



MATEMÁTICAS III

CÁLCULO DE VARIAS VARIABLES

RON LARSON • BRUCE EDWARDS

MATEMÁTICAS III

CÁLCULO DE VARIAS VARIABLES

Ron Larson

The Pennsylvania State University
The Behrend College

Bruce Edwards

University of Florida

Joel Ibarra Escutia

Instituto Tecnológico de Toluca

Traducción

Javier León Cárdenas

Revisión técnica

Ana Elizabeth García Hernández
Instituto Politécnico Nacional

**Instituto Tecnológico
de Aguascalientes**

Carlos Ruvalcaba Márquez

Instituto Tecnológico Hermosillo

Hilario Mayboca Araujo

Carlos Alberto Pereyda Pierre

Instituto Tecnológico de Celaya

María del Carmen Cornejo Serrano

Eloísa Bernardett Villalobos Oliver

**Instituto Tecnológico José Mario Molina Pasquel
y Henríquez, Campus Chapala**

María de la Cruz Gómez Torres

Instituto Tecnológico de Querétaro

Francisco Javier Avilés Urbiola

María Eugenia Quintanar Pérez

Instituto Tecnológico Superior de Cajeme

Socorro del Rivero Jiménez

Instituto Tecnológico de San Juan del Río

Saulo Servín Guzmán

**Tecnológico de Estudios Superiores
de Chimalhuacán**

Juan Bucio Esquivel

Instituto Tecnológico de Toluca

Eric Gutiérrez García

Tecnológico de Estudios Superiores de Jilotepec

José Guadalupe González Escamilla

Tecnológico de Estudios Superiores de Jocotitlán

Ramón Berber Palafox

Christopher Gutiérrez Luna

Adriana Sotelo Hurtado



Matemáticas III. Cálculo de varias variables.
Primera edición
Ron Larson y Bruce Edwards

Director Higher Education
Latinoamérica:
Renzo Casapía Valencia

Gerente editorial Latinoamérica:
Jesús Mares Chacón

Editora de desarrollo:
Abril Vega Orozco

Coordinador de manufactura:
Rafael Pérez González

Diseño de portada:
Karla Paola Benítez García

Imagen de portada:
© agsandrew | Shutterstock

Composición tipográfica:
Heriberto Gachuz Chávez

© D.R. 2018 por Cengage Learning Editores, S.A. de C.V., una Compañía de Cengage Learning, Inc. Carretera México-Toluca núm. 5420, oficina 2301. Col. El Yaqui. Del. Cuajimalpa. C.P. 05320. Ciudad de México.
Cengage Learning® es una marca registrada usada bajo permiso.

DERECHOS RESERVADOS. Ninguna parte de este trabajo amparado por la Ley Federal del Derecho de Autor, podrá ser reproducida, transmitida, almacenada o utilizada en cualquier forma o por cualquier medio, ya sea gráfico, electrónico o mecánico, incluyendo, pero sin limitarse a lo siguiente: fotocopiado, reproducción, escaneo, digitalización, grabación en audio, distribución en internet, distribución en redes de información o almacenamiento y recopilación en sistemas de información a excepción de lo permitido en el Capítulo III, Artículo 27 de la Ley Federal del Derecho de Autor, sin el consentimiento por escrito de la Editorial. Reg 403

Esta es una adaptación de los libros:
Larson, Ron y Bruce Edwards. Cálculo, Tomo II. Décima edición. ©2016, ISBN: 978-607-522-017-8 Traducido del libro Calculus. 10th Edition. Ron Larson and Bruce Edwards.
Publicado en inglés por Brooks/Cole, una compañía de Cengage Learning ©2014 ISBN: 978-1-285-05709-5
Larson, Ron y Bruce Edwards
Matemáticas III. Cálculo de varias variables. ©2017 ISBN: 978-607-522-895-2

Datos para catalogación bibliográfica:
Larson, Ron y Bruce Edwards.
Matemáticas III. Cálculo de varias variables.
Primera edición.
ISBN: 978-607-526-653-4

Visite nuestro sitio web en:
<http://latinoamerica.cengage.com>

UNIDAD 1	▷ Vectores en el espacio	1
1.1	Vectores en el plano	2
1.2	Vectores en el espacio	12
1.3	El producto escalar o producto punto de dos vectores	20
1.4	El producto vectorial o producto cruz de dos vectores en el espacio	29
1.5	Rectas y planos en el espacio	37
	Proyecto de trabajo: Distancias en el espacio	47
1.6	Superficies en el espacio	48
	Ejercicios de repaso	58
	Solución de problemas	60
UNIDAD 2	▷ Curvas planas, ecuaciones paramétricas y coordenadas polares	63
2.1	Curvas planas y ecuaciones paramétricas	64
	Proyecto de trabajo: Cicloides	73
2.2	Ecuaciones paramétricas y cálculo	74
2.3	Coordenadas polares y gráficas polares	83
	Proyecto de trabajo: Arte anamórfico	92
2.4	Área y longitud de arco en coordenadas polares	93
	Ejercicios de repaso	102
	Solución de problemas	105
UNIDAD 3	▷ Funciones vectoriales	107
3.1	Funciones vectoriales	108
	Proyecto de trabajo: Bruja de Agnesi	115
3.2	Derivación e integración de funciones vectoriales	116
3.3	Velocidad y aceleración	124
3.4	Vectores tangentes y vectores normales	133
3.5	Longitud de arco y curvatura	143
	Ejercicios de repaso	155
	Solución de problemas	157
UNIDAD 4	▷ Funciones de varias variables	159
4.1	Introducción a las funciones de varias variables	160
4.2	Límites y continuidad	172
4.3	Derivadas parciales	182
	Proyecto de trabajo: Franjas de Moiré	191
4.4	Diferenciales	192

- 4.5 Regla de la cadena para funciones de varias variables 199
- 4.6 Derivadas direccionales y gradientes 207
- 4.7 Planos tangentes y rectas normales 219
Proyecto de trabajo: Flora silvestre 227
- 4.8 Extremos de funciones de dos variables 228
- 4.9 Multiplicadores de Lagrange 236
Ejercicios de repaso 244
Solución de problemas 247

UNIDAD 5 ▷ Integrales múltiples

249

- 5.1 Integrales iteradas y área en el plano 250
- 5.2 Integrales dobles y volumen 258
- 5.3 Cambio de variables: coordenadas polares 270
- 5.4 Centro de masa y momentos de inercia 278
Proyecto de trabajo: Centro de presión sobre una vela 285
- 5.5 Área de una superficie 286
Proyecto de trabajo: Capilaridad 292
- 5.6 Integrales triples y aplicaciones 293
- 5.7 Coordenadas cilíndricas y esféricas 304
- 5.8 Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas 311
Proyecto de trabajo: Esferas deformadas 317
Ejercicios de repaso 318
Solución de problemas 321

UNIDAD 6 ▷ Análisis vectorial

323

- 6.1 Campos vectoriales 324
- 6.2 Integrales de línea 335
- 6.3 Teoremas de integrales (Resumen*) 349

* El desarrollo completo del capítulo se encuentra disponible en línea en el apéndice F. Acceda a www.cengage.com e ingrese con el ISBN de la obra.

- 6.4 Campos vectoriales conservativos e independencia de la trayectoria*
- 6.5 Teorema de Green*
- 6.6 Superficies paramétricas*
- 6.7 Integrales de superficie*
- 6.8 Teorema de la divergencia (de Gauss)*
- 6.9 Teorema de Stokes*

* Este material se encuentra disponible en línea. Acceda a www.cengage.com e ingrese con el ISBN de la obra.

Formularios básicos y tablas de integración	F1
Álgebra	F1
Fórmulas trigonométricas	F2
Trigonometría	F3
Derivadas e integrales	F4
Tablas de integración	T1

Apéndices*

Apéndice A	Demostración de teoremas seleccionados
Apéndice B	Tablas de integración
Apéndice C	Repaso de precálculo
	C.1 Números reales y recta numérica
	C.2 El plano cartesiano
	C.3 Repaso de funciones trigonométricas
Apéndice D	Rotación y la ecuación general de segundo grado
Apéndice E	Números complejos
Apéndice F	Análisis vectorial
Formularios básicos	

* Este material se encuentra disponible en línea. Acceda a www.cengage.com e ingrese con el ISBN de la obra.

Prefacio

Bienvenidos a esta nueva versión de **Matemáticas III. Cálculo de varias variables**. Nos enorgullece ofrecerle una nueva versión revisada y mejorada de nuestros clásicos y exitosos libros de texto.

Esta obra forma parte de una serie de cinco libros elaborados para cubrir de manera específica los planes de estudio de los cursos de matemáticas a nivel superior: cálculo diferencial, cálculo integral, cálculo vectorial, álgebra lineal y ecuaciones diferenciales.

Al igual que en otras ediciones, hemos incorporado muchas de las útiles y atinadas sugerencias que usted, estimado lector, nos hace al utilizar esta obra en sus cursos.

En esta edición se han introducido algunas características nuevas y revisado otras. Encontrará lo que espera: un libro de texto pedagógico, matemáticamente formal y accesible.

Estamos contentos y emocionados de ofrecerle algo totalmente nuevo en esta edición, un sitio web: **LarsonCalculus.com**. Este sitio ofrece muchos recursos que le ayudarán en su estudio del cálculo. Todos estos recursos están a solo un clic de distancia. Nuestro objetivo en todas las ediciones de este libro de texto es proporcionarle las herramientas necesarias para dominar el cálculo. Esperamos que, junto con **LarsonCalculus.com**, encuentre útiles los cambios de esta edición para lograrlo.

En cada conjunto de ejercicios, asegúrese de anotar la referencia a **CalcChat.com**. En este sitio gratuito puede descargar una solución paso a paso de cualquier ejercicio impar. Además, puede hablar con un tutor, de manera gratuita, dentro del horario publicado en el sitio. Con el paso de los años, miles de estudiantes han visitado el sitio para obtener apoyo. Utilizamos toda esta información como ayuda para guiarlo en cada revisión de los ejercicios y soluciones.

Lo nuevo en esta edición

NUEVO **LarsonCalculus.com**

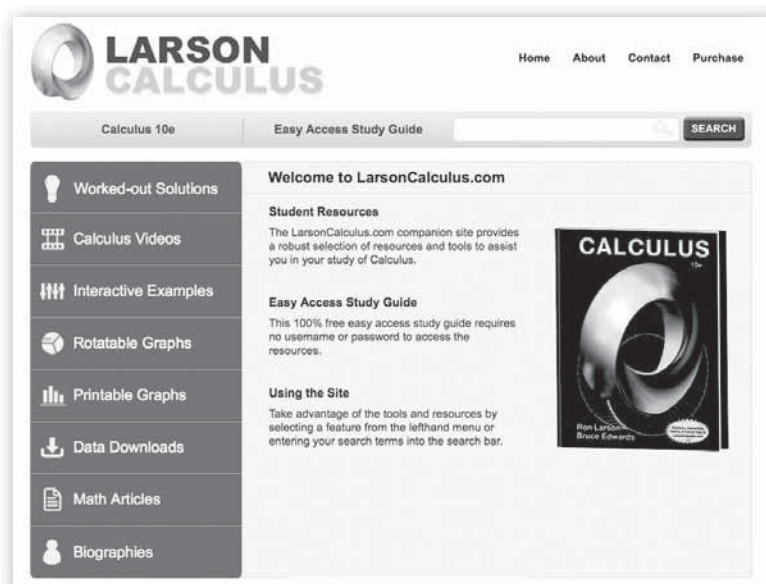
Este sitio web ofrece varias herramientas y recursos para complementar su aprendizaje. El acceso a estas herramientas es gratuito. Videos de explicaciones de conceptos o demostraciones del libro, ejemplos para explorar, vista de gráficas tridimensionales, descarga de artículos de revistas de matemáticas y mucho más.

NUEVA **Apertura de capítulo**

En cada apertura de capítulo se resaltan aplicaciones reales utilizadas en los ejemplos y ejercicios.

NUEVOS **Ejemplos interactivos**

Los ejemplos del libro están acompañados de ejemplos interactivos en **LarsonCalculus.com**. Estos ejemplos interactivos usan el reproductor CDF de Wolfram y permiten explorar el cálculo manejando las funciones o gráficas y observando los resultados.



NUEVOS **Videos de demostraciones**

Vea videos del coautor Bruce Edwards, donde explica las demostraciones de los teoremas de *Cálculo*, décima edición, en **LarsonCalculus.com**.

NUEVO ¿Cómo lo ve?

La característica ¿Cómo lo ve? en cada sección presenta un problema de la vida real que podrá resolver mediante inspección visual utilizando los conceptos aprendidos en la lección. Este ejercicio es excelente para el análisis en clase o la preparación de un examen.

Comentario Revisado

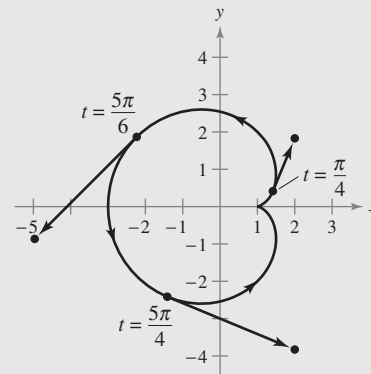
Estos consejos y sugerencias refuerzan o amplían conceptos, le ayudan a aprender cómo estudiar matemáticas, le advierten acerca de errores comunes, lo dirigen en casos especiales o le muestran los pasos alternativos o adicionales en la solución de un ejemplo.

Conjuntos de ejercicios Revisados

Los conjuntos de ejercicios han sido amplia y cuidadosamente examinados para asegurarnos que son rigurosos e importantes y que incluyen todos los temas que nuestros usuarios han sugerido. Se han reorganizado los ejercicios y titulado para que pueda ver mejor las conexiones entre los ejemplos y ejercicios. Los ejercicios de varios pasos son ejercicios de la vida real que refuerzan habilidades para resolver problemas y dominar los conceptos, dando a los estudiantes la oportunidad de aplicarlos en situaciones de la vida real.



¿CÓMO LO VE? La gráfica muestra una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ para $0 \leq t \leq 2\pi$ y su derivada $\mathbf{r}'(t)$ para diferentes valores de t .



- Para cada derivada que se muestra en la gráfica, determine si cada componente es positiva o negativa.
- ¿Es suave la curva en el intervalo $[0, 2\pi]$? Explique su razonamiento.

114 Unidad 3 Funciones vectoriales

40. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}t^2\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^3\mathbf{k}$

41. $\mathbf{r}(t) = \sin t\mathbf{i} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t - \frac{1}{2}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{2}\cos t + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathbf{k}$

42. $\mathbf{r}(t) = -\sqrt{2}\sin t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} + \sqrt{2}\sin t\mathbf{k}$

■ Piénselo En los ejercicios 43 y 44, use un sistema algebraico por computadora a fin de representar gráficamente la función vectorial $\mathbf{r}(t)$. Para cada $u(t)$, haga una conjetura sobre la transformación (si la hay) de la gráfica de $\mathbf{r}(t)$. Use un sistema algebraico por computadora para verificar su conjetura.

43. $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t\mathbf{k}$

- $u(t) = 2(\cos t - 1)\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t\mathbf{k}$
- $u(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$
- $u(t) = 2\cos(-t)\mathbf{i} + 2\sin(-t)\mathbf{j} + \frac{1}{2}(-t)\mathbf{k}$
- $u(t) = \frac{1}{2}t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j} + 2\cos t\mathbf{k}$
- $u(t) = 6\cos t\mathbf{i} + 6\sin t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t\mathbf{k}$

44. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^3\mathbf{k}$

- $u(t) = t\mathbf{i} + (t^2 - 2t)\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^3\mathbf{k}$
- $u(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^3\mathbf{k}$
- $u(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + (\frac{1}{2}t^3 + 4)\mathbf{k}$
- $u(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^3\mathbf{k}$
- $u(t) = (-t)\mathbf{i} + (-t^2)\mathbf{j} + \frac{1}{2}(-t^3)\mathbf{k}$

Representar una gráfica mediante una función vectorial En los ejercicios 45-52, represente la curva plana por medio de una función vectorial. (Hay muchas respuestas correctas.)

45. $y = x + 5$ 46. $2x - 3y + 5 = 0$

47. $y = (x - 2)^2$ 48. $y = 4 - x^2$

49. $x^2 + y^2 = 25$ 50. $(x - 2)^2 + y^2 = 4$

51. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$ 52. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

Representar una gráfica mediante una función vectorial En los ejercicios 53-60, dibuje la curva en el espacio representada por la intersección de las superficies. Después represente la curva por una función vectorial utilizando el parámetro dado.

Superficies	Parámetro
53. $x^2 + y^2, x + y = 0$	$x = t$
54. $x^2 + y^2, z = 4$	$x = 2\cos t$
55. $x^2 + y^2 = 4, z = x^2$	$x = 2\sin t$
56. $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16, x = z^2$	$x = t$
57. $x^2 + y^2 + z^2 = 4, x + z = 2$	$x = 1 + \sin t$
58. $x^2 + y^2 + z^2 = 10, x + y = 4$	$x = 2 + \sin t$
59. $x^2 + z^2 = 4, y^2 + z^2 = 4$	$x = t$ (primer octante)
60. $x^2 + y^2 + z^2 = 16, xy = 4$	$x = t$ (primer octante)

61. Dibujar una curva Demuestre que la función vectorial $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} + 2\sin t\mathbf{k}$ se encuentra en el cono $z^2 = x^2 + y^2$. Dibuje la curva.

62. Dibujar una curva Demuestre que la función vectorial $\mathbf{r}(t) = e^t \cos t\mathbf{i} + e^t \sin t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$ se encuentra en el cono $z^2 = x^2 + y^2$. Dibuje la curva.

Determinar un límite En los ejercicios 63 a 68, evalúe el límite (si existe).

63. $\lim_{t \rightarrow \pi} (t + \cos t + \sin t)\mathbf{k}$

64. $\lim_{t \rightarrow 0} \left(3t\mathbf{i} + \frac{2}{t^2 - 1}\mathbf{j} + \frac{1}{t}\mathbf{k} \right)$

65. $\lim_{t \rightarrow 0} \left(t^2\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + \frac{1 - \cos t}{t}\mathbf{k} \right)$

66. $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\sqrt{t}\mathbf{i} + \frac{\ln t}{t^2 - 1}\mathbf{j} + \frac{1 - \cos t}{t}\mathbf{k} \right)$

67. $\lim_{t \rightarrow 1} \left(e^t\mathbf{i} + \frac{\sin t}{t}\mathbf{j} + e^{2t}\mathbf{k} \right)$

68. $\lim_{t \rightarrow 0} \left(e^{2t}\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j} + \frac{t}{t^2 + 1}\mathbf{k} \right)$

Continuidad de una función vectorial En los ejercicios 69-74, determine el (los) intervalo(s) en que la función vectorial es continua.

69. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j}$

70. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\mathbf{i} + \sqrt{t-1}\mathbf{j}$

71. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \arcsen t\mathbf{j} + (t-1)\mathbf{k}$

72. $\mathbf{r}(t) = 2e^{2t}\mathbf{i} + e^{2t}\mathbf{j} + \ln(t-1)\mathbf{k}$

73. $\mathbf{r}(t) = (e^{2t}, t^2, \tan t)$ 74. $\mathbf{r}(t) = \langle 8, \sqrt{t}, \sqrt[3]{t} \rangle$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

Escribir una transformación En los ejercicios 75-78, considere la función vectorial $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (t-3)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$.

Dé una función vectorial $\mathbf{s}(t)$ que sea la transformación especificada de \mathbf{r} .

- Una traslación vertical tres unidades hacia arriba.
- Una traslación vertical dos unidades hacia abajo.
- Una traslación horizontal dos unidades en dirección del eje x negativo.
- Una traslación horizontal cinco unidades en dirección del eje y positivo.

79. Continuidad de una función vectorial Escriba la definición de continuidad para una función vectorial. Dé un ejemplo de una función vectorial que esté definida pero no sea continua en $t = 2$.

80. Comparar funciones ¿Cuáles de las siguientes gráficas representa la misma gráfica?

- $\mathbf{r}(t) = (-3\cos t + 1)\mathbf{i} + (5\sin t + 2)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(t) = 4\mathbf{i} + (-3\cos t + 1)\mathbf{j} + (5\sin t + 2)\mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(t) = (3\cos t - 1)\mathbf{i} + (-5\sin t - 2)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(t) = (-3\cos 2t + 1)\mathbf{i} + (5\sin 2t + 2)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

Cambios en el contenido

El apéndice A (Demostración de teoremas seleccionados) ahora se presenta en formato de video (en inglés) en LarsonCalculus.com. Las demostraciones también se presentan en forma de texto (en inglés y con costo adicional) en CengageBrain.com.

Características confiables

Aplicaciones

Se han elegido con cuidado ejercicios de aplicación y ejemplos que se incluyen para dirigir el tema: “¿Cuándo usaré esto?”. Estas aplicaciones son tomadas de diversas fuentes, tales como acontecimientos actuales, datos del mundo, tendencias de la industria y, además, están relacionadas con una amplia gama de intereses, entendiendo dónde se está utilizando (o se puede utilizar) el cálculo para fomentar una comprensión más completa del material.

Desarrollo de conceptos

Los ejercicios escritos al final de cada sección están diseñados para poner a prueba su comprensión de los conceptos básicos en cada sección, motivándole a verbalizar y escribir las respuestas, y fomentando las habilidades de comunicación técnica que le serán invaluable en sus futuras carreras.

Teoremas

Los teoremas proporcionan el marco conceptual del cálculo. Los teoremas se enuncian claramente y están separados del resto del libro mediante recuadros de referencia visual rápida. Las demostraciones importantes a menudo se ubican enseguida del teorema y se pueden encontrar en LarsonCalculus.com.

Definiciones

Como con los teoremas, las definiciones se enuncian claramente usando terminología precisa, formal y están separadas del texto mediante recuadros para una referencia visual rápida.

Definición de diferencial total

Si $z = f(x, y)$, y Δx y Δy son los incrementos en x y en y , entonces las **diferenciales** de las variables independientes x y y son

$$dx = \Delta x \quad y \quad dy = \Delta y$$

y la **diferencial total** de la variable dependiente z es

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy.$$

Exploraciones

Las exploraciones proporcionan retos únicos para estudiar conceptos que aún no se han cubierto formalmente en el libro. Le permiten aprender mediante el descubrimiento e introducir temas relacionados con los que está estudiando en ese momento. El explorar temas de esta manera le invita a pensar de manera más amplia.

Notas históricas y biografías

Las notas históricas le proporcionan información acerca de los fundamentos de cálculo. Las biografías presentan a las personas que crearon y contribuyeron al cálculo.

Tecnología

A través del libro, los recuadros de tecnología le enseñan a usar tecnología para resolver problemas y explorar

conceptos del cálculo. Estas sugerencias también indican algunos obstáculos del uso de la tecnología.

Proyectos de trabajo

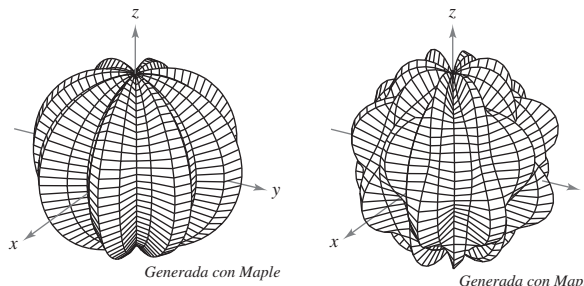
Los proyectos de trabajo se presentan en algunas secciones y le invitan a explorar aplicaciones relacionadas con los temas que está estudiando. Proporcionan una forma interesante y atractiva para que usted y otros estudiantes trabajen e investiguen ideas de forma conjunta.

PROYECTO DE TRABAJO

Esferas deformadas

En los incisos (a) y (b), encuentre el volumen de las esferas deformadas. Estos sólidos se usan como modelos de tumores.

<p>(a) Esfera arrugada</p> $\rho = 1 + 0.2 \sin 8\theta \sin \phi$ $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$	<p>(b) Esfera deformada</p> $\rho = 1 + 0.2 \sin 8\theta \sin 4\phi$ $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$
--	--



■ **PARA INFORMACIÓN ADICIONAL** Para más información sobre estos tipos de esferas, consulte el artículo “Heat Therapy for Tumors”, de Leah Edelstein-Keshet, en *The UMAP Journal*.

Desafíos del examen Putnam

Las preguntas del examen Putnam se presentan en algunas secciones. Estas preguntas de examen Putnam lo desafían y le amplían los límites de su comprensión sobre el cálculo.

