10 & 8 \\ -59 & 9 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 13 & 4 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 0 & -12 \\ 12 & -24 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 28 & 14 \end{bmatrix}$

13. (a) $\begin{bmatrix} 3 & \frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{11}{3} \\ \frac{10}{3} & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -\frac{13}{3} & -\frac{10}{3} \\ 4 & -5 \\ -\frac{26}{3} & -\frac{16}{3} \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -14 & -4 \\ 7 & -17 \\ -17 & -2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -\frac{13}{6} & 1 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{17}{6} \\ 0 & \frac{10}{3} \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} -3 & -5 & -10 \\ -2 & -5 & -5 \end{bmatrix}$ **17.** $\begin{bmatrix} 1 & 6 & -1 \\ -2 & -2 & -8 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 12 & -4 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$ **21.** (a) $\begin{bmatrix} 12 & 7 \\ 24 & 15 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 12 & 7 \\ 24 & 15 \end{bmatrix}$

23. $AB = \begin{bmatrix} -9 & 2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} -8 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

25. $AC = BC = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ **27.** Prueba

29. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ **31.** $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **33.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

35. $(A + B)(A - B) = A^2 + BA - AB - B^2$, la que no necesariamente es igual a $A^2 - B^2$, ya que AB puede no ser igual a BA.

37. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ **39.** $(AB)^T = B^TA^T = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

41. $(AB)^T = B^TA^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 10 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

43. (a) $\begin{bmatrix} 16 & 8 & 4 \\ 8 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 21 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

45. (a) $\begin{bmatrix} 68 & 26 & -10 & 6 \\ 26 & 41 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & 43 & 5 \\ 6 & -1 & 5 & 10 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 29 & -14 & 5 & -5 \\ -14 & 81 & -3 & 2 \\ 5 & -3 & 39 & -13 \\ -5 & 2 & -13 & 13 \end{bmatrix}$

47. (a) Verdadero. Vea el teorema 2.1, parte 1.
(b) Verdadero. Vea el teorema 2.3, parte 1.
(c) Falso. Vea el teorema 2.6, parte 4, o el ejemplo 9.
(d) Verdadero. Vea el ejemplo 10.

49. (a) $a = 3$ y $b = -1$

(b) $\begin{aligned} a + b &= 1 \\ b &= 1 \\ a \quad &= 1 \end{aligned}$

No tiene solución

(c) $\begin{aligned} a + b + c &= 0 \\ b + c &= 0 \\ a \quad + c &= 0 \end{aligned}$

$a = -c \rightarrow b = 0 \rightarrow c = 0 \rightarrow a = 0$

(d) $a = -3t$

$b = t$

$c = t$

Sea $t = 1$: $a = -3, b = 1, c = 1$

51. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **53.** $\begin{bmatrix} \pm 3 & 0 \\ 0 & \pm 2 \end{bmatrix}$ **55.** $\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$

57–65. Prueba **67.** Cuasisimétrica

69. Simétrica **71.** Prueba

73. (a) $\frac{1}{2}(A + A^T)$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2a_{11} & a_{12} + a_{21} & \cdots & a_{1n} + a_{n1} \\ a_{21} + a_{12} & 2a_{22} & \cdots & a_{2n} + a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + a_{1n} & a_{n2} + a_{2n} & \cdots & 2a_{nn} \end{bmatrix}$$

(b) $\frac{1}{2}(A - A^T)$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & a_{12} - a_{21} & \cdots & a_{1n} - a_{n1} \\ a_{21} - a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} - a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} - a_{1n} & a_{n2} - a_{2n} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

(c) Prueba

(d) $A = \frac{1}{2}(A - A^T) + \frac{1}{2}(A + A^T)$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 4 & -\frac{1}{2} \\ -4 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Cuasisimétrica}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{7}{2} \\ 1 & 6 & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Simétrica}}$$

75. Respuestas de muestra:

(a) Un ejemplo de una matriz de 2 × 2 de la forma dada es $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Un ejemplo de una matriz de 4 × 4 de la forma dada es $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $A_2^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$A_3^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $A_3^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) La conjetura de que si A es una matriz de 4 × 4 de la forma dada, entonces A^4 es la matriz cero de 4 × 4. Una aplicación gráfica muestra que esto es cierto.

(d) Si A es una matriz de $n \times n$ de la forma dada, entonces A^n es la matriz cero de $n \times n$.

Sección 2.3 *(página 71)*

1. $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = BA$ **3.** $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = BA$

5. $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = BA$ **7.** $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} -19 & -33 \\ -4 & -7 \end{bmatrix}$ **13.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

15. Singular **17.** $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{9}{2} & -\frac{7}{2} & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **19.** $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 3.75 & 0 & -1.25 \\ 3.458\overline{3} & -1 & -1.375 \\ 4.1\overline{6} & 0 & -2.5 \end{bmatrix}$ **23.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{7}{20} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

25. Singular **27.** $\begin{bmatrix} -24 & 7 & 1 & -2 \\ -10 & 3 & 0 & -1 \\ -29 & 7 & 3 & -2 \\ 12 & -3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ **29.** Singular

31. $\begin{bmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{3}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \end{bmatrix}$ **33.** No existe **35.** $\begin{bmatrix} \frac{16}{59} & \frac{15}{59} \\ -\frac{4}{59} & \frac{70}{59} \end{bmatrix}$

37. $\begin{bmatrix} \frac{11}{4} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ **39.** $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{bmatrix}$

41. (a) $\begin{bmatrix} 35 & 17 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ -\frac{7}{2} & 3 \end{bmatrix}$

43. (a) $\frac{1}{16}\begin{bmatrix} 138 & 56 & -84 \\ 37 & 26 & -71 \\ 24 & 34 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 6 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \\ 3 & -8 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 6 & 2 & -8 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

45. (a) $x = 1$, $y = -1$ (b) $x = 2$, $y = 4$

47. (a) $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$ (b) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$

49. $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = -1$, $x_5 = 0$

51. $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, $x_6 = -2$

53. $x = 4$ **55.** $x = 6$

57. $\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$ **59.** Prueba; $A^{-1} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$

61. $F^{-1} = \begin{bmatrix} 188.24 & -117.65 & -11.76 \\ -117.65 & 323.53 & -117.65 \\ -11.76 & -117.65 & 188.24 \end{bmatrix}$; $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 25 \\ 40 \\ 75 \end{bmatrix}$

63. (a) Verdadero, vea el teorema 2.10, parte 1.

(b) Falso, vea el teorema 2.9.

(c) Verdadero, vea "hallar la inversa de una matriz por eliminación de Gauss-Jordan", parte 2, página 64

65–71. Prueba

73. La suma de dos matrices invertibles no necesariamente es invertible. Por ejemplo, sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

75. (a) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

77. (a) Prueba (b) $H = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

79. $A = PDP^{-1}$

No, A no es necesariamente igual a D.

81. Las respuestas varían. Respuesta de muestra: Para una matriz A de $n \times n$, construya la matriz $[A \quad I]$ y redúzcala por renglones hasta tener $[I \quad A^{-1}]$. Si esto no es posible o si A no es cuadrada, entonces A no tiene inversa. Si es posible, entonces la inversa es A^{-1}.

83. Las respuestas varían. Respuesta de muestra: Para el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

escriba como la ecuación matricial

$$AX = B$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Si A es invertible, entonces la solución es $X = A^{-1}B$.

Sección 2.4 *(página 82)*

1. Elemental, multiplique el segundo renglón por 2.
3. Elemental, sume dos veces el primer renglón al segundo.
5. No es elemental.
7. Elemental, sume – 5 veces el segundo renglón al tercero.

9. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 5 & 10 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & -4 \\ -6 & 12 & 8 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **19.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} \frac{1}{k} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, k \neq 0$

23. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ **25.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

(La respuesta no es única.)

29. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(La respuesta no es única.)

31. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(La respuesta no es única.)

33. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(La respuesta no es única.)

35. (a) Verdadero. Vea el "comentario" después de la "Definición de matriz elemental", página 74.
(b) Falso. La multiplicación de una matriz por un escalar no es una simple operación elemental con renglones, así que no puede representarse por una matriz elemental correspondiente.
(c) Verdadero. Vea el teorema 2.13.

37. No. Por ejemplo, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

39. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 \\ -b & ab+1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix}$

41. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(La respuesta no es única.)

43. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(La respuesta no es única.)

45. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(La respuesta no es única.)

(b) $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ (c) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$

47. Primero, factorice la matriz $A = LU$. Después, para cada $\mathbf{b}_i$ al lado derecho resuelva $L\mathbf{y} = \mathbf{b}_i$ y $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

49. Idempotente. **51.** No idempotente.

53. *Caso 1:* $b = 1, a = 0$

Caso 2: $b = 0$, $a =$ cualquier número real.

55–59. Pruebas

Sección 2.5 *(página 95)*

1. No estocástico. **3.** Estocástico

5. (a) 350 (b) 475

7.

	Estocástico	Fumadores de menos de un paquete al día	Fumadores de más de un paquete al día
(a)	5025	2500	2475
(b)	5047	2499	2454

9.

	Marca A	Marca B	Ninguna
(a)	24,500	34,000	41,500
(b)	27,625	36,625	35,750
(c)	29,788	38,356	31,856

11. Sin codificar: $[19\ \ 5\ \ 12], [12\ \ 0\ \ 3], [15\ \ 14\ \ 19],$
$[15\ \ 12\ \ 9], [4\ \ 1\ \ 20], [5\ \ 4\ \ 0]$

Codificado: $-48, 5, 31, -6, -6, 9, -85, 23, 43,$
$-27, 3, 15, -115, 36, 59, 9, -5, -4$

13. Sin codificar: $[3\ \ 15], [13\ \ 5], [0\ \ 8], [15\ \ 13], [5\ \ 0],$
$[19\ \ 15], [15\ \ 14]$

Codificado: 48, 81, 28, 51, 24, 40, 54, 95, 5, 10, 64, 113, 57, 100

15. HAPPY_NEW_YEAR **17.** ICEBERG_DEAD_AHEAD

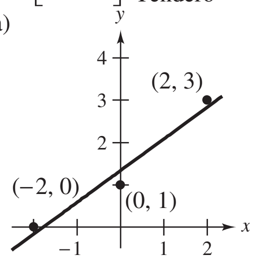
19. MEET_ME_TONIGHT_RON

21. _SEPTEMBER_THE_ELEVENTH_WE_WILL
_ALWAYS_REMEMBER

23. $D = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Carbón} & \text{Acero} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.8 & 0.1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Carbón} \\ \text{Acero} \end{array} \quad X = \begin{bmatrix} 20{,}000 \\ 40{,}000 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Carbón} \\ \text{Acero} \end{array}$

25. $X = \begin{bmatrix} 8622.0 \\ 4685.0 \\ 3661.4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Granjero} \\ \text{Pastelero} \\ \text{Tendero} \end{array}$

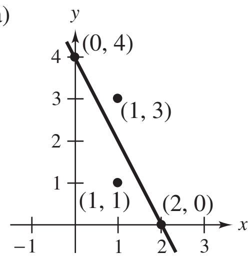
27. (a)



(b) $y = \frac{4}{3} + \frac{3}{4}x$

(c) $\frac{1}{6}$

29. (a)



(b) $y = 4 - 2x$

(c) 2

31. $y = -\frac{1}{3} + 2x$ **33.** $y = 1.3 + 0.6x$

35. $y = 0.412x + 3$ **37.** $y = -0.5x + 7.5$

39. (a) $y = 11{,}650 - 2400x$ (b) 3490 galones

41. (a) y (b) $y = 2.81t + 226.76$

43. Las respuestas varían. **45.** Prueba.

Ejercicios de repaso *(página 98)*

1. $\begin{bmatrix} -13 & -8 & 18 \\ 0 & 11 & -19 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} 14 & -2 & 8 \\ 14 & -10 & 40 \\ 36 & -12 & 48 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ **7.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -5 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{17}{3} \\ -\frac{11}{3} \end{bmatrix}$

11. $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ -3 & -4 & 13 \end{bmatrix},$

$AA^T = \begin{bmatrix} 14 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

13. $A^T = [1\ \ 3\ \ -1], A^TA = [11]$

$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 9 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ **17.** $\begin{bmatrix} \frac{3}{20} & \frac{3}{20} & \frac{1}{10} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{30} & -\frac{2}{15} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ **19.** $\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} \end{bmatrix}$ **23.** $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -12 \end{bmatrix}$ **25.** $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} \frac{1}{14} & \frac{1}{42} \\ -\frac{1}{21} & \frac{2}{21} \end{bmatrix}$ **29.** $x \neq -3$ **31.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

33. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(La respuesta no es única.)

35. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(La respuesta no es única.)

37. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(La respuesta no es única.)

39. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$ and $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(La respuesta no es única.)

41. (a) $a = -1$ (b) y (c) Demostración
$b = -1$
$c = 1$

43. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(La respuesta no es única.)

45. $x = 4,\ y = 1, z = -1$

47. (a) Falso. Vea el teorema 2.1, parte 1, página 52.
(b) Verdadero. Vea el teorema 2.6, parte 2, página 57.

49. (a) Falso. La matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ no es invertible.
(b) Falso. Vea el ejercicio 65, página 61.

51. $\begin{bmatrix} 110 & 99 & 77 & 33 \\ 44 & 22 & 66 & 66 \end{bmatrix}$

53. (a) $\begin{bmatrix} 5455 & 128.2 \\ 3551 & 77.6 \\ 7591 & 178.6 \end{bmatrix}$

La primera columna de la matriz muestra el total de las ventas por cada tipo de gasolina y la segunda indica la ganancia por cada tipo.

(b) \$384.40

55. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **57.** No estocástico

59. $PX = \begin{bmatrix} 80 \\ 112 \end{bmatrix}, P^2X = \begin{bmatrix} 68 \\ 124 \end{bmatrix}, P^3X = \begin{bmatrix} 65 \\ 127 \end{bmatrix}$

61. (a) $\begin{bmatrix} 110{,}000 \\ 100{,}000 \\ 90{,}000 \end{bmatrix}\begin{matrix} \text{Región 1} \\ \text{Región 2} \\ \text{Región 3} \end{matrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 123{,}125 \\ 100{,}000 \\ 76{,}875 \end{bmatrix}\begin{matrix} \text{Región 1} \\ \text{Región 2} \\ \text{Región 3} \end{matrix}$

63. Sin codificar: [15 14] [5 0] [9 6] [0 2] [25 0] [12 1] [14 4]

Codificado: 103 44 25 10 57 24 4 2 125 50 62 25 78 32

65. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$; ALL_SYSTEMS_GO

67. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -5 & -3 & -3 \end{bmatrix}$; INVASION_AT_DAWN

69. _CAN_YOU_HEAR_ME_NOW

71. $D = \begin{bmatrix} 0.20 & 0.50 \\ 0.30 & 0.10 \end{bmatrix}, X \approx \begin{bmatrix} 133{,}333 \\ 133{,}333 \end{bmatrix}$

73. $y = \frac{20}{3} - \frac{3}{2}x$ **75.** $y = 2.5x$

77. (a) $y = 19 + 14x$ (b) 41.4 kilogramos por kilómetro cuadrado.

79. (a) $y = 0.13x + 2.01$

(b) $y = 0.13x + 2.01$

Los modelos son los mismos.

(c)

Año	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Verdadero	2.6	2.9	2.9	3.2	3.2	3.3
Estimado	2.7	2.8	2.9	3.1	3.2	3.3

Los valores estimados son muy cercanos a los valores verdaderos.

Capítulo 3

Sección 3.1 *(página 110)*

1. 1 **3.** 5 **5.** 27 **7.** -24 **9.** 0

11. $\lambda^2 - 4\lambda - 5$

13. (a) $M_{11} = 4$, $M_{12} = 3$, $M_{21} = 2$, $M_{22} = 1$ (b) $C_{11} = 4$, $C_{12} = -3$, $C_{21} = -2$, $C_{22} = 1$

15. (a) $M_{11} = 23$ $M_{12} = -8$ $M_{13} = -22$
$M_{21} = 5$ $M_{22} = -5$ $M_{23} = 5$
$M_{31} = 7$ $M_{32} = -22$ $M_{33} = -23$

(b) $C_{11} = 23$ $C_{12} = 8$ $C_{13} = -22$
$C_{21} = -5$ $C_{22} = -5$ $C_{23} = -5$
$C_{31} = 7$ $C_{32} = 22$ $C_{33} = -23$

17. (a) $4(-5) + 5(-5) + 6(-5) = -75$

(b) $2(8) + 5(-5) - 3(22) = -75$

19. -58 **21.** -30 **23.** 0.002 **25.** $4x - 2y - 2$

27. 0 **29.** $65{,}644w + 62{,}256x + 12{,}294y - 24{,}672z$

31. -100 **33.** 14 **35.** -0.175 **37.** 19

39. -24 **41.** 0

43. (a) Falso. Vea la "Definición del determinante de una matriz de 2×2", página 104.

(b) Verdadero. Vea la primera línea después de los "Comentarios" en la página 106.

(c) Falso. Vea las "Definiciones de los menores y los cofactores de una matriz", página 105.

45. $x = -1, -4$ **47.** $x = -1, 4$ **49.** $\lambda = -1 \pm \sqrt{3}$

51. $\lambda = -2, 0, \text{o } 1$ **53.** $8uv - 1$ **55.** e^{5x}

57. $1 - \ln x$

59. Expandiendo a lo largo del primer renglón, el determinante de una matriz de 4×4 implica cuatro determinantes de 3×3. Cada uno de estos determinantes de 3×3 requiere seis productos triples. Por tanto, hay $4(6) = 24$ productos cuádruples.