Agradecimientos

Queremos agradecer a todos los profesores que participaron en esta obra, sus aportaciones y sugerencias fueron invaluable para el desarrollo de la misma.

Vectores en el espacio

- 1.1 Vectores en el plano
- 1.2 Vectores en el espacio
- 1.3 El producto escalar o producto punto de dos vectores
- 1.4 El producto vectorial o producto cruz de dos vectores en el espacio
- 1.5 Rectas y planos en el espacio
- 1.6 Superficies en el espacio



Geografía



Momento



Trabajo



Focos del auditorio



Navegación

1.1 Vectores en el plano

- **Expresar un vector mediante sus componentes.**
- **Realizar operaciones vectoriales e interpretar los resultados geoméricamente.**
- **Expresar un vector como combinación lineal de vectores unitarios estándar o canónicos.**

Las componentes de un vector

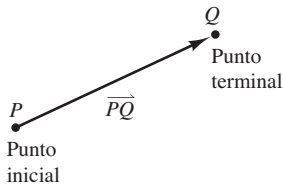
Muchas cantidades en geometría y física, como el área, el volumen, la temperatura, la masa y el tiempo, se pueden caracterizar por medio de un solo número real en unidades de medición apropiadas. Estas **cantidades** se llaman **escalares**, y al número real se le llama **escalar**.

Otras cantidades, como la fuerza, la velocidad y la aceleración, tienen magnitud y dirección y no pueden caracterizarse completamente por medio de un solo número real. Para representar estas cantidades se usa un **segmento de recta dirigido**, como se muestra en la figura 1.1. El segmento de recta dirigido \overrightarrow{PQ} tiene como punto inicial P y como punto final Q , y su **longitud** (o **magnitud**) se denota por $\|\overrightarrow{PQ}\|$. Segmentos de recta dirigidos que tienen la misma longitud y dirección son **equivalentes**, como se muestra en la figura 1.2. El conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos que son equivalentes a un segmento de recta dirigido dado \overrightarrow{PQ} es un **vector en el plano** y se denota por

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$$

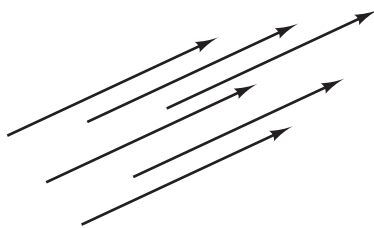
En los libros, los vectores se denotan normalmente con letras minúsculas, en negrita, como \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} . Cuando se escriben a mano, se suelen denotar por medio de letras con una flecha sobre ellas, como \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} .

Es importante notar que un vector en el plano se puede representar por medio de un *conjunto* de segmentos de recta dirigidos diferentes, todos apuntando en la misma dirección y todos de la misma longitud.



Un segmento de recta dirigido.

Figura 1.1



Segmentos de recta dirigidos equivalentes.

Figura 1.2

EJEMPLO 1

Representar vectores por medio de segmentos de recta dirigidos

Sea \mathbf{v} el vector representado por el segmento dirigido que va de $(0, 0)$ a $(3, 2)$, y sea \mathbf{u} el vector representado por el segmento dirigido que va de $(1, 2)$ a $(4, 4)$. Demuestre que \mathbf{v} y \mathbf{u} son equivalentes.

Solución Sean $P(0, 0)$ y $Q(3, 2)$ los puntos inicial y final de \mathbf{v} , y sean $R(1, 2)$ y $S(4, 4)$ los puntos inicial y final de \mathbf{u} , como se muestra en la figura 1.3. Para demostrar que \overrightarrow{PQ} y \overrightarrow{RS} tienen la *misma longitud* se usa la fórmula de la distancia.

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{PQ}\| &= \sqrt{(3 - 0)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{13} \\ \|\overrightarrow{RS}\| &= \sqrt{(4 - 1)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{13} \end{aligned}$$

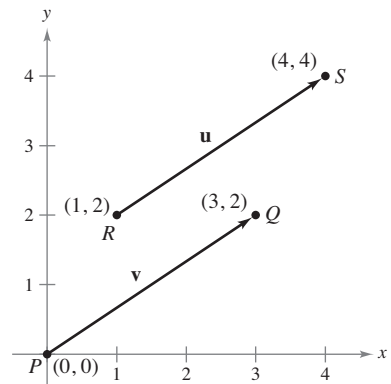
Los dos segmentos tienen la *misma dirección*, porque ambos están dirigidos hacia la derecha y hacia arriba sobre rectas que tienen la misma pendiente.

$$\text{Pendiente de } \overrightarrow{PQ} = \frac{2 - 0}{3 - 0} = \frac{2}{3}$$

y

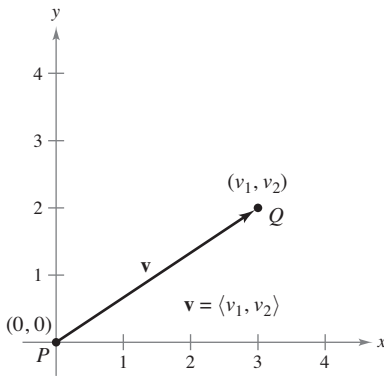
$$\text{Pendiente de } \overrightarrow{RS} = \frac{4 - 2}{4 - 1} = \frac{2}{3}$$

Como \overrightarrow{PQ} y \overrightarrow{RS} tienen la misma longitud y la misma dirección, puede concluir que los dos vectores son equivalentes. Es decir, \mathbf{v} y \mathbf{u} son equivalentes.



Los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} son equivalentes.

Figura 1.3



Posición estándar de un vector.
Figura 1.4

El segmento de recta dirigido cuyo punto inicial es el origen a menudo se considera el representante más adecuado de un conjunto de segmentos de recta dirigidos equivalentes como los que se muestran en la figura 1.3. Se dice que esta representación de \mathbf{v} está en la **posición canónica** o **estándar**. Un segmento de recta dirigido cuyo punto inicial es el origen puede representarse de manera única por medio de las coordenadas de su punto final $Q(v_1, v_2)$, como se muestra en la figura 1.4.

Definición de un vector en el plano mediante sus componentes

Si \mathbf{v} es un vector en el plano cuyo punto inicial es el origen y cuyo punto final es (v_1, v_2) , entonces el **vector** \mathbf{v} queda dado mediante sus **componentes** de la siguiente manera

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$$

Las coordenadas v_1 y v_2 son las **componentes de \mathbf{v}** . Si el punto inicial y el punto final están en el origen, entonces \mathbf{v} es el **vector cero** (o vector nulo) y se denota por $\mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle$.

Esta definición implica que dos vectores $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ son **iguales** si y solo si $u_1 = v_1$ y $u_2 = v_2$.

Los procedimientos siguientes pueden usarse para convertir un vector dado mediante un segmento de recta dirigido en un vector dado mediante sus componentes o viceversa.

1. Si $P(p_1, p_2)$ y $Q(q_1, q_2)$ son los puntos inicial y final de un segmento de recta dirigido, el vector \mathbf{v} representado por \overrightarrow{PQ} , dado mediante sus componentes, es

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle q_1 - p_1, q_2 - p_2 \rangle.$$

Además, de la fórmula de la distancia es posible ver que la longitud (o magnitud) de \mathbf{v} es

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\| &= \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2} \\ &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2}. \end{aligned}$$

Longitud de un vector

2. Si $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$, \mathbf{v} puede representarse por el segmento de recta dirigido, en la posición canónica o estándar, que va de $P(0, 0)$ a $Q(v_1, v_2)$.

A la longitud de \mathbf{v} también se le llama la **norma de \mathbf{v}** . Si $\|\mathbf{v}\| = 1$, \mathbf{v} es un vector unitario. Y $\|\mathbf{v}\| = 0$ si y solo si \mathbf{v} es el vector cero $\mathbf{0}$.

EJEMPLO 2

Forma en componentes y longitud de un vector

Determine las componentes y la longitud del vector \mathbf{v} que tiene el punto inicial $(3, -7)$ y el punto final $(-2, 5)$.

Solución Sean $P(3, -7) = (p_1, p_2)$ y $Q(-2, 5) = (q_1, q_2)$. Entonces las componentes de $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ son

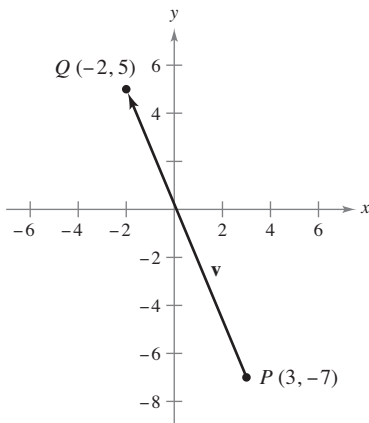
$$v_1 = q_1 - p_1 = -2 - 3 = -5$$

y

$$v_2 = q_2 - p_2 = 5 - (-7) = 12.$$

Así, como se muestra en la figura 1.5, $\mathbf{v} = \langle -5, 12 \rangle$, y la longitud de \mathbf{v} es

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\| &= \sqrt{(-5)^2 + 12^2} \\ &= \sqrt{169} \\ &= 13. \end{aligned}$$



Vector \mathbf{v} dado por medio de sus componentes: $\mathbf{v} = \langle -5, 12 \rangle$.

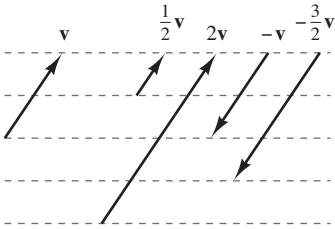
Figura 1.5

Operaciones con vectores

Definición de la suma de vectores y de la multiplicación por un escalar

Sean $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ vectores y sea c un escalar.

1. La **suma vectorial** de \mathbf{u} y \mathbf{v} es el vector $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2 \rangle$.
2. El **múltiplo escalar** de c y \mathbf{u} es el vector $c\mathbf{u} = \langle cu_1, cu_2 \rangle$.
3. El **negativo** de \mathbf{v} es el vector $-\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v} = \langle -v_1, -v_2 \rangle$.
4. La **diferencia** de \mathbf{u} y \mathbf{v} es $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v}) = \langle u_1 - v_1, u_2 - v_2 \rangle$.

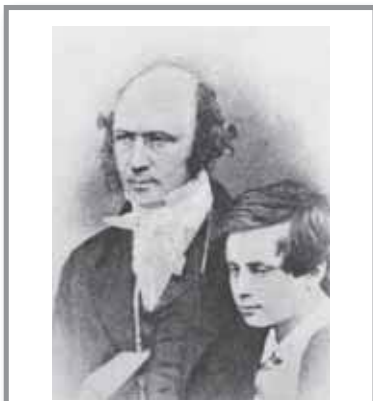


La multiplicación escalar por un vector \mathbf{v} .

Figura 1.6

Geoméricamente, el múltiplo escalar de un vector \mathbf{v} y un escalar c es el vector que tiene $|c|$ veces la longitud de \mathbf{v} , como se muestra en la figura 1.6. Si c es positivo, $c\mathbf{v}$ tiene la misma dirección que \mathbf{v} . Si c es negativo, $c\mathbf{v}$ tiene dirección opuesta.

La suma de dos vectores puede representarse geoméricamente colocando los vectores (sin cambiar sus magnitudes o sus direcciones), de manera que el punto inicial de uno coincida con el punto final del otro, como se muestra en la figura 1.7. El vector $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, llamado el **vector resultante**, es la diagonal de un paralelogramo que tiene \mathbf{u} y \mathbf{v} como lados adyacentes.



WILLIAM ROWAN HAMILTON
(1805-1865)

Algunos de los primeros trabajos con vectores fueron realizados por el matemático irlandés William Rowan Hamilton. Hamilton dedicó muchos años a desarrollar un sistema de cantidades semejantes a vectores llamados *cuaterniones*. No fue sino hasta la segunda mitad del siglo XIX cuando el físico escocés James Maxwell (1831-1879) reestructuró la teoría de los cuaterniones de Hamilton, dándole una forma útil para la representación de cantidades como fuerza, velocidad y aceleración. *Vea LarsonCalculus.com para leer más acerca de esta biografía.*

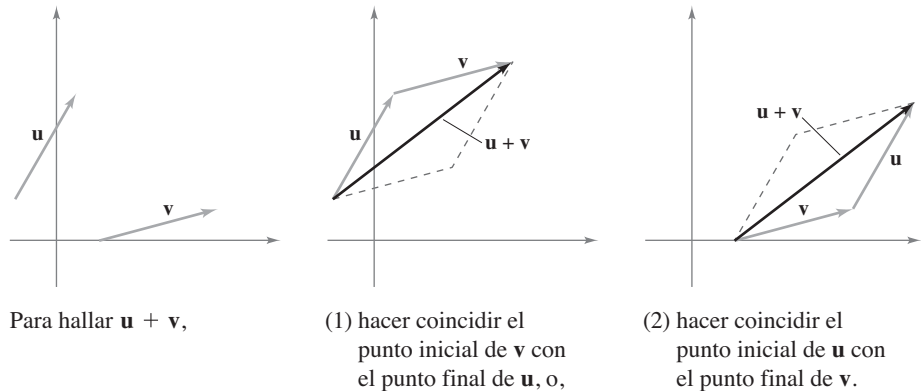


Figura 1.7

La figura 1.8 muestra la equivalencia de las definiciones geométricas y algebraicas de la suma de vectores y la multiplicación por un escalar, y presenta (en el extremo derecho) una interpretación geométrica de $\mathbf{u} - \mathbf{v}$.

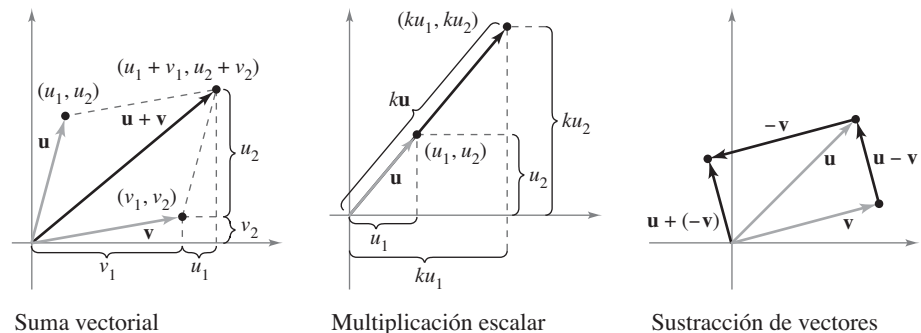


Figura 1.8

EJEMPLO 3

Operaciones con vectores

Dados $\mathbf{v} = \langle -2, 5 \rangle$ y $\mathbf{w} = \langle 3, 4 \rangle$, encuentre cada uno de los vectores.

- a. $\frac{1}{2}\mathbf{v}$ b. $\mathbf{w} - \mathbf{v}$ c. $\mathbf{v} + 2\mathbf{w}$

Solución

a. $\frac{1}{2}\mathbf{v} = \langle \frac{1}{2}(-2), \frac{1}{2}(5) \rangle = \langle -1, \frac{5}{2} \rangle$

b. $\mathbf{w} - \mathbf{v} = \langle w_1 - v_1, w_2 - v_2 \rangle = \langle 3 - (-2), 4 - 5 \rangle = \langle 5, -1 \rangle$

c. Usando $2\mathbf{w} = \langle 6, 8 \rangle$, se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{v} + 2\mathbf{w} &= \langle -2, 5 \rangle + \langle 6, 8 \rangle \\ &= \langle -2 + 6, 5 + 8 \rangle \\ &= \langle 4, 13 \rangle.\end{aligned}$$

La suma de vectores y la multiplicación por un escalar comparten muchas propiedades con la aritmética ordinaria, como se muestra en el teorema siguiente.



EMMY NOETHER (1882–1935)

La matemática alemana Emmy Noether contribuyó a nuestro conocimiento de los sistemas axiomáticos. Noether generalmente se reconoce como la principal matemática de la historia reciente.

Teorema 1.1 Propiedades de las operaciones con vectores

Sean \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} los vectores en el plano, y sean c y d escalares.

- | | |
|--|-----------------------------------|
| 1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ | Propiedad conmutativa |
| 2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ | Propiedad asociativa |
| 3. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ | Propiedad de la identidad aditiva |
| 4. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ | Propiedad del inverso aditivo |
| 5. $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$ | |
| 6. $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$ | Propiedad distributiva |
| 7. $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$ | Propiedad distributiva |
| 8. $1(\mathbf{u}) = \mathbf{u}, 0(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ | |

Demostración La demostración de la *propiedad asociativa* de la suma de vectores utiliza la propiedad asociativa de la suma de números reales.

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} &= [\langle u_1, u_2 \rangle + \langle v_1, v_2 \rangle] + \langle w_1, w_2 \rangle \\ &= \langle u_1 + v_1, u_2 + v_2 \rangle + \langle w_1, w_2 \rangle \\ &= \langle (u_1 + v_1) + w_1, (u_2 + v_2) + w_2 \rangle \\ &= \langle u_1 + (v_1 + w_1), u_2 + (v_2 + w_2) \rangle \\ &= \langle u_1, u_2 \rangle + \langle v_1 + w_1, v_2 + w_2 \rangle \\ &= \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})\end{aligned}$$

Las otras propiedades pueden demostrarse de manera similar.

Consulte LarsonCalculus.com para ver el video de esta demostración de Bruce Edwards.

■ PARA INFORMACIÓN ADICIONAL
Para más información acerca de Emmy Noether, consulte el artículo “Emmy Noether, Greatest Woman Mathematician”, de Clark Kimberling, en *The Mathematics Teacher*. Para ver este artículo vaya a MathArticles.com.

Cualquier conjunto de vectores (junto con uno de escalares) que satisfaga las ocho propiedades dadas en el teorema 1.1 es un **espacio vectorial**.* Las ocho propiedades son los *axiomas del espacio vectorial*. Por tanto, este teorema establece que el conjunto de vectores en el plano (con el conjunto de los números reales) forma un espacio vectorial.

*Para más información sobre espacios vectoriales, consulte *Elementary Linear Algebra*, 7a. ed., por Ron Larson (Boston: Boston, Massachusetts, Brooks/Cole, Cengage Learning, 2013).

TEOREMA 1.2 Longitud de un múltiplo escalar

Sea \mathbf{v} un vector y sea c un escalar. Entonces

$$\|c\mathbf{v}\| = |c| \|\mathbf{v}\|. \quad |c| \text{ es el valor absoluto de } c.$$

Demostración Como $c\mathbf{v} = \langle cv_1, cv_2 \rangle$, se tiene que

$$\begin{aligned} \|c\mathbf{v}\| &= \|\langle cv_1, cv_2 \rangle\| \\ &= \sqrt{(cv_1)^2 + (cv_2)^2} \\ &= \sqrt{c^2v_1^2 + c^2v_2^2} \\ &= \sqrt{c^2(v_1^2 + v_2^2)} \\ &= |c| \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \\ &= |c| \|\mathbf{v}\|. \end{aligned}$$

Consulte LarsonCalculus.com para ver el video de esta demostración de Bruce Edwards. ■

En muchas aplicaciones de los vectores es útil encontrar un vector unitario que tenga la misma dirección que un vector dado. El teorema siguiente da un procedimiento para hacer esto.

TEOREMA 1.3 Vector unitario en la dirección de \mathbf{v}

Si \mathbf{v} es un vector distinto de cero en el plano, entonces el vector

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v}$$

tiene longitud 1 y la misma dirección que \mathbf{v} .

Demostración Como $1/\|\mathbf{v}\|$ es positivo y $\mathbf{u} = (1/\|\mathbf{v}\|)\mathbf{v}$, se puede concluir que \mathbf{u} tiene la misma dirección que \mathbf{v} . Para ver que $\|\mathbf{u}\| = 1$, se observa que

$$\|\mathbf{u}\| = \left\| \left(\frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \right) \mathbf{v} \right\| = \left| \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \right| \|\mathbf{v}\| = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \|\mathbf{v}\| = 1.$$

Por tanto, \mathbf{u} tiene longitud 1 y la misma dirección que \mathbf{v} .

Consulte LarsonCalculus.com para ver el video de esta demostración de Bruce Edwards. ■

Al vector \mathbf{u} del teorema 1.3 se le llama un **vector unitario en la dirección de \mathbf{v}** . El proceso de multiplicar \mathbf{v} por $1/\|\mathbf{v}\|$ para obtener un vector unitario se llama **normalización de \mathbf{v}** .

EJEMPLO 4 Hallar un vector unitario

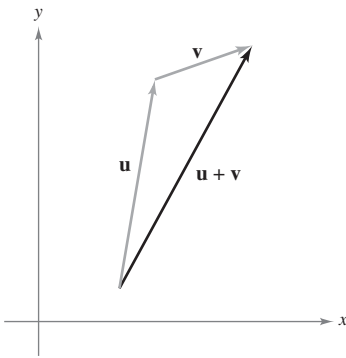
Halle un vector unitario en la dirección de $\mathbf{v} = \langle -2, 5 \rangle$ y verifique que tiene longitud 1.

Solución Por el teorema 1.3, el vector unitario en la dirección de \mathbf{v} es

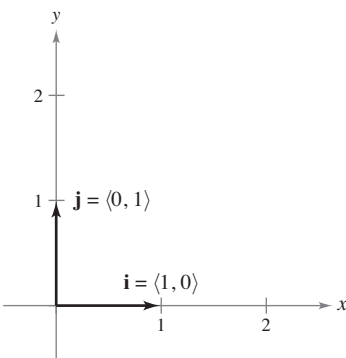
$$\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\langle -2, 5 \rangle}{\sqrt{(-2)^2 + (5)^2}} = \frac{1}{\sqrt{29}} \langle -2, 5 \rangle = \left\langle \frac{-2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}} \right\rangle.$$

Este vector tiene longitud 1, porque

$$\sqrt{\left(\frac{-2}{\sqrt{29}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{29} + \frac{25}{29}} = \sqrt{\frac{29}{29}} = 1. \quad \blacksquare$$



Desigualdad del triángulo.
Figura 1.9



Vectores unitarios estándares o canónicos \mathbf{i} y \mathbf{j} .
Figura 1.10

Generalmente la longitud de la suma de dos vectores no es igual a la suma de sus longitudes. Para ver esto, basta tomar los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} de la figura 1.9. Considerando a \mathbf{u} y \mathbf{v} como dos de los lados de un triángulo, se puede ver que la longitud del tercer lado es $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$, y

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|.$$

La igualdad solo se da si los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} tienen la *misma dirección*. A este resultado se le llama la **desigualdad del triángulo** para vectores. (En el ejercicio 77, sección 1.3, se pide demostrar esto.)

Vectores unitarios canónicos o estándares

A los vectores unitarios $\langle 1, 0 \rangle$ y $\langle 0, 1 \rangle$ se les llama **vectores unitarios canónicos o estándares** en el plano y se denotan por

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle \quad \text{y} \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$$

Vectores unitarios canónicos o estándares

como se muestra en la figura 1.10. Estos vectores pueden usarse para representar cualquier vector de manera única, como sigue.

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, 0 \rangle + \langle 0, v_2 \rangle = v_1 \langle 1, 0 \rangle + v_2 \langle 0, 1 \rangle = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j}$$

Al vector $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j}$ se le llama una combinación lineal de \mathbf{i} y \mathbf{j} . A los escalares v_1 y v_2 se les llama las **componentes horizontal y vertical de \mathbf{v}** .