61. $wz - xy$ **63.** $wz - xy$

65. $xy^2 - xz^2 + yz^2 - x^2y + x^2z - y^2z$

67. (a) Prueba

(b) $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & d \\ -1 & x & 0 & c \\ 0 & -1 & x & b \\ 0 & 0 & -1 & a \end{vmatrix}$

69. Prueba

Sección 3.2 *(página 118)*

1. El primer renglón es dos veces el segundo. Si un renglón de una matriz es un múltiplo de otro renglón, entonces el determinante de la matriz es cero.

3. El segundo renglón consta completamente de ceros. Si un renglón de una matriz consta por completo de ceros, entonces el determinante de la matriz es cero.

5. La segunda y la tercera columna son intercambiadas. Si se intercambian dos columnas de una matriz, entonces el determinante de ésta cambia de signo.

7. El primer renglón de la matriz se multiplica por 5. Si un renglón en una matriz se multiplica por un escalar, entonces el determinante de la matriz se multiplica por ese escalar.

9. Se factoriza un 4 de la segunda columna y un 3 de la tercera. Si una columna de una matriz es multiplicada por un escalar, entonces el determinante de la matriz se multiplica por ese escalar.

11. La matriz es multiplicada por 5. Si una matriz de $n \times n$ se multiplica por un escalar c, entonces el determinante de la matriz es multiplicado por c^n.

13. El primer renglón es sumado –4 veces al segundo. Si un escalar múltiplo de un renglón de una matriz es sumado a otro renglón, entonces el determinante de la matriz no cambia.

15. Un múltiplo del primer renglón es sumado al segundo. Si el escalar múltiplo de un renglón se suma a otro, entonces los determinantes son iguales.

17. El segundo renglón de la matriz es multiplicado por –1. Si se multiplica un renglón de una matriz por un escalar, entonces el determinante se multiplica por ese escalar.

19. La sexta columna es 2 veces la primera. Si una columna de una matriz es un múltiplo de otra, entonces el determinante de la matriz es cero.

21. -1 **23.** 19 **25.** 28 **27.** 0 **29.** -60

31. -1344 **33.** 136 **35.** -1100

37. (a) Verdadero. Vea el teorema 3.3, parte 1, página 113.
(b) Verdadero. Vea el teorema 3.3, parte 3, página 113.
(c) Verdadero. Vea el teorema 3.4, parte 2, página 115.
39. k **41.** 1 **43.** Prueba
45. (a) $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$. (b) $\operatorname{sen}^2\theta - 1 = \cos^{2n}\theta$.
47. Prueba

Sección 3.3 *(página 125)*

1. (a) 0 (b) -1 (c) $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ (d) 0
3. (a) 2 (b) -6 (c) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (d) -12
5. (a) 3 (b) 6 (c) $\begin{bmatrix} 6 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 9 & 4 & -3 & 8 \\ 8 & 5 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ (d) 18
7. -44 **9.** 54 **11.** 0 **13.** (a) -2 (b) -2 (c) 0
15. (a) 0 (b) -1 (c) -15
17. Singular **19.** No singular **21.** No singular
23. Singular **25.** $\frac{1}{5}$ **27.** $-\frac{1}{2}$ **29.** $\frac{1}{24}$
31. La solución es única porque la determinante de la matriz de coeficientes es distinta de cero.
33. La solución no es única, ya que el determinante de la matriz de coeficientes es cero.
35. La solución es única debido a que el determinante de la matriz de coeficientes es diferente de cero.
37. (a) 14 (b) 196 (c) 196 (d) 56 (e) $\frac{1}{14}$
39. (a) -30 (b) 900 (c) 900 (d) -240 (e) $-\frac{1}{30}$
41. (a) 29 (b) 841 (c) 841 (d) 232 (e) $\frac{1}{29}$
43. (a) -24 (b) 576 (c) 576 (d) -384 (e) $-\frac{1}{24}$
45. (a) 22 (b) 22 (c) 484 (d) 88 (e) $\frac{1}{22}$
47. (a) -26 (b) -26 (c) 676 (d) -208 (e) $-\frac{1}{26}$
49. (a) -115 (b) -115 (c) 13,225 (d) -1840
(e) $-\frac{1}{115}$
51. (a) 25 (b) 9 (c) -125 (d) 81
53. $k = -1, 4$ **55.** $k = 24$ **57.** Prueba
59. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
(La respuesta no es única.)
61. 0
63. Prueba
65. (a) Falso. Vea el teorema 3.6, página 121.
(b) Verdadero. Vea el teorema 3.8, página 122.
(c) Verdadero. Vea las “Condiciones de equivalencia para una matriz no singular”, partes 1 y 2, página 123.
67. No; en general, $P^{-1}AP \neq A$. Por ejemplo, sean

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix},\ P^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix},\ \text{y}\ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces se tiene

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -27 & -49 \\ 16 & 29 \end{bmatrix} \neq A.$$

La ecuación $|P^{-1}AP| = |A|$ es válida en general, ya que

$$\begin{aligned} |P^{-1}AP| &= |P^{-1}||A||P| \\ &= |P^{-1}||P||A| = \frac{1}{|P|}|P||A| = |A|. \end{aligned}$$

69. Prueba **71.** Ortogonal **73.** No ortogonal
75. Ortogonal **77.** Prueba
79. (a) $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ (c) 1
A es ortogonal.
81. Prueba

Sección 3.4 *(página 136)*

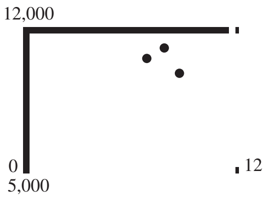
1. $\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix},\ A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$
3. $\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, A^{-1} no existe.
5. $\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} -7 & -12 & 13 \\ 2 & 3 & -5 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix},\ A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & 4 & -\frac{13}{3} \\ -\frac{2}{3} & -1 & \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} & -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$
7. $\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 9 & -13 \\ 7 & 1 & 0 & -4 \\ -4 & 2 & -9 & 10 \\ 2 & -1 & 9 & -5 \end{bmatrix},$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{9} & \frac{1}{9} & 1 & -\frac{13}{9} \\ \frac{7}{9} & \frac{1}{9} & 0 & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{2}{9} & -1 & \frac{10}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & 1 & -\frac{5}{9} \end{bmatrix}$$

9. Prueba **11.** Prueba
13. $|\operatorname{adj}(A)| = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$

$$|A|^{2-1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}^{2-1} = -2$$

15. Prueba
17. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ **19.** $x_1 = 2$, $x_2 = -2$ **21.** $x_1 = \frac{3}{4}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$
23. No se puede aplicar la regla de Cramer porque la matriz de coeficientes tiene un determinante igual a cero.
25. $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ **27.** $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{3}{2}$
29. $x_1 = -1, x_2 = 3, x_3 = 2$ **31.** $x_1 = -12, x_2 = 10$
33. $x_1 = 5, x_2 = -3, x_3 = 2, x_4 = -1$
35. $x = \dfrac{4k-3}{2k-1},\ y = \dfrac{4k-1}{2k-1}$
El sistema será inconsistente si $k = \frac{1}{2}$.
37. 3 **39.** 3 **41.** Colineal. **43.** No colineal.
45. $3y - 4x = 0$ **47.** $x = -2$ **49.** $\frac{1}{3}$ **51.** 2
53. No coplanar. **55.** Coplanar.
57. $4x - 10y + 3z = 27$ **59.** $x + y + z = 0$
61. Incorrecto. Deben intercambiarse el numerador y el denominador.

63. (a) $49a + 7b + c = 10{,}697$
$64a + 8b + c = 11{,}162$
$81a + 9b + c = 9891$
(b) $a = -868$, $b = 13{,}485$, $c = -41{,}166$
(c)


(d) El polinomio se ajusta exactamente a los datos.

Ejercicios de repaso *(página 138)*

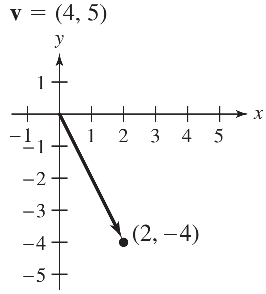
1. 10 **3.** 0 **5.** 0 **7.** -6 **9.** 1620 **11.** 82
13. -64 **15.** -1 **17.** -1
19. Como el segundo renglón es múltiplo del primero, el determinante es cero.
21. Se factoriza un – 4 de la segunda columna y un 3 de la tercera. Si una columna de una matriz se multiplica por un escalar, el determinante de la matriz también se multiplica por un escalar.
23. (a) -1 (b) -5 (c) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (d) 5
25. (a) -12 (b) -1728 (c) 144 (d) -300
27. (a) -20 (b) $-\frac{1}{20}$ **29.** $\frac{1}{6}$ **31.** $-\frac{1}{10}$
33. $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{1}{2}$ **35.** $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$
37. Solución única. **39.** Solución única.
41. No es solución única.
43. (a) 8 (b) 4 (c) 64 (d) 8 (e) $\frac{1}{2}$
45. Demostración **47.** 0 **49.** $-\frac{1}{2}$ **51.** $-av$
53. Por lo general, la reducción por renglones es preferida para matrices con pocos ceros. En el caso de una que contiene un gran número de ceros, a menudo es más fácil la expansión a lo largo de un renglón o columna que tenga la mayor cantidad de ceros.
55. $x = \pi/4 + n\pi/2$, donde n es un entero. **57.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$
59. Solución única: $x = 0.6$
$y = 0.5$
61. Solución única: $x_1 = \frac{1}{2}$
$x_2 = -\frac{1}{3}$
$x_3 = 1$
63. $x_1 = 6, x_2 = -2$ **65.** 16 **67.** $x - 2y = -4$
69. $9x + 4y - 3z = 0$
71. Incorrecto. En el numerador, la columna de constantes
$$\begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$
debe remplazar la tercera columna de la matriz de coeficientes, no la primera columna.
73. (a) Falso. Vea la “Definición de menores y cofactores de una matriz”, página 105.
(b) Falso. Vea el teorema 3.3, parte 1, página 113.
(c) Verdadero. Vea el teorema 3.4, página 115.
(d) Falso. Vea el teorema 3.9, página 124.
75. (a) Falso. Vea el teorema 3.11, página 131.
(b) Falso. Vea la “Prueba para puntos colineales en el plano xy”, página 133.

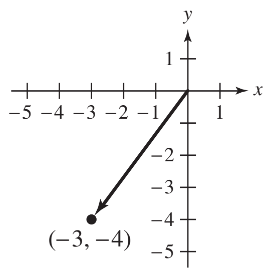
Examen acumulativo capítulos 1-3 *(página 143)*

1. No el lineal **2.** Lineal **3.** $x = 1, y = -2$
4. $x_1 = 2,\ x_2 = -3,\ x_3 = -2$
5. $x = 10, y = -20, z = 40, w = -12$
6. $x_1 = s - 2t,\ x_2 = 2 + t,\ x_3 = t,\ x_4 = s$
7. $x_1 = -2s,\ x_2 = s,\ x_3 = 2t,\ x_4 = t$ **8.** $k = 12$
9. $x = -3,\ y = 4$
10. $A^TA = \begin{bmatrix} 17 & 22 & 27 \\ 22 & 29 & 36 \\ 27 & 36 & 45 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$
12. $\begin{bmatrix} -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{21} \end{bmatrix}$ **13.** $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ **14.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{9}{5} \end{bmatrix}$
15. $x = -\frac{3}{2}, y = -\frac{3}{4}$ **16.** $x = 4, y = 2$
17. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$
(No es solución única.)
18. -34
19. (a) 14 (b) -10 (c) $\begin{bmatrix} -2 & -14 \\ -8 & 14 \end{bmatrix}$ (d) -140
20. (a) 84 (b) $\frac{1}{84}$
21. (a) 567 (b) 7 (c) $\frac{1}{7}$ (d) 343
22. $\begin{bmatrix} \frac{4}{11} & -\frac{10}{11} & \frac{7}{11} \\ -\frac{1}{11} & -\frac{3}{11} & \frac{1}{11} \\ -\frac{2}{11} & \frac{5}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$
23. $a = 1,\ b = 0,\ c = 2$
(No es solución única.)
24. $y = \frac{7}{6}x^2 + \frac{1}{6}x + 1$ **25.** $3x + 2y = 11$ **26.** 16
27. $I_1 = 3, I_2 = 4, I_3 = 1$
28. $BA = [13{,}275.00 \quad 15{,}500.00]$
Los elementos representan el valor total (en dólares) de los productos enviados a los dos almacenes.
29. No; demostración

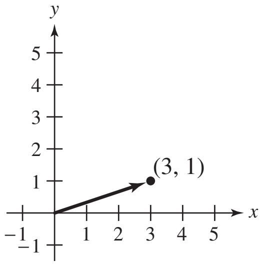
Capítulo 4

Sección 4.1 *(página 153)*

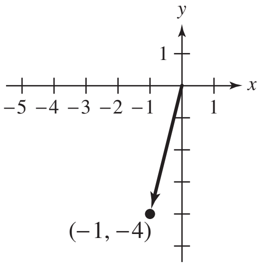
1. $\mathbf{v} = (4, 5)$
3.


5.


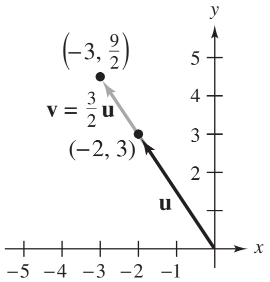
7. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (3, 1)$



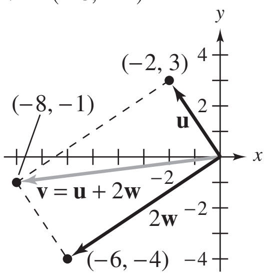
9. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (-1, -4)$



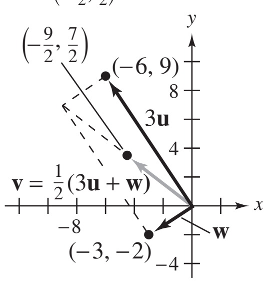
11. $\mathbf{v} = \left(-3, \frac{9}{2}\right)$



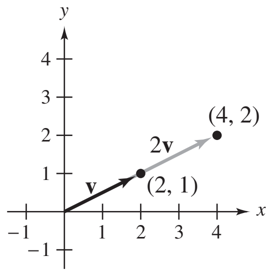
13. $\mathbf{v} = (-8, -1)$



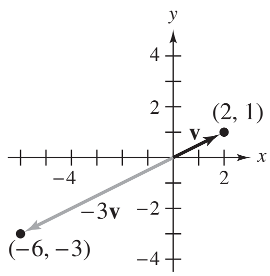
15. $\mathbf{v} = \left(-\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right)$



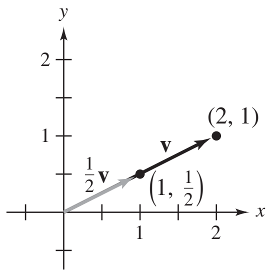
17. (a)



(b)



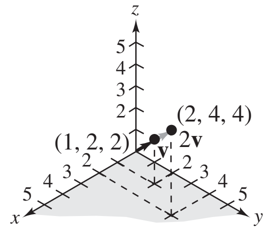
(c)



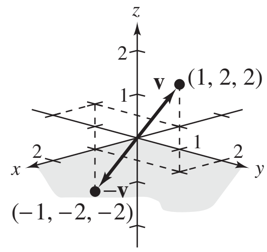
19. $\mathbf{u} - \mathbf{v} = (-1, 0, 4)$
$\mathbf{v} - \mathbf{u} = (1, 0, -4)$

21. $(6, 12, 6)$ **23.** $\left(\frac{7}{2}, 3, \frac{5}{2}\right)$

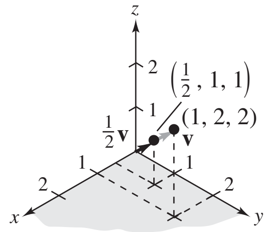
25. (a)



(b)



(c)



27. (a)

29. (a) $(4, -2, -8, 1)$ (b) $(8, 12, 24, 34)$
(c) $(-4, 4, 13, 3)$

31. (a) $(1, 6, -5, -3)$ (b) $(-1, -8, 10, 0)$
(c) $\left(-\frac{3}{2}, 11, -\frac{13}{2}, -\frac{21}{2}\right)$

33. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}, -\frac{9}{2}, 2\right)$ **35.** $(4, 8, 18, -2)$ **37.** $\left(-1, \frac{5}{3}, 6, \frac{2}{3}\right)$

39. $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ **41.** $\mathbf{v} = \mathbf{u} + 2\mathbf{w}$ **43.** $\mathbf{v} = -\mathbf{u}$

45. $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_3$

47. No es posible escribir **v** como una combinación lineal de $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ y $\mathbf{u}_3$.

49. $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - 2\mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4 - \mathbf{u}_5$

51. (a) Verdadero. Dos vectores en R^n son iguales si y sólo si sus componentes correspondientes son iguales, es decir, $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ si y sólo si $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{u}_n = \mathbf{v}_n$
(b) Falso. El vector $-\mathbf{v}$ se denomina el inverso aditivo del vector **v**.

53. No **55.** Las respuestas pueden variar. **57.** Demostración

59. Si $\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$ es una combinación lineal de las columnas de A, entonces una solución para $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es

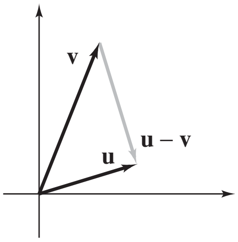
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es inconsistente si **b** no es una combinación lineal de las columnas de A.

61. (a) Idéntico aditivo.
(b) Propiedad distributiva.
(c) Sume $-0\mathbf{v}$ a ambos lados.
(d) Inverso aditivo y propiedad asociativa.
(e) Inverso aditivo.
(f) Idéntico aditivo.

63. (a) Multiplicar ambos lados por c^{-1}.
(b) Propiedad asociativa y Teorema 4.3, propiedad 4
(c) Inverso multiplicativo
(d) Identidad multiplicativa

65. Usted puede describir la resta vectorial de la siguiente manera:



o describirla en términos de la suma, $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}$.

Sección 4.2 *(página 160)*

1. $(0, 0, 0, 0)$ **3.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. $0 + 0x + 0x^2 + 0x^3$

7. $-(v_1, v_2, v_3, v_4) = (-v_1, -v_2, -v_3, -v_4)$

9. $-\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \end{bmatrix}$

11. $-(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = -a_0 - a_1x - a_2x^2 - a_3x^3$

13. El conjunto es un espacio vectorial.

15. El conjunto no es un espacio vectorial. El axioma 1 falla porque $x^3 + (-x^3 + 1) = 1$, el cual no es un polinomio de tercer grado. (Los axiomas 4, 5 y 6 también fallan.)

17. El conjunto no es un espacio vectorial. Falla el axioma 4.

19. El conjunto es un espacio vectorial.

21. El conjunto no es un espacio vectorial. El axioma 6 falla porque $(-1)(x, y) = (-x, -y)$, el cual no está en el conjunto cuando $x \neq 0$.

23. El conjunto es un espacio vectorial.

25. El conjunto es un espacio vectorial.

27. El conjunto es un espacio vectorial.

29. El conjunto no es un espacio vectorial. El axioma 1 falla porque
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,
el cual es no singular.

31. El conjunto es un espacio vectorial.

33. El conjunto es un espacio vectorial.

35. (a) El conjunto no es un espacio vectorial. El axioma 8 falla porque
$(1 + 2)(1, 1) = 3(1, 1) = (3, 1)$
$1(1, 1) + 2(1, 1) = (1, 1) + (2, 1) = (3, 2)$.
(b) El conjunto no es un espacio vectorial. El axioma 2 falla debido a que
$(1, 2) + (2, 1) = (1, 0)$
$(2, 1) + (1, 2) = (2, 0)$.
(Los axiomas 4, 5 y 8 también fallan.)
(c) El conjunto no es un espacio vectorial. El axioma 6 falla, ya que $(-1)(1, 1) = \left(\sqrt{-1}, \sqrt{-1}\right)$, el cual no pertenece a R^2. (Los axiomas 8 y 9 también fallan.)

37. Demostración

39. El conjunto no es un espacio vectorial. El axioma 5 falla porque $(1, 1)$ es el idéntico aditivo y, por tanto, $(0, 0)$ no tiene inverso aditivo. (Los axiomas 7 y 8 también fallan.)

41. Sí, el conjunto es un espacio vectorial. **43.** Demostración

45. (a) Verdadero. Vea la página 155.
(b) Falso. Vea el ejemplo 6, página 159.
(c) Falso. Con las operaciones normales en R^3, no se satisface el axioma del inverso aditivo.

47. Prueba

Sección 4.3 *(página 167)*

1. Como W es no vacío y $W \subset R^4$, usted sólo necesita verificar que W es cerrado bajo la suma y la multiplicación por un escalar. Dado
$(x_1, x_2, x_3, 0) \in W$ y $(y_1, y_2, y_3, 0) \in W$
se concluye que
$(x_1, x_2, x_3, 0) + (y_1, y_2, y_3, 0)$
$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, 0) \in W$.
Por tanto, para cualquier número real c y $(x_1, x_2, x_3, 0) \in W$, se concluye que
$c(x_1, x_2, x_3, 0) = (cx_1, cx_2, cx_3, 0) \in W$.

3. Como W es no vacío y $W \subset M_{2,2}$, usted sólo necesita verificar que W es cerrado bajo la suma y la multiplicación por un escalar. Dado
$\begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} \in W$ y $\begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix} \in W$
se concluye que
$\begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 & 0 \end{bmatrix} \in W$.
Por tanto, para cualquier número real c y
$\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \in W$, se concluye que
$c\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & ca \\ cb & 0 \end{bmatrix} \in W$.

5. Recuerde del cálculo que la continuidad implica integrabilidad; $W \subset V$. Por tanto, como W es no vacío, usted sólo necesita verificar que W es cerrado bajo la adición y la multiplicación por un escalar. Dadas las funciones continuas $f, g \in W$, concluimos que $f + g$ es continua y $f + g \in W$. También, para cualquier número real c y para una función continua $f \in W$, cf es continua. Por tanto, $cf \in W$.

7. No es cerrada bajo la suma:
$(0, 0, -1) + (0, 0, -1) = (0, 0, -2)$
No es cerrada bajo la multiplicación por un escalar:
$2(0, 0, -1) = (0, 0, -2)$

9. No es cerrada bajo la multiplicación por un escalar:
$\sqrt{2}(1, 1) = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

11. No es cerrada bajo la multiplicación por un escalar:
$(-1)e^x = -e^x$

13. No es cerrada bajo la multiplicación por un escalar:
$(-2)(1, 1, 1) = (-2, -2, -2)$

15. No está cerrado bajo la multiplicación por un escalar:
$2\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

17. No está cerrado bajo la suma:
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

19. No está cerrado bajo la suma:
$(2, 8) + (3, 27) = (5, 35)$
No es cerrada bajo la multiplicación por un escalar:
$2(3, 27) = (6, 54)$

21. No es un subespacio. **23.** Subespacio. **25.** Subespacio.
27. Subespacio. **29.** Subespacio. **31.** No es un subespacio.
33. No es un subespacio. **35.** Subespacio.
37. W es un subespacio de R^3. (W es no vacío y cerrado bajo la suma y la multiplicación por un escalar.)
39. W es un subespacio de $R3$. (W es no vacío y cerrado bajo la suma y la multiplicación por un escalar.)
41. W no es un subespacio de R^3.
No es cerrado bajo la suma: $(1, 1, 1) + (1, 1, 1) = (2, 2, 2)$
No es cerrado bajo la multiplicación por un escalar: $2(1, 1, 1) = (2, 2, 2)$
43. (a) Verdadero. Vea los "Comentarios" en la página 163.
(b) Verdadero. Vea el teorema 4.6, página 164.
(c) Falso. No existen elementos de W que no sean elementos de U o viceversa.
45–59. Demostración

Sección 4.4 *(página 178)*

1. (a) $\mathbf{z} = 2(2, -1, 3) - (5, 0, 4)$
(b) $\mathbf{v} = \frac{1}{4}(2, -1, 3) + \frac{3}{2}(5, 0, 4)$
(c) $\mathbf{w} = 8(2, -1, 3) - 3(5, 0, 4)$
(d) $\mathbf{u}$ no puede escribirse como una combinación lineal de los vectores dados.
3. (a) $\mathbf{u} = -\frac{7}{4}(2, 0, 7) + \frac{5}{4}(2, 4, 5) + 0(2, -12, 13)$
(b) $\mathbf{v}$ no puede escribirse como una combinación lineal de los vectores dados.
(c) $\mathbf{w} = -\frac{1}{6}(2, 0, 7) + \frac{1}{3}(2, 4, 5) + 0(2, -12, 13)$
(d) $\mathbf{z} = -4(2, 0, 7) + 5(2, 4, 5) + 0(2, -12, 13)$
5. $\begin{bmatrix} 6 & -19 \\ 10 & 7 \end{bmatrix} = 3A - 2B$
7. $\begin{bmatrix} -2 & 28 \\ 1 & -11 \end{bmatrix} = -A + 5B$
9. S genera a R^2. **11.** S genera a R^2.
13. S no genera a R^2. (Éste genera una recta en R^2.)
15. S no genera a R^2. (Éste genera una recta en R^2.)
17. S no genera a R^2. (Éste genera una recta en R^2.)
19. S genera a R^2. **21.** S genera a R^2.
23. S no genera a R^3. (Éste genera una recta en R^3.)
25. S no genera a R^3. (Éste genera una recta en R^3.)
27. S no genera P_2.
29. Linealmente independiente. **31.** Linealmente dependiente.
33. Linealmente independiente. **35.** Linealmente dependiente.
37. Linealmente independiente. **39.** Linealmente independiente.
41. Linealmente dependiente. **43.** Linealmente independiente.
45. Linealmente dependiente. **47.** Linealmente independiente.
49. $(3, 4) - 4(-1, 1) - \frac{7}{2}(2, 0) = (0, 0)$,
$(3, 4) = 4(-1, 1) + \frac{7}{2}(2, 0)$
(La respuesta no es única.)
51. $(1, 1, 1) - (1, 1, 0) - (0, 0, 1) - 0(0, 1, 1) = (0, 0, 0)$
$(1, 1, 1) = (1, 1, 0) + (0, 0, 1) - 0(0, 1, 1)$
(La respuesta no es única.)
53. (a) Toda $t \neq 1, -2$ (b) Toda $t \neq \frac{1}{2}$
55. Demostración.

57. Porque la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ se reduce por renglones a $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -2 & -6 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ se reduce por renglones a $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, S_1 y S_2 generan el mismo subespacio.
59. (a) Falso. Vea la "Definición de dependencia e independencia lineal", página 173.
(b) Verdadero. Cualquier vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ en R^4 se puede escribir como
$$\mathbf{u} = u_1(1, 0, 0, 0) - u_2(0, -1, 0, 0) + u_3(0, 0, 1, 0) + u_4(0, 0, 0, 1).$$
61–73. Demostración

Sección 4.5 *(página 187)*

1. R^6: $\{(1, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 0, 1)\}$
3. $M_{2,4}$: $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$
5. P_4: $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ **7.** S es linealmente dependiente.
9. S es linealmente dependiente y no genera a R^2.
11. S es linealmente dependiente y no genera a R^2.
13. S no genera a R^2.
15. S es linealmente dependiente y no genera a R^3.
17. S no genera a R^3.
19. S es linealmente dependiente y no genera a R^3.
21. S es linealmente dependiente.
23. S es linealmente dependiente y no genera a P_2.
25. S no genera a $M_{2,2}$.
27. S es linealmente dependiente y no genera a $M_{2,2}$.
29. El conjunto es una base de R^2.
31. El conjunto no es una base de R^2.
33. S es una base de R^2. **35.** S es una base de R^3.
37. S no es una base de R^3. **39.** S es una base de R^4.
41. S es una base de P_3. **43.** S no es una base de P_3.
45. S es una base de $M_{2,2}$.
47. S es una base de R^3.
$(8, 3, 8) = 2(4, 3, 2) - (0, 3, 2) + 3(0, 0, 2)$
49. S no es una base de R^3. **51.** 6 **53.** 8 **55.** 6
57. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
La dimensión es 3.
59. $\{(1, 0), (0, 1)\}, \{(1, 0), (1, 1)\}, \{(0, 1), (1, 1)\}$
61. $\{(2, 2), (1, 0)\}$
63. (a) Recta que pasa por el origen (b) $\{(2, 1)\}$ (c) 1
65. (a) Recta que pasa por el origen (b) $\{(2, 1, -1)\}$ (c) 1
67. (a) $\{(2, 1, 0, 1), (-1, 0, 1, 0)\}$ (b) 2
69. (a) $\{(0, 6, 1, -1)\}$ (b) 1

71. (a) Falso. Si la dimensión de V es n, entonces todo conjunto generador de V tiene al menos n vectores.
(b) Verdadero. Encuentre un conjunto de n vectores base de V que puedan generar V y sume cualquier otro vector.
73–77. Pruebas

Sección 4.6 *(página 199)*

1. (a) $(0, -2), (1, -3)$ (b) $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\-3\end{bmatrix}$
3. (a) $(4, 3, 1), (1, -4, 0)$ (b) $\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$
5. (a) $\{(1, 0), (0, 1)\}$ (b) 2
7. (a) $\{(1, 0, \frac{1}{2}), (0, 1, -\frac{1}{2})\}$ (b) 2
9. (a) $\{(1, 2, -2, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ (b) 2
11. $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ **13.** $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$
15. $\{(1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$
17. $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$
19. (a) $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$ (b) 2 **21.** (a) $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$ (b) 2
23. (a) $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\\frac{5}{9}\\\frac{2}{9}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-\frac{4}{9}\\\frac{2}{9}\end{bmatrix}\right\}$ (b) 2
25. $\{(1, 2)\}$ **27.** $\{(-2, 1, 0), (-3, 0, 1)\}$
29. $\{(-3, 0, 1)\}$ **31.** $\{(-1, 2, 1)\}$
33. $\{(2, -2, 0, 1), (-1, 1, 1, 0)\}$ **35.** $\{(0, 0, 0, 0)\}$
37. (a) $\{(4, 1)\}$ (b) 1 **39.** (a) $\{(-1, -3, 2)\}$ (b) 1
41. (a) $\{(-3, 0, 1), (2, 1, 0)\}$ (b) 2
43. (a) $\{(-4, -1, 1, 0), (-3, -\frac{2}{3}, 0, 1)\}$ (b) 2
45. (a) $\{(8, -9, -6, 6)\}$ (b) 1
47. (a) $\text{rango}(A) = 3$
$\text{nulidad}(A) = 2$
(b) $\left\{\begin{bmatrix}-3\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\-2\\0\\2\\1\end{bmatrix}\right\}$
(c) $\{(1, 0, 3, 0, -4), (0, 1, -1, 0, 2), (0, 0, 0, 1, -2)\}$
(d) $\{(1, 2, 3, 4), (2, 5, 7, 9), (0, 1, 2, -1)\}$
(e) Linealmente dependiente. (f) (i) y (iii)
49. (a) Consistente. (b) $\mathbf{x} = t(2, -4, 1) + (3, 5, 0)$
51. (a) Inconsistente. (b) No aplicable.
53. (a) Consistente
(b) $\mathbf{x} = t(5, 0, -6, -4, 1) + s(-2, 1, 0, 0, 0) + (1, 0, 2, -3, 0)$
55. $\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$
57. $\mathbf{b}$ no está en el espacio columna de A. **59.** Prueba
61. (a) $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$
(c) $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$
63. (a) m (b) r (c) r (d) R^n (e) R^m
65. Las respuestas pueden variar.
67. (a) Prueba (b) Prueba (c) Prueba
69. (a) Falso. El espacio nulo de A también se denomina el espacio solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
(b) Verdadero. El espacio nulo de A es el espacio solución del sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
71. (a) Falso. Véase el “Comentario,” página 190.
(b) Falso. Véase el Teorema 4.19, página 198.
(c) Verdadero. Las columnas de A se convierten en los renglones de A^T, por lo que las columnas de A generan el mismo espacio que los renglones de A^T.
73. (a) $0, n$ (b) Prueba **75.** Prueba

Sección 4.7 *(página 210)*

1. $\begin{bmatrix}5\\-2\end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix}7\\-4\\-1\\2\end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix}8\\-3\end{bmatrix}$ **7.** $\begin{bmatrix}5\\4\\3\end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix}-1\\2\\0\\1\end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$ **13.** $\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}$ **15.** $\begin{bmatrix}0\\-1\\2\end{bmatrix}$ **17.** $\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\-2 & 1\end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix}2 & -1\\4 & 3\end{bmatrix}$ **21.** $\begin{bmatrix}1 & 2 & -\frac{1}{2}\\0 & \frac{1}{2} & 0\\0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{12}\end{bmatrix}$ **23.** $\begin{bmatrix}3 & -2 & 1\\4 & -1 & 0\\0 & 1 & -3\end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix}\frac{9}{5} & \frac{4}{5}\\\frac{8}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}$ **27.** $\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\-3 & 2 & -1\\3 & -3 & 2\end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix}-7 & 3 & 10\\5 & -1 & -6\\11 & -3 & -10\end{bmatrix}$ **31.** $\begin{bmatrix}-24 & 7 & 1 & -2\\-10 & 3 & 0 & -1\\-29 & 7 & 3 & -2\\12 & -3 & -1 & 1\end{bmatrix}$

33. $\begin{bmatrix}1 & -\frac{3}{11} & \frac{5}{11} & 0 & -\frac{7}{11}\\0 & -\frac{2}{11} & \frac{3}{22} & 0 & -\frac{1}{11}\\-\frac{5}{4} & \frac{9}{22} & -\frac{19}{44} & -\frac{1}{4} & \frac{21}{22}\\-\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\\0 & -\frac{1}{11} & -\frac{2}{11} & 0 & \frac{5}{11}\end{bmatrix}$

35. (a) $\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\\frac{3}{4} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}6 & 4\\9 & 4\end{bmatrix}$ (c) Verificación. (d) $\begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}$

37. (a) $\begin{bmatrix}4 & 5 & 1\\-7 & -10 & -1\\-2 & -2 & 0\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{4}\\-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4}\\\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{4}\end{bmatrix}$
(c) Verificación. (d) $\begin{bmatrix}\frac{11}{4}\\-\frac{9}{4}\\\frac{5}{4}\end{bmatrix}$

39. (a) $\begin{bmatrix} -\frac{48}{5} & -24 & \frac{4}{5} \\ 4 & 10 & \frac{1}{2} \\ -\frac{6}{5} & -5 & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \frac{3}{32} & \frac{17}{20} & \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{16} & -\frac{3}{10} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{6}{5} & 0 \end{bmatrix}$

(c) Verificación. (d) $\begin{bmatrix} \frac{279}{160} \\ -\frac{61}{80} \\ -\frac{7}{10} \end{bmatrix}$

41. (a) $\begin{bmatrix} \frac{19}{39} & \frac{-9}{13} & \frac{44}{39} \\ -\frac{3}{13} & -\frac{6}{13} & -\frac{9}{13} \\ -\frac{23}{39} & \frac{2}{13} & -\frac{4}{39} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -\frac{2}{7} & -\frac{4}{21} & -\frac{13}{7} \\ -\frac{5}{7} & -\frac{8}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{4}{7} & -\frac{13}{21} & \frac{5}{7} \end{bmatrix}$

(c) Verificación. (d) $\begin{bmatrix} \frac{22}{7} \\ \frac{6}{7} \\ \frac{19}{7} \end{bmatrix}$

43. $\begin{bmatrix} 4 \\ 11 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ **45.** $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ **47.** $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ **49.** $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

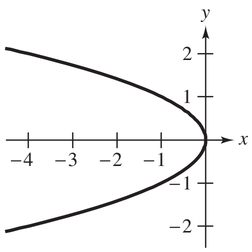
51. (a) Falso. Vea el teorema 4.20, página 204.
(b) Verdadero. Véase el párrafo previo al Ejemplo 1, página 202.