EJEMPLO 5

Expresar un vector como combinación lineal de vectores unitarios

Sea \mathbf{u} el vector con punto inicial $(2, -5)$ y punto final $(-1, 3)$, y sea $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$. Expresa cada vector como combinación lineal de \mathbf{i} y \mathbf{j} .

a. \mathbf{u} b. $\mathbf{w} = 2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$

Solución

a. $\mathbf{u} = \langle q_1 - p_1, q_2 - p_2 \rangle = \langle -1 - 2, 3 - (-5) \rangle = \langle -3, 8 \rangle = -3\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$

b. $\mathbf{w} = 2\mathbf{u} - 3\mathbf{v} = 2(-3\mathbf{i} + 8\mathbf{j}) - 3(2\mathbf{i} - \mathbf{j}) = -6\mathbf{i} + 16\mathbf{j} - 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} = -12\mathbf{i} + 19\mathbf{j}$

Si \mathbf{u} es un vector unitario y θ es el ángulo (medido en sentido contrario a las manecillas del reloj) desde el eje x positivo hasta \mathbf{u} , el punto final de \mathbf{u} está en el círculo unitario, y tiene

$$\mathbf{u} = \langle \cos \theta, \sen \theta \rangle = \cos \theta \mathbf{i} + \sen \theta \mathbf{j} \quad \text{Vector unitario}$$

como se muestra en la figura 1.11. Además, cualquier vector distinto de cero \mathbf{v} que forma un ángulo con el eje x positivo tiene la misma dirección que \mathbf{u} y puede escribir

$$\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \langle \cos \theta, \sen \theta \rangle = \|\mathbf{v}\| \cos \theta \mathbf{i} + \|\mathbf{v}\| \sen \theta \mathbf{j}.$$

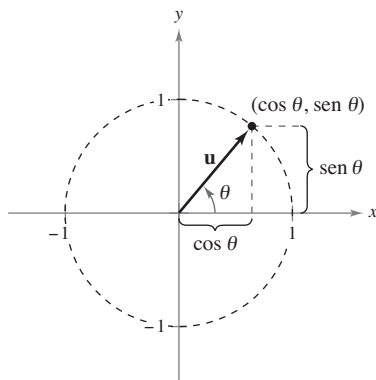
EJEMPLO 6

Escribir un vector de magnitud y dirección dadas

El vector \mathbf{v} tiene una magnitud de 3 y forma un ángulo de $30^\circ = \pi/6$ con el eje x positivo. Expresa \mathbf{v} como combinación lineal de los vectores unitarios \mathbf{i} y \mathbf{j} .

Solución Como el ángulo entre \mathbf{v} y el eje x positivo es $\theta = \pi/6$, puede escribir lo siguiente.

$$\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \cos \theta \mathbf{i} + \|\mathbf{v}\| \sen \theta \mathbf{j} = 3 \cos \frac{\pi}{6} \mathbf{i} + 3 \sen \frac{\pi}{6} \mathbf{j} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \mathbf{i} + \frac{3}{2} \mathbf{j}.$$

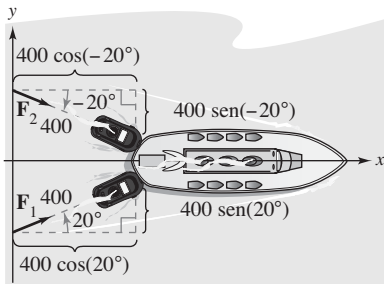


Ángulo θ desde el eje x positivo hasta el vector \mathbf{u} .
Figura 1.11

Los vectores tienen muchas aplicaciones en física e ingeniería. Un ejemplo es la fuerza. Un vector puede usarse para representar fuerza, porque la fuerza tiene magnitud y dirección. Si dos o más fuerzas están actuando sobre un objeto, entonces la fuerza resultante sobre el objeto es la suma vectorial de los vectores que representan las fuerzas.

EJEMPLO 7 Hallar la fuerza resultante

Dos botes remolcadores están empujando un barco, como se muestra en la figura 1.12. Cada bote remolcador está ejerciendo una fuerza de 400 libras. ¿Cuál es la fuerza resultante sobre el barco?



Fuerza resultante sobre el barco ejercida por los dos remolcadores.

Figura 1.12

Solución Usando la figura 1.12, puede representar las fuerzas ejercidas por el primer y segundo botes remolcadores como

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= 400\langle \cos 20^\circ, \sin 20^\circ \rangle = 400 \cos(20^\circ)\mathbf{i} + 400 \sin(20^\circ)\mathbf{j} \\ \mathbf{F}_2 &= 400\langle \cos(-20^\circ), \sin(-20^\circ) \rangle = 400 \cos(20^\circ)\mathbf{i} - 400 \sin(20^\circ)\mathbf{j}. \end{aligned}$$

La fuerza resultante sobre el barco es

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \\ &= [400 \cos(20^\circ)\mathbf{i} + 400 \sin(20^\circ)\mathbf{j}] + [400 \cos(20^\circ)\mathbf{i} - 400 \sin(20^\circ)\mathbf{j}] \\ &= 800 \cos(20^\circ)\mathbf{i} \\ &\approx 752\mathbf{i}. \end{aligned}$$

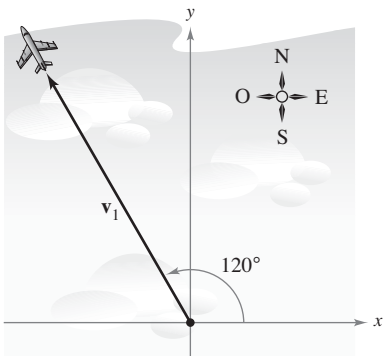
Por tanto, la fuerza resultante sobre el barco es aproximadamente 752 libras en la dirección del eje x positivo.

En levantamientos topográficos y en la navegación, un **rumbo** es una dirección que mide el ángulo agudo que una trayectoria o línea de mira forma con una recta fija norte-sur. En la navegación aérea los rumbos se miden en el sentido de las manecillas del reloj en grados desde el norte.

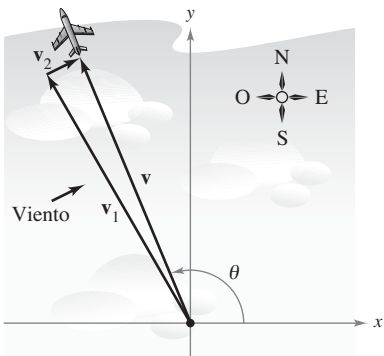
EJEMPLO 8 Hallar una velocidad

•••► Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Un avión viaja a una altitud fija con un factor de viento despreciable y mantiene una velocidad de 500 millas por hora con un rumbo de 120° , como se muestra en la figura 1.13(a). Cuando alcanza cierto punto, el avión encuentra un viento con una velocidad de 70 millas por hora en dirección 45° NE (45° este del norte), como se muestra en la figura 1.13(b). ¿Cuáles son la velocidad y la dirección resultantes del avión?



(a) Dirección sin viento.



(b) Dirección con viento.

Figura 1.13

Solución Usando la figura 1.13(a), represente la velocidad del avión (solo) como

$$\mathbf{v}_1 = 500 \cos(120^\circ)\mathbf{i} + 500 \sin(120^\circ)\mathbf{j}.$$

La velocidad del viento se representa por el vector

$$\mathbf{v}_2 = 70 \cos(45^\circ)\mathbf{i} + 70 \sin(45^\circ)\mathbf{j}.$$

La velocidad resultante del avión (en el viento) es

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \\ &= 500 \cos(120^\circ)\mathbf{i} + 500 \sin(120^\circ)\mathbf{j} + 70 \cos(45^\circ)\mathbf{i} + 70 \sin(45^\circ)\mathbf{j} \\ &\approx -200.5\mathbf{i} + 482.5\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Para encontrar la velocidad y la dirección resultantes, escriba $\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|(\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j})$. Puede escribir $\|\mathbf{v}\| \approx \sqrt{(-200.5)^2 + (482.5)^2} \approx 522.5$,

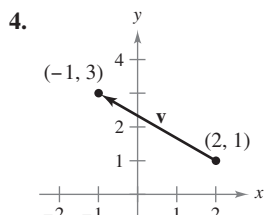
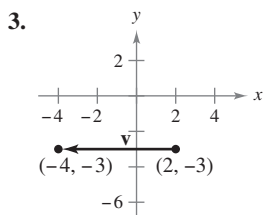
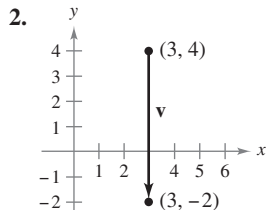
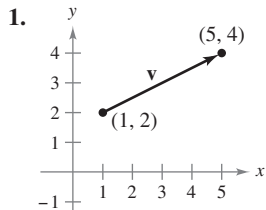
$$\mathbf{v} \approx 522.5 \left(\frac{-200.5}{522.5} \mathbf{i} + \frac{482.5}{522.5} \mathbf{j} \right) \approx 522.5 [\cos(112.6^\circ)\mathbf{i} + \sin(112.6^\circ)\mathbf{j}].$$

La nueva velocidad del avión, alterada por el viento, es aproximadamente 522.5 millas por hora en una trayectoria que forma un ángulo de 112.6° con el eje x positivo.

1.1 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Representar un vector En los ejercicios 1-4, (a) dé el vector \mathbf{v} mediante sus componentes y (b) dibuje el vector con su punto inicial en el origen.



Vectores equivalentes En los ejercicios 5-8, halle los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} cuyos puntos inicial y final se dan. Demuestre que \mathbf{u} y \mathbf{v} son equivalentes.

5. \mathbf{u} : (3, 2), (5, 6)

6. \mathbf{u} : (-4, 0), (1, 8)

\mathbf{v} : (1, 4), (3, 8)

\mathbf{v} : (2, -1), (7, 7)

7. \mathbf{u} : (0, 3), (6, -2)

8. \mathbf{u} : (-4, -1), (11, -4)

\mathbf{v} : (3, 10), (9, 5)

\mathbf{v} : (10, 13), (25, 10)

Escribir un vector en diferentes formas En los ejercicios 9-16 se dan los puntos inicial y final de un vector \mathbf{v} . (a) Dibuje el segmento de recta dirigido dado, (b) exprese el vector mediante sus componentes, (c) exprese el vector como la combinación lineal de los vectores unitarios estándares \mathbf{i} y \mathbf{j} , y (d) dibuje el vector con el punto inicial en el origen.

Punto inicial	Punto final	Punto inicial	Punto final
9. (2, 0)	(5, 5)	10. (4, -6)	(3, 6)
11. (8, 3)	(6, -1)	12. (0, -4)	(-5, -1)
13. (6, 2)	(6, 6)	14. (7, -1)	(-3, -1)
15. $(\frac{3}{2}, \frac{4}{3})$	$(\frac{1}{2}, 3)$	16. (0.12, 0.60)	(0.84, 1.25)

Representar múltiplos escalares En los ejercicios 17 y 18, dibuje cada uno de los múltiplos escalares de \mathbf{v} .

17. $\mathbf{v} = \langle 3, 5 \rangle$

(a) $2\mathbf{v}$ (b) $-3\mathbf{v}$ (c) $\frac{7}{2}\mathbf{v}$ (d) $\frac{2}{3}\mathbf{v}$

18. $\mathbf{v} = \langle -2, 3 \rangle$

(a) $4\mathbf{v}$ (b) $-\frac{1}{2}\mathbf{v}$ (c) $0\mathbf{v}$ (d) $-6\mathbf{v}$

Uso de operaciones vectoriales En los ejercicios 19 y 20, halle (a) $\frac{2}{3}\mathbf{u}$, (b) $3\mathbf{v}$, (c) $\mathbf{v} - \mathbf{u}$, y (d) $2\mathbf{u} + 5\mathbf{v}$.

19. $\mathbf{u} = \langle 4, 9 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, -5 \rangle$ 20. $\mathbf{u} = \langle -3, -8 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 8, 25 \rangle$

Representar un vector En los ejercicios 21-26, use la figura para representar gráficamente el vector. Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, vaya a MathGraphs.com.

21. $-\mathbf{u}$

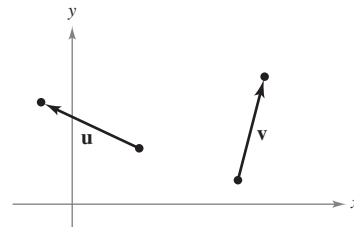
22. $2\mathbf{u}$

23. $-\mathbf{v}$

24. $\frac{1}{2}\mathbf{v}$

25. $\mathbf{u} - \mathbf{v}$

26. $\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$



Hallar un punto final En los ejercicios 27 y 28 se dan el vector \mathbf{v} y su punto inicial. Encuentre el punto terminal.

27. $\mathbf{v} = \langle -1, 3 \rangle$; Punto inicial: (4, 2)

28. $\mathbf{v} = \langle 4, -9 \rangle$; Punto inicial: (5, 3)

Hallar una magnitud de un vector En los ejercicios 29-34, encuentre la magnitud de \mathbf{v} .

29. $\mathbf{v} = 7\mathbf{i}$

30. $\mathbf{v} = -3\mathbf{j}$

31. $\mathbf{v} = \langle 4, 3 \rangle$

32. $\mathbf{v} = \langle 12, -5 \rangle$

33. $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

34. $\mathbf{v} = -10\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

Encontrar un vector unitario En los ejercicios 35-38, halle el vector unitario en la dirección de \mathbf{v} y verifique que tiene longitud 1.

35. $\mathbf{v} = \langle 3, 12 \rangle$

36. $\mathbf{v} = \langle -5, 15 \rangle$

37. $\mathbf{v} = \langle \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \rangle$

38. $\mathbf{v} = \langle -6.2, 3.4 \rangle$

Encontrar magnitudes En los ejercicios 39-42, encuentre lo siguiente.

(a) $\|\mathbf{u}\|$

(b) $\|\mathbf{v}\|$

(c) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$

(d) $\left\| \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \right\|$

(e) $\left\| \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \right\|$

(f) $\left\| \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|} \right\|$

39. $\mathbf{u} = \langle 1, -1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -1, 2 \rangle$

40. $\mathbf{u} = \langle 0, 1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 3, -3 \rangle$

41. $\mathbf{u} = \langle 1, \frac{1}{2} \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, 3 \rangle$

42. $\mathbf{u} = \langle 2, -4 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 5, 5 \rangle$

Usar la desigualdad del triángulo En los ejercicios 43 y 44, represente gráficamente \mathbf{u} , \mathbf{v} y $\mathbf{u} + \mathbf{v}$. Después demuestre la desigualdad del triángulo usando los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} .

43. $\mathbf{u} = \langle 2, 1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 5, 4 \rangle$

44. $\mathbf{u} = \langle -3, 2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, -2 \rangle$

Encontrar un vector En los ejercicios 45-48, halle el vector \mathbf{v} de la magnitud dada en la misma dirección que \mathbf{u} .

Magnitud

Dirección

45. $\|\mathbf{v}\| = 6$

$\mathbf{u} = \langle 0, 3 \rangle$

46. $\|\mathbf{v}\| = 4$

$\mathbf{u} = \langle 1, 1 \rangle$

47. $\|\mathbf{v}\| = 5$

$\mathbf{u} = \langle -1, 2 \rangle$

48. $\|\mathbf{v}\| = 2$

$\mathbf{u} = \langle \sqrt{3}, 3 \rangle$

Encontrar un vector En los ejercicios 49-52, halle las componentes de v dadas su magnitud y el ángulo que forman con el eje x positivo.

49. $\|v\| = 3, \theta = 0^\circ$ 50. $\|v\| = 5, \theta = 120^\circ$
 51. $\|v\| = 2, \theta = 150^\circ$ 52. $\|v\| = 4, \theta = 3.5^\circ$

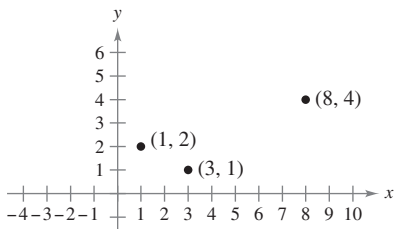
Encontrar un vector En los ejercicios 53-56, halle las componentes de $u + v$ dadas las longitudes de u y v , y los ángulos que u y v forman con el eje x positivo.

53. $\|u\| = 1, \theta_u = 0^\circ$ 54. $\|u\| = 4, \theta_u = 0^\circ$
 $\|v\| = 3, \theta_v = 45^\circ$ $\|v\| = 2, \theta_v = 60^\circ$
 55. $\|u\| = 2, \theta_u = 4$ 56. $\|u\| = 5, \theta_u = -0.5$
 $\|v\| = 1, \theta_v = 2$ $\|v\| = 5, \theta_v = 0.5$

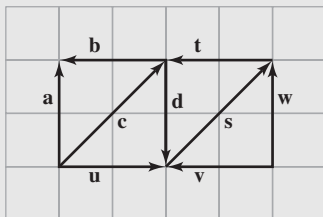
DESARROLLO DE CONCEPTOS

57. **Escalar y vector** Explique, con sus propias palabras, la diferencia entre un escalar y un vector. Dé ejemplos de cada uno.
58. **Escalar o vector** Identifique la cantidad como escalar o como vector. Explique su razonamiento.
- (a) La velocidad en la boca de cañón de un arma de fuego.
 - (b) El precio de las acciones de una empresa.
 - (c) La temperatura del aire en un cuarto.
 - (d) El peso de un automóvil.

59. **Usar un paralelogramo** Tres de los vértices de un paralelogramo son $(1, 2), (3, 1)$ y $(8, 4)$. Halle las tres posibilidades para el cuarto vértice (vea la figura).



60. ¿CÓMO LO VE? Use la figura para determinar si cada enunciado es verdadero o falso. Justifique su respuesta.



- (a) $a = -d$
- (b) $c = s$
- (c) $a + u = c$
- (d) $v + w = -s$
- (e) $a + d = 0$
- (f) $u - v = -2(b + t)$

Encontrar valores En los ejercicios 61-66, determine a y b tales que $v = au + bw$, donde $u = \langle 1, 2 \rangle$ y $w = \langle 1, -1 \rangle$.

61. $v = \langle 2, 1 \rangle$ 62. $v = \langle 0, 3 \rangle$
 63. $v = \langle 3, 0 \rangle$ 64. $v = \langle 3, 3 \rangle$
 65. $v = \langle 1, 1 \rangle$ 66. $v = \langle -1, 7 \rangle$

Encontrar vectores unitarios En los ejercicios 67-72, determine un vector unitario (a) paralelo y (b) normal a la gráfica de f en el punto dado. A continuación, represente gráficamente los vectores y la función.

67. $f(x) = x^2, (3, 9)$ 68. $f(x) = -x^2 + 5, (1, 4)$
 69. $f(x) = x^3, (1, 1)$ 70. $f(x) = x^3, (-2, -8)$
 71. $f(x) = \sqrt{25 - x^2}, (3, 4)$
 72. $f(x) = \tan x, (\frac{\pi}{4}, 1)$

Encontrar un vector En los ejercicios 73 y 74, exprese v mediante sus componentes, dadas las magnitudes de u y de $u + v$, y los ángulos que u y $u + v$ forman con el eje x positivo.

73. $\|u\| = 1, \theta = 45^\circ$ 74. $\|u\| = 4, \theta = 30^\circ$
 $\|u + v\| = \sqrt{2}, \theta = 90^\circ$ $\|u + v\| = 6, \theta = 120^\circ$

75. **Fuerza resultante** Fuerzas con magnitudes de 500 libras y 200 libras actúan sobre una pieza de la máquina a ángulos de 30° y -45° , respectivamente, con el eje x (vea la figura). Halle la dirección y la magnitud de la fuerza resultante.

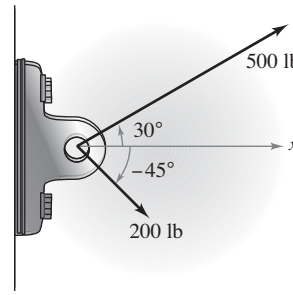


Figura para 75

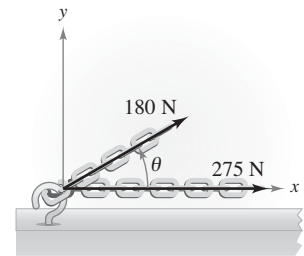


Figura para 76

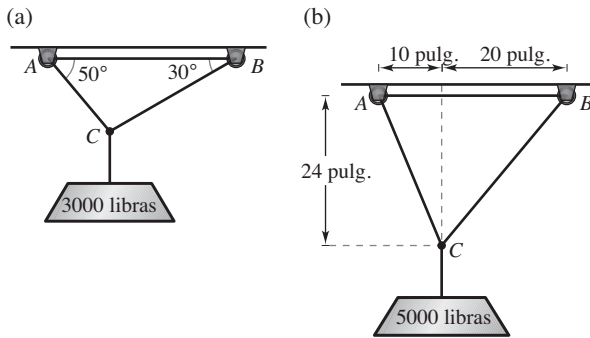
76. Análisis numérico y gráfico Fuerzas con magnitudes de 180 newtons y 275 newtons actúan sobre un gancho (vea la figura). El ángulo entre las dos fuerzas es de θ grados.

- (a) Si $\theta = 30^\circ$, halle la dirección y la magnitud de la fuerza resultante.
- (b) Exprese la magnitud M y la dirección α de la fuerza resultante en funciones de θ , donde $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$.
- (c) Use una herramienta de graficación para completar la tabla.

θ	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
M							
α							

- (d) Use una herramienta de graficación para representar las dos funciones M y α .
- (e) Explique por qué una de las funciones disminuye cuando θ aumenta mientras que la otra no.

77. **Fuerza resultante** Tres fuerzas de magnitudes de 75 libras, 100 libras y 125 libras actúan sobre un objeto a ángulos de 30° , 45° y 120° , respectivamente, con el eje x positivo. Halle la dirección y la magnitud de la fuerza resultante.
78. **Fuerza resultante** Tres fuerzas de magnitudes de 400 newtons, 280 newtons y 350 newtons, actúan sobre un objeto a ángulos de -30° , 45° y 135° , respectivamente, con el eje x positivo. Halle la dirección y la magnitud de la fuerza resultante.
79. **Piénselo** Considere dos fuerzas de la misma magnitud que actúan sobre un punto.
- Si la magnitud de la resultante es la suma de las magnitudes de las dos fuerzas, haga una conjetura acerca del ángulo entre las fuerzas.
 - Si la resultante de las fuerzas es 0, haga una conjetura acerca del ángulo entre las fuerzas.
 - ¿Puede ser la magnitud de la resultante mayor que la suma de las magnitudes de las dos fuerzas? Explique su respuesta.
80. **Tensión de un cable** Determine la tensión en cada cable que sostiene la carga dada.



81. **Movimiento de un proyectil** Un arma con una velocidad en la boca del cañón de 1200 pies por segundo se dispara a un ángulo de 6° sobre la horizontal. Encuentre las componentes horizontal y vertical de la velocidad.
82. **Carga compartida** Para llevar una pesa cilíndrica de 100 libras, dos trabajadores sostienen los extremos de unas sogas cortas atadas a un aro en el centro de la parte superior del cilindro. Una soga forma un ángulo de 20° con la vertical y la otra forma un ángulo de 30° (vea la figura).
- Halle la tensión de cada soga si la fuerza resultante es vertical.
 - Halle la componente vertical de la fuerza de cada trabajador.

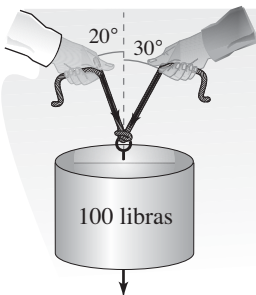


Figura para 82

Mikael Damkier/Shutterstock.com

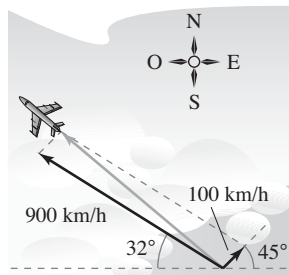


Figura para 83

83. **Navegación** Un avión vuela en dirección 302° . Su velocidad con respecto al aire es de 900 kilómetros por hora. El viento a la altitud del avión viene del suroeste a 100 kilómetros por hora (vea la figura). ¿Cuál es la verdadera dirección del avión y cuál es su velocidad respecto al suelo?

•• **84. Navegación** •••••

- Un avión vuela a una velocidad constante
- de 400 millas por hora hacia el este, respecto al suelo, y se encuentra con un viento de 50 millas por hora proveniente del noroeste.
- Encuentre la velocidad relativa al aire y el rumbo que permitirán al avión mantener su velocidad respecto al suelo y su dirección hacia el este.



¿Verdadero o falso? En los ejercicios 85-90, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que demuestre que es falso.

85. Si \mathbf{u} y \mathbf{v} tienen la misma magnitud y dirección, entonces \mathbf{u} y \mathbf{v} son equivalentes.
86. Si \mathbf{u} es un vector unitario en la dirección de \mathbf{v} , entonces $\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\mathbf{u}$.
87. Si $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ es un vector unitario, entonces $a^2 + b^2 = 1$.
88. Si $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} = \mathbf{0}$, entonces $a = -b$.
89. Si $a = b$, entonces $\|a\mathbf{i} + b\mathbf{j}\| = \sqrt{2}a$.
90. Si \mathbf{u} y \mathbf{v} tienen la misma magnitud pero direcciones opuestas, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$.
91. **Demostración** Demuestre que $\mathbf{u} = (\cos \theta)\mathbf{i} - (\sin \theta)\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = (\sin \theta)\mathbf{i} + (\cos \theta)\mathbf{j}$ son vectores unitarios para todo ángulo θ .
92. **Geometría** Usando vectores, demuestre que el segmento de recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo y mide la mitad de longitud del tercer lado.
93. **Geometría** Usando vectores, demuestre que las diagonales de un paralelogramo se cortan a la mitad.
94. **Demostración** Demuestre que el vector $\mathbf{w} = \|\mathbf{u}\|\mathbf{v} + \|\mathbf{v}\|\mathbf{u}$ corta a la mitad el ángulo entre \mathbf{u} y \mathbf{v} .
95. **Usar un vector** Considere el vector $\mathbf{u} = \langle x, y \rangle$. Describa el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que $\|\mathbf{u}\| = 5$.