53. QP

Sección 4.8 *(página 219)*

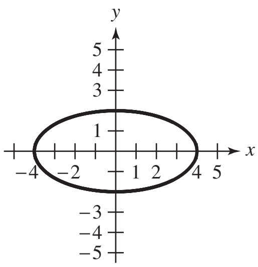
1. (b), (c), y (d) **3.** (c) **5.** (a), (b), y (d)
7. (b) **9.** (c) **11.** (b) **13.** $-(x \operatorname{sen} x + \cos x)$
15. -2 **17.** $-x$ **19.** 0 **21.** $2e^{3x}$ **23.** 12
25. $e^{-x}(\cos x - \operatorname{sen} x)$
27. (a) Verificación. (b) Linealmente independiente
(c) $y = C_1 \operatorname{sen} 4x + C_2 \cos 4x$
29. (a) Verificar. (b) Linealmente dependiente. (c) No es aplicable.
31. (a) Verificar. (b) Linealmente independiente.
(c) $y = C_1 + C_2 \operatorname{sen} 2x + C_3 \cos 2x$
33. (a) Verificar. (b) Linealmente dependiente.
(c) No es aplicable.
35. (a) Verificar.
(b) $\theta(t) = C_1 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{g}{L}}t + C_2 \cos \sqrt{\frac{g}{L}}t$; demostración
37. Demostración **39.** Demostración
41. No. Por ejemplo, considere $y'' = 1$. Dos soluciones son $y = \frac{x^2}{2}$ y $y = \frac{x^2}{2} + 1$. Su suma no es una solución.

43. Parábola



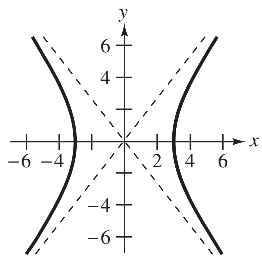
$y^2 + x = 0$

45. Elipse



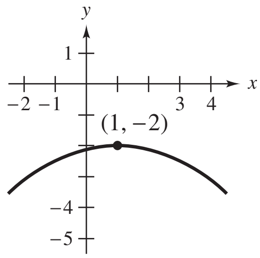
$x^2 + 4y^2 - 16 = 0$

47. Hipérbola



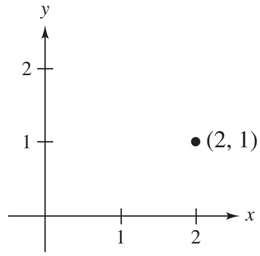
$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} - 1 = 0$

49. Parábola



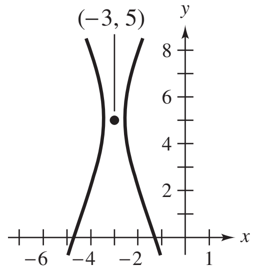
$x^2 - 2x + 8y + 17 = 0$

51. Punto



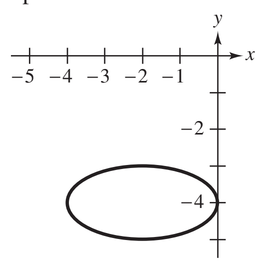
$9x^2 + 25y^2 - 36x - 50y + 61 = 0$

53. Hipérbola



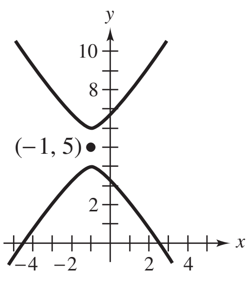
$9x^2 - y^2 + 54x + 10y + 55 = 0$

55. Elipse



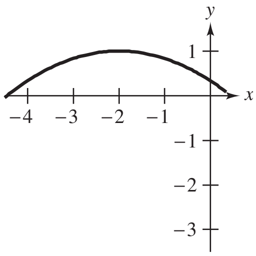
$x^2 + 4y^2 + 4x + 32y + 64 = 0$

57. Hipérbola



$2x^2 - y^2 + 4x + 10y - 22 = 0$

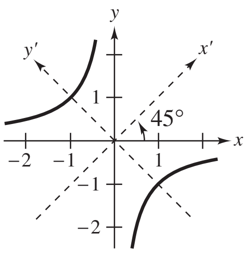
59. Parábola



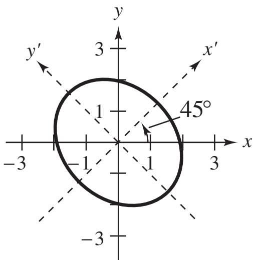
$x^2 + 4x + 6y - 2 = 0$

61. c **62.** b **63.** a **64.** d

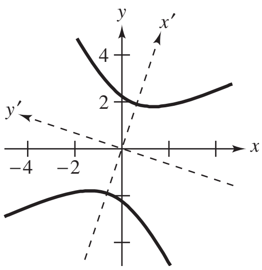
65. $\dfrac{(y')^2}{2} - \dfrac{(x')^2}{2} = 1$



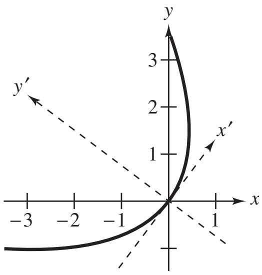
67. $\dfrac{(x')^2}{3} + \dfrac{(y')^2}{5} = 1$



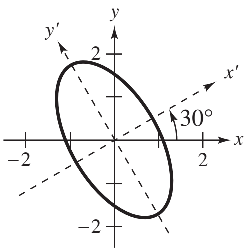
69. $\dfrac{(x')^2}{4} - \dfrac{(y')^2}{4} = 1$



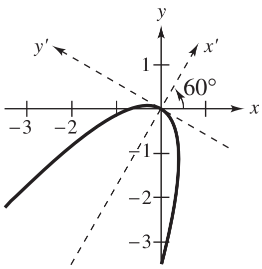
71. $y' = \dfrac{1}{4}(x')^2$



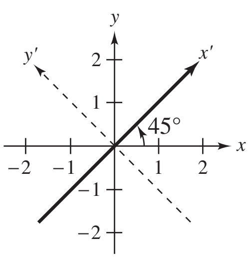
73. $(x')^2 + \dfrac{(y')^2}{4} = 1$



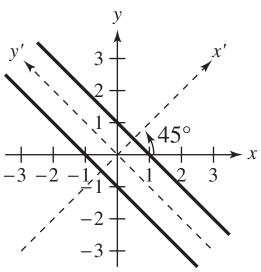
75. $x' = -(y')^2$



77. $y' = 0$



79. $x' = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



81. Prueba **83.** (a) Prueba (b) Prueba

Ejercicios de repaso *(página 221)*

1. (a) $(0, 2, 5)$
(b) $(2, 0, 4)$
(c) $(-2, 2, 1)$
(d) $(-5, 6, 5)$

3. (a) $(3, 1, 4, 4)$
(b) $(0, 4, 4, 2)$
(c) $(3, -3, 0, 2)$
(d) $(9, -7, 2, 7)$

5. $\left(\frac{1}{2}, -4, -4\right)$ **7.** $\left(\frac{5}{2}, -6, 0\right)$

9. $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 3\mathbf{u}_3$ **11.** $\mathbf{v} = \frac{9}{8}\mathbf{u}_1 + \frac{1}{8}\mathbf{u}_2 + 0\mathbf{u}_3$

13. $O_{3,4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$

$-A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} & -a_{34} \end{bmatrix}$

15. $O = (0, 0, 0)$
$-A = (-a_1, -a_2, -a_3)$

17. W es un subespacio de R^2. **19.** W no es un subespacio de R^2.

21. W es un subespacio de R^3.

23. W no es un subespacio de $C[-1, 1]$

25. (a) W es un subespacio de R^3. (b) W no es un subespacio de R^3.

27. (a) Sí (b) Sí (c) Sí

29. (a) No (b) No (c) No

31. (a) Sí (b) No (c) No

33. S es una base de P_3. **35.** El conjunto no es una base de $M_{2,2}$.

37. (a) $\{(8, 5)\}$ (b) 1 (c) 1

39. (a) $\{(3, 0, 1, 0), (-1, -2, 0, 1)\}$ (b) 2 (c) 2

41. (a) $\{(4, -2, 1)\}$ (b) 1 (c) 2

43. (a) $\{(-3, 0, 4, 1), (-2, 1, 0, 0)\}$ (b) 2

45. (a) $\{(2, 3, 7, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$ (b) 2

47. (a) $\{(1, 0), (0, 1)\}$ (b) 2

49. (a) $\{(1, -4, 0, 4)\}$ (b) 1

51. (a) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ (b) 3

53. $\begin{bmatrix} -2 \\ 8 \end{bmatrix}$ **55.** $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ **57.** $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ **59.** $\begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

61. $\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ **63.** $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ **65.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

67. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

69. (a) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(c) Verificación. (d) $\begin{bmatrix} -12 \\ 6 \end{bmatrix}$

71. (a) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) Verificación. (d) $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

73. Base de W: $\{x, x^2, x^3\}$
Base de U: $\{(x-1), x(x-1), x^2(x-1)\}$
Base de $W \cap U$: $\{x(x-1), x^2(x-1)\}$

75. No. Por ejemplo, el conjunto
$\{x^2 + x, x^2 - x, 1\}$
es una base de P_2.

77. Sí, W es un subespacio de V. **79.** Demostración

81. Las respuestas pueden variar.

83. (a) Verdadero. Vea el análisis sobre las "Definiciones de suma vectorial y multiplicación por un escalar en R^n", página 149.
(b) Falso. Vea el teorema 4.3, parte 2, página 151.
(c) Verdadero. Vea la " Definición de un espacio vectorial" y el análisis que le sigue, página 155.

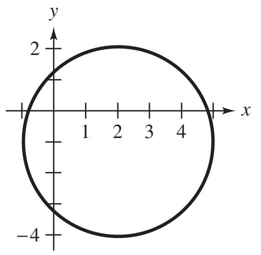
85. (a) Verdadero. Vea el análisis bajo "Vectores en R^n", página 149.
(b) Falso. Vea la "Definición de espacio vectorial", parte 4, página 155.
(c) Verdadero. Vea el análisis siguiente a "Resumen de espacios vectoriales importantes", página 157.

87. (a) y (d) **89.** (a) **91.** e^x **93.** -8

95. (a) Verificar. (b) Linealmente independiente.
(c) $y(t) = C_1e^{-3x} + C_2xe^{-3x}$

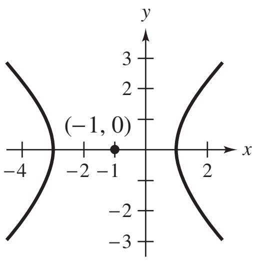
97. (a) Verificar. (b) Linealmente dependiente.
(c) No es aplicable

99. Circunferencia



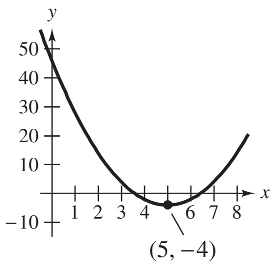
$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$

101. Hipérbola



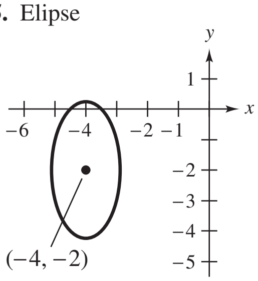
$x^2 - y^2 + 2x - 3 = 0$

103. Parábola



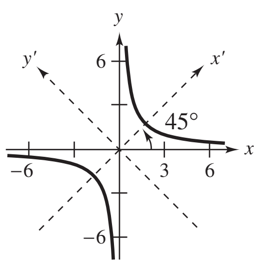
$2x^2 - 20x - y + 46 = 0$

105. Elipse

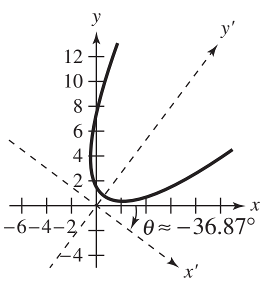


$4x^2 + y^2 + 32x + 4y + 63 = 0$

107. $\dfrac{(x')^2}{6} - \dfrac{(y')^2}{6} = 1$



109. $(x')^2 = 4(y' - 1)$



Capítulo 5

Sección 5.1 *(página 235)*

1. 5 **3.** 3 **5.** (a) $\dfrac{\sqrt{17}}{4}$ (b) $\dfrac{5\sqrt{41}}{8}$ (c) $\dfrac{\sqrt{577}}{8}$

7. (a) $\sqrt{6}$ (b) $2\sqrt{2}$ (c) $3\sqrt{2}$

9. (a) $\left(-\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$ (b) $\left(\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$

11. (a) $\left(\dfrac{3}{\sqrt{38}}, \dfrac{2}{\sqrt{38}}, -\dfrac{5}{\sqrt{38}}\right)$ (b) $\left(-\dfrac{3}{\sqrt{38}}, -\dfrac{2}{\sqrt{38}}, \dfrac{5}{\sqrt{38}}\right)$

13. $\left(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$ **15.** $\left(1, \sqrt{3}, 0\right)$

17. (a) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0, 2\right)$ (b) $(2, -6, 0, -8)$ **19.** $2\sqrt{2}$

21. 3

23. (a) -6 (b) 13 (c) 25 (d) $(-12, 18)$ (e) -30

25. (a) 0 (b) 14 (c) 6 (d) $\mathbf{0}$ (e) 0 **27.** -7

29. (a) $\|\mathbf{u}\| = 1.0843, \|\mathbf{v}\| = 0.3202$ (b) $(0, 0.7809, 0.6247)$
(c) $(-0.9223, -0.1153, -0.3689)$ (d) 0.1113
(e) 1.1756 (f) 0.1025

31. (a) $\|\mathbf{u}\| = 1.7321, \|\mathbf{v}\| = 2$ (b) $(-0.5, 0.7071, -0.5)$
(c) $(0, -0.5774, -0.8165)$ (d) 0 (e) 3 (f) 4

33. $|(3, 4) \cdot (2, -3)| \leq \|(3, 4)\| \, \|(2, -3)\|$
$6 \leq 5\sqrt{13}$

35. $|(1, 1, -2) \cdot (1, -3, -2)| \leq \|(1, 1, -2)\| \, \|(1, -3, -2)\|$
$2 \leq 2\sqrt{21}$

37. 1.713 radianes (98.13°) **39.** $\dfrac{7\pi}{12}$ (105°)

41. 1.080 radianes (61.87°) **43.** $\dfrac{\pi}{4}$ **45.** Ortogonal

47. Paralelo **49.** Ninguno **51.** Ninguno **53.** $\mathbf{v} = (t, 0)$

55. $\mathbf{v} = (t, s, -2t + s)$

57. $\|(5, 1)\| \leq \|(4, 0)\| + \|(1, 1)\|$
$\sqrt{26} \leq 4 + \sqrt{2}$

59. $\|(1, 2, -1)\| \leq \|(1, 1, 1)\| + \|(0, 1, -2)\|$
$\sqrt{6} \leq \sqrt{3} + \sqrt{5}$

61. $\|(2, 0)\|^2 = \|(1, -1)\|^2 + \|(1, 1)\|^2$
$4 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2$

63. $\|(7, 1, -2)\|^2 = \|(3, 4, -2)\|^2 + \|(4, -3, 0)\|^2$
$54 = \left(\sqrt{29}\right)^2 + 5^2$

65. (a) -6 (b) 13 (c) 25 (d) $\begin{bmatrix} -12 \\ 18 \end{bmatrix}$ (e) -30

67. (a) 0 (b) 14 (c) 6 (d) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (e) 0

69. Ortogonal; $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$

71. (a) Falso. Vea la "Definición de la longitud de un vector en R^n", página 226.
(b) Falso. Vea la "Definición de producto punto en R^n", página 229.

73. (a) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v}$ no tiene sentido, ya que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ es un escalar y $\mathbf{v}$ es un vector.
(b) $\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ no tiene sentido, ya que $\mathbf{u}$ es un vector y $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ es un escalar.

75. $\left(-\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right), \left(\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$

77. $11,877.50
Este valor da las ganancias totales obtenidas de la venta de hamburguesas y hot dogs.

79. 54.7° **81–85.** Prueba

87. $A\mathbf{x} = 0$ significa que el producto punto de cada renglón de A con la columna de $\mathbf{x}$ es cero. Por tanto, $\mathbf{x}$ es ortogonal a vectores renglón de A.

Sección 5.2 *(página 245)*

1–7. Demostración
9. Falla el axioma 4. $\langle(0, 1), (0, 1)\rangle = 0$, pero $(0, 1) \neq 0$.
11. Falla el axioma 4. $\langle(1, 1), (1, 1)\rangle = 0$, pero $(1, 1) \neq 0$.
13. El Axioma 1 falla. Si $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ y $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 1$ y $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle = 0$.
15. El Axioma 3 falla. Si $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$ y $c = 2$, $c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 2$ y $\langle c\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 4$.
17. (a) -33 (b) 5 (c) 13 (d) $2\sqrt{65}$
19. (a) 15 (b) $\sqrt{57}$ (c) 5 (d) $2\sqrt{13}$
21. (a) -34 (b) $\sqrt{97}$ (c) $\sqrt{101}$ (d) $\sqrt{266}$
23. (a) 0 (b) $8\sqrt{3}$ (c) $\sqrt{411}$ (d) $3\sqrt{67}$
25. (a) 3 (b) $\sqrt{6}$ (c) 3 (d) 3 **27.** Demostración
29. (a) -6 (b) $\sqrt{35}$ (c) $\sqrt{7}$ (d) $3\sqrt{6}$
31. (a) -5 (b) $\sqrt{39}$ (c) $\sqrt{5}$ (d) $3\sqrt{6}$ **33.** Demostración
35. (a) -4 (b) $\sqrt{11}$ (c) $\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{21}$
37. (a) 0 (b) $\sqrt{2}$ (c) $\sqrt{2}$ (d) 2
39. (a) 0 (b) $\sqrt{2}$ (c) $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ (d) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$
41. (a) $\dfrac{2}{e} \approx 0.736$ (b) $\dfrac{\sqrt{6}}{3} \approx 0.816$

(c) $\sqrt{\dfrac{e^2}{2} - \dfrac{1}{2e^2}} \approx 1.904$

(d) $\sqrt{\dfrac{e^2}{2} + \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{2e^2} - \dfrac{4}{e}} \approx 1.680$

43. 2.103 radianes (120.5°) **45.** 1.16 radianes (66.59°)
47. $\dfrac{\pi}{2}$ **49.** 1.23 radianes (70.53°) **51.** $\dfrac{\pi}{2}$
53. (a) $|\langle(5, 12), (3, 4)\rangle| \leq \|(5, 12)\|\,\|(3, 4)\|$

$$63 \leq (13)(5)$$

(b) $\|(5, 12) + (3, 4)\| \leq \|(5, 12)\| + \|(3, 4)\|$

$$8\sqrt{5} \leq 13 + 5$$

55. (a) $|(1, 0, 4) \cdot (-5, 4, 1)| \leq \sqrt{17}\sqrt{42}$

$$1 \leq \sqrt{714}$$

(b) $\|(-4, 4, 5)\| \leq \sqrt{17} + \sqrt{42}$

$$\sqrt{57} \leq \sqrt{17} + \sqrt{42}$$

57. (a) $|\langle 2x, 3x^2 + 1\rangle| \leq \|2x\|\,\|3x^2 + 1\|$

$$0 \leq (2)\left(\sqrt{10}\right)$$

(b) $\|2x + 3x^2 + 1\| \leq \|2x\| + \|3x^2 + 1\|$

$$\sqrt{14} \leq 2 + \sqrt{10}$$

59. (a) $|0(-3) + 3(1) + 2(4) + 1(3)| \leq \sqrt{14}\sqrt{35}$

$$14 \leq \sqrt{14}\sqrt{35}$$

(b) $\left\|\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}\right\| \leq \sqrt{14} + \sqrt{35}$

$$\sqrt{77} \leq \sqrt{14} + \sqrt{35}$$

61. (a) $|\langle \operatorname{sen} x, \cos x\rangle| \leq \|\operatorname{sen} x\|\,\|\cos x\|$

$$\frac{1}{4} \leq \left(\sqrt{\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}}\right)\left(\sqrt{\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}}\right)$$

(b) $\|\operatorname{sen} x + \cos x\| \leq \|\operatorname{sen} x\| + \|\cos x\|$

$$\sqrt{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}} \leq \sqrt{\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}}$$

63. (a) $|\langle x, e^x\rangle| \leq \|x\|\,\|e^x\|$

$$1 \leq \sqrt{\tfrac{1}{3}} \cdot \sqrt{\tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{2}}$$

(b) $\|x + e^x\| \leq \|x\| + \|e^x\|$

$$\sqrt{\tfrac{11}{6} + \tfrac{1}{2}e^2} \leq \sqrt{\tfrac{1}{3}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}e^2 - \tfrac{1}{2}}$$

65. Ya que

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \operatorname{sen} x\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x\Big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0$$

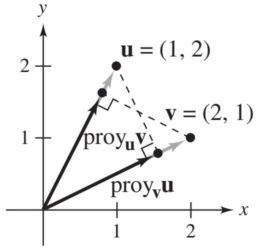
f y g son ortogonales.

67. Las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = \frac{1}{2}$ (5x3 – 3x) son ortogonales

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} x\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)\, dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(5x^4 - 3x^2)\, dx = \frac{1}{2}(x^5 - x^3)\Big]_{-1}^{1} = 0.$$

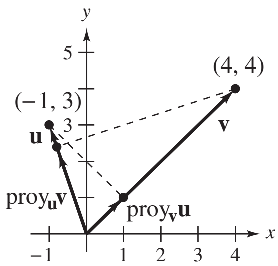
69. (a) $\left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$ (b) $\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$

(c)



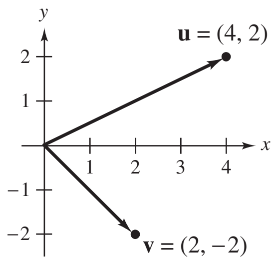
71. (a) $(1, 1)$ (b) $\left(-\frac{4}{5}, \frac{12}{5}\right)$

(c)



73. (a) $\left(0, \frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ (b) $\left(-\frac{5}{14}, -\frac{15}{14}, \frac{5}{7}\right)$
75. (a) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, -1\right)$ (b) $\left(0, -\frac{5}{46}, -\frac{15}{46}, \frac{15}{23}\right)$
77. $\operatorname{proy}_g f = \mathbf{0}$ **79.** $\operatorname{proy}_g f = \dfrac{2e^x}{e^2 - 1}$
81. $\operatorname{proy}_g f = \mathbf{0}$ **83.** $\operatorname{proy}_g f = -\operatorname{sen} 2x$
85. (a) Falso. Vea la introducción a esta sección, página 237.
(b) Falso. $\|\mathbf{v}\| = 0$ si y sólo si $\mathbf{v} = 0$
87. (a) $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 4(2) + 2(2)(-2) = 0 \implies \mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son ortogonales.

(b)



No ortogonales en el sentido euclidiano.

89–95. Prueba **97.** $c_1 = \frac{1}{4}, c_2 = 1$
99. $c_1 = \frac{1}{4}, c_2 = \frac{1}{16}$ **101.** Prueba

Sección 5.3 *(página 257)*

1. (a) Sí (b) No (c) Sí
3. (a) No (b) No (c) Sí
5. (a) Sí (b) Sí (c) Sí
7. (a) Sí (b) No (c) Sí
9. (a) Sí (b) Sí (c) Sí
11. (a) Sí (b) No (c) No
13. (a) Sí (b) Sí (c) No

15. (a) Prueba (b) $\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}\right), \left(\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}}\right)$

17. (a) Prueba (b) $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

19. El conjunto $\{1, x, x^2, x^3\}$ es ortogonal porque
$\langle 1, x\rangle = 0, \langle 1, x^2\rangle = 0, \langle 1, x^3\rangle = 0, \langle x, x^2\rangle = 0,$
$\langle x, x^3\rangle = 0, \langle x^2, x^3\rangle = 0.$
Además, el conjunto es ortonormal porque
$\|1\| = 1, \|x\| = 1, \|x^2\| = 1,$ and $\|x^3\| = 1.$
Por tanto, $\{1, x, x^2, x^3\}$ es una base ortonormal de P_3.

21. $\begin{bmatrix} \frac{4\sqrt{13}}{13} \\ \frac{7\sqrt{13}}{13} \end{bmatrix}$ **23.** $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{10}}{2} \\ -2 \\ -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix}$ **25.** $\begin{bmatrix} 11 \\ 2 \\ 15 \end{bmatrix}$

27. $\left\{\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)\right\}$ **29.** $\{(0, 1), (1, 0)\}$

31. $\left\{\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)\right\}$

33. $\left\{\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0\right), \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right), (0, 0, 1)\right\}$

35. $\left\{\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\}$

37. $\left\{\left(-\frac{4\sqrt{2}}{7}, \frac{3\sqrt{2}}{14}, \frac{5\sqrt{2}}{14}\right)\right\}$

39. $\left\{\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right), \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0\right)\right\}$

41. $\left\{\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, 0\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right),\right.$
$\left.\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)\right\}$

43. $\left\{\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right\}$

45. $\langle x, 1\rangle = \int_{-1}^{1} x\, dx = \frac{x^2}{2}\Big]_{-1}^{1} = 0$

47. $\langle x^2, 1\rangle = \int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$

49. $\langle x, x\rangle = \int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$

51. $\left\{\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}, 0, \frac{\sqrt{10}}{10}, 0\right), \left(0, -\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)\right\}$

53. $\left\{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, 0, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)\right\}$

55. $\left\{\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{30}}{30}, \frac{\sqrt{30}}{15}, \frac{\sqrt{30}}{6}\right)\right\}$

57. (a) Verdadero. Vea las “Definiciones de conjuntos ortogonales y ortonormales”, página 248.
(b) Falso. Vea Comentario en la página 254.

59. Orthonormal **61.** $\{x^2, x, 1\}$ **63.** Orthonormal
65. Demostración **67.** Demostración
69. $N(A)$ base: $\{(3, -1, 2)\}$ **71.** Demostración
$N(A^T)$ base: $\{(-1, -1, 1)\}$
$R(A)$ base: $\{(1, 0, 1), (1, 2, 3)\}$
$R(A^T)$ base: $\{(1, 1, -1), (0, 2, 1)\}$

Sección 5.4 *(página 269)*

1. $y = 1 + 2x$ **3.** No es colineal **5.** No ortogonal.

7. Ortonormal **9.** (a) Gen $\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ (b) R^3

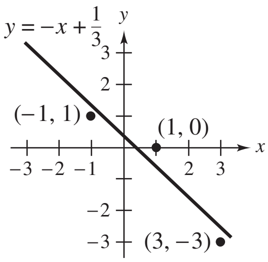
11. (a) Gen $\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ (b) R^4 **13.** Gen $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

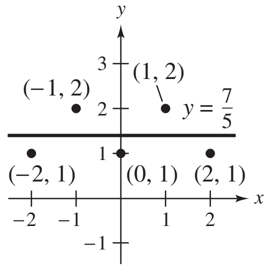
15. $\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ **17.** $\begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{13}{3} \end{bmatrix}$

19. $N(A)$ base: $\{(-3, 0, 1)\}$
$N(A^T) = \{(0, 0)\}$
$R(A)$ base: $\{(1, 0), (2, 1)\} = R^2$
$R(A^T)$ base: $\{(1, 2, 3), (0, 1, 0)\}$

21. $N(A)$ base: $\{(-1, -1, 0, 1), (0, -1, 1, 0)\}$
$N(A^T)$ base: $\{(-1, -1, 1, 0), (-1, -2, 0, 1)\}$
$R(A)$ base: $\{(1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 2)\}$
$R(A^T)$ base: $\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 1)\}$

23. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ **25.** $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ **27.** $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

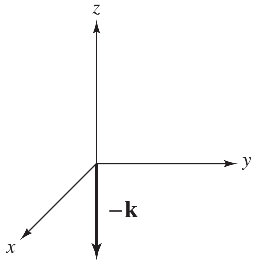
29.


31.


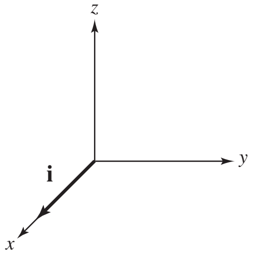
33. $y = x^2 - x$ **35.** $y = \frac{3}{7}x^2 + \frac{6}{5}x + \frac{26}{35}$
37. $y = 33.68 + 3.78x$; 90,380
39. $\ln y = -0.14 \ln x + 5.7$ ó $y = 298.9x^{-0.14}$.
41. (a) Falso. El complemento ortogonal de R^n es $\{\mathbf{0}\}$.
(b) Verdadero. Vea la “Definición de suma directa”, página 261.
43. Prueba **45.** Prueba

Sección 5.5 *(página 282)*

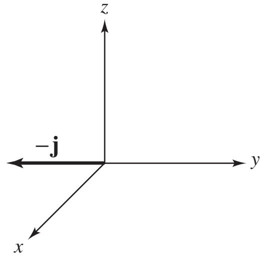
1. $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$



3. $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$



5. $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$



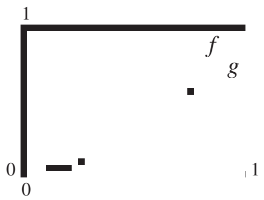
7. (a) $-\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$
(b) $\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$
(c) $\mathbf{0}$

9. (a) $5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$
(b) $-5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$
(c) $\mathbf{0}$

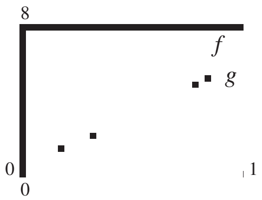
11. (a) $-14\mathbf{i} + 13\mathbf{j} + 17\mathbf{k}$
(b) $14\mathbf{i} - 13\mathbf{j} - 17\mathbf{k}$
(c) $\mathbf{0}$

13. $(-2, -2, -1)$ **15.** $(-8, -14, 54)$ **17.** $(-1, -1, -1)$
19. $(-1, 12, -2)$ **21.** $(-2, 3, -1)$ **23.** $(5, -4, -3)$
25. $(2, -1, -1)$ **27.** $(1, -1, -3)$ **29.** $(1, -5, -3)$
31. $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ **33.** $\frac{1}{\sqrt{19}}\mathbf{i} - \frac{3}{\sqrt{19}}\mathbf{j} + \frac{3}{\sqrt{19}}\mathbf{k}$
35. $-\frac{71}{\sqrt{7602}}\mathbf{i} - \frac{44}{\sqrt{7602}}\mathbf{j} + \frac{25}{\sqrt{7602}}\mathbf{k}$ **37.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$
39. 1 **41.** $6\sqrt{5}$ **43.** $2\sqrt{83}$ **45.** 1 **47.** -1
49. Prueba **51.** $\frac{9\sqrt{6}}{2}$ **53–61.** Prueba

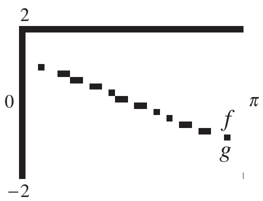
63. (a) $g(x) = x - \frac{1}{6}$
(b)



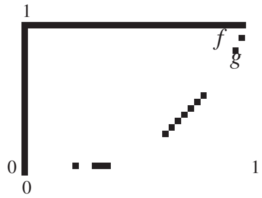
65. (a) $g(x) = 6x + \frac{1}{2}(e^2 - 7)$
(b)



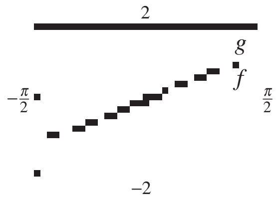
67. (a) $g(x) = \frac{12}{\pi^3}(\pi - 2x)$
(b)



69. (a) $g(x) = 1.5x^2 - 0.6x + 0.05$
(b)



71. (a) $g(x) = \frac{24}{\pi^3}x$
(b)



73. $g(x) = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \frac{2}{3} \operatorname{sen} 3x$
75. $g(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \cos x + \cos 2x + \frac{4}{9} \cos 3x$
77. $g(x) = \frac{1}{2\pi}(1 - e^{-2\pi})(1 + \cos x + \operatorname{sen} x)$
79. $g(x) = \frac{1 - e^{-4\pi}}{20\pi}(5 + 8 \cos x + 4 \operatorname{sen} x)$
81. $g(x) = (1 + \pi) - 2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x - \frac{2}{3} \operatorname{sen} 3x$
83. $g(x) = \operatorname{sen} 2x$
85. $g(x) = 2\left(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \cdots + \frac{\operatorname{sen} nx}{n}\right)$
87. $\frac{1 - e^{-2\pi}}{2\pi} + \frac{1 - e^{-2\pi}}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j^2 + 1}\cos jx + \frac{j}{j^2 + 1}\operatorname{sen} jx\right)$

Ejercicios de repaso *(página 284)*

1. (a) $\sqrt{5}$ (b) $\sqrt{17}$ (c) 6 (d) $\sqrt{10}$
3. (a) $\sqrt{6}$ (b) $\sqrt{14}$ (c) 7 (d) $\sqrt{6}$
5. (a) $\sqrt{6}$ (b) $\sqrt{3}$ (c) -1 (d) $\sqrt{11}$
7. (a) $\sqrt{7}$ (b) $\sqrt{7}$ (c) 6 (d) $\sqrt{2}$
9. $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{38}$; $\mathbf{u} = \left(\frac{5}{\sqrt{38}}, \frac{3}{\sqrt{38}}, -\frac{2}{\sqrt{38}}\right)$
11. $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{6}$; $\mathbf{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$
13. (a) $(4, 4, 3)$ (b) $\left(-2, -2, -\frac{3}{2}\right)$ (c) $(-16, -16, -12)$
15. $\frac{\pi}{2}$ **17.** $\frac{\pi}{12}$ **19.** π **21.** $(s, 3t, 4t)$
23. $(2r - 2s - t, r, s, t)$ **25.** (a) -2 (b) $\frac{3\sqrt{11}}{2}$
27. Desigualdad de Triángulo:

$$\left\|\left(2, -\frac{1}{2}, 1\right) + \left(\frac{3}{2}, 2, -1\right)\right\| \le \left\|\left(2, -\frac{1}{2}, 1\right)\right\| + \left\|\left(\frac{3}{2}, 2, -1\right)\right\|$$
$$\frac{\sqrt{67}}{2} \le \sqrt{\frac{15}{2}} + \sqrt{\frac{53}{4}}$$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\left|\left\langle\left(2, -\frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{3}{2}, 2, -1\right)\right\rangle\right| \le \left\|\left(2, -\frac{1}{2}, 1\right)\right\| \left\|\left(\frac{3}{2}, 2, -1\right)\right\|$$
$$2 \le \sqrt{\frac{15}{2}}\sqrt{\frac{53}{4}} \approx 9.969$$

29. (a) 0 (b) Ortogonal
(c) Debido a que $\langle f, g\rangle = 0$, se sigue que $|\langle f, g\rangle| \le \|f\|\|g\|$.