DESAFÍOS DEL EXAMEN PUTNAM

96. Un arma de artillería de costa puede ser disparada a cualquier ángulo de elevación entre 0° y 90° en un plano vertical fijo. Si se desprecia la resistencia del aire y la velocidad en la boca de cañón es constante ($= v_0$), determine el conjunto H de puntos en el plano y sobre la horizontal que puede ser golpeado.

Este problema fue preparado por el Committee on the Putnam Prize Competition. © The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

1.2 Vectores en el espacio

- Entender el sistema de coordenadas rectangulares tridimensional.
- Analizar vectores en el espacio.

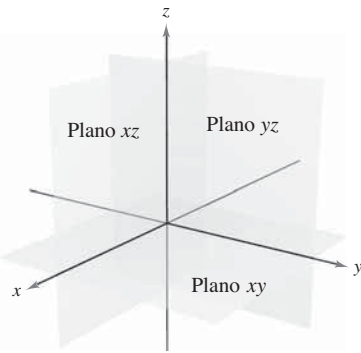
Coordenadas en el espacio

Hasta este punto del texto, se ha utilizado principalmente el sistema de coordenadas bi-dimensional. En buena parte de lo que resta del estudio del cálculo se emplea el sistema de coordenadas tridimensional.

Antes de extender el concepto de vector a tres dimensiones, se debe poder identificar puntos en el **sistema de coordenadas tridimensional**. Se puede construir este sistema trazando en el origen un eje z perpendicular al eje x y al eje y , como se muestra en la figura 1.14. Tomados por pares, los ejes determinan tres **planos coordenados**: el **plano xy** , el **plano xz** y el **plano yz** . Estos tres planos coordenados dividen el espacio tridimensional en ocho **octantes**. El primer octante es en el que todas las coordenadas son positivas. En este sistema tridimensional un punto P en el espacio está determinado por una terna ordenada (x, y, z) donde x, y y z son:

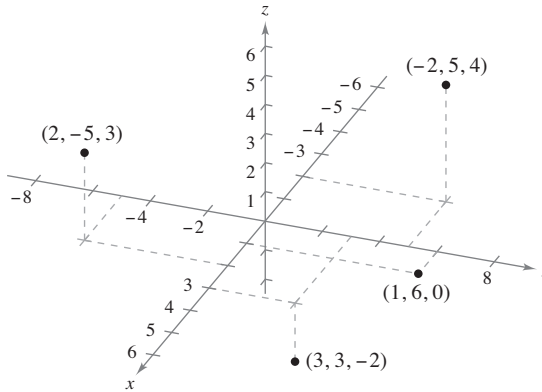
- x = distancia dirigida que va del plano yz a P
- y = distancia dirigida que va del plano xz a P
- z = distancia dirigida que va del plano xy a P

En la figura 1.15 se muestran varios puntos.



Sistema de coordenadas tridimensional.

Figura 1.14



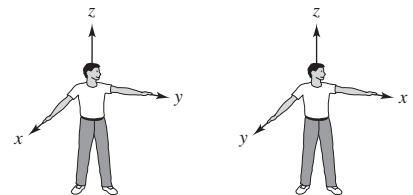
Los puntos en el sistema de coordenadas tridimensional se representan por medio de ternas ordenadas.

Figura 1.15

•••**COMENTARIO** Las gráficas rotativas tridimensionales que están disponibles en *LarsonCalculus.com* pueden ayudarle a visualizar puntos u objetos en un sistema de coordenadas tridimensional.



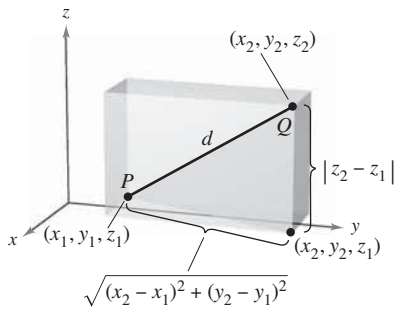
Un sistema de coordenadas tridimensional puede tener orientación **levógira** o **dextrógira**. Para determinar la orientación de un sistema, se puede imaginar de pie en el origen, con los brazos apuntando en dirección de los ejes x y y positivo, y el eje z apuntando hacia arriba, como se muestra en la figura 1.16. El sistema es dextrógiro o levógiro, dependiendo de qué mano queda apuntando a lo largo del eje x . En este texto se trabaja exclusivamente con el sistema dextrógiro.



Sistema dextrógiro

Sistema levógiro

Figura 1.16



Distancia entre dos puntos en el espacio.

Figura 1.17

Muchas de las fórmulas establecidas para el sistema de coordenadas bidimensional pueden extenderse a tres dimensiones. Por ejemplo, para encontrar la distancia entre dos puntos en el espacio, se usa dos veces el teorema pitagórico, como se muestra en la figura 1.17. Haciendo esto se obtiene la fórmula de la distancia entre los puntos (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) .

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Fórmula de la distancia

EJEMPLO 1

Encontrar la distancia entre dos puntos en el espacio

Encuentre la distancia entre los puntos $(2, -1, 3)$ y $(1, 0, -2)$.

Solución

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(1 - 2)^2 + (0 + 1)^2 + (-2 - 3)^2} \\ &= \sqrt{1 + 1 + 25} \\ &= \sqrt{27} \\ &= 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

Fórmula de la distancia

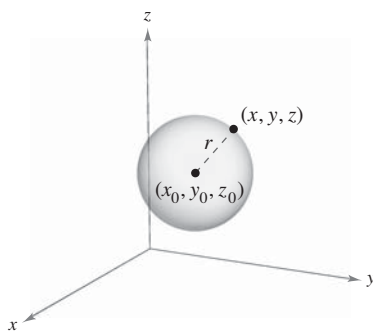


Figura 1.18

Una **esfera** con centro en (x_0, y_0, z_0) y radio r está definida como el conjunto de todos los puntos tales que la distancia entre (x, y, z) y (x_0, y_0, z_0) es r . Puede usar la fórmula de la distancia para encontrar la **ecuación canónica o estándar de una esfera** de radio r , con centro en (x_0, y_0, z_0) . Si (x, y, z) es un punto arbitrario en la esfera, la ecuación de la esfera es

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

Ecuación de la esfera

como se muestra en la figura 1.18. El punto medio del segmento de recta que une a los puntos (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) tiene coordenadas

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right).$$

Fórmula del punto medio

EJEMPLO 2

Encontrar la ecuación de una esfera

Determine la ecuación canónica o estándar de la esfera que tiene los puntos

$$(5, -2, 3) \text{ y } (0, 4, -3)$$

como extremos de un diámetro.

Solución Según la fórmula del punto medio, el centro de la esfera es

$$\left(\frac{5 + 0}{2}, \frac{-2 + 4}{2}, \frac{3 - 3}{2} \right) = \left(\frac{5}{2}, 1, 0 \right).$$

Fórmula del punto medio

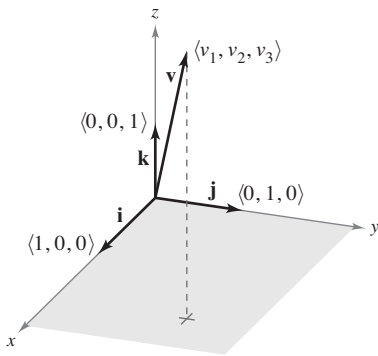
Según la fórmula de la distancia, el radio es

$$r = \sqrt{\left(0 - \frac{5}{2}\right)^2 + (4 - 1)^2 + (-3 - 0)^2} = \sqrt{\frac{97}{4}} = \frac{\sqrt{97}}{2}.$$

Por consiguiente, la ecuación canónica o estándar de la esfera es

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = \frac{97}{4}.$$

Ecuación de la esfera



Vectores unitarios canónicos o estándar en el espacio.

Figura 1.19

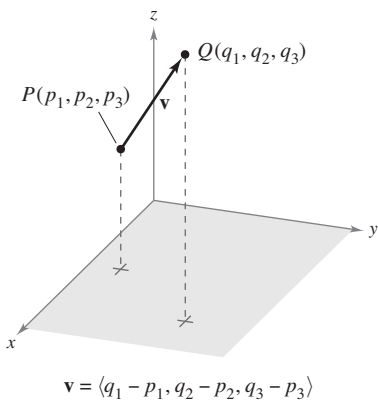


Figura 1.20

Vectores en el espacio

En el espacio los vectores se denotan mediante ternas ordenadas $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. El **vector cero** se denota por $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$. Usando los vectores unitarios

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle, \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle \quad \text{y} \quad \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

la **notación de vectores unitarios canónicos o estándar** para \mathbf{v} es

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

como se muestra en la figura 1.19. Si \mathbf{v} se representa por el segmento de recta dirigido de $P(p_1, p_2, p_3)$ a $Q(q_1, q_2, q_3)$, como se muestra en la figura 1.20, las componentes de \mathbf{v} se obtienen restando las coordenadas del punto inicial de las coordenadas del punto final como sigue

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3 \rangle$$

Vectores en el espacio

Sean $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ vectores en el espacio, y sea c un escalar.

1. **Igualdad de vectores:** $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ si y solo si $u_1 = v_1, u_2 = v_2$ y $u_3 = v_3$.
2. **Expresión mediante las componentes:** Si \mathbf{v} se representa por el segmento de recta dirigido de $P(p_1, p_2, p_3)$ a $Q(q_1, q_2, q_3)$, entonces

$$\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \langle q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3 \rangle.$$

3. **Longitud:** $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$
4. **Vector unitario en la dirección de \mathbf{v} :** $\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \left(\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\right)\langle v_1, v_2, v_3 \rangle, \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$
5. **Suma de vectores:** $\mathbf{v} + \mathbf{u} = \langle v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3 \rangle$
6. **Multiplicación por un escalar:** $c\mathbf{v} = \langle cv_1, cv_2, cv_3 \rangle$.

Observe que las propiedades de la suma de vectores y de la multiplicación por un escalar dadas en el teorema 1.1 (vea la sección 1.1) son también válidas para vectores en el espacio.

EJEMPLO 3

Hallar las componentes de un vector en el espacio

•••► Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Encuentre las componentes y la longitud del vector \mathbf{v} que tiene punto inicial $(-2, 3, 1)$ y punto final $(0, -4, 4)$. Después, halle un vector unitario en la dirección de \mathbf{v} .

Solución El vector \mathbf{v} dado mediante sus componentes es

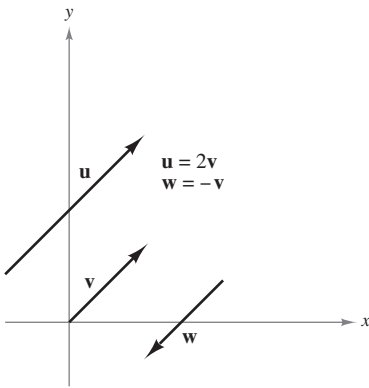
$$\mathbf{v} = \langle q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3 \rangle = \langle 0 - (-2), -4 - 3, 4 - 1 \rangle = \langle 2, -7, 3 \rangle$$

lo cual implica que su longitud es

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + (-7)^2 + 3^2} = \sqrt{62}.$$

El vector unitario en la dirección de \mathbf{v} es

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{62}}\langle 2, -7, 3 \rangle \\ &= \left\langle \frac{2}{\sqrt{62}}, \frac{-7}{\sqrt{62}}, \frac{3}{\sqrt{62}} \right\rangle. \end{aligned}$$



Vectores paralelos.
Figura 1.21

Recuerde que en la definición de la multiplicación por un escalar vio que múltiplos escalares positivos de un vector \mathbf{v} distinto de cero tienen la misma dirección que \mathbf{v} , mientras que múltiplos negativos tienen dirección opuesta a la de \mathbf{v} . En general, dos vectores distintos de cero \mathbf{u} y \mathbf{v} son **paralelos** si existe algún escalar c tal que $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$. Por ejemplo, en la figura 1.21 los vectores \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} son paralelos, porque

$$\mathbf{u} = 2\mathbf{v} \quad \text{y} \quad \mathbf{w} = -\mathbf{v}.$$

Definición de vectores paralelos

Dos vectores distintos de cero \mathbf{u} y \mathbf{v} son **paralelos** si hay algún escalar c tal que $\mathbf{u} = c\mathbf{v}$.

EJEMPLO 4

Vectores paralelos

El vector \mathbf{w} tiene punto inicial $(2, -1, 3)$ y punto final $(-4, 7, 5)$. ¿Cuál de los vectores siguientes es paralelo a \mathbf{w} ?

a. $\mathbf{u} = \langle 3, -4, -1 \rangle$

b. $\mathbf{v} = \langle 12, -16, 4 \rangle$

Solución Comience expresando \mathbf{w} mediante sus componentes,

$$\mathbf{w} = \langle -4 - 2, 7 - (-1), 5 - 3 \rangle = \langle -6, 8, 2 \rangle$$

a. Como $\mathbf{u} = \langle 3, -4, -1 \rangle = -\frac{1}{2}\langle -6, 8, 2 \rangle = -\frac{1}{2}\mathbf{w}$, puede concluir que \mathbf{u} es paralelo a \mathbf{w} .

b. En este caso, se quiere encontrar un escalar c tal que

$$\langle 12, -16, 4 \rangle = c\langle -6, 8, 2 \rangle.$$

Para encontrar c , iguale los componentes correspondientes y resuelva como se muestra.

$$12 = -6c \quad \Rightarrow \quad c = -2$$

$$-16 = 8c \quad \Rightarrow \quad c = -2$$

$$4 = 2c \quad \Rightarrow \quad c = 2$$

Observe que $c = -2$ para las primeras dos componentes y $c = 2$ para el tercer componente. Esto significa que la ecuación $\langle 12, -16, 4 \rangle = c\langle -6, 8, 2 \rangle$ no tiene solución y los vectores no son paralelos.

EJEMPLO 5

Usar vectores para determinar puntos colineales

Determine si los puntos

$$P(1, -2, 3), \quad Q(2, 1, 0) \quad \text{y} \quad R(4, 7, -6)$$

son colineales.

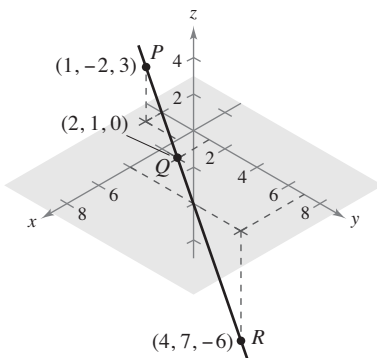
Solución Los componentes de \overrightarrow{PQ} y \overrightarrow{PR} son

$$\overrightarrow{PQ} = \langle 2 - 1, 1 - (-2), 0 - 3 \rangle = \langle 1, 3, -3 \rangle$$

y

$$\overrightarrow{PR} = \langle 4 - 1, 7 - (-2), -6 - 3 \rangle = \langle 3, 9, -9 \rangle.$$

Estos dos vectores tienen un punto inicial común. Por tanto, P , Q y R están en la misma recta si y solo si \overrightarrow{PQ} y \overrightarrow{PR} son paralelos, ya que $\overrightarrow{PR} = 3\overrightarrow{PQ}$, como se muestra en la figura 1.22.



Los puntos P , Q y R están en la misma recta.

Figura 1.22

EJEMPLO 6 Notación empleando los vectores unitarios canónicos

- a. Expresar el vector $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 5\mathbf{k}$ por medio de sus componentes.
- b. Encuentre el punto final del vector $\mathbf{v} = 7\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, dado que el punto inicial es $P(-2, 3, 5)$.
- c. Determine el punto final del vector $\mathbf{v} = -6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$. A continuación, encuentre un vector unitario en la dirección de \mathbf{v} .

Solución

- a. Como falta \mathbf{j} , su componente es 0 y

$$\mathbf{v} = 4\mathbf{i} - 5\mathbf{k} = \langle 4, 0, -5 \rangle.$$

- b. Necesita encontrar $Q(q_1, q_2, q_3)$ tal que

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = 7\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}.$$

Esto implica que $q_1 - (-2) = 7$, $q_2 - 3 = -1$ y $q_3 - 5 = 3$. La solución de estas tres ecuaciones es $q_1 = 5$, $q_2 = 2$ y $q_3 = 8$. Por tanto, Q es $(5, 2, 8)$.

- c. Observe que $v_1 = -6$, $v_2 = 2$ y $v_3 = -3$. Por consiguiente, la longitud de \mathbf{v} es

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(-6)^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{49} = 7.$$

El vector unitario en la dirección de \mathbf{v} es

$$\frac{1}{7}(-6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) = -\frac{6}{7}\mathbf{i} + \frac{2}{7}\mathbf{j} - \frac{3}{7}\mathbf{k}.$$

EJEMPLO 7 Magnitud de una fuerza

Una cámara de televisión de 120 libras está colocada en un trípode, como se muestra en la figura 1.23. Represente la fuerza ejercida en cada pata del trípode como un vector.

Solución Sean los vectores \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 y \mathbf{F}_3 las fuerzas ejercidas en las tres patas. A partir de la figura 1.23 puede determinar que las direcciones de \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 y \mathbf{F}_3 son las siguientes.

$$\overrightarrow{PQ}_1 = \langle 0 - 0, -1 - 0, 0 - 4 \rangle = \langle 0, -1, -4 \rangle$$

$$\overrightarrow{PQ}_2 = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2} - 0, \frac{1}{2} - 0, 0 - 4 \right\rangle = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -4 \right\rangle$$

$$\overrightarrow{PQ}_3 = \left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2} - 0, \frac{1}{2} - 0, 0 - 4 \right\rangle = \left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -4 \right\rangle$$

Como cada pata tiene la misma longitud, y la fuerza total se distribuye igualmente entre las tres patas, usted sabe que $\|\mathbf{F}_1\| = \|\mathbf{F}_2\| = \|\mathbf{F}_3\|$. Por tanto, existe una constante c tal que

$$\mathbf{F}_1 = c\langle 0, -1, -4 \rangle, \quad \mathbf{F}_2 = c\left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -4 \right\rangle \quad \text{y} \quad \mathbf{F}_3 = c\left\langle -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, -4 \right\rangle.$$

Sea la fuerza total ejercida por el objeto dada por $\mathbf{F} = \langle 0, 0, -120 \rangle$. Entonces, usando el hecho que

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$$

puede concluir que \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 y \mathbf{F}_3 tienen todas una componente vertical de -40 . Esto implica que $c(-4) = -40$ y $c = 10$. Por tanto, las fuerzas ejercidas sobre las patas pueden representarse por

$$\mathbf{F}_1 = \langle 0, -10, -40 \rangle,$$

$$\mathbf{F}_2 = \langle 5\sqrt{3}, 5, -40 \rangle,$$

y

$$\mathbf{F}_3 = \langle -5\sqrt{3}, 5, -40 \rangle.$$

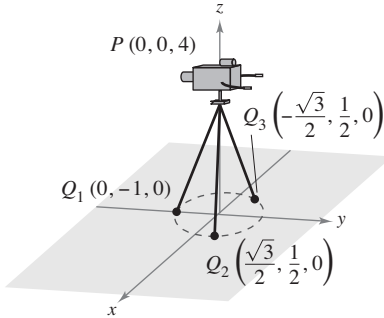


Figura 1.23

1.2 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Representar puntos En los ejercicios 1-4, represente los puntos en el mismo sistema de coordenadas tridimensional.

- (a) $(2, 1, 3)$ (b) $(-1, 2, 1)$
- (a) $(3, -2, 5)$ (b) $(\frac{3}{2}, 4, -2)$
- (a) $(5, -2, 2)$ (b) $(5, -2, -2)$
- (a) $(0, 4, -5)$ (b) $(4, 0, 5)$

Encontrar coordenadas de un punto En los ejercicios 5-8, halle las coordenadas del punto.

- El punto se localiza tres unidades detrás del plano yz , cuatro unidades a la derecha del plano xz y cinco unidades arriba del plano xy .
- El punto se localiza siete unidades delante del plano yz , dos unidades a la izquierda del plano xz y una unidad debajo del plano xy .
- El punto se localiza en el eje x , 12 unidades delante del plano yz .
- El punto se localiza en el plano yz , tres unidades a la derecha del plano xz y dos unidades arriba del plano xy .
- Piénselo** ¿Cuál es la coordenada z de todo punto en el plano xy ?
- Piénselo** ¿Cuál es la coordenada x de todo punto en el plano yz ?

Usar el sistema de coordenada tridimensional En los ejercicios 11-22, determine la localización de un punto (x, y, z) que satisfaga la(s) condición(es).

- $z = 6$
- $y = 2$
- $x = -3$
- $z = -\frac{5}{2}$
- $y < 0$
- $x > 0$
- $|y| \leq 3$
- $|x| > 4$
- $xy > 0, z = -3$
- $xy < 0, z = 4$
- $xyz < 0$
- $xyz > 0$

Determinar la distancia entre dos puntos en el espacio En los ejercicios 23-26, halle la distancia entre los puntos.

- $(0, 0, 0), (-4, 2, 7)$
- $(-2, 3, 2), (2, -5, -2)$
- $(1, -2, 4), (6, -2, -2)$
- $(2, 2, 3), (4, -5, 6)$

Clasificar un triángulo En los ejercicios 27-32, encuentre las longitudes de los lados del triángulo con los vértices que se indican, y determine si el triángulo es un triángulo rectángulo, un triángulo isósceles o ninguna de ambas cosas.

- $(0, 0, 4), (2, 6, 7), (6, 4, -8)$
- $(3, 4, 1), (0, 6, 2), (3, 5, 6)$
- $(-1, 0, -2), (-1, 5, 2), (-3, -1, 1)$
- $(4, -1, -1), (2, 0, -4), (3, 5, -1)$

31. Piénselo El triángulo del ejercicio 27 se traslada cinco unidades hacia arriba a lo largo del eje z . Determine las coordenadas del triángulo trasladado.

32. Piénselo El triángulo del ejercicio 28 se traslada tres unidades a la derecha a lo largo del eje y . Determine las coordenadas del triángulo trasladado.

Encontrar el punto medio En los ejercicios 33-36, halle las coordenadas del punto medio del segmento de recta que une los puntos.

- $(3, 4, 6), (1, 8, 0)$
- $(7, 2, 2), (-5, -2, -3)$
- $(5, -9, 7), (-2, 3, 3)$
- $(4, 0, -6), (8, 8, 20)$

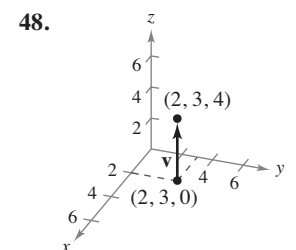
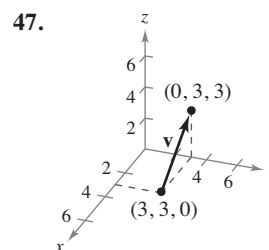
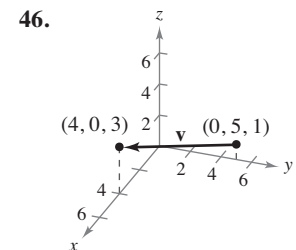
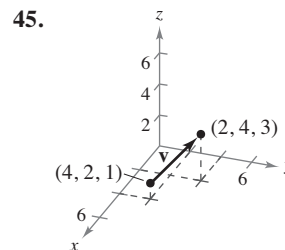
Encontrar la ecuación de una esfera En los ejercicios 37-40, halle la ecuación estándar de la esfera.

- Centro: $(0, 2, 5)$ Radio: 2
- Centro: $(4, -1, 1)$ Radio: 5
- Puntos terminales de un diámetro: $(2, 0, 0), (0, 6, 0)$
- Centro: $(-3, 2, 4)$, tangente al plano yz .

Encontrar la ecuación de una esfera En los ejercicios 41-44, complete el cuadrado para dar la ecuación de la esfera en forma canónica o estándar. Halle el centro y el radio.