31. $\left(-\frac{9}{13}, \frac{45}{13}\right)$ **33.** $\left(\frac{24}{29}, \frac{60}{29}\right)$ **35.** $\left(\frac{18}{29}, \frac{12}{29}, \frac{24}{29}\right)$

37. $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$

39. $\left\{\left(0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), (1, 0, 0), \left(0, \frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)\right\}$

41. (a) $(-1, 4, -2) = 2(0, 2, -2) - (1, 0, -2)$

(b) $\left\{\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$

(c) $(-1, 4, -2) = 3\sqrt{2}\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

43. $\langle f, g\rangle = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \cos x \, dx$
$= \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x \Big]_0^{\pi}$
$= 0$

45. (a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ (c) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{105}}$ (d) $\left\{\sqrt{3}x, \frac{\sqrt{7}}{2}(5x^3 - 3x)\right\}$

47. $\left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right\}$
(La respuesta no es única.)

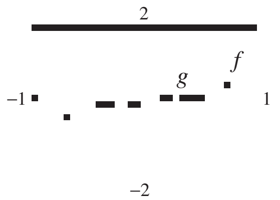
49–57. Demostración **59.** Gen $\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$

61. $N(A)$ base: $\{(1, 0, -1)\}$
$N(A^T) = \{(3, 1, 0)\}$
$R(A)$ base: $\{(0, 0, 1), (1, -3, 0)\}$
$R(A^T)$ base: $\{(0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$

63. $y = 13.74x + 387.4$; 593.5 trillón de Btu

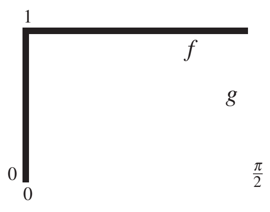
65. $(0, 1, -1)$ **67.** $13\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - \mathbf{k}$ **69.** 1 **71.** 6 **73.** 7

75. (a) $g(x) = \frac{3}{5}x$ (b)



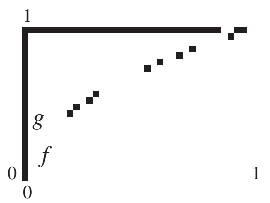
77. (a) $g(x) = \frac{2}{\pi}$

(b)



79. (a) $g(x) = \frac{2}{35}(-10x^2 + 24x + 3)$

(b)

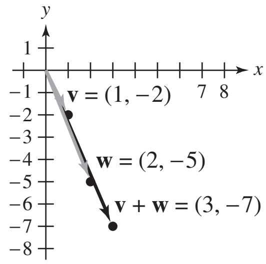


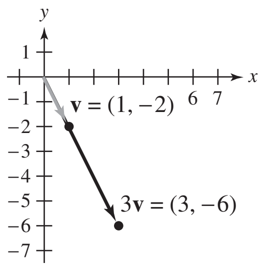
81. $g(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos x$

83. (a) Verdadero. Véase el Teorema 5.18, página 273.
(b) Falso. Véase el Teorema 5.17, página 272.
(c) Verdadero. Véase la discusión previa al Teorema 5.19, página 277.

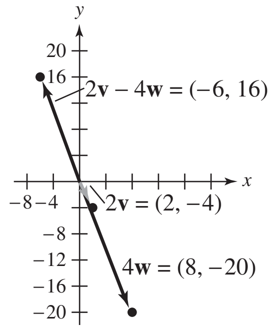
Examen acumulativo capítulos 4 y 5 *(página 289)*

1. (a) (3, –7) (b) (3, –6)





(c) (–6, 16)



2. $\mathbf{w} = 3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \frac{2}{3}\mathbf{v}_3$ **3.** No es posible

4. $\mathbf{v} = 5\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 + 2\mathbf{u}_4 - 5\mathbf{u}_5 + 3\mathbf{u}_6$ **5.** Demostración

6. Sí **7.** No **8.** Sí

9. (a) Un conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es linealmente independiente si la ecuación vectorial $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = 0$ tiene sólo la solución trivial.
(b) Linealmente dependiente.

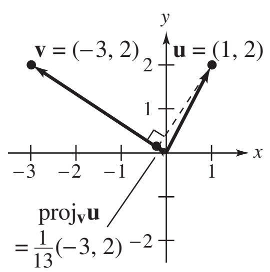
10. (a) Un conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ en un espacio vectorial V es una base de V si el conjunto es linealmente independiente y genera a V.
(b) Sí (c) Sí

11. $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$ **12.** $\begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix}$ **13.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

14. (a) $\sqrt{5}$ (b) $\sqrt{11}$ (c) 4 (d) 1.0723 radianes(61.44°)

15. $\frac{11}{12}$ **16.** $\left\{(1, 0, 0), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$

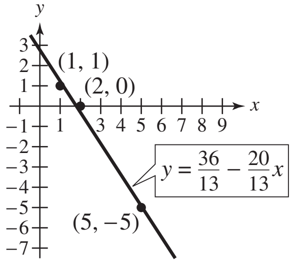
17. $\frac{1}{13}(-3, 2)$



18. $N(A)$ base: $\{(0, 1, -1, 0)\}$
$N(A^T) = \{(0, 0, 0)\}$
$R(A) = R^3$
$R(A^T)$ base: $\{(0, 1, 1, 0), (-1, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 1)\}$

19. Gen$\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ **20.** Prueba.

21. $y = \frac{36}{13} - \frac{20}{13}x$



22. (a) 3 (b) Una base consta de los primeros tres renglones de A.
(c) Una base consta de las columnas 1, 3 y 4 de A.
(d) $\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$
(e) No (f) No (g) Sí (h) No

23. No. Dos planos pueden intersectar en una recta, pero no en un único punto.

24. Demostración.

Capítulo 6

Sección 6.1 *(página 300)*

1. (a) $(-1, 7)$ (b) $(11, -8)$
3. (a) $(1, 5, 4)$ (b) $(5, -6, t)$
5. (a) $(-14, -7)$ (b) $(1, 1, t)$
7. (a) $(0, 2, 1)$ (b) $(-6, 4)$
9. No lineal **11.** Lineal **13.** No lineal
15. No lineal **17.** Lineal **19.** Lineal **21.** Lineal
23. $T(1, 4) = (-3, 5)$ **25.** $(3, 11, -8)$
$T(-2, 1) = (-3, -1)$
27. $(0, -6, 8)$ **29.** $(5, 0, 1)$ **31.** $\left(2, \frac{5}{2}, 2\right)$
33. $T\colon R^2 \to R^2$ **35.** $T\colon R^4 \to R^4$ **37.** $T\colon R^4 \to R$
39. (a) $(-1, -1)$ (b) $(-1, -1)$ (c) $(0, 0)$
41. (a) $(-1, 1, 2, 1)$ (b) $\left(-1, 1, \frac{1}{2}, 1\right)$
43. (a) $(-1, 9, 9)$ (b) $(-4t, -t, 0, t)$
45. (a) $\left(0, 4\sqrt{2}\right)$ (b) $\left(2\sqrt{3} - 2,\ 2\sqrt{3} + 2\right)$
(c) $\left(-\frac{5}{2}, \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$
47. $A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$; rotación en sentido de las manecillas del reloj a través de θ
49. Proyección sobre el plano xz
51. No es una transformación lineal **53.** Transformación lineal
55. $x^2 - 3x - 5$
57. Verdadero. Dx es una transformación lineal y conserva la suma y la multiplicación por un escalar.
59. Falso, ya que $\operatorname{sen} 2x \neq 2 \operatorname{sen} x$.
61. $g(x) = x^2 + x + C$ **63.** $g(x) = -\cos x + C$
65. (a) -1 (b) $\frac{1}{12}$ (c) -4
67. (a) Falso, ya que $\cos(x_1 + x_2) \neq \cos x_1 + \cos x_2$.
(b) Verdadero. Vea el análisis que sigue al ejemplo 10, página 299.
69. (a) $(x, 0)$ (b) Proyección sobre el eje de las x.
71. (a) $\left(\frac{1}{2}(x + y), \frac{1}{2}(x + y)\right)$ (b) $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ (c) Demostración
73. $A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \end{bmatrix} = T(\mathbf{u})$
75. (a) Prueba (b) Prueba (c) $(t, 0)$ (d) (t, t)
77–83. Pruebas

Sección 6.2 *(página 312)*

1. R^3 **3.** $\{(0, 0, 0, 0)\}$
5. $\{a_1x + a_2x^2 + a_3x^3\colon a_1, a_2, a_3$ son reales$\}$
7. $\{a_0\colon a_0$ es real$\}$ **9.** $\{(0, 0)\}$
11. (a) $\{(0, 0)\}$ (b) $\{(1, 0), (0, 1)\}$
13. (a) $\{(-4, -2, 1)\}$ (b) $\{(1, 0), (0, 1)\}$
15. (a) $\{(0, 0)\}$ (b) $\{(1, -1, 0), (0, 0, 1)\}$
17. (a) $\{(-1, 1, 1, 0)\}$
(b) $\{(1, 0, -1, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$
19. (a) $\{(0, 0)\}$ (b) 0 (c) R^2 (d) 2
21. (a) $\{(0, 0)\}$ (b) 0
(c) $\{(4s, 4t, s - t)\colon s$ y t son reales$\}$ (d) 2
23. (a) $\{(t, -3t)\colon t$ es real$\}$ (b) 1
(c) $\{(3t, t)\colon t$ es real$\}$ (d) 1
25. (a) $\{(s + t, s, -2t)\colon s$ y t son reales$\}$ (b) 2
(c) $\{(2t, -2t, t)\colon t$ es real$\}$ (d) 1
27. (a) $\{(-11t, 6t, 4t)\colon t$ es real$\}$ (b) 1 (c) R^2 (d) 2
29. (a) $\{(2s - t, t, 4s, -5s, s)\colon s$ y t son reales$\}$ (b) 2
(c) $\{(7r, 7s, 7t, 8r + 20s + 2t)\colon r, s$ y t son reales$\}$ (d) 3
31. Nulidad = 1
Kernel: una recta
Rango: un plano
33. Nulidad = 3
Kernel: R^3
Rango: $\{(0, 0, 0)\}$
35. Nulidad = 0
Kernel: $\{(0, 0, 0)\}$
Rango: R^3
37. Nulidad = 2
Kernel: $\{(x, y, z)\colon x + 2y + 2z = 0\}$ (plano)
Rango: $\{(t, 2t, 2t), t$ es real$\}$ (recta)
39. 2 **41.** 4
43. Ya que $|A| = -1 \neq 0$, la ecuación homogénea $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene sólo la solución trivial. Así, $\ker(T) = \{(0, 0)\}$ y T es uno a uno (por el teorema 6.6). Además, como
$\text{rango}(T) = \dim(R^2) - \text{nulidad}(T) = 2 - 0 = 2 = \dim(R^2)$
T es sobre (por el teorema 6.7
45. Ya que $|A| = -1 \neq 0$, la ecuación homogénea $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene sólo la solución trivial. Así, $\ker(T) = \{(0, 0, 0)\}$ y T es uno a uno (por el teorema 6.6). Además, como
$\text{rango}(T) = \dim(R^3) - \text{nulidad}(T) = 3 - 0 = 3 = \dim(R^3)$
T es sobre (por el teorema 6.7)
47. Uno a uno y sobre **49.** Uno a uno

	Cero	Base estándar
51. (a)	$(0, 0, 0, 0)$	$\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$
(b)	$\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$	$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$
(c)	$\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$	$\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}$
(d)	$p(x) = 0$	$\{1, x, x^2, x^3\}$
(e)	$(0, 0, 0, 0, 0)$	$\{(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0)\}$

53. El conjunto de funciones constantes: $p(x) = a_0$

55. (a) Rango $= 1$, nulidad $= 2$ (b) $\{(1, 0, -2), (1, 2, 0)\}$

57. (a) Rango $= n$ (b) Rango $< n$

59. $T(A) = \mathbf{0} \implies A - A^T = \mathbf{0} \implies A = A^T$
Entonces, $\ker(T) = \{A\colon\ A = A^T\}$.

61. (a) Falso. Vea la "Definición de kernel de una transformación lineal", página 303.
(b) Falso. Vea el teorema 6.4, página 306.
(c) Verdadero. Vea el análisis previo a la "Definición de isomorfismo", página 311.

63. Prueba **65.** Prueba

67. Si T es sobre, entonces $m \geq n$.
Si T es uno a uno, entonces $m \leq n$.

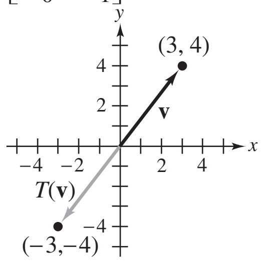
Sección 6.3 *(página 322)*

1. $\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & -2\end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\1 & -1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix}3 & 0 & -2\\0 & 2 & -1\end{bmatrix}$

7. $(1, 4)$ **9.** $(4, -2, -2)$

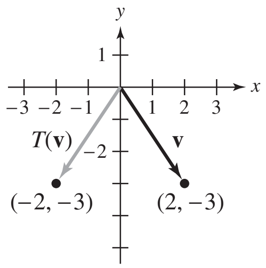
11. (a) $\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$ (b) $(-3, -4)$

(c)



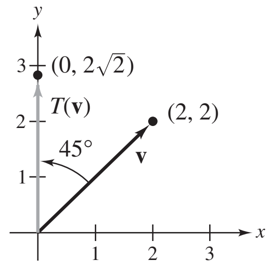
13. (a) $\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ (b) $(-2, -3)$

(c)



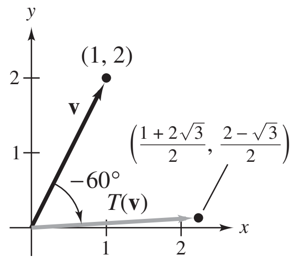
15. (a) $\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$ (b) $(0, 2\sqrt{2})$

(c)



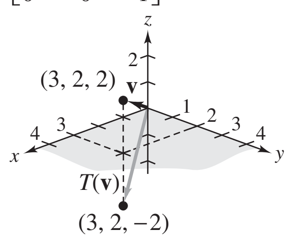
17. (a) $\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ (b) $\left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}, 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(c)



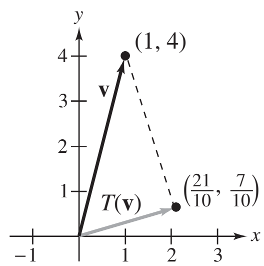
19. (a) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\end{bmatrix}$ (b) $(3, 2, -2)$

(c)



21. (a) $\begin{bmatrix}\frac{9}{10} & \frac{3}{10}\\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10}\end{bmatrix}$ (b) $\left(\frac{21}{10}, \frac{7}{10}\right)$

(c)



23. (a) $\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\3 & 0 & -2\\2 & -1 & 1\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}9\\5\\-1\end{bmatrix}$

25. (a) $\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\1 & 2 & 0 & -1\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}1\\1\\2\\-1\end{bmatrix}$

27. $A = \begin{bmatrix}2 & 3\\0 & 0\end{bmatrix}, A' = \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}$

29. $A = \begin{bmatrix}-4 & -1\\-2 & 5\end{bmatrix}, A' = \begin{bmatrix}5 & 3 & 2\\4 & -3 & 1\\-2 & -3 & -1\end{bmatrix}$

31. $T^{-1}(x, y) = \left(-\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right)$ **33.** T es no invertible.

35. $T^{-1}(x_1, x_2, x_3) = (x_1, -x_1 + x_2, -x_2 + x_3)$

37. (a) y (b) $(9, 5, 4)$ **39.** (a) y (b) $(2, -4, -3, 3)$

41. (a) y (b) $(9, 16, -20)$

43. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **45.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

47. $3 - 2e^x - 2xe^x$

49. (a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ (b) $6x - x^2 + \frac{3}{4}x^4$

51. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) Prueba

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

53. (a) Verdadero. Véase el Teorema 6.10 en la página 314.
(b) Falso. Véase la oración previa a "Definición de Transformación Lineal Inversa," página 318.

55. Prueba

57. Algunas veces es preferible usar una base no estándar. Por ejemplo, algunas transformaciones lineales tienen matrices diagonales representativas relativas una base no estándar.

Sección 6.4 *(página 328)*

1. $A' = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ \frac{5}{3} & -1 \end{bmatrix}$ **3.** $A' = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ -\frac{13}{3} & \frac{16}{3} \end{bmatrix}$

5. $A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **7.** $A' = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & \frac{10}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$

9. (a) $\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, [T(\mathbf{v})]_B = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$

(c) $A' = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{4}{3} \\ 9 & 7 \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -\frac{8}{3} \\ 5 \end{bmatrix}$

11. (a) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, [T(\mathbf{v})]_B = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c) $A' = \begin{bmatrix} -7 & -2 \\ 27 & 8 \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{9}{8} & -\frac{5}{8} \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$

13. (a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (b) $[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, [T(\mathbf{v})]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

(c) $A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12 & 7 \\ -20 & -11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 5 & 8 & 0 \\ 10 & 4 & 0 \\ 0 & 12 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 0 & 9 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

21. Prueba **23.** Prueba **25.** I_n **27–33.** Prueba

35. La matriz para I relativa a B y B' es la matriz cuadrada cuyas columnas son las coordenadas $\mathbf{v}1, \ldots, \mathbf{v}n$ relativas a la base normal. La matriz I relativa a B o a B' es la matriz identidad.

37. (a) Verdadero. Véase la discusión previa al Ejemplo 1, página 324.
(b) Falso. Véase la oración que sigue a la demostración del Teorema 6.13, página 326.

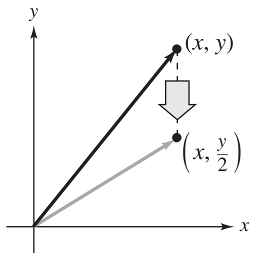
Sección 6.5 *(página 335)*

1. (a) $(3, -5)$ (b) $(2, 1)$ (c) $(a, 0)$
(d) $(0, -b)$ (e) $(-c, -d)$ (f) (f, g)

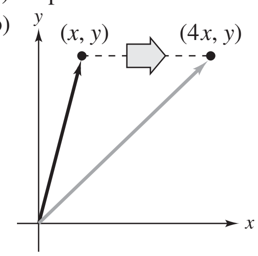
3. (a) $(1, 0)$ (b) $(3, -1)$ (c) $(0, a)$
(d) $(b, 0)$ (e) $(d, -c)$ (f) $(-g, f)$

5. (a) $(2x, y)$ (b) Expansión horizontal

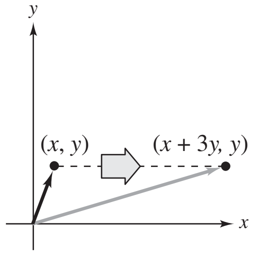
7. (a) Contracción vertical
(b)



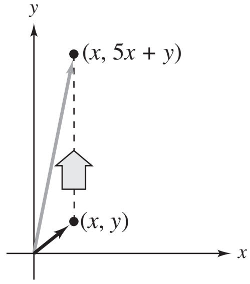
9. (a) Expansión horizontal
(b)



11. (a) Deformación horizontal
(b)



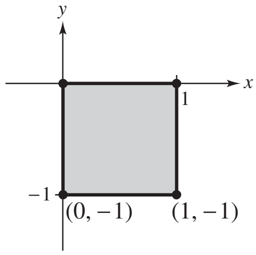
13. (a) Deformación vertical
(b)



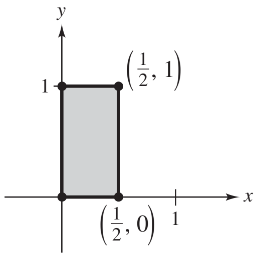
15. $\{(0, t): t \text{ es real}\}$ **17.** $\{(t, t): t \text{ es real}\}$

19. $\{(t, 0): t$ es real **21.** $\{(t, 0): t \text{ es real}\}$

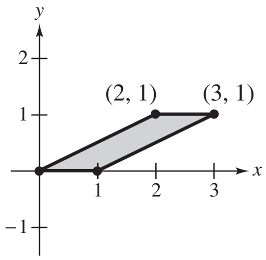
23.



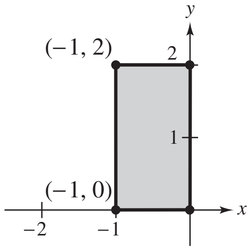
25.



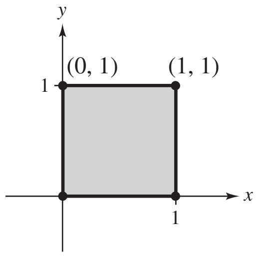
27.



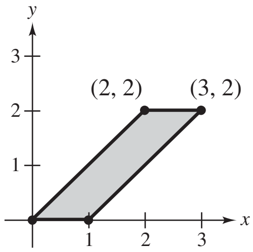
29.



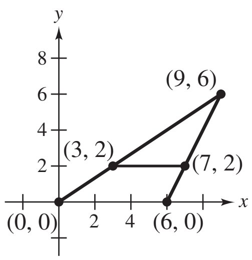
31.



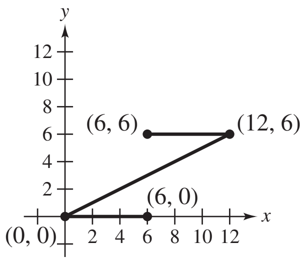
33.



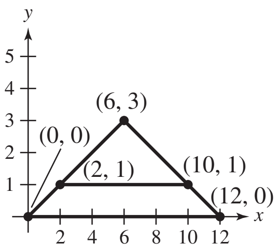
35. (a)



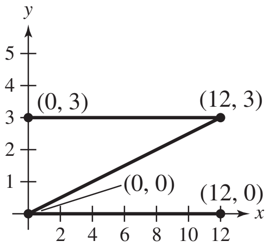
(b)



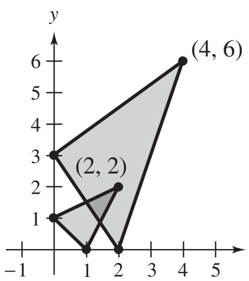
37. (a)



(b)



39. $T(1, 0) = (2, 0)$, $T(0, 1) = (0, 3)$, $T(2, 2) = (4, 6)$



41. Expansión horizontal. **43.** Deformación horizontal.

45. Reflexión en el eje x seguida por una expansión vertical (en cualquier orden)

47. Deformación vertical seguido por una expansión horizontal.

49. $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **51.** $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

53. $\left(\left(\sqrt{3} - 1\right)/2, \left(\sqrt{3} + 1\right)/2, 1\right)$

55. $\left(\left(1 + \sqrt{3}\right)/2, 1, \left(1 - \sqrt{3}\right)/2\right)$

57. 90° sobre el eje x **59.** 180° sobre el eje y

61. 90° sobre el eje z

63. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $(1, -1, -1)$

65. $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$; $\left(\frac{3\sqrt{3} - 1}{4}, \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3} - 1}{4}\right)$

67. $\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$; $\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{3} - 1}{2}\right)$

Ejercicios de repaso *(página 337)*

1. (a) $(2, -4)$ (b) $(4, 4)$

3. (a) $(0, -1, 7)$ (b) $\{(t - 3, 5 - t, t)\text{: } t \text{ es real}\}$

5. Lineal, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ **7.** Lineal, $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

9. No lineal **11.** Lineal, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

13. $T(1, 1) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $T(0, 1) = (1, 1)$

15. $T(0, -1) = (-1, -2)$

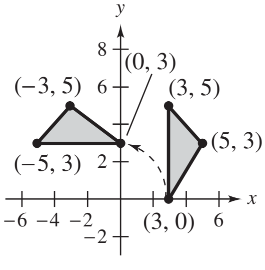
17. (a) $T: R^3 \rightarrow R^2$ (b) $(3, -12)$
(c) $\left\{\left(-\frac{5}{2}, 3 - 2t, t\right)\text{: } t \text{ es real}\right\}$

19. (a) $T: R^2 \rightarrow R^1$ (b) 5 (c) $\{(4 - t, t)\text{: } t \text{ es real}\}$

21. (a) $T: R^3 \rightarrow R^3$ (b) $(-2, -4, -5)$ (c) $(2, 2, 2)$

23. (a) $T: R^2 \rightarrow R^3$ (b) $(8, 10, 4)$ (c) $(1, -1)$

25.



27. (a) $\{(-2, 1, 0, 0), (2, 0, 1, -2)\}$ (b) $\{(5, 0, 4), (0, 5, 8)\}$

29. (a) $\{\mathbf{0}\}$ (b) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

31. (a) $\{(0, 0)\}$ (b) 0 (c) gen$\left\{\left(1, 0, \frac{1}{2}\right), \left(0, 1, -\frac{1}{2}\right)\right\}$ (d) 2

33. (a) $\{(-3t, 3t, t)\}$ (b) 1
(c) gen$\{(1, 0, -1), (0, 1, 2)\}$ (d) 2

35. 3 **37.** 2 **39.** $A^2 = I$ **41.** $A^3 = \begin{bmatrix} \cos 3\theta & -\operatorname{sen} 3\theta \\ \operatorname{sen} 3\theta & \cos 3\theta \end{bmatrix}$

43. $A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

45. T no tiene inversa. **47.** $T^{-1}(x, y) = (x, -y)$

49. (a) Uno a uno (b) Sobre (c) Invertible

51. (a) No es uno a uno (b) Sobre (c) No es invertible

53. (a) y (b) $(0, 1, 1)$ **55.** $A' = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

57. $\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{5}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 & -19 \\ 11 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

59. (a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$ (b) Las respuestas pueden variar.

(c) Las respuestas pueden variar.

61. Prueba **63.** Prueba

65. (a) Prueba (b) Rango = 1, nulidad = 3

(c) $\{1 - x, 1 - x^2, 1 - x^3\}$

67. $\operatorname{Ker}(T) = \{\mathbf{v}: \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \rangle = 0\}$

Rango $= R$

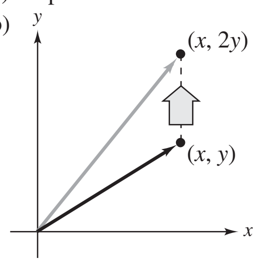
Rango $= 1$

Nulidad $= \dim(V) - 1$

69. A pesar de que no son iguales, tienen la misma dimensión (4) y son isomórficos.

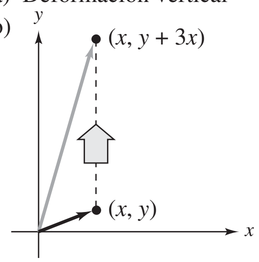
71. (a) Expansión vertical

(b)



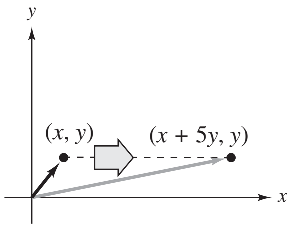
73. (a) Deformación vertical

(b)

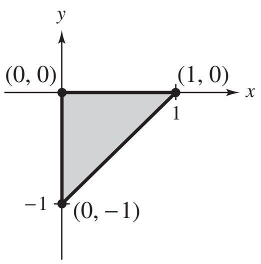


75. (a) Deformación horizontal

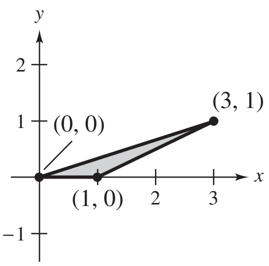
(b)



77.



79.



81. Reflexión en la recta $y = x$ seguida por una expansión horizontal.

83. $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \left(\sqrt{2}, 0, 1\right)$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \left(1, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-\sqrt{3}+1}{2}\right)$

. $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ **89.** $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

91. $(0, 0, 0), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(0, \sqrt{2}, 0\right),$

$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), (0, 0, 1), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right),$

$\left(0, \sqrt{2}, 1\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$

93. $(0, 0, 0), (1, 0, 0), \left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right),$

$\left(0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$

$\left(1, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right), \left(0, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

95. (a) Falso. Vea “Matrices elementales para transformaciones lineales en el plano”, página 330.

(b) Verdadero. Vea “Matrices elementales para transformaciones lineales en el plano”, página 330.

(c) Verdadero. Vea el análisis siguiente al ejemplo 4, página 334.

97. (a) Falso. Vea los “Comentarios”, página 294.

(b) Falso. Vea el teorema 6.7, página 310.

(c) Verdadero. Vea el análisis siguiente al ejemplo 5, página 327.

Capítulo 7

Sección 7.1 *(página 350)*

1. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

9. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ -c \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} c \\ -c \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c \\ 2c \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix}$

11. (a) No (b) Sí (c) Sí (d) No

13. (a) Sí (b) No (c) Sí (d) Sí

15. $\lambda = 1, (t, 0); \lambda = -1, (0, t)$

17. (a) $\lambda(\lambda - 7) = 0$ (b) $\lambda = 0, (1, 2); \lambda = 7, (3, -1)$

19. (a) $\lambda^2 - \frac{1}{4} = 0$ (b) $\lambda = -\frac{1}{2}, (1, 1); \lambda = \frac{1}{2}, (3, 1)$

21. (a) $(\lambda - 2)(\lambda - 4)(\lambda - 1) = 0$

(b) $\lambda = 4, (7, -4, 2); \lambda = 2, (1, 0, 0); \lambda = 1, (-1, 1, 1)$

23. (a) $(\lambda + 3)(\lambda - 3)^2 = 0$

(b) $\lambda = -3, (1, 1, 3); \lambda = 3, (1, 0, -1), (1, 1, 0)$

25. (a) $(\lambda - 4)(\lambda - 6)(\lambda + 2) = 0$

(b) $\lambda = -2, (3, 2, 0); \lambda = 4, (5, -10, -2);$
$\lambda = 6, (1, -2, 0)$

27. (a) $(\lambda - 2)^2(\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0$

(b) $\lambda = 2, (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0); \lambda = 4, (0, 0, 1, 1);$
$\lambda = -1, (0, 0, 1, -4)$

29. $\lambda = -2, 1$ **31.** $\lambda = 4, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ **33.** $\lambda = -1, 4, 4$

35. $\lambda = 0, 0, 0, 21$ **37.** $\lambda = 0, 0, 3, 3$ **39.** $\lambda = 2, 3, 1$

41. $\lambda = -2, 4, -3, -3$

43. (a) $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 4$

(b) $B_1 = \{(2, -1)\}, B_2 = \{(1, -1)\}$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

45. (a) $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$

(b) $B_1 = \{(1, 0, 1)\}, B_2 = \{(2, 1, 0)\}, B_3 = \{(1, 1, 0)\}$

(c) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

47. $\lambda^2 - 6\lambda + 8$ **49.** $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 15\lambda - 27$

51.

Ejercicio	(a) Traza de A	(b) Determinante de A
17	7	0
19	0	$-\frac{1}{4}$
21	7	8
23	3	-27
25	8	-48
27	7	-16

53–61. Pruebas **63.** $a = 0,\ d = 1$ o $a = 1,\ d = 0$

65. (a) Falso. $\mathbf{x}$ debe ser distinta de cero.

(b) Verdadero. Vea el teorema 7.2, página 345.

67. Dim $= 3$ **69.** Dim $= 1$

71. $T(e^x) = \dfrac{d}{dx}[e^x] = e^x = 1(e^x)$

73. $\lambda = -2, 3 + 2x; \lambda = 4, -5 + 10x + 2x^2; \lambda = 6, -1 + 2x$

75. $\lambda = 0, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \lambda = 3, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

77. $\lambda = 0, 1$ **79.** Prueba

Sección 7.2 *(página 360)*

1. (a) $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ (b) $\lambda = 1, -2$

3. (a) $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

(b) $\lambda = 2, -3$

5. (a) $P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{12} & 0 \end{bmatrix}, P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(b) $\lambda = 5, 3, -1$

7. $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (La respuesta no es única.)

9. $P = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (La respuesta no es única.)

11. $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (La respuesta no es única.)

13. A no es diagonalizable.

15. Este es el único eigenvalor, $\lambda = 0$ y la dimensión de su eigenespacio es 1. La matriz no es diagonalizable.

17. Este es el único eigenvalor, $\lambda = 1$, y la dimensión de su eigenespacio es 1. La matriz no es diagonalizable.

19. Hay dos eigenvalores, 1 y 2. La dimensión del eigenespacio para el eigenvalor repetido 1 es 1. La matriz no es diagonalizable.

21. Hay dos eigenvalores repetidos, 0 y 3. El eigenespacio asociado con 3 es de dimensión 1. La matriz no es diagonalizable.

23. $\lambda = 0, 2$ La matriz es diagonalizable.

25. $\lambda = 0, -2$

El número de eigenvalores es insuficiente para garantizar la diagonalizabilidad.

27. $\{(1, -1), (1, 1)\}$ **29.** $\{(-1 + x), x\}$

31. Demostración **33.** $\begin{bmatrix} -188 & -378 \\ 126 & 253 \end{bmatrix}$

35. $\begin{bmatrix} 384 & 256 & -384 \\ -384 & -512 & 1152 \\ -128 & -256 & 640 \end{bmatrix}$

37. (a) Verdadero. Vea la demostración del teorema 7.4, páginas 354.

(b) Falso. Vea el teorema 7.6, página 358.

39. Sí. $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

41. Sí, el orden de los elementos en la diagonal principal puede cambiar.

43–47. Pruebas

49. Debido a que $\lambda = 3$ es el único eigenvalor, y una base para el eigenespacio es $\{(1, 0)\}$ la matriz no tiene dos eigenvectores linealmente independientes. Por el Teorema 7.5, la matriz no es diagonalizable.

Sección 7.3 *(página 370)*

1. Simétrica **3.** No simétrica **5.** Simétrica

7. $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$

9. $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{bmatrix}$

11. $\lambda = 1, \dim = 1$; $\lambda = 3, \dim = 1$

13. $\lambda = 2, \dim = 2$; $\lambda = 3, \dim = 1$

15. $\lambda = -2, \dim = 2$; $\lambda = 4, \dim = 1$

17. $\lambda = -1, \dim = 1$; $\lambda = 1 + \sqrt{2}, \dim = 1$; $\lambda = 1 - \sqrt{2}, \dim = 1$

19. $\lambda = -2, \dim = 1$; $\lambda = 3, \dim = 2$; $\lambda = 8, \dim = 1$

21. $\lambda = 1, \dim = 1$; $\lambda = 2, \dim = 3$; $\lambda = 3, \dim = 1$

23. Ortogonal **25.** Ortogonal **27.** No es ortogonal

29. Ortogonal **31.** No es ortogonal **33–37.** Pruebas

39. No es ortogonalmente diagonalizable

41. Ortogonalmente diagonalizable

43. $P = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$ (La respuesta no es única.)