- $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 8z + 1 = 0$
- $x^2 + y^2 + z^2 + 9x - 2y + 10z + 19 = 0$
- $9x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 6x + 18y + 1 = 0$
- $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 24x - 4y + 8z - 23 = 0$

Expresar un vector en el espacio en su forma de componentes En los ejercicios 45-48, (a) encuentre las componentes del vector \mathbf{v} , (b) escriba el vector utilizando la notación del vector unitario estándar y (c) dibuje el vector con su punto inicial en el origen.



Expresar un vector en el espacio en su forma de componentes En los ejercicios 49 y 50, halle las componentes y la magnitud del vector v dados sus puntos inicial y final. Después, encuentre un vector unitario en la dirección de v .

49. Punto inicial: $(3, 2, 0)$ 50. Punto inicial: $(1, -2, 4)$
 Punto final: $(4, 1, 6)$ Punto final: $(2, 4, -2)$

Expresar un vector en formas diferentes En los ejercicios 51 y 52 se indican los puntos inicial y final de un vector v . (a) Dibuje el segmento de recta dirigido, (b) encuentre las componentes del vector, (c) escriba el vector usando la notación del vector unitario estándar y (d) dibuje el vector con su punto inicial en el origen.

51. Punto inicial: $(-1, 2, 3)$ 52. Punto inicial: $(2, -1, -2)$
 Punto final: $(3, 3, 4)$ Punto final: $(-4, 3, 7)$

Hallar un punto terminal En los ejercicios 53 y 54 se dan el vector v y su punto inicial. Encuentre el punto final.

53. $v = \langle 3, -5, 6 \rangle$ 54. $v = \langle 1, -\frac{2}{3}, \frac{1}{2} \rangle$
 Punto inicial: $(0, 6, 2)$ Punto inicial: $(0, 2, \frac{5}{2})$

Encontrar múltiplos escalares En los ejercicios 55 y 56, halle cada uno de los múltiplos escalares de v y represente su gráfica.

55. $v = \langle 1, 2, 2 \rangle$ 56. $v = \langle 2, -2, 1 \rangle$
 (a) $2v$ (b) $-v$ (a) $-v$ (b) $2v$
 (c) $\frac{3}{2}v$ (d) $0v$ (c) $\frac{1}{2}v$ (d) $\frac{5}{2}v$

Hallar un vector En los ejercicios 57-60, encuentre el vector z , dado que $u = \langle 1, 2, 3 \rangle$, $v = \langle 2, 2, -1 \rangle$ y $w = \langle 4, 0, -4 \rangle$.

57. $z = u - v + 2w$ 58. $z = 5u - 3v - \frac{1}{2}w$
 59. $2z - 3u = w$ 60. $2u + v - w + 3z = 0$

Vectores paralelos En los ejercicios 61-64, determine cuáles de los vectores son paralelos a z . Use una herramienta de graficación para confirmar sus resultados.

61. $z = \langle 3, 2, -5 \rangle$ 62. $z = \frac{1}{2}i - \frac{2}{3}j + \frac{3}{4}k$
 (a) $\langle -6, -4, 10 \rangle$ (a) $6i - 4j + 9k$
 (b) $\langle 2, \frac{4}{3}, -\frac{10}{3} \rangle$ (b) $-i + \frac{4}{3}j - \frac{3}{2}k$
 (c) $\langle 6, 4, 10 \rangle$ (c) $12i + 9k$
 (d) $\langle 1, -4, 2 \rangle$ (d) $\frac{3}{4}i - j + \frac{9}{8}k$

63. z tiene el punto inicial $(1, -1, 3)$ y el punto final $(-2, 3, 5)$.

- (a) $-6i + 8j + 4k$ (b) $4j + 2k$

64. z tiene el punto inicial $(5, 4, 1)$ y el punto final $(-2, -4, 4)$.

- (a) $\langle 7, 6, 2 \rangle$ (b) $\langle 14, 16, -6 \rangle$

Utilizar vectores para determinar puntos colineales En los ejercicios 65-68, use vectores para determinar si los puntos son colineales.

65. $(0, -2, -5), (3, 4, 4), (2, 2, 1)$
 66. $(4, -2, 7), (-2, 0, 3), (7, -3, 9)$
 67. $(1, 2, 4), (2, 5, 0), (0, 1, 5)$

68. $(0, 0, 0), (1, 3, -2), (2, -6, 4)$

Verificar un paralelogramo En los ejercicios 69 y 70, use vectores para demostrar que los puntos son vértices de un paralelogramo.

69. $(2, 9, 1), (3, 11, 4), (0, 10, 2), (1, 12, 5)$
 70. $(1, 1, 3), (9, -1, -2), (11, 2, -9), (3, 4, -4)$

Encontrar la magnitud En los ejercicios 71-76, halle la longitud de v .

71. $v = \langle 0, 0, 0 \rangle$ 72. $v = \langle 1, 0, 3 \rangle$
 73. $v = 3j - 5k$ 74. $v = 2i + 5j - k$
 75. $v = i - 2j - 3k$ 76. $v = -4i + 3j + 7k$

Encontrar vectores unitarios En los ejercicios 77-80, halle un vector unitario a) en la dirección de v y b) en la dirección opuesta a v .

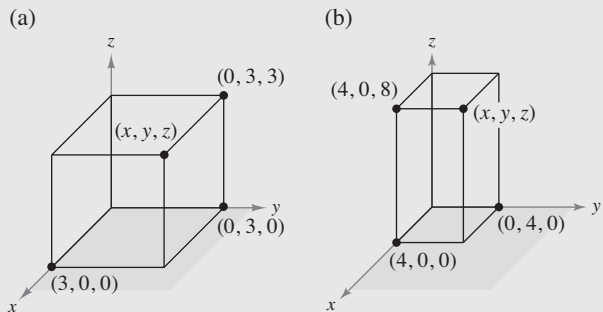
77. $v = \langle 2, -1, 2 \rangle$ 78. $v = \langle 6, 0, 8 \rangle$
 79. $v = 4i - 5j + 3k$ 80. $v = 5i + 3j - k$

81. **Usar vectores** Considere dos vectores distintos de cero u y v , y sean s y t números reales. Describa la figura geométrica generada por los puntos finales de los tres vectores tv , $u + tv$ y $su + tv$.



82.

¿CÓMO LO VE? Determine (x, y, z) para cada figura. Después, encuentre la forma en componentes del vector desde el punto en el eje x al punto (x, y, z) .



Hallar un vector En los ejercicios 83-86, encuentre el vector v con la magnitud dada y en dirección de u .

- | Magnitud | Dirección |
|---------------------------|--------------------------------|
| 83. $\ v\ = 10$ | $u = \langle 0, 3, 3 \rangle$ |
| 84. $\ v\ = 3$ | $u = \langle 1, 1, 1 \rangle$ |
| 85. $\ v\ = \frac{3}{2}$ | $u = \langle 2, -2, 1 \rangle$ |
| 86. $\ v\ = 7$ | $u = \langle -4, 6, 2 \rangle$ |

Representar un vector En los ejercicios 87 y 88, dibuje el vector v y dé sus componentes.

87. v está en el plano yz , tiene magnitud 2 y forma un ángulo de 30° con el eje y positivo.

88. \mathbf{v} está en el plano xz , tiene magnitud 5 y forma un ángulo de 45° con el eje z positivo.

Hallar un punto usando vectores En los ejercicios 89 y 90, use vectores para encontrar el punto que se encuentra a dos tercios del camino de P a Q .

89. $P(4, 3, 0)$, $Q(1, -3, 3)$

90. $P(1, 2, 5)$, $Q(6, 8, 2)$

91. **Uso de vectores** Sean $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{w} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$.

(a) Dibuje \mathbf{u} y \mathbf{v} .

(b) Si $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, demuestre que tanto a como b deben ser cero.

(c) Halle a y b tales que $\mathbf{w} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

(d) Demuestre que ninguna elección de a y b da $\mathbf{w} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

92. **Redacción** Los puntos inicial y final del vector \mathbf{v} son (x_1, y_1, z_1) y (x, y, z) . Describa el conjunto de todos los puntos (x, y, z) tales que $\|\mathbf{v}\| = 4$.

DESARROLLO DE CONCEPTOS

93. **Describir coordenadas** Un punto en el sistema de coordenadas tridimensional tiene las coordenadas (x_0, y_0, z_0) . Describa qué mide cada una de las coordenadas.

94. **Fórmula de distancia** Dé la fórmula para la distancia entre los puntos (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) .

95. **Ecuación estándar de una esfera** Dé la ecuación canónica o estándar de una esfera de radio r centrada en (x_0, y_0, z_0) .

96. **Vectores paralelos** Dé la definición de vectores paralelos.

97. **Usar un triángulo y vectores** Sean A, B y C los vértices de un triángulo. Encuentre $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$.

98. **Usar vectores** Sean $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$ y $\mathbf{r}_0 = \langle 1, 1, 1 \rangle$. Describa el conjunto de todos los puntos (x, y, z) tales que $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\| = 2$.

99. **Diagonal de un cubo** Halle las componentes del vector unitario \mathbf{v} en la dirección de la diagonal del cubo que se muestra en la figura.

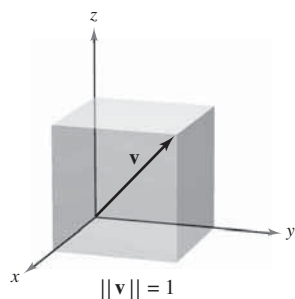


Figura para 99

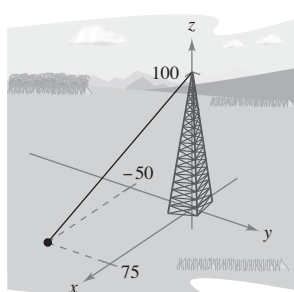
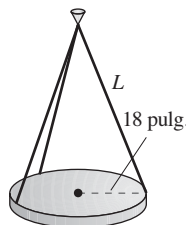


Figura para 100

100. **Cable de sujeción** El cable de sujeción de una torre de 100 pies tiene una tensión de 550 libras. Use las distancias mostradas en la figura y dé las componentes del vector \mathbf{F} que representa la tensión del cable.

101. **Focos del auditorio**

Los focos en un auditorio son discos de 24 libras y 18 pulgadas de radio. Cada disco está sostenido por tres cables igualmente espaciados de L pulgadas de longitud (vea la figura).



(a) Expresar la tensión T de cada cable en función de L . Determine el dominio de la función.

(b) Use una herramienta de graficación y la función del inciso (a) para completar la tabla.

L	20	25	30	35	40	45	50
T							

(c) Represente en la herramienta de graficación el modelo del inciso (a) y determine las asíntotas de su gráfica.

(d) Compruebe analíticamente las asíntotas obtenidas en el inciso (c).

(e) Calcule la longitud mínima que debe tener cada cable, si un cable está diseñado para llevar una carga máxima de 10 libras.

102. **Piénselo** Suponga que cada cable en el ejercicio 101 tiene una longitud fija $L = a$ y que el radio de cada disco es r_0 pulgadas. Haga una conjetura acerca del límite $\lim_{r_0 \rightarrow a^-} T$ y justifique su respuesta.

103. **Soportes de cargas** Determine la tensión en cada uno de los cables de soporte mostrados en la figura si el peso de la caja es de 500 newtons.

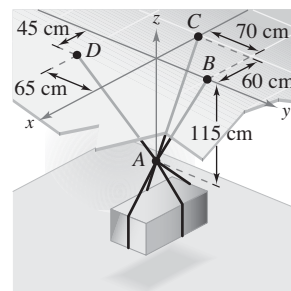


Figura para 103

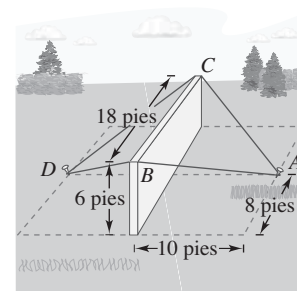


Figura para 104

104. **Construcción** Un muro de hormigón es sostenido temporalmente en posición vertical por medio de cuerdas (vea la figura). Halle la fuerza total ejercida sobre la clavija en posición A. Las tensiones en AB y AC son 420 libras y 650 libras.

105. **Geometría** Escriba una ecuación cuya gráfica conste del conjunto de puntos $P(x, y, z)$ que distan el doble de $A(0, -1, 1)$ que de $B(1, 2, 0)$. Describa la figura geométrica representada por la ecuación.

1.3 El producto escalar o producto punto de dos vectores

...**COMENTARIO** El producto escalar también se conoce como producto punto o como producto interno.

- Usar las propiedades del producto escalar de dos vectores.
- Hallar el ángulo entre dos vectores usando el producto escalar.
- Hallar los cosenos directores de un vector en el espacio.
- Hallar la proyección de un vector sobre otro vector.
- Usar los vectores para calcular el trabajo realizado por una fuerza constante.

El producto escalar

Hasta ahora se han estudiado dos operaciones con vectores, la suma de vectores y el producto de un vector por un escalar, cada una de las cuales da como resultado otro vector. En esta sección se presenta una tercera operación con vectores llamada el **producto escalar**. Este producto da como resultado un escalar y no un vector.

...**COMENTARIO** El producto escalar de dos vectores recibe este nombre debido a que da como resultado un escalar; también se le llama *producto escalar* o *interno* de los dos vectores.

Definición de producto escalar (producto punto)

El **producto escalar** de $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2 \rangle$ es

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2.$$

El **producto escalar** de $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ es

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

TEOREMA 1.4 Propiedades del producto escalar

Sean \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} vectores en el plano o en el espacio, y sea c un escalar.

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ Propiedad conmutativa
2. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ Propiedad distributiva
3. $c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = c\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot c\mathbf{v}$
4. $\mathbf{0} \cdot \mathbf{v} = 0$
5. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$

Demostración Para demostrar la primera propiedad, sea $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = v_1u_1 + v_2u_2 + v_3u_3 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}.$$

Para la quinta propiedad, sea $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Entonces

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = (\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2})^2 = \|\mathbf{v}\|^2.$$

Se dejan las demostraciones de las otras propiedades al lector.

Consulte LarsonCalculus.com para ver el video de esta demostración de Bruce Edwards.

EJEMPLO 1 Calcular productos escalares

Dados $\mathbf{u} = \langle 2, -2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 5, 8 \rangle$ y $\mathbf{w} = \langle -4, 3 \rangle$.

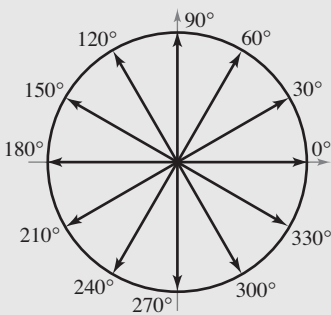
- a. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \langle 2, -2 \rangle \cdot \langle 5, 8 \rangle = 2(5) + (-2)(8) = -6$
- b. $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w} = -6\langle -4, 3 \rangle = \langle 24, -18 \rangle$
- c. $\mathbf{u} \cdot (2\mathbf{v}) = 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = 2(-6) = -12$
- d. $\|\mathbf{w}\|^2 = \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = \langle -4, 3 \rangle \cdot \langle -4, 3 \rangle = (-4)(-4) + (3)(3) = 25$

Observe que el resultado del inciso (b) es una cantidad *vectorial*, mientras que los resultados de los otros tres incisos son cantidades *escalares*.

Exploración

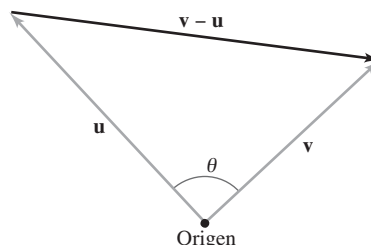
Interpretación de un producto escalar

En la figura se muestran varios vectores en el círculo unitario. Halle los productos escalares de varios pares de vectores. Después encuentre el ángulo entre cada par usado. Haga una conjetura sobre la relación entre el producto escalar de dos vectores y el ángulo entre los vectores.



Ángulo entre dos vectores

El **ángulo entre dos vectores distintos de cero** es el ángulo θ , $0 \leq \theta \leq \pi$, entre sus respectivos vectores en posición canónica o estándar, como se muestra en la figura 1.24. El siguiente teorema muestra cómo encontrar este ángulo usando el producto escalar. (Observe que el ángulo entre el vector cero y otro vector no está definido aquí.)



El ángulo entre dos vectores.

Figura 1.24

TEOREMA 1.5 Ángulo entre dos vectores

Si θ es el ángulo entre dos vectores distintos de cero \mathbf{u} y \mathbf{v} , donde $0 \leq \theta \leq \pi$, entonces

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}.$$

Demostración Considere el triángulo determinado por los vectores \mathbf{u} , \mathbf{v} y $\mathbf{v} - \mathbf{u}$, como se muestra en la figura 1.24. Por la ley de los cosenos se puede escribir

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta.$$

Usando las propiedades del producto escalar, el lado izquierdo puede reescribirse como

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 &= (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \\ &= (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \\ &= \|\mathbf{v}\|^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \|\mathbf{u}\|^2 \end{aligned}$$

y sustituyendo en la ley de los cosenos se obtiene

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \|\mathbf{u}\|^2 &= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta \\ -2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= -2\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta \\ \cos \theta &= \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}. \end{aligned}$$

Consulte LarsonCalculus.com para ver el video de esta demostración de Bruce Edwards. ■

Observe en el teorema 1.5 que debido a que $\|\mathbf{u}\|$ y $\|\mathbf{v}\|$ son siempre positivas, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ y $\cos \theta$ siempre tendrán el mismo signo. La figura 1.25 muestra las orientaciones posibles de los dos vectores.

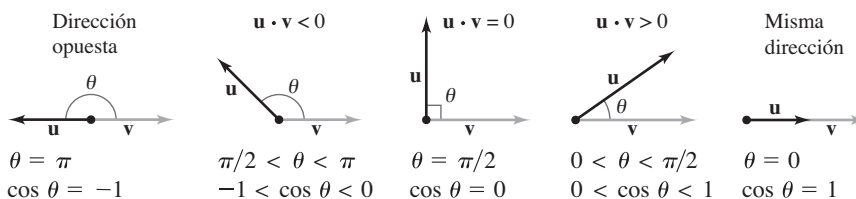


Figura 1.25

De acuerdo con el teorema 1.5, se puede ver que dos vectores distintos de cero forman un ángulo recto si y solo si su producto escalar es cero, entonces se dice que los dos vectores son **ortogonales**.

Definición de vectores ortogonales

Los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} son ortogonales si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.



COMENTARIO Los términos “perpendicular”, “ortogonal” y “normal” significan esencialmente lo mismo, formar ángulos rectos. Sin embargo, es común decir que dos vectores son *ortogonales*, dos rectas o planos son *perpendiculares*, y que un vector es *normal* a una recta o plano dado.

De esta definición se deduce que el vector cero es ortogonal a todo vector \mathbf{u} , ya que $\mathbf{0} \cdot \mathbf{u} = 0$. Si $0 \leq \theta \leq \pi$, entonces se sabe que $\cos \theta = 0$ si y solo si $\theta = \pi/2$. Por tanto, se puede usar el teorema 1.5 para concluir que dos vectores distintos de cero son ortogonales si y solo si el ángulo entre ellos es $\pi/2$.

EJEMPLO 2 Hallar el ángulo entre dos vectores

Consulte *LarsonCalculus.com* para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Si $\mathbf{u} = \langle 3, -1, 2 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -4, 0, 2 \rangle$, $\mathbf{w} = \langle 1, -1, -2 \rangle$ y $\mathbf{z} = \langle 2, 0, -1 \rangle$, halle el ángulo entre cada uno de los siguientes pares de vectores.

- a. \mathbf{u} y \mathbf{v}
- b. \mathbf{u} y \mathbf{w}
- c. \mathbf{v} y \mathbf{z}

Solución

a. $\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} = \frac{-12 + 0 + 4}{\sqrt{14}\sqrt{20}} = \frac{-8}{2\sqrt{14}\sqrt{5}} = \frac{-4}{\sqrt{70}}$

Como $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$, $\theta = \arccos \frac{-4}{\sqrt{70}} \approx 2.069$ radianes

b. $\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{w}\|} = \frac{3 + 1 - 4}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \frac{0}{\sqrt{84}} = 0$

Como $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0$, \mathbf{u} y \mathbf{w} son *ortogonales*. Así, $\theta = \pi/2$.

c. $\cos \theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{z}}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{z}\|} = \frac{-8 + 0 - 2}{\sqrt{20}\sqrt{5}} = \frac{-10}{\sqrt{100}} = -1$

Por consiguiente, $\theta = \pi$. Observe que \mathbf{v} y \mathbf{z} son paralelos, con $\mathbf{v} = -2\mathbf{z}$.

Cuando se conoce el ángulo entre dos vectores, el teorema 1.5 se reescribe en la forma

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta$ Forma alternativa del producto escalar

EJEMPLO 3 Forma alternativa del producto punto

Dado que $\|\mathbf{u}\| = 10$, $\|\mathbf{v}\| = 7$, y el ángulo entre \mathbf{u} y \mathbf{v} es $\pi/4$, halle $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

Solución Use la forma alternativa del producto escalar como se muestra

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta = (10)(7) \cos \frac{\pi}{4} = 35\sqrt{2}$

COMENTARIO El ángulo entre \mathbf{u} y \mathbf{v} en el ejemplo 3(a) también se puede escribir aproximadamente como 118.561° .

Cosenos directores

En el caso de un vector en el plano se ha visto que es conveniente medir su dirección en términos del ángulo, medido en sentido contrario a las manecillas del reloj, desde el eje x positivo hasta el vector.

En el espacio es más conveniente medir la dirección en términos de los ángulos entre el vector \mathbf{v} distinto de cero y los tres vectores unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} , como se muestra en la figura 1.26. Los ángulos α , β y γ son los **ángulos de dirección de \mathbf{v}** , y $\cos \alpha$, $\cos \beta$ y $\cos \gamma$ son los **cosenos directores de \mathbf{v}** . Como

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{i} = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{i}\| \cos \alpha = \|\mathbf{v}\| \cos \alpha$$

y

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{i} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \cdot \langle 1, 0, 0 \rangle = v_1$$

se deduce que $\cos \alpha = v_1/\|\mathbf{v}\|$. Mediante un razonamiento similar con los vectores unitarios \mathbf{j} y \mathbf{k} , se tiene

$$\cos \alpha = \frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|}$$

α es el ángulo entre \mathbf{v} e \mathbf{i} .

$$\cos \beta = \frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|}$$

β es el ángulo entre \mathbf{v} y \mathbf{j} .

$$\cos \gamma = \frac{v_3}{\|\mathbf{v}\|}$$

γ es el ángulo entre \mathbf{v} y \mathbf{k} .

Por consiguiente, cualquier vector \mathbf{v} distinto de cero en el espacio tiene la forma normalizada

$$\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{i} + \frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{j} + \frac{v_3}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{k} = \cos \alpha \mathbf{i} + \cos \beta \mathbf{j} + \cos \gamma \mathbf{k}$$

y como $\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$ es un vector unitario, se deduce que

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

EJEMPLO 4

Calcular los ángulos de dirección

Encuentre los cosenos y los ángulos directores del vector $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, y demuestre que $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

Solución Como $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{29}$, puede escribir lo siguiente.

$$\cos \alpha = \frac{v_1}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{2}{\sqrt{29}} \Rightarrow \alpha \approx 68.2^\circ \quad \text{Ángulo entre } \mathbf{v} \text{ e } \mathbf{i}$$

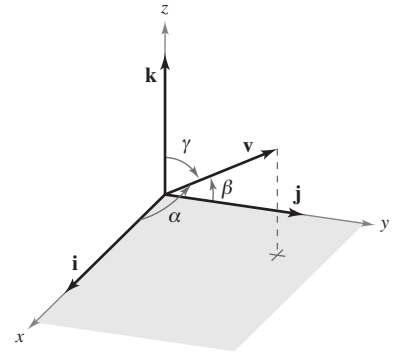
$$\cos \beta = \frac{v_2}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{3}{\sqrt{29}} \Rightarrow \beta \approx 56.1^\circ \quad \text{Ángulo entre } \mathbf{v} \text{ y } \mathbf{j}$$

$$\cos \gamma = \frac{v_3}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{4}{\sqrt{29}} \Rightarrow \gamma \approx 42.0^\circ \quad \text{Ángulo entre } \mathbf{v} \text{ y } \mathbf{k}$$

Además, la suma de los cuadrados de los cosenos directores es

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma &= \frac{4}{29} + \frac{9}{29} + \frac{16}{29} \\ &= \frac{29}{29} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Vea la figura 1.27.

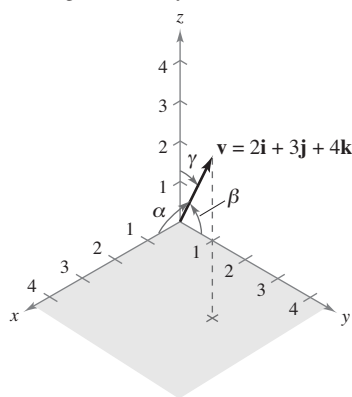


Ángulos de dirección.

Figura 1.26

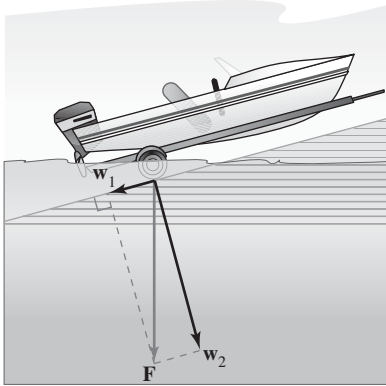
COMENTARIO Recuerde que α , β y γ son las letras griegas alfa, beta y gamma, respectivamente.

α = ángulo entre \mathbf{v} e \mathbf{i}
 β = ángulo entre \mathbf{v} y \mathbf{j}
 γ = ángulo entre \mathbf{v} y \mathbf{k}



Ángulos de dirección de \mathbf{v} .

Figura 1.27



La fuerza debida a la gravedad empuja la lancha contra la rampa y hacia abajo por la rampa.

Figura 1.28

Proyecciones y componentes vectoriales

Ya ha visto aplicaciones en las que se suman dos vectores para obtener un vector resultante. Muchas aplicaciones en la física o en la ingeniería plantean el problema inverso, descomponer un vector dado en la suma de dos **componentes vectoriales**. El ejemplo físico siguiente permitirá comprender la utilidad de este procedimiento.

Considere una lancha sobre una rampa inclinada, como se muestra en la figura 1.28. La fuerza \mathbf{F} debida a la gravedad empuja la lancha *hacia abajo* de la rampa y *contra* la rampa. Estas dos fuerzas, \mathbf{w}_1 y \mathbf{w}_2 , son ortogonales y reciben el nombre de componentes vectoriales de \mathbf{F} .

$$\mathbf{F} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \quad \text{Componentes vectoriales de } \mathbf{F}$$

Las fuerzas \mathbf{w}_1 y \mathbf{w}_2 ayudan a analizar el efecto de la gravedad sobre la lancha. Por ejemplo, \mathbf{w}_1 representa la fuerza necesaria para impedir que la lancha se deslice hacia abajo por la rampa, mientras que \mathbf{w}_2 representa la fuerza que deben soportar los neumáticos.

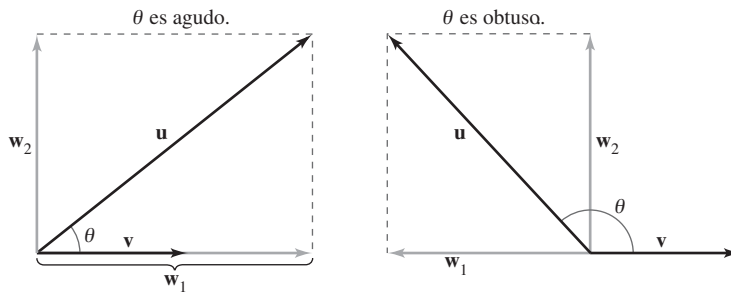
Definiciones de proyección y componentes vectoriales

Sean \mathbf{u} y \mathbf{v} vectores distintos de cero. Además, sea

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$

donde \mathbf{w}_1 es paralelo a \mathbf{v} y \mathbf{w}_2 es ortogonal a \mathbf{v} , como se muestra en la figura 1.29.

1. A \mathbf{w}_1 se le llama **proyección de \mathbf{u} en \mathbf{v}** o **componente vectorial de \mathbf{u} a lo largo de \mathbf{v}** , y se denota por $\mathbf{w}_1 = \text{proy}_v \mathbf{u}$.
2. A $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1$ se le llama **componente vectorial de \mathbf{u} ortogonal a \mathbf{v}** .



$\mathbf{w}_1 = \text{proy}_v \mathbf{u}$ = la proyección de \mathbf{u} en \mathbf{v} = componente vectorial de \mathbf{u} en dirección de \mathbf{v}
 \mathbf{w}_2 = componente vectorial de \mathbf{u} ortogonal a \mathbf{v}

Figura 1.29

EJEMPLO 5

Hallar la componente vectorial de \mathbf{u} ortogonal a \mathbf{v}

Encuentre la componente del vector de $\mathbf{u} = \langle 5, 10 \rangle$ que es ortogonal a $\mathbf{v} = \langle 4, 3 \rangle$, dado que

$$\mathbf{w}_1 = \text{proy}_v \mathbf{u} = \langle 8, 6 \rangle$$

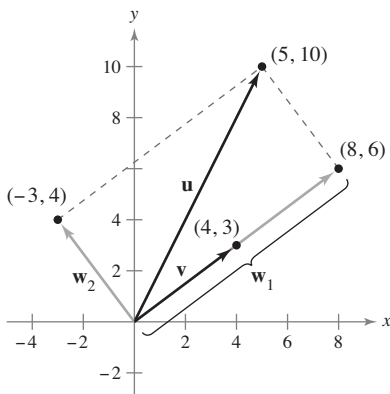
y

$$\mathbf{u} = \langle 5, 10 \rangle = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2.$$

Solución Como $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, donde \mathbf{w}_1 es paralelo a \mathbf{v} , se deduce que \mathbf{w}_2 es la componente vectorial de \mathbf{u} ortogonal a \mathbf{v} . Por tanto, tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_2 &= \mathbf{u} - \mathbf{w}_1 \\ &= \langle 5, 10 \rangle - \langle 8, 6 \rangle \\ &= \langle -3, 4 \rangle. \end{aligned}$$

Verifique que \mathbf{w}_2 es ortogonal a \mathbf{v} , como se muestra en la figura 1.30.



$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2.$$

Figura 1.30

Del ejemplo 5, puede ver que es fácil encontrar la componente vectorial w_2 una vez que ha hallado la proyección, w_1 , de u en v . Para encontrar esta proyección, use el producto escalar como establece el teorema siguiente, el cual se demuestra en el ejercicio 78.

TEOREMA 1.6 Proyección usando el producto escalar

Si u y v son vectores distintos de cero, entonces la proyección de u sobre v está dada por

$$\text{proy}_v u = \left(\frac{u \cdot v}{\|v\|^2} \right) v.$$

•••**COMENTARIO** Observe la diferencia entre los términos “componente” y “componente vectorial”. Por ejemplo, usando las vectores unitarios canónicos o estándar con $u = u_1i + u_2j$, u_1 es la *componente* de u en la dirección de i y u_1i es la *componente vectorial* en la dirección i .

La proyección de u sobre v puede expresarse como un múltiplo escalar de un vector unitario en la dirección de v . Es decir,

$$\left(\frac{u \cdot v}{\|v\|^2} \right) v = \left(\frac{u \cdot v}{\|v\|} \right) \frac{v}{\|v\|} = (k) \frac{v}{\|v\|}.$$

Al escalar k se le llama la **componente de u en la dirección de v** . Por tanto,

$$k = \frac{u \cdot v}{\|v\|} = \|u\| \cos \theta.$$

EJEMPLO 6 Descomponer un vector en componentes vectoriales

Determine la proyección de u sobre v y la componente vectorial de u ortogonal a v de los vectores

$$u = 3i - 5j + 2k \quad \text{y} \quad v = 7i + j - 2k.$$

Solución La proyección de u sobre v es

$$w_1 = \text{proy}_v u = \left(\frac{u \cdot v}{\|v\|^2} \right) v = \left(\frac{12}{54} \right) (7i + j - 2k) = \frac{14}{9}i + \frac{2}{9}j - \frac{4}{9}k.$$

La componente vectorial de u ortogonal a v es el vector

$$w_2 = u - w_1 = (3i - 5j + 2k) - \left(\frac{14}{9}i + \frac{2}{9}j - \frac{4}{9}k \right) = \frac{13}{9}i - \frac{47}{9}j + \frac{22}{9}k.$$

Vea la figura 1.31.

EJEMPLO 7 Calcular una fuerza

Una lancha de 600 libras se encuentra sobre una rampa inclinada 30° , como se muestra en la figura 1.32. ¿Qué fuerza se requiere para impedir que la lancha resbale cuesta abajo por la rampa?

Solución Como la fuerza debida a la gravedad es vertical y hacia abajo, puede representar la fuerza de la gravedad mediante el vector $F = -600j$. Para encontrar la fuerza requerida para impedir que la lancha resbale por la rampa, proyecte F sobre un vector unitario v en la dirección de la rampa, como sigue.

$$v = \cos 30^\circ i + \sin 30^\circ j = \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}j \quad \text{Vector unitario en la dirección de la rampa}$$

Por tanto, la proyección de F sobre v está dada por

$$w_1 = \text{proy}_v F = \left(\frac{F \cdot v}{\|v\|^2} \right) v = (F \cdot v) v = (-600) \left(\frac{1}{2} \right) v = -300 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}j \right).$$

La magnitud de esta fuerza es 300, y por consiguiente se requiere una fuerza de 300 libras para impedir que la lancha resbale por la rampa.

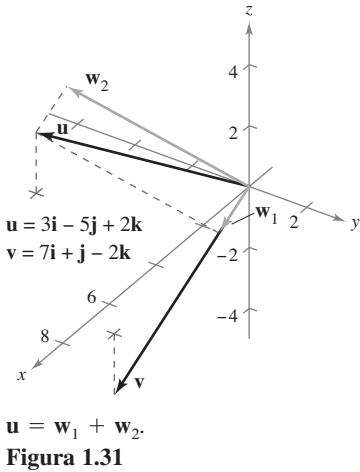


Figura 1.31

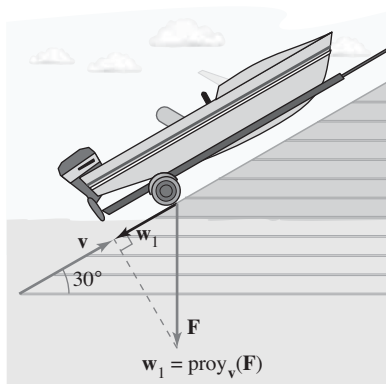


Figura 1.32

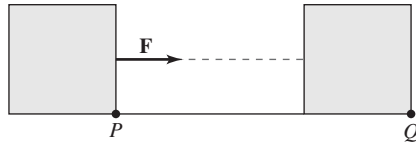
Trabajo

El trabajo W realizado por una fuerza constante \mathbf{F} que actúa a lo largo de la recta de movimiento de un objeto está dado por

$$W = (\text{magnitud de fuerza})(\text{distancia}) = \|\mathbf{F}\| \|\overrightarrow{PQ}\|$$

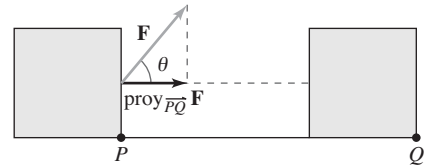
como se muestra en la figura 1.33(a). Si la fuerza constante \mathbf{F} no está dirigida a lo largo de la recta de movimiento, se puede ver en la figura 1.33(b) que el trabajo realizado W por la fuerza es

$$W = \|\text{proy}_{\overrightarrow{PQ}}\mathbf{F}\| \|\overrightarrow{PQ}\| = (\cos \theta)\|\mathbf{F}\| \|\overrightarrow{PQ}\| = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{PQ}.$$



$$\text{Trabajo} = \|\mathbf{F}\| \|\overrightarrow{PQ}\|$$

(a) La fuerza actúa a lo largo de la recta de movimiento.



$$\text{Trabajo} = \|\text{proy}_{\overrightarrow{PQ}}\mathbf{F}\| \|\overrightarrow{PQ}\|$$

(b) La fuerza actúa formando un ángulo θ con la recta de movimiento.

Figura 1.33

Esta noción de trabajo se resume en la definición siguiente.

Definición de trabajo

El trabajo W realizado por una fuerza constante \mathbf{F} a medida que su punto de aplicación se mueve a lo largo del vector \overrightarrow{PQ} está dado por las siguientes expresiones.

1. $W = \|\text{proy}_{\overrightarrow{PQ}}\mathbf{F}\| \|\overrightarrow{PQ}\|$ En forma de proyección
2. $W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{PQ}$ En forma de producto escalar

EJEMPLO 8 Calcular trabajo

Para cerrar una puerta corrediza, una persona tira de una cuerda con una fuerza constante de 50 libras y un ángulo constante de 60° , como se muestra en la figura 1.34. Encuentre el trabajo realizado al mover la puerta 12 pies hacia la posición en que queda cerrada.

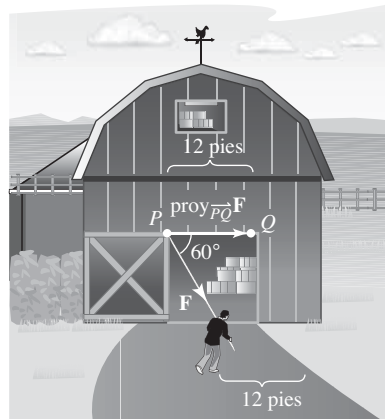


Figura 1.34

Solución Usando una proyección, se puede calcular el trabajo como sigue.

$$W = \|\text{proy}_{\overrightarrow{PQ}}\mathbf{F}\| \|\overrightarrow{PQ}\| = \cos(60^\circ) \|\mathbf{F}\| \|\overrightarrow{PQ}\| = \frac{1}{2}(50)(12) = 300 \text{ pies-libras}$$

1.3 Ejercicios

Consulte **CalcChat.com** para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Encontrar productos escalares En los ejercicios 1-8, encuentre (a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, (b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$, (c) $\|\mathbf{u}\|^2$, (d) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}$, y (e) $\mathbf{u} \cdot (2\mathbf{v})$.

1. $\mathbf{u} = \langle 3, 4 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -1, 5 \rangle$ 2. $\mathbf{u} = \langle 4, 10 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -2, 3 \rangle$
3. $\mathbf{u} = \langle 6, -4 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -3, 2 \rangle$ 4. $\mathbf{u} = \langle -4, 8 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 7, 5 \rangle$
5. $\mathbf{u} = \langle 2, -3, 4 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 0, 6, 5 \rangle$ 6. $\mathbf{u} = \mathbf{i}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i}$
7. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ 8. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
 $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$ $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

Hallar el ángulo entre dos vectores En los ejercicios 9-16, calcule el ángulo θ entre los vectores (a) en radianes y (b) en grados.

9. $\mathbf{u} = \langle 1, 1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, -2 \rangle$ 10. $\mathbf{u} = \langle 3, 1 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, -1 \rangle$
11. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
12. $\mathbf{u} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\mathbf{i} + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\mathbf{i} + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\mathbf{j}$
13. $\mathbf{u} = \langle 1, 1, 1 \rangle$ 14. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$
 $\mathbf{v} = \langle 2, 1, -1 \rangle$ $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$
15. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ 16. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$
 $\mathbf{v} = -2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

Forma alternativa del producto punto En los ejercicios 17 y 18, utilice la forma alternativa del producto escalar de $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

17. $\|\mathbf{u}\| = 8$, $\|\mathbf{v}\| = 5$, y el ángulo entre \mathbf{u} y \mathbf{v} es $\pi/3$.
18. $\|\mathbf{u}\| = 40$, $\|\mathbf{v}\| = 25$, y el ángulo entre \mathbf{u} y \mathbf{v} es $5\pi/6$.

Comparar vectores En los ejercicios 19-24, determine si \mathbf{u} y \mathbf{v} son ortogonales, paralelos o ninguna de las dos cosas.

19. $\mathbf{u} = \langle 4, 3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle \frac{1}{2}, -\frac{2}{3} \rangle$ 20. $\mathbf{u} = -\frac{1}{3}(\mathbf{i} - 2\mathbf{j})$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$
21. $\mathbf{u} = \mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ 22. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$
 $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$
23. $\mathbf{u} = \langle 2, -3, 1 \rangle$ 24. $\mathbf{u} = \langle \cos \theta, \sin \theta, -1 \rangle$
 $\mathbf{v} = \langle -1, -1, -1 \rangle$ $\mathbf{v} = \langle \sin \theta, -\cos \theta, 0 \rangle$

Clasificar un triángulo En los ejercicios 25-28 se dan los vértices de un triángulo. Determine si el triángulo es un triángulo agudo, un triángulo obtuso o un triángulo recto. Explique su razonamiento.

25. $(1, 2, 0)$, $(0, 0, 0)$, $(-2, 1, 0)$
26. $(-3, 0, 0)$, $(0, 0, 0)$, $(1, 2, 3)$
27. $(2, 0, 1)$, $(0, 1, 2)$, $(-0.5, 1.5, 0)$
28. $(2, -7, 3)$, $(-1, 5, 8)$, $(4, 6, -1)$

Hallar ángulos de dirección En los ejercicios 29-34, encuentre los cosenos directores de \mathbf{u} y demuestre que la suma de los cuadrados de los cosenos directores es 1.

29. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ 30. $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$

31. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ 32. $\mathbf{u} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$
33. $\mathbf{u} = \langle 0, 6, -4 \rangle$ 34. $\mathbf{u} = \langle -1, 5, 2 \rangle$

Hallar la proyección de \mathbf{u} sobre \mathbf{v} En los ejercicios 35-42, (a) encuentre la proyección de \mathbf{u} sobre \mathbf{v} , y (b) encuentre la componente del vector de \mathbf{u} ortogonal a \mathbf{v} .

35. $\mathbf{u} = \langle 6, 7 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, 4 \rangle$ 36. $\mathbf{u} = \langle 9, 7 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 1, 3 \rangle$
37. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j}$
38. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
39. $\mathbf{u} = \langle 0, 3, 3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -1, 1, 1 \rangle$
40. $\mathbf{u} = \langle 8, 2, 0 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, 1, -1 \rangle$
41. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
42. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$

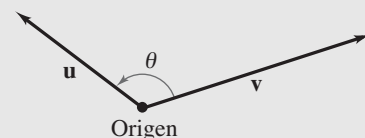
DESARROLLO DE CONCEPTOS

43. **Producto escalar** Defina el producto escalar de los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} .
44. **Vectores ortogonales** Dé la definición de vectores ortogonales. Si los vectores no son paralelos ni ortogonales. ¿Cómo se encuentra el ángulo entre ellos? Explique.
45. **Usar vectores** Determine cuál de las siguientes expresiones están definidas para vectores distintos de cero \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} . Explique el razonamiento.
 - (a) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ (b) $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$
 - (c) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{w}$ (d) $\|\mathbf{u}\| \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
46. **Cosenos directores** Describa los cosenos directores y los ángulos de dirección de un vector \mathbf{v} .
47. **Proyección** Dé una descripción geométrica de la proyección de \mathbf{u} sobre \mathbf{v} .
48. **Proyección** ¿Que puede decir acerca de los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} si (a) la proyección de \mathbf{u} sobre \mathbf{v} es igual a \mathbf{u} y (b) la proyección de \mathbf{u} sobre \mathbf{v} es igual a 0?
49. **Proyección** ¿Si la proyección de \mathbf{u} sobre \mathbf{v} tiene la misma magnitud que la proyección de \mathbf{v} sobre \mathbf{u} , ¿se puede concluir que $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$? Explique.



50. ¿CÓMO LO VE? ¿Qué se sabe acerca de θ , el ángulo entre dos vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} distintos de cero, cuando

- (a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$? (b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0$? (c) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0$?

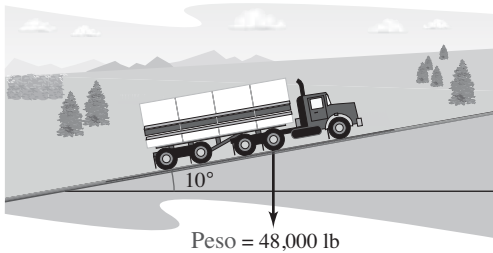


- 51. Ingresos** El vector $\mathbf{u} = \langle 3240, 1450, 2235 \rangle$ da el número de hamburguesas, bocadillos de pollo y hamburguesas con queso, respectivamente, vendidas en una semana en un restaurante de comida rápida. El vector $\mathbf{v} = \langle 2.25, 2.95, 2.65 \rangle$ da los precios (en dólares) por unidad de los tres artículos alimenticios. Encuentre el producto escalar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ y explique qué información proporciona.
- 52. Ingresos** Repita el ejercicio 59 después de incrementar los precios 4%. Identifique la operación vectorial usada para incrementar los precios 4%.

Vectores ortogonales En los ejercicios 53-56, encuentre dos vectores en direcciones opuestas que sean ortogonales al vector \mathbf{u} . (Las respuestas no son únicas.)

53. $\mathbf{u} = -\frac{1}{4}\mathbf{i} + \frac{3}{2}\mathbf{j}$ 54. $\mathbf{u} = 9\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$
 55. $\mathbf{u} = \langle 3, 1, -2 \rangle$ 56. $\mathbf{u} = \langle 4, -3, 6 \rangle$

- 57. Hallar un ángulo** Encuentre el ángulo entre la diagonal de un cubo y una de sus aristas.
- 58. Hallar un ángulo** Encuentre el ángulo entre la diagonal de un cubo y la diagonal de uno de sus lados.
- 59. Fuerza de frenado** Un camión de 48,000 libras está estacionado sobre una pendiente de 10° (vea la figura). Si supone que la única fuerza a vencer es la de la gravedad, determine (a) la fuerza requerida para evitar que el camión ruede cuesta abajo y (b) la fuerza perpendicular a la pendiente.



- 60. Fuerza de frenado** Una camioneta deportiva de 5400 libras está estacionada sobre una pendiente de 18° . Si supone que la única fuerza a vencer es la debida a la gravedad. Determine (a) la fuerza requerida para evitar que la camioneta ruede cuesta abajo y (b) la fuerza perpendicular a la pendiente.
- 61. Trabajo** Un objeto es jalado 10 pies por el suelo usando una fuerza de 85 libras, la dirección de la fuerza es 60° sobre la horizontal (vea la figura). Calcule el trabajo realizado.

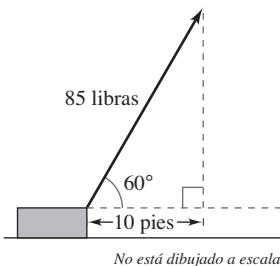


Figura para 61

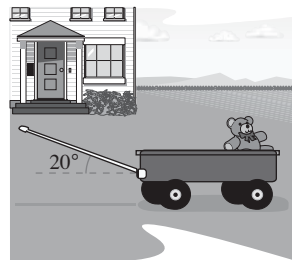


Figura para 62

- 62. Trabajo** Un coche de juguete se jala ejerciendo una fuerza de 25 libras sobre una manivela que forma un ángulo de 20° con la horizontal (vea la figura). Calcule el trabajo realizado al jalar el coche 50 pies.

- 63. Trabajo** Un carro se remolca usando una fuerza de 1600 newtons. La cadena que se usa para jalar el carro forma un ángulo de 25° con la horizontal. Encuentre el trabajo que se realiza al remolcar el carro 2 kilómetros.

64. Trabajo

Se tira de un trineo ejerciendo una fuerza de 100 newtons en una cuerda que hace un ángulo de 25° con la horizontal. Encuentre el trabajo efectuado al jalar el trineo 40 metros.



¿Verdadero o falso? En los ejercicios 65 y 66, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que demuestre que es falso.

65. Si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ y $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.
 66. Si \mathbf{u} y \mathbf{v} son ortogonales a \mathbf{w} , entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ es ortogonal a \mathbf{w} .

Usar puntos de intersección En los ejercicios 67-70, (a) encuentre todos los puntos de intersección de las gráficas de las dos ecuaciones, (b) encuentre los vectores unitarios tangentes a cada curva en los puntos de intersección y (c) determine los ángulos $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ entre las curvas en sus puntos de intersección.

67. $y = x^2, y = x^{1/3}$ 68. $y = x^3, y = x^{1/3}$
 69. $y = 1 - x^2, y = x^2 - 1$ 70. $(y + 1)^2 = x, y = x^3 - 1$

- 71. Demostración** Use vectores para demostrar que las diagonales de un rombo son perpendiculares.
- 72. Demostración** Use vectores para demostrar que un paralelogramo es un rectángulo si y solo si sus diagonales son iguales en longitud.
- 73. Ángulo de enlace** Considere un tetraedro regular con los vértices $(0, 0, 0), (k, k, 0), (k, 0, k)$ y $(0, k, k)$, donde k es un número real positivo.
 (a) Dibuje la gráfica del tetraedro.
 (b) Encuentre la longitud de cada arista.
 (c) Encuentre el ángulo entre cada dos aristas.
 (d) Encuentre el ángulo entre los segmentos de recta desde el centroide $(k/2, k/2, k/2)$ a dos de los vértices. Éste es el ángulo de enlace en una molécula como CH_4 o PbCl_4 , cuya estructura es un tetraedro.