45. $P = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/3 \\ -\sqrt{6}/3 & \sqrt{3}/3 \end{bmatrix}$ (La respuesta no es única.)

47. $P = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ (La respuesta no es única.)

49. $\begin{bmatrix} -\sqrt{3}/3 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 \\ -\sqrt{3}/3 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{3}/3 & 0 & \sqrt{6}/3 \end{bmatrix}$

(La respuesta no es única.)

51. $P = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$

(La respuesta no es única.)

53. (a) Verdadero. Vea el teorema 7.10, página 367.
(b) Verdadero. Vea el teorema 7.9, página 366.

55. Prueba **57.** Prueba

59. $A^TA = \begin{bmatrix} 17 & -27 & 6 \\ -27 & 45 & -12 \\ 6 & -12 & 5 \end{bmatrix}$, $AA^T = \begin{bmatrix} 14 & 24 \\ 24 & 53 \end{bmatrix}$

Ambos productos son simétricos

Sección 7.4 *(página 383)*

1. $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 20 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}$

3. $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 84 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 60 \\ 84 \\ 6 \end{bmatrix}$

5. $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 400 \\ 25 \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 250 \\ 100 \\ 25 \\ 50 \end{bmatrix}$

7. $\mathbf{x} = t\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

9. $\mathbf{x} = t\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

11. $\mathbf{x} = t\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

13. $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1280 \\ 120 \\ 40 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 3120 \\ 960 \\ 30 \end{bmatrix}$

15. $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 900 \\ 60 \\ 50 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 2200 \\ 540 \\ 30 \end{bmatrix}$

17. $y_1 = C_1e^{2t}$, $y_2 = C_2e^{t}$

19. $y_1 = C_1e^{-4t}$, $y_2 = C_2e^{t/2}$

21. $y_1 = C_1e^{-t}$, $y_2 = C_2e^{6t}$, $y_3 = C_3e^{t}$

23. $y_1 = C_1e^{-12t}$, $y_2 = C_2e^{-6t}$, $y_3 = C_3e^{7t}$

25. $y_1 = C_1e^{-0.3t}$, $y_2 = C_2e^{0.4t}$, $y_3 = C_3e^{-0.6t}$

27. $y_1 = C_1e^{7t}$, $y_2 = C_2e^{9t}$, $y_3 = C_3e^{-7t}$, $y_4 = C_4e^{-9t}$

29. $y_1 = C_1e^{t} - 4C_2e^{2t}$, $y_2 = C_2e^{2t}$

31. $y_1 = C_1e^{-t} + C_2e^{3t}$, $y_2 = -C_1e^{-t} + C_2e^{3t}$

33. $y_1 = 3C_1e^{-2t} - 5C_2e^{4t} - C_3e^{6t}$
$y_2 = 2C_1e^{-2t} + 10C_2e^{4t} + 2C_3e^{6t}$
$y_3 = 2C_2e^{4t}$

35. $y_1 = C_1e^{t} - 2C_2e^{2t} - 7C_3e^{3t}$
$y_2 = C_2e^{2t} + 8C_3e^{3t}$
$y_3 = 2C_3e^{3t}$

37. $y_1' = y_1 + y_2$
$y_2' = y_2$

39. $y_1' = y_2$
$y_2' = y_3$
$y_3' = -4y_2$

41. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **43.** $\begin{bmatrix} 9 & 5 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ **45.** $\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & -10 \end{bmatrix}$

47. $A = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{bmatrix}, \lambda_1 = -\frac{5}{2},\ \lambda_2 = \frac{5}{2},\ P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}$

49. $A = \begin{bmatrix} 13 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 7 \end{bmatrix}, \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 16,\ P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

51. $A = \begin{bmatrix} 16 & -12 \\ -12 & 9 \end{bmatrix}, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 25,\ P = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

53. Elipse, $5(x')^2 + 15(y')^2 - 45 = 0$

55. Elipse, $(x')^2 + 6(y')^2 - 36 = 0$

57. Parábola, $4(y')^2 + 4x' + 8y' + 4 = 0$

59. Hipérbola, $\frac{1}{2}\left[-(x')^2 + (y')^2 - 3\sqrt{2}x' - \sqrt{2}y' + 6\right] = 0$

61. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, 2(x')^2 + 4(y')^2 + 8(z')^2 - 16 = 0$

63. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, (x')^2 + (y')^2 + 3(z')^2 - 1 = 0$

65. Sea $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ una matriz ortogonal de 2×2 tal que $|P| = 1$. Defina $\theta \in (0, 2\pi)$ como sigue.

(i) Si $a = 1$, entonces $c = 0$, $b = 0$, y $d = 1$, con $\theta = 0$.
(ii) Si $a = -1$, entonces $c = 0$, $b = 0$, y $d = -1$, con $\theta = \pi$.
(iii) Si $a \geq 0$ y $c > 0$, sea $\theta = \arccos(a)$, $0 < \theta \leq \pi/2$.
(iv) Si $a \geq 0$ y $c < 0$, sea $\theta = 2\pi - \arccos(a)$, $3\pi/2 \leq \theta < 2\pi$.
(v) Si $a \leq 0$ y $c > 0$, sea $\theta = \arccos(a)$, $\pi/2 \leq \theta < \pi$.
(vi) Si $a \leq 0$ y $c < 0$, sea $\theta = 2\pi - \arccos(a)$, $\pi < \theta \leq 3\pi/2$.

En cada uno de estos casos, confirme que

$P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$

Ejercicios de repaso *(página 385)*

1. (a) $\lambda^2 - 9 = 0$ (b) $\lambda = -3, \lambda = 3$
(c) Una base de $\lambda = -3$ es $\{(1, -5)\}$ y una base de $\lambda = 3$ es $\{(1, 1)\}$.

3. (a) $(\lambda - 4)(\lambda - 8)^2 = 0$ (b) $\lambda = 4, \lambda = 8$
(c) Una base de $\lambda = 4$ es $\{(1, 2, -1)\}$ y una base de $\lambda = 8$ es $\{(4, -1, 0)\ (3, 0, 1)\}$.

5. (a) $(\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$
(b) $\lambda = 1, \lambda = 2, \lambda = 3$
(c) Una base de $\lambda = 1$ es $\{(1, 2, -1)\}$, una base de $\lambda = 2$ es $\{(1, 0, 0)\}$ y una base para $\lambda = 3$ es $\{(0, 1, 0)\}$.

7. (a) $(\lambda - 1)^2(\lambda - 3)^2 = 0$ (b) $\lambda = 1, \lambda = 3$
(c) Una base de $\lambda = 1$ es $\{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1)\}$ y una base para $\lambda = 3$ es $\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$.

9. $P = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (La respuesta no es única.)

11. No diagonalizable.

13. $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (La respuesta no es única.)

15. (a) $a = -\frac{1}{4}$ (b) $a = 2$ (c) $a \geq -\frac{1}{4}$

17. A tiene sólo un eigenvalor $\lambda = 0$ y la dimensión de su eigenespacio es 1. Por tanto, la matriz no es diagonalizable.

19. A tiene sólo un eigenvalor $\lambda = 3$ y la dimensión de su eigenespacio es 2. Por tanto, la matriz no es diagonalizable.

21. $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

23. Como el eigenespacio correspondiente a $\lambda = 1$ de la matriz A tiene dimensión 1, mientras que el de la matriz B tiene dimensión 2, las matrices son no similares.

25. Es ortogonal y simétrica. **27.** Simétrica.

29. Ninguno **31.** Prueba **33.** Prueba

35. Ortogonalmente diagonalizable

37. $P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ (La respuesta no es única.)

39. $P = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (La respuesta no es única.)

41. $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ (La respuesta no es única.)

43. $\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$ **45.** $\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$ **47.** $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ **49.** $\left(\frac{4}{16}, \frac{5}{16}, \frac{7}{16}\right)$

51. Prueba **53.** $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{9}{4} \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \frac{9}{4}$

55. $A^2 = \begin{bmatrix} 56 & -40 \\ 20 & -4 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 368 & -304 \\ 152 & -88 \end{bmatrix}$

57. (a) y (b) Pruebas **59.** Prueba

61. $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

63. (a) $a = b = c = 0$
(b) Dim = 1 si $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$.
Dim = 2 si exactamente uno de las tres incógnitas es 0.
Dim = 3 si exactamente dos de las tres incógnitas son iguales a 0.

65. (a) Verdadero. Vea las "Definiciones de eigenvalor y eigenvector", página 342.
(b) Falso. Vea el teorema 7.4, página 354.
(c) Verdadero. Vea la "Definición de una matriz diagonalizable", página 353.

67. $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 100 \\ 25 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 25 \\ 25 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = t\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

69. $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 4500 \\ 300 \\ 50 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1500 \\ 4500 \\ 50 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = t\begin{bmatrix} 24 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix}$

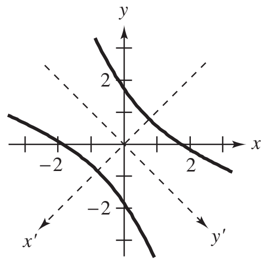
71. $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1440 \\ 108 \\ 90 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 6588 \\ 1296 \\ 81 \end{bmatrix}$

73. $y_1 = C_1e^{3t}$
$y_2 = C_2e^{8t}$
$y_3 = C_3e^{-8t}$

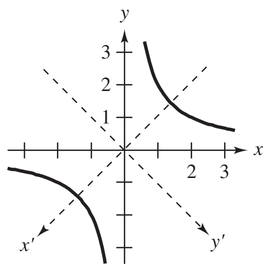
75. $y_1 = -2C_1 + C_2e^t$
$y_2 = C_1$

77. $y_1 = C_1e^t + C_2e^{-t}$
$y_2 = C_1e^t - C_2e^{-t}$
$y_3 = C_3$

79. (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$
(b) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$
(c) $5(x')^2 - (y')^2 = 6$
(d)



81. (a) $A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$
(b) $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$
(c) $(x')^2 - (y')^2 = 4$
(d)



Examen acumulativo capítulos 6 y 7 *(página 389)*

1. Transformación lineal.

2. No es una transformación lineal.

3. $\dim(R^n) = 5$; $\dim(R^m) = 2$

4. (a) $(1, -1, 0)$ (b) $(5, t)$ **5.** $\{(s, s, -t, t): s, t \text{ son reales}\}$

6. (a) Gen $\{(0, -1, 0, 1), (1, 0, -1, 0)\}$
(b) Gen $\{(1, 0), (0, 1)\}$ (c) Rango = 2, nulidad = 2

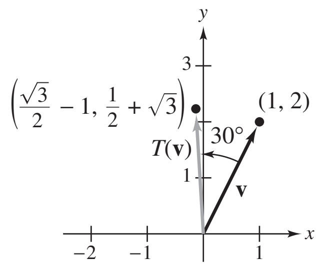
7. $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 11 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $T(1, 1) = (0, 0)$, $T(-2, 2) = (-2, 2)$

12. (a) $\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} - 1 \\ \dfrac{1}{2} + \sqrt{3} \end{bmatrix}$

(c)



13. $T = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$, $T' = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$

14. $T = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & -6 \end{bmatrix}$, $T' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$

15. $T^{-1}(x, y) = \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y, -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y\right)$

16. $T^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \left(\dfrac{x_1 - x_2 + x_3}{2}, \dfrac{x_1 + x_2 - x_3}{2}, \dfrac{-x_1 + x_2 + x_3}{2}\right)$

17. $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $T(0, 1) = (1, 0, 1)$

18. (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $A' = \begin{bmatrix} -7 & -15 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 9 \\ -6 \end{bmatrix}$

(e) $[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $[T(\mathbf{v})]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$

19. $\lambda = 5$ (repetido), $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

20. $\lambda = 3, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \lambda = 2, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

21. $\lambda = 1, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \lambda = 0, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}; \lambda = 2, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

22. $\lambda = 1$ (tres veces), $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

23. $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **24.** $P = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -5 \\ 2 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

25. $\{(0, 1, 0), (1, 1, 1), (2, 2, 3)\}$

26. $P = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ **27.** $P = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{3}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\dfrac{2}{\sqrt{6}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{3}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$

28. $y_1 = C_1 e^t$
$y_2 = C_2 e^{3t}$

29. $\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$ **30.** $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1800 \\ 120 \\ 60 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 6300 \\ 1440 \\ 48 \end{bmatrix}$

31. P es ortogonal si $P^{-1} = P^T$. **32.** Prueba.

Índice

N

O

P

Resumen de propiedades matriciales

Propiedades de la suma de matrices y multiplicación por un escalar

Si A, B y C son matrices de $m \times n$, y c y d son escalares, entonces las siguientes propiedades son verdaderas.

1. $A + B = B + A$ **Propiedad conmutativa de la suma**
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ **Propiedad asociativa de la suma**
3. $(cd)A = c(dA)$ **Propiedad asociativa de la multiplicación**
4. $1A = A$ **Identidad multiplicativa**
5. $c(A + B) = cA + cB$ **Propiedad distributiva**
6. $(c + d)A = cA + dA$ **Propiedad distributiva**

Propiedades de la multiplicación de matrices

Si A, B, y C son matrices (con órdenes tales que los productos matriciales dados están definidos) y c es un escalar, entonces las siguientes propiedades son verdaderas.

1. $A(BC) = (AB)C$ **Propiedad asociativa de la multiplicación**
2. $\mathrm{A}(\mathrm{B} + \mathrm{C}) = AB + AC$ **Propiedad distributiva**
3. $(A + B)\,C = AC + BC$ **Propiedad distributiva**
4. $c(AB) = (cA)B = A(cB)$

Propiedades de la matriz de identidad

Si A es una matriz de orden $m \times n$, entonces las siguientes propiedades son verdaderas.

1. $AI_n = A$
2. $I_mA = A$

Propiedades de la suma vectorial y multiplicación por un escalar

Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, y $\mathbf{w}$ vectores en R^n, y sean c y d escalares.

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ es un vector en R^n.
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
4. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
5. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
6. $c\mathbf{u}$ es un vector en R^n.
7. $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$
8. $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$
9. $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$
10. $1(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$

Resumen de condiciones equivalentes para matrices cuadradas

Si A es una matriz de $n \times n$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

1. A es invertible.
2. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una única solución para cualquier matriz $\mathbf{b}$ de $n \times 1$.
3. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial.
4. A es equivalente por renglones a En.
5. $|A| \neq 0$
6. Rango$(A) = n$
7. Los vectores renglón n de A son linealmente independientes.
8. Los vectores columna n de A son linealmente independientes.

Propiedades del producto punto

Si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, y $\mathbf{w}$ son vectores en R^3 y c es un escalar, entonces las siguientes propiedades son verdaderas.

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
2. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
3. $c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v})$
4. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$
5. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$, y $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ si y sólo si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Propiedades del producto cruz

Si $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, y $\mathbf{w}$ son vectores en R^3 y c es un escalar, entonces las siguientes propiedades son verdaderas.

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$
2. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$
3. $c(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = c\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times c\mathbf{v}$
4. $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
5. $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
6. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$

Tipos de espacios vectoriales

R = conjunto de todos los números reales
R^2 = conjunto de todos los pares ordenados
R^3 = conjunto de todas las tercias ordenadas
R^n = conjunto de todas las n-adas
$C(-\infty,\infty)$ = conjunto de todas las funciones continuas definidas en la recta real
$C[a, b]$ = conjunto de todas las funciones continuas definidas en un intervalo cerrado $[a, b]$
P = conjunto de todos los polinomios
P_n = conjunto de todos los polinomios de grado $\leq n$
$M_{m,n}$ = conjunto de todas las matrices de $m \times n$
$M_{m,n}$ = conjunto de todas las matrices *cuadradas* de $n \times n$

Determinación de eigenvalores y eigenvectores*

Sea A una matriz de $n \times n$.

1. Formar la ecuación característica $|\lambda I - A| = 0$. Será una ecuación polinomial de grado n en la variable A.
2. Encontrar las raíces reales de la ecuación característica. Éstos son los eigenvalores de A.
3. Para cada eigenvalor λ_i, encontrar los eigenvectores correspondientes a λ_i al resolver el sistema homogéneo $(\lambda_i I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Esto requiere reducir por renglones una matriz de $n \times n$. La forma escalonada reducida por renglones resultante debe tener al menos un renglón de ceros.

* Para problemas complicados, este proceso puede facilitarse con el uso de la tecnología indicada.

FUNDAMENTOS
DE ÁLGEBRA LINEAL

La piedra angular de Fundamentos de álgebra lineal es la presentación clara, cuidadosa y concisa que el autor hace del materia . El volumen está pensado para que los lectores puedan entender completamente cómo funciona el álgebra lineal. Estas páginas equilibran la teoría con ejemplos, aplicaciones, y prácticas geométricas para lograr un sistema de aprendizaje completo.

Con un nuevo diseño que pone de relieve la importancia de las matemáticas y mejora la legibilidad, esta séptima edición también incorpora nuevos ejercicios conceptuales que refuerzan múltiples conceptos en cada sección. Los datos y las aplicaciones que ha incluido Ron Larson reflejan estadísticas y ejemplos actuales para atraer a los estudiantes y demostrar el vínculo existente entre la teoría y la práctica.

ISBN-13: 978-607-519-804-0
ISBN-10: 607-519-804-0

9 786075 198040

CENGAGE Learning®

Visite nuestro sitio en http://latinoamerica.cengage.com