- 74. Demostración** Considere los vectores $\mathbf{u} = \langle \cos \alpha, \sin \alpha, 0 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle \cos \beta, \sin \beta, 0 \rangle$, donde $\alpha > \beta$. Calcule el producto escalar de los vectores y use el resultado para demostrar la identidad $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$.

- 75. Demostración** Demuestre que $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

- 76. Demostración** Demuestre la **desigualdad de Cauchy-Schwarz**:

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|.$$

- 77. Demostración** Demuestre la desigualdad del triángulo $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

- 78. Demostración** Demuestre el teorema 1.6.

1.4 El producto vectorial o producto cruz de dos vectores en el espacio

.....► **COMENTARIO** El producto vectorial también se conoce como producto cruz o como producto externo.

- Hallar el producto vectorial de dos vectores en el espacio.
- Usar el triple producto escalar de tres vectores en el espacio.

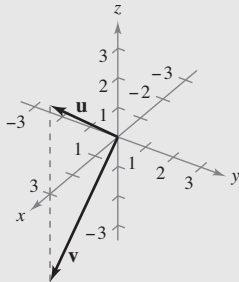
El producto vectorial

En muchas aplicaciones en física, ingeniería y geometría hay que encontrar un vector en el espacio ortogonal a dos vectores dados. En esta sección estudiará un producto que da como resultado ese vector. Se llama **producto vectorial** y se define y calcula de manera más adecuada utilizando los vectores unitarios canónicos o estándar. El producto vectorial debe su nombre a que da como resultado un vector. Al producto vectorial también se le suele llamar **producto cruz**.

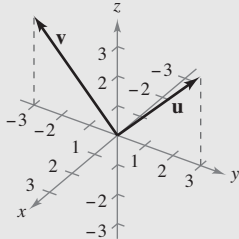
Exploración

Propiedad geométrica del producto vectorial Abajo se muestran tres pares de vectores. Use la definición para encontrar el producto vectorial de cada par. Dibuje los tres vectores en un sistema tridimensional. Describa toda relación entre los tres vectores. Use la descripción para escribir una conjetura acerca de \mathbf{u} , \mathbf{v} y $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

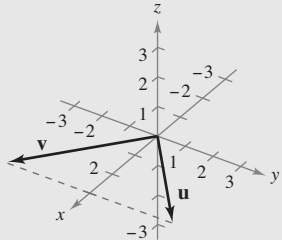
a. $\mathbf{u} = \langle 3, 0, 3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 3, 0, -3 \rangle$



b. $\mathbf{u} = \langle 0, 3, 3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 0, -3, 3 \rangle$



c. $\mathbf{u} = \langle 3, 3, 0 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 3, -3, 0 \rangle$



Definición de producto vectorial de dos vectores en el espacio

Sean

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

vectores en el espacio. El **producto cruz** de \mathbf{u} y \mathbf{v} es el vector

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}.$$

Es importante hacer notar que esta definición solo aplica a vectores tridimensionales. El producto vectorial no está definido para vectores bidimensionales.

Una manera adecuada para calcular $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es usar *determinantes* con expansión de cofactores, como se muestra a continuación. (Esta forma empleando determinantes 3×3 se usa solo para ayudar a recordar la fórmula del producto vectorial, pero técnicamente no es un determinante, porque las entradas de la matriz correspondiente no son todas números reales.)

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} && \leftarrow \text{Poner } \mathbf{u} \text{ en la fila 2.} \\ &&& \leftarrow \text{Poner } \mathbf{v} \text{ en la fila 3.} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k} \end{aligned}$$

Observe el signo menos delante de la componente \mathbf{j} . Cada uno de los tres determinantes se puede evaluar usando el modelo diagonal siguiente.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Aquí están un par de ejemplos

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (2)(-1) - (4)(3) = -2 - 12 = -14$$

y

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = (4)(3) - (0)(-6) = 12$$

NOTACIÓN PARA LOS PRODUCTOS ESCALAR Y VECTORIAL

La notación para el producto escalar y para el producto vectorial la introdujo el físico estadounidense Josiah Willard Gibbs (1839-1903). A comienzos de la década de 1880, Gibbs construyó un sistema para representar cantidades físicas llamado "análisis vectorial". El sistema fue una variante de la teoría de los cuaterniones de Hamilton.

...**COMENTARIO** Observe que este resultado es el negativo del obtenido en el inciso (a).
▶

EJEMPLO 1 Hallar el producto vectorial

Dados $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, determine cada uno de los siguientes productos vectoriales.

- a. $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ b. $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ c. $\mathbf{v} \times \mathbf{v}$

Solución

$$\begin{aligned} \mathbf{a.} \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= (4 - 1)\mathbf{i} - (-2 - 3)\mathbf{j} + (1 + 6)\mathbf{k} \\ &= 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b.} \quad \mathbf{v} \times \mathbf{u} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= (1 - 4)\mathbf{i} - (3 + 2)\mathbf{j} + (-6 - 1)\mathbf{k} \\ &= -3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\mathbf{c.} \quad \mathbf{v} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

Los resultados obtenidos en el ejemplo 1 sugieren algunas propiedades *algebraicas* interesantes del producto vectorial. Por ejemplo, $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$ y $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Estas propiedades, y algunas otras, se presentan en forma resumida en el teorema siguiente.

TEOREMA 1.7 Propiedades algebraicas del producto vectorial

Sean \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} vectores en el espacio, y sea c un escalar.

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$
2. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$
3. $c(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (c\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (c\mathbf{v})$
4. $\mathbf{u} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
5. $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
6. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$

Demostración Para demostrar la propiedad 1, sean $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$. Entonces

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = (v_2u_3 - v_3u_2)\mathbf{i} - (v_1u_3 - v_3u_1)\mathbf{j} + (v_1u_2 - v_2u_1)\mathbf{k}$$

la cual implica que $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})$. Las demostraciones de las propiedades 2, 3, 5 y 6 se dejan como ejercicios (vea los ejercicios 51 a 54).

Consulte *LarsonCalculus.com* para ver el video de esta demostración de Bruce Edwards. ■

Observe que la propiedad 1 del teorema 1.7 indica que el producto vectorial *no es conmutativo*. En particular, esta propiedad indica que los vectores $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ tienen longitudes iguales pero direcciones opuestas. El teorema siguiente da una lista de algunas otras de las propiedades *geométricas* del producto vectorial de dos vectores.

TEOREMA 1.8 Propiedades geométricas del producto vectorial

Sean \mathbf{u} y \mathbf{v} vectores distintos de cero en el espacio, y sea θ el ángulo entre \mathbf{u} y \mathbf{v} .

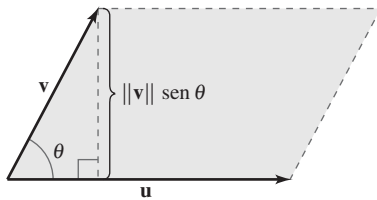
1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal, tanto a \mathbf{u} como a \mathbf{v} .
2. $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta$.
3. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ si y solo si \mathbf{u} y \mathbf{v} son múltiplos escalares uno de otro.
4. $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \text{área del paralelogramo que tiene } \mathbf{u} \text{ y } \mathbf{v} \text{ como lados adyacentes.}$

.....►
COMENTARIO De las propiedades 1 y 2 presentadas en el teorema 1.8 se desprende que si \mathbf{n} es un vector unitario ortogonal a \mathbf{u} y a \mathbf{v} , entonces

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \pm (\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta) \mathbf{n}.$$

Demostración Para probar la propiedad 2, observe que como $\cos \theta = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) / (\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|)$, se deduce que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta &= \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sqrt{1 - \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2}{\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2}} \\ &= \sqrt{\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2} \\ &= \sqrt{(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2} \\ &= \sqrt{(u_2v_3 - u_3v_2)^2 + (u_1v_3 - u_3v_1)^2 + (u_1v_2 - u_2v_1)^2} \\ &= \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|. \end{aligned}$$



Los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} son los lados adyacentes de un paralelogramo.

Figura 1.35

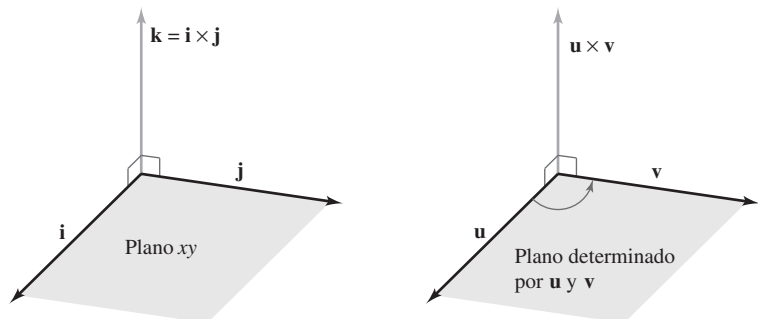
Para demostrar la propiedad 4, vaya a la figura 1.35, que es un paralelogramo que tiene \mathbf{v} y \mathbf{u} como lados adyacentes. Como la altura del paralelogramo es $\|\mathbf{v}\| \sin \theta$, el área es

$$\begin{aligned} \text{Área} &= (\text{base})(\text{altura}) \\ &= \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta \\ &= \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|. \end{aligned}$$

Las demostraciones de las propiedades 1 y 3 se dejan como ejercicios (vea los ejercicios 55 y 56).

Consulte LarsonCalculus.com para ver el video de esta demostración de Bruce Edwards. ■

Tanto $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ como $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ son perpendiculares al plano determinado por \mathbf{u} y \mathbf{v} . Una manera de recordar las orientaciones de los vectores \mathbf{u} , \mathbf{v} y $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es compararlos con los vectores unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} y $\mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j}$, como se muestra en la figura 1.36. Los tres vectores \mathbf{u} , \mathbf{v} y $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ forman un *sistema dextrógiro*, mientras que los tres vectores \mathbf{u} , \mathbf{v} y $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ forman un *sistema levógiro*.

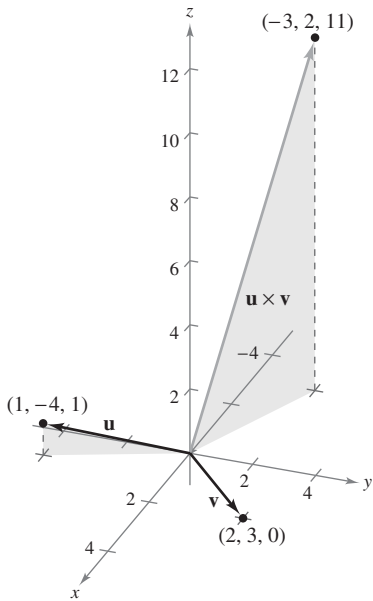


Sistemas dextrógiros.

Figura 1.36

EJEMPLO 2 Utilizar el producto vectorial

•••► Consulte *LarsonCalculus.com* para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.



El vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal tanto a \mathbf{u} como a \mathbf{v} .

Figura 1.37

Encuentre un vector unitario que es ortogonal tanto a

$$\mathbf{u} = \mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

como a

$$\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}.$$

Solución El producto vectorial $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, como se muestra en la figura 1.37, es ortogonal tanto a \mathbf{u} como a \mathbf{v} .

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} && \text{Producto vectorial} \\ &= -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 11\mathbf{k} \end{aligned}$$

Como

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 11^2} = \sqrt{134}$$

un vector unitario ortogonal tanto a \mathbf{u} como a \mathbf{v} es

$$\frac{\mathbf{u} \times \mathbf{v}}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|} = -\frac{3}{\sqrt{134}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{134}}\mathbf{j} + \frac{11}{\sqrt{134}}\mathbf{k}.$$

En el ejemplo 2, observe que se podría haber usado el producto vectorial $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ para formar un vector unitario ortogonal tanto a \mathbf{u} como a \mathbf{v} . Con esa opción, se habría obtenido el negativo del vector unitario encontrado en el ejemplo.

EJEMPLO 3 Aplicación geométrica del producto vectorial

Demuestre que el cuadrilátero con vértices en los puntos siguientes es un paralelogramo y calcule su área.

$$A = (5, 2, 0) \qquad B = (2, 6, 1)$$

$$C = (2, 4, 7) \qquad D = (5, 0, 6)$$

Solución En la figura 1.38 se puede ver que los lados del cuadrilátero corresponden a los siguientes cuatro vectores.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k} & \overrightarrow{CD} &= 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k} = -\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AD} &= 0\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k} & \overrightarrow{CB} &= 0\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k} = -\overrightarrow{AD} \end{aligned}$$

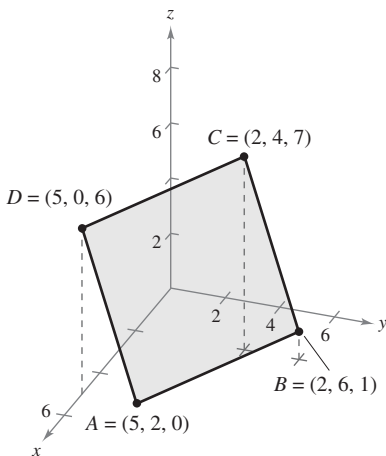
Por tanto, \overrightarrow{AB} es paralelo a \overrightarrow{CD} y \overrightarrow{AD} es paralelo a \overrightarrow{CB} , y se puede concluir que el cuadrilátero es un paralelogramo con \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AD} como lados adyacentes. Además, como

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} && \text{Producto vectorial} \\ &= 26\mathbf{i} + 18\mathbf{j} + 6\mathbf{k} \end{aligned}$$

el área del paralelogramo es

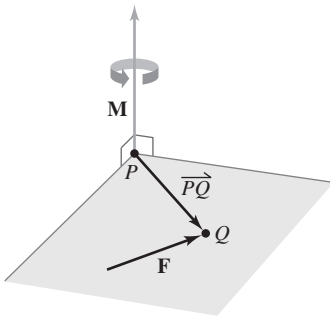
$$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\| = \sqrt{1036} \approx 32.19.$$

¿Es el paralelogramo un rectángulo? Para decidir si lo es o no, se calcula el ángulo entre los vectores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AD} .

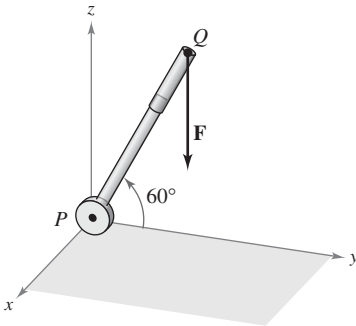


El área del paralelogramo es aproximadamente 32.19.

Figura 1.38



Momento de \mathbf{F} respecto a P .
Figura 1.39



Se aplica una fuerza vertical de 50 libras en el punto Q .
Figura 1.40

En física, el producto vectorial puede usarse para medir el **momento \mathbf{M} de una fuerza \mathbf{F} respecto a un punto P** , como se muestra en la figura 1.39. Si el punto de aplicación de la fuerza es Q , el momento de \mathbf{F} respecto a P está dado por

$$\mathbf{M} = \overrightarrow{PQ} \times \mathbf{F}. \quad \text{Momento de } \mathbf{F} \text{ respecto a } P$$

La magnitud del momento \mathbf{M} mide la tendencia del vector \overrightarrow{PQ} al girar en sentido contrario al de las manecillas del reloj (usando la regla de la mano derecha) respecto a un eje en dirección del vector \mathbf{M} .

EJEMPLO 4 Una aplicación del producto vectorial

Se aplica una fuerza vertical de 50 libras al extremo de una palanca de 1 pie de longitud unida a un eje en el punto P , como se muestra en la figura 1.40. Calcule el momento de esta fuerza respecto al punto P cuando $\theta = 60^\circ$.

Solución Si representa la fuerza de 50 libras como

$$\mathbf{F} = -50\mathbf{k}$$

y la palanca como

$$\overrightarrow{PQ} = \cos(60^\circ)\mathbf{j} + \sin(60^\circ)\mathbf{k} = \frac{1}{2}\mathbf{j} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{k}.$$

El momento de \mathbf{F} respecto a P está dado por

$$\mathbf{M} = \overrightarrow{PQ} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & -50 \end{vmatrix} = -25\mathbf{i}. \quad \text{Momento de } \mathbf{F} \text{ respecto a } P$$

La magnitud de este momento es 25 libras-pie.

En el ejemplo 4, note que el momento (la tendencia de la palanca a girar sobre su eje) depende del ángulo θ . Cuando $\theta = \pi/2$, el momento es 0. El momento es máximo cuando $\theta = 0$.

El triple producto escalar

Dados vectores \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} en el espacio, al producto escalar de \mathbf{u} y $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$

se le llama **triple producto escalar**, como se define en el teorema 1.9. La demostración de este teorema se deja como ejercicio (ver el ejercicio 59).

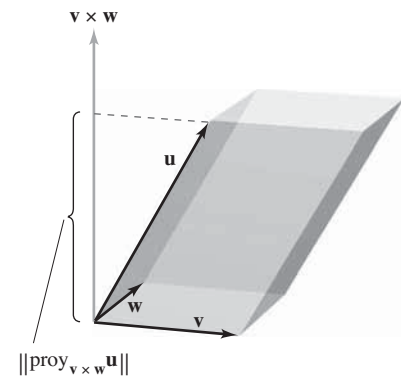
TEOREMA 1.9 El triple producto escalar

Para $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{w} = w_1\mathbf{i} + w_2\mathbf{j} + w_3\mathbf{k}$, el triple producto escalar está dado por

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

El valor de un determinante se multiplica por -1 si se intercambian dos de sus filas. Después de estos dos intercambios, el valor del determinante queda inalterado. Por tanto, los triples productos escalares siguientes son equivalentes.

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$$



$\|\text{proy}_{\mathbf{v} \times \mathbf{w}} \mathbf{u}\|$
 Área de la base = $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$
 Volumen del
 paralelepípedo = $|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|$
Figura 1.41

Si los vectores \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} no están en el mismo plano, el triple producto escalar $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ puede usarse para determinar el volumen del paralelepípedo (un poliedro en el que todas sus caras son paralelogramos) con \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} como aristas adyacentes, como se muestra en la figura 1.41. Esto se establece en el teorema siguiente.

TEOREMA 1.10 Interpretación geométrica del triple producto escalar

El volumen V de un paralelepípedo con vectores \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} como aristas adyacentes está dado por

$$V = |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|.$$

Demostración En la figura 1.41 se observa que el área de la base es $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|$ y la altura del paralelepípedo es $\|\text{proy}_{\mathbf{v} \times \mathbf{w}} \mathbf{u}\|$. Por consiguiente, el volumen es

$$\begin{aligned}
 V &= (\text{altura})(\text{área de la base}) \\
 &= \|\text{proy}_{\mathbf{v} \times \mathbf{w}} \mathbf{u}\| \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| \\
 &= \left| \frac{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})}{\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|} \right| \|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| \\
 &= |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|.
 \end{aligned}$$

Consulte LarsonCalculus.com para ver el video de esta demostración de Bruce Edwards. ■

EJEMPLO 5 Calcular un volumen por medio del triple producto escalar

Calcule el volumen del paralelepípedo mostrado en la figura 1.42 que tiene

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} &= 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + \mathbf{k} \\
 \mathbf{v} &= 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}
 \end{aligned}$$

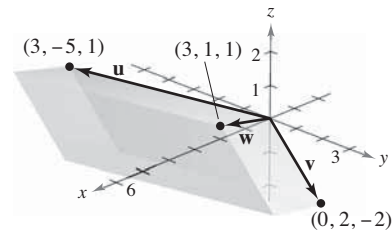
y

$$\mathbf{w} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

como aristas adyacentes.

Solución Por el teorema 1.10, tiene

$$\begin{aligned}
 V &= |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})| && \text{Triple producto escalar} \\
 &= \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= 3 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (-5) \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (1) \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= 3(4) + 5(6) + 1(-6) \\
 &= 36.
 \end{aligned}$$



El paralelepípedo tiene un volumen de 36.
Figura 1.42

Una consecuencia natural del teorema 1.10 es que el volumen del paralelepípedo es 0 si y solo si los tres vectores son coplanares. Es decir, si los vectores $\mathbf{u} = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ y $\mathbf{w} = \langle w_1, w_2, w_3 \rangle$ tienen el mismo punto inicial, se encuentran en el mismo plano si y solo si

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

1.4 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Producto vectorial de vectores unitarios En los ejercicios 1-6, calcule el producto vectorial de los vectores unitarios y dibuje su resultado.

1. $\mathbf{j} \times \mathbf{i}$
2. $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$
3. $\mathbf{j} \times \mathbf{k}$
4. $\mathbf{k} \times \mathbf{j}$
5. $\mathbf{i} \times \mathbf{k}$
6. $\mathbf{k} \times \mathbf{i}$

Hallar productos vectoriales En los ejercicios 7-10, calcule (a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, (b) $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$, y (c) $\mathbf{v} \times \mathbf{v}$.

7. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
 $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$
8. $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$
 $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
9. $\mathbf{u} = \langle 7, 3, 2 \rangle$
10. $\mathbf{u} = \langle 3, -2, -2 \rangle$
 $\mathbf{v} = \langle 1, -1, 5 \rangle$

Hallar productos vectoriales En los ejercicios 11-16, calcule $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ y demuestre que es ortogonal tanto a \mathbf{u} como a \mathbf{v} .

11. $\mathbf{u} = \langle 12, -3, 0 \rangle$
 $\mathbf{v} = \langle -2, 5, 0 \rangle$
12. $\mathbf{u} = \langle -1, 1, 2 \rangle$
 $\mathbf{v} = \langle 0, 1, 0 \rangle$
13. $\mathbf{u} = \langle 2, -3, 1 \rangle$
 $\mathbf{v} = \langle 1, -2, 1 \rangle$
14. $\mathbf{u} = \langle -10, 0, 6 \rangle$
 $\mathbf{v} = \langle 5, -3, 0 \rangle$
15. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
 $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$
16. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + 6\mathbf{j}$
 $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

Hallar productos vectoriales En los ejercicios 17-20, encuentre un vector unitario que sea ortogonal tanto a \mathbf{u} como a \mathbf{v} .

17. $\mathbf{u} = \langle 4, -3, 1 \rangle$
 $\mathbf{v} = \langle 2, 5, 3 \rangle$
18. $\mathbf{u} = \langle -8, -6, 4 \rangle$
 $\mathbf{v} = \langle 10, -12, -2 \rangle$
19. $\mathbf{u} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$
 $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
20. $\mathbf{u} = 2\mathbf{k}$
 $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{k}$

Área En los ejercicios 21-24, calcule el área del paralelogramo que tienen los vectores dados como lados adyacentes. Use un sistema algebraico por computadora o una herramienta de graficación para verificar el resultado.

21. $\mathbf{u} = \mathbf{j}$
 $\mathbf{v} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$
22. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
 $\mathbf{v} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$
23. $\mathbf{u} = \langle 3, 2, -1 \rangle$
 $\mathbf{v} = \langle 1, 2, 3 \rangle$
24. $\mathbf{u} = \langle 2, -1, 0 \rangle$
 $\mathbf{v} = \langle -1, 2, 0 \rangle$

Área En los ejercicios 25 y 26, verifique que los puntos son los vértices de un paralelogramo, y calcule su área.

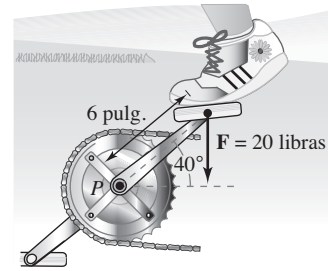
25. $A(0, 3, 2), B(1, 5, 5), C(6, 9, 5), D(5, 7, 2)$
26. $A(2, -3, 1), B(6, 5, -1), C(7, 2, 2), D(3, -6, 4)$

Área En los ejercicios 27 y 28, calcule el área del triángulo con los vértices dados. (Sugerencia: $\frac{1}{2} \|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$ es el área del triángulo que tiene \mathbf{u} y \mathbf{v} como lados adyacentes.)

27. $A(0, 0, 0), B(1, 0, 3), C(-3, 2, 0)$
28. $A(2, -3, 4), B(0, 1, 2), C(-1, 2, 0)$

29. Momento

Un niño frena en una bicicleta aplicando una fuerza dirigida hacia abajo de 20 libras sobre el pedal cuando la manivela forma un ángulo de 40° con la horizontal (vea la figura). La manivela tiene 6 pulgadas de longitud. Calcule el momento respecto a P .



30. Momento La magnitud y la dirección de la fuerza sobre un cigüeñal cambian cuando este gira. Calcule el momento sobre el cigüeñal usando la posición y los datos mostrados en la figura.

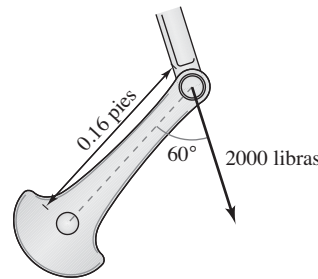


Figura para 30

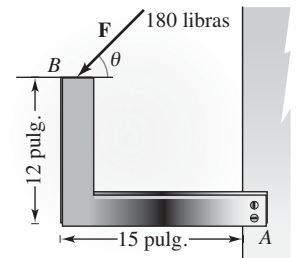


Figura para 31

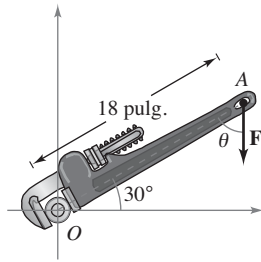
31. Optimización Una fuerza de 180 libras actúa sobre el soporte mostrado en la figura.

- (a) Determine el vector \overrightarrow{AB} y el vector \mathbf{F} que representa la fuerza. (\mathbf{F} estará en términos de θ .)
- (b) Calcule la magnitud del momento respecto a A evaluando $\|\overrightarrow{AB} \times \mathbf{F}\|$.
- (c) Use el resultado del inciso (b) para determinar la magnitud del momento cuando $\theta = 30^\circ$.
- (d) Use el resultado del inciso (b) para determinar el ángulo θ cuando la magnitud del momento es máxima. A ese ángulo, ¿cuál es la relación entre los vectores \mathbf{F} y \overrightarrow{AB} ? ¿Es lo que esperaba? ¿Por qué sí o por qué no?



- (e) Use una herramienta de graficación para representar la función de la magnitud del momento respecto a A para $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$. Encuentre el cero de la función en el dominio dado. Interprete el significado del cero en el contexto del problema.

32. **Optimización** Una fuerza de 56 libras actúa sobre la llave inglesa mostrada en la figura.



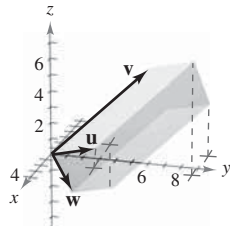
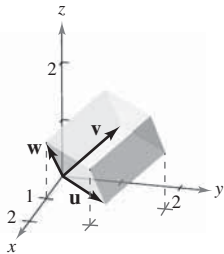
- (a) Calcule la magnitud del momento respecto a O evaluando $\|\vec{OA} \times \mathbf{F}\|$. Use una herramienta de graficación para representar la función de θ que se obtiene.
- (b) Use el resultado del inciso (a) para determinar la magnitud del momento cuando $\theta = 45^\circ$.
- (c) Use el resultado del inciso (a) para determinar el ángulo θ cuando la magnitud del momento es máxima. ¿Es la respuesta que esperaba? ¿Por qué sí o por qué no?

Hallar un triple producto escalar En los ejercicios 33-46, calcule $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$.

- | | |
|--|--|
| 33. $\mathbf{u} = \mathbf{i}$ | 34. $\mathbf{u} = \langle 1, 1, 1 \rangle$ |
| $\mathbf{v} = \mathbf{j}$ | $\mathbf{v} = \langle 2, 1, 0 \rangle$ |
| $\mathbf{w} = \mathbf{k}$ | $\mathbf{w} = \langle 0, 0, 1 \rangle$ |
| 35. $\mathbf{u} = \langle 2, 0, 1 \rangle$ | 36. $\mathbf{u} = \langle 2, 0, 0 \rangle$ |
| $\mathbf{v} = \langle 0, 3, 0 \rangle$ | $\mathbf{v} = \langle 1, 1, 1 \rangle$ |
| $\mathbf{w} = \langle 0, 0, 1 \rangle$ | $\mathbf{w} = \langle 0, 2, 2 \rangle$ |

Volumen En los ejercicios 37 y 38, use el triple producto escalar para encontrar el volumen del paralelepípedo con aristas adyacentes \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} .

- | | |
|--|--|
| 37. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ | 38. $\mathbf{u} = \langle 1, 3, 1 \rangle$ |
| $\mathbf{v} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$ | $\mathbf{v} = \langle 0, 6, 6 \rangle$ |
| $\mathbf{w} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ | $\mathbf{w} = \langle -4, 0, -4 \rangle$ |



Volumen En los ejercicios 39 y 40, encuentre el volumen del paralelepípedo con los vértices dados.

- 39. $(0, 0, 0)$, $(3, 0, 0)$, $(0, 5, 1)$, $(2, 0, 5)$
 $(3, 5, 1)$, $(5, 0, 5)$, $(2, 5, 6)$, $(5, 5, 6)$
- 40. $(0, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$, $(-3, 0, 0)$, $(-1, 1, 5)$
 $(-3, 4, 0)$, $(-1, 5, 5)$, $(-4, 1, 5)$, $(-4, 5, 5)$

41. **Comparar productos escalares** Identifique los productos escalares que son iguales. Explique su razonamiento. (Suponga que \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} son vectores distintos de cero).

- | | |
|--|--|
| (a) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ | (b) $(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u}$ |
| (c) $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ | (d) $(\mathbf{u} \times -\mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}$ |
| (e) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v})$ | (f) $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{u})$ |
| (g) $(-\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ | (h) $(\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$ |

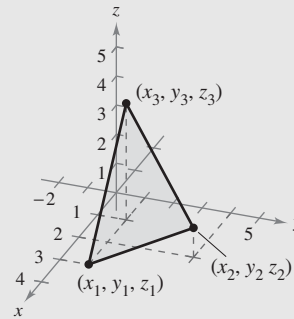
42. **Usar productos escalares y vectoriales** Cuando $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, ¿qué puede concluir de \mathbf{u} y de \mathbf{v} ?

DESARROLLO DE CONCEPTOS

- 43. **Producto vectorial** Defina el producto vectorial de los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} .
- 44. **Producto vectorial** Dé las propiedades geométricas del producto vectorial.
- 45. **Magnitud** Si las magnitudes de dos vectores se duplican, ¿cómo se modificará la magnitud del producto vectorial de los vectores? Explique.



46. **¿CÓMO LO VE?** Los vértices de un triángulo en el espacio son (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) y (x_3, y_3, z_3) . Explique cómo encontrar un vector perpendicular al triángulo.



¿Verdadero o falso? En los ejercicios 47-50, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que demuestre que es falso.

- 47. Es posible encontrar el producto vectorial de dos vectores en un sistema de coordenadas bidimensional.
- 48. Si \mathbf{u} y \mathbf{v} son vectores en el espacio que son distintos de cero y no paralelos, entonces $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{u}$.
- 49. Si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$, entonces $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.
- 50. Si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$, y $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$, entonces $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

Demostración En los ejercicios 51-56, demuestre la propiedad del producto vectorial.

- 51. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$
- 52. $c(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (c\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (c\mathbf{v})$
- 53. $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
- 54. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$
- 55. $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ es ortogonal tanto a \mathbf{u} como a \mathbf{v} .
- 56. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ si y solo si \mathbf{u} y \mathbf{v} son múltiplos escalares uno del otro.
- 57. **Demostración** Demuestre que $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$ si \mathbf{u} y \mathbf{v} son ortogonales.
- 58. **Demostración** Demuestre que $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}$.
- 59. **Demostración** Demuestre el teorema 1.9.

1.5 Rectas y planos en el espacio

- Dar un conjunto de ecuaciones paramétricas para una recta en el espacio.
- Dar una ecuación lineal para representar un plano en el espacio.
- Dibujar el plano dado por una ecuación lineal.
- Hallar las distancias entre puntos, planos y rectas en el espacio.

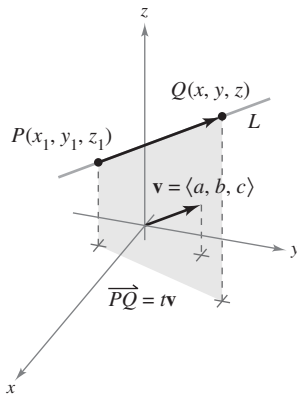
Rectas en el espacio

En el plano se usa la *pendiente* para determinar una ecuación de una recta. En el espacio es más conveniente usar *vectores* para determinar la ecuación de una recta.

En la figura 1.43 se considera la recta L a través del punto $P(x_1, y_1, z_1)$ y paralela al vector $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$. El vector \mathbf{v} es un **vector de dirección** o director de la recta L , y a , b y c son los números de dirección (o directores). Una manera de describir la recta L es decir que consta de todos los puntos $Q(x, y, z)$ para los que el vector \overrightarrow{PQ} es paralelo a \mathbf{v} . Esto significa que \overrightarrow{PQ} es un múltiplo escalar de \mathbf{v} , y se puede escribir $\overrightarrow{PQ} = t\mathbf{v}$, donde t es un escalar (un número real).

$$\overrightarrow{PQ} = \langle x - x_1, y - y_1, z - z_1 \rangle = \langle at, bt, ct \rangle = t\mathbf{v}$$

Igualando los componentes correspondientes, se obtienen las **ecuaciones paramétricas** de una recta en el espacio.



La recta L y su vector de dirección \mathbf{v} .
Figura 1.43

TEOREMA 1.11 Ecuaciones paramétricas de una recta en el espacio

Una recta L paralela al vector $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$ y que pasa por el punto $P(x_1, y_1, z_1)$ se representa por medio de las **ecuaciones paramétricas**

$$x = x_1 + at, \quad y = y_1 + bt \quad y \quad z = z_1 + ct.$$

Si todos los números directores a , b y c son distintos de cero, se puede eliminar el parámetro t para obtener las **ecuaciones simétricas** (o cartesianas) de la recta.

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

Ecuaciones simétricas

EJEMPLO 1 Hallar las ecuaciones paramétricas y simétricas

Encuentre las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta L que pasa por el punto $(1, -2, 4)$ y es paralela a $\mathbf{v} = \langle 2, 4, -4 \rangle$, como se muestra en la figura 1.44.

Solución Para hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta, utilice las coordenadas $x_1 = 1$, $y_1 = -2$ y $z_1 = 4$, y los números de dirección $a = 2$, $b = 4$ y $c = -4$.

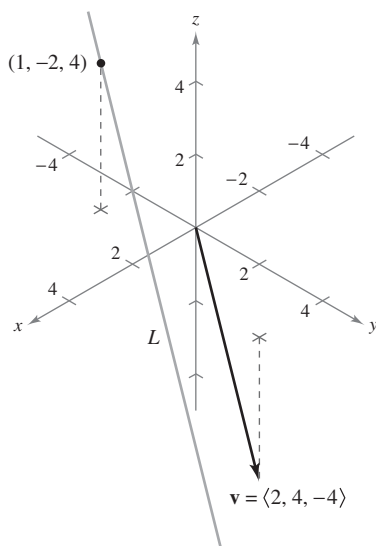
$$x = 1 + 2t, \quad y = -2 + 4t, \quad z = 4 - 4t \quad \text{Ecuaciones paramétricas}$$

Como a , b y c son todos diferentes de cero, un conjunto de ecuaciones simétricas es

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 2}{4} = \frac{z - 4}{-4}. \quad \text{Ecuaciones simétricas}$$

Ni las ecuaciones paramétricas ni las ecuaciones simétricas de una recta dada son únicas. Así, en el ejemplo 1, tomando $t = 1$ en las ecuaciones paramétricas se obtiene el punto $(3, 2, 0)$. Usando este punto con los números de dirección $a = 2$, $b = 4$ y $c = -4$ se obtiene un conjunto diferente de ecuaciones paramétricas.

$$x = 3 + 2t, \quad y = 2 + 4t \quad y \quad z = -4t.$$



El vector \mathbf{v} es paralelo a la recta L .
Figura 1.44

EJEMPLO 2

Ecuaciones paramétricas de una recta que pasa por dos puntos

•••▶ Consulte *LarsonCalculus.com* para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Encuentre un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $(-2, 1, 0)$ y $(1, 3, 5)$.

Solución Empiece por usar los puntos $P(-2, 1, 0)$ y $Q(1, 3, 5)$ para hallar un vector de dirección de la recta que pasa por P y Q dado por

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ} = \langle 1 - (-2), 3 - 1, 5 - 0 \rangle = \langle 3, 2, 5 \rangle = \langle a, b, c \rangle$$

Usando los números de dirección $a = 3$, $b = 2$ y $c = 5$ junto con el punto $P(-2, 1, 0)$, obtiene las ecuaciones paramétricas

•••▶ $x = -2 + 3t, \quad y = 1 + 2t \quad y \quad z = 5t.$ ■

•••••**COMENTARIO** Como t varía sobre todos los números reales, las ecuaciones paramétricas del ejemplo 2 determinan los puntos (x, y, z) sobre la línea. En particular, observe que $t = 0$ y $t = 1$ dan los puntos originales $(-2, 1, 0)$ y $(1, 3, 5)$.

Planos en el espacio

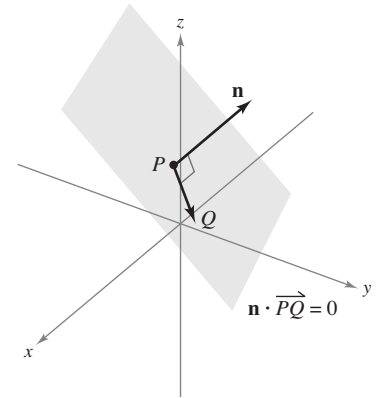
Ya ha visto cómo se puede obtener una ecuación de una recta en el espacio a partir de un punto sobre la recta y un vector *paralelo* a ella. Ahora verá que una ecuación de un plano en el espacio se puede obtener a partir de un punto en el plano y de un vector *normal* (perpendicular) al plano.

Considere el plano que contiene el punto $P(x_1, y_1, z_1)$ y que tiene un vector normal distinto de cero

$$\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$$

como se muestra en la figura 1.45. Este plano consta de todos los puntos $Q(x, y, z)$ para los cuales el vector \overrightarrow{PQ} es ortogonal a \mathbf{n} . Usando el producto vectorial, se puede escribir

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PQ} &= 0 \\ \langle a, b, c \rangle \cdot \langle x - x_1, y - y_1, z - z_1 \rangle &= 0 \\ a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) &= 0 \end{aligned}$$



El vector normal \mathbf{n} es ortogonal a todo vector \overrightarrow{PQ} en el plano.

Figura 1.45

La tercera ecuación del plano se dice que está en **forma canónica o estándar**.

TEOREMA 1.12 Ecuación canónica o estándar de un plano en el espacio

El plano que contiene el punto (x_1, y_1, z_1) y tiene un vector normal

$$\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle$$

puede representarse en **forma canónica o estándar** por medio de la ecuación

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0.$$

Reagrupando términos se obtiene la forma general de la ecuación de un plano en el espacio.

$$ax + by + cz + d = 0$$

Forma general de la ecuación de un plano

Dada la forma general de la ecuación de un plano, es fácil hallar un vector normal al plano. Simplemente se usan los coeficientes de x , y y z para escribir

$$\mathbf{n} = \langle a, b, c \rangle.$$

EJEMPLO 3

Hallar una ecuación de un plano en el espacio tridimensional

Encuentre la ecuación general del plano que contiene a los puntos

$$(2, 1, 1), \quad (0, 4, 1) \quad \text{y} \quad (-2, 1, 4).$$

Solución Para aplicar el teorema 1.12 necesita un punto en el plano y un vector que sea normal al plano. Hay tres opciones para el punto, pero no se da ningún vector normal. Para obtener un vector normal, use el producto vectorial de los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} que van del punto $(2, 1, 1)$ a los puntos $(0, 4, 1)$ y $(-2, 1, 4)$, como se muestra en la figura 1.46. Los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} dados mediante sus componentes son

$$\mathbf{u} = \langle 0 - 2, 4 - 1, 1 - 1 \rangle = \langle -2, 3, 0 \rangle$$

$$\mathbf{v} = \langle -2 - 2, 1 - 1, 4 - 1 \rangle = \langle -4, 0, 3 \rangle$$

así que

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \mathbf{u} \times \mathbf{v} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 9\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 12\mathbf{k} \\ &= \langle a, b, c \rangle \end{aligned}$$

es normal al plano dado. Usando los números de dirección para \mathbf{n} y el punto $(x_1, y_1, z_1) = (2, 1, 1)$, puede determinar que una ecuación del plano es

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

$$9(x - 2) + 6(y - 1) + 12(z - 1) = 0$$

$$9x + 6y + 12z - 36 = 0$$

$$3x + 2y + 4z - 12 = 0.$$

Forma canónica o estándar

Forma general

Forma general simplificada

COMENTARIO En el ejemplo 3, verifique que cada uno de los tres puntos originales satisface la ecuación

$$3x + 2y + 4z - 12 = 0.$$

Dos planos distintos en el espacio tridimensional o son paralelos o se cortan en una recta. Si se cortan, se puede determinar el ángulo ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) entre ellos a partir del ángulo entre sus vectores normales, como se muestra en la figura 1.47. Específicamente, si los vectores \mathbf{n}_1 y \mathbf{n}_2 son normales a dos planos que se cortan, el ángulo θ entre los vectores normales es igual al ángulo entre los dos planos y está dado por

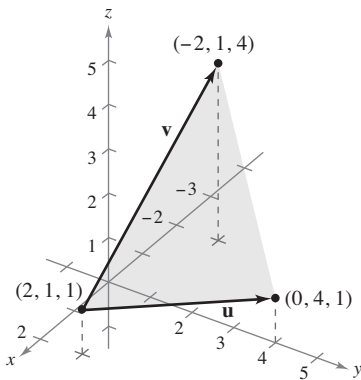
$$\cos \theta = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{\|\mathbf{n}_1\| \|\mathbf{n}_2\|}.$$

Ángulo entre dos planos

Por consiguiente, dos planos con vectores normales \mathbf{n}_1 y \mathbf{n}_2 son

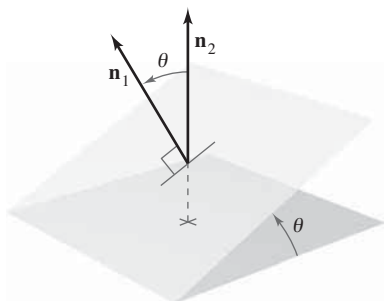
1. *Perpendiculares* si $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$

2. *Paralelos* si \mathbf{n}_1 es un múltiplo escalar de \mathbf{n}_2 .



Un plano determinado por \mathbf{u} y \mathbf{v} .

Figura 1.46



El ángulo θ entre dos planos.

Figura 1.47

EJEMPLO 4 Hallar la recta de intersección de dos planos

Encuentre el ángulo entre los dos planos dados por

$$x - 2y + z = 0 \quad \text{y} \quad 2x + 3y - 2z = 0,$$

y determine las ecuaciones paramétricas de su recta de intersección (vea la figura 1.48).

...**COMENTARIO** Las gráficas rotativas tridimensionales que están disponibles en *LarsonCalculus.com* pueden ayudarle a visualizar superficies como las que se muestran en la figura 1.48. Si usted tiene acceso a estas gráficas, debe usarlas para ayudar a su intuición espacial al estudiar esta sección y otras secciones en el texto que tratan con vectores, curvas o superficies en el espacio.

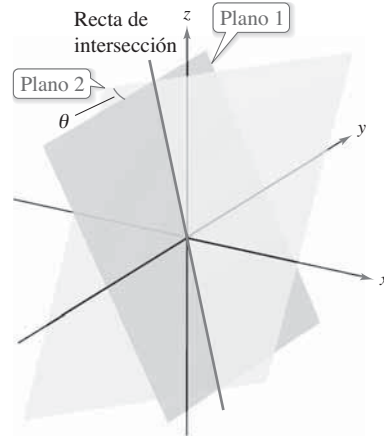


Figura 1.48

Solución Los vectores normales a los planos son $\mathbf{n}_1 = (1, -2, 1)$ y $\mathbf{n}_2 = (2, 3, -2)$. Por consiguiente, el ángulo entre los dos planos está determinado como sigue.

$$\cos \theta = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{\|\mathbf{n}_1\| \|\mathbf{n}_2\|} = \frac{|-6|}{\sqrt{6} \sqrt{17}} = \frac{6}{\sqrt{102}} \approx 0.59409$$

Esto implica que el ángulo entre los dos planos es $\theta \approx 53.55^\circ$. Puede hallar la recta de intersección de los dos planos resolviendo simultáneamente las dos ecuaciones lineales que representan a los planos. Una manera de hacer esto es multiplicar la primera ecuación por -2 y sumar el resultado a la segunda ecuación.

$$\begin{array}{rcl} x - 2y + z = 0 & \Rightarrow & -2x + 4y - 2z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 & & \underline{2x + 3y - 2z = 0} \\ & & 7y - 4z = 0 \Rightarrow y = \frac{4z}{7} \end{array}$$

Sustituyendo $y = 4z/7$ en una de las ecuaciones originales, puede determinar que $x = z/7$. Finalmente, haciendo $t = z/7$, se obtienen las ecuaciones paramétricas

$$x = t, \quad y = 4t \quad \text{y} \quad z = 7t \quad \text{Recta de intersección}$$

lo cual indica que 1, 4 y 7 son los números de dirección de la recta de intersección. ■

Observe que los números de dirección del ejemplo 4 se pueden obtener a partir del producto vectorial de los dos vectores normales como sigue.

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k} \end{aligned}$$

Esto significa que la recta de intersección de los dos planos es paralela al producto vectorial de sus vectores normales.

Trazado de planos en el espacio

Si un plano en el espacio corta uno de los planos coordenados, a la recta de intersección se le llama **traza** del plano dado en el plano coordenado. Para dibujar un plano en el espacio es útil hallar sus puntos de intersección con los ejes coordenados y sus trazas en los planos coordenados. Por ejemplo, considere el plano dado por

$$3x + 2y + 4z = 12. \quad \text{Ecuación del plano}$$

Puede hallar la traza xy haciendo $z = 0$ y dibujando la recta

$$3x + 2y = 12 \quad \text{Traza } xy$$

en el plano xy . Esta recta corta el eje x en $(4, 0, 0)$ y el eje y en $(0, 6, 0)$. En la figura 1.49 se continúa con este proceso encontrando la traza yz y la traza xz , y sombreado la región triangular que se encuentra en el primer octante.

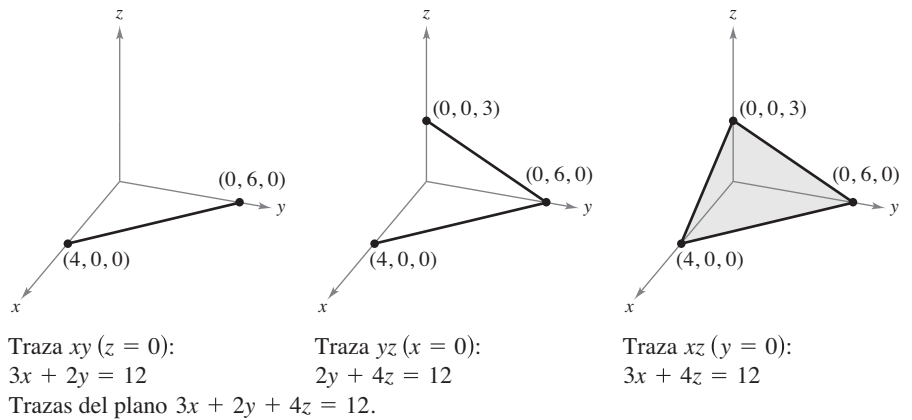


Figura 1.49

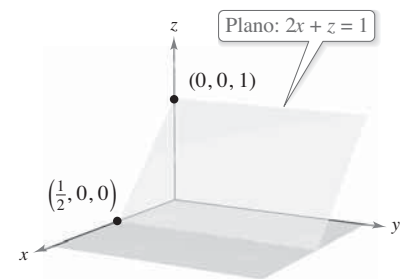
Si en una ecuación de un plano está ausente una variable, como en la ecuación

$$2x + z = 1$$

el plano debe ser *paralelo al eje* correspondiente a la variable ausente, como se muestra en la figura 1.50. Si en la ecuación de un plano faltan dos variables, este es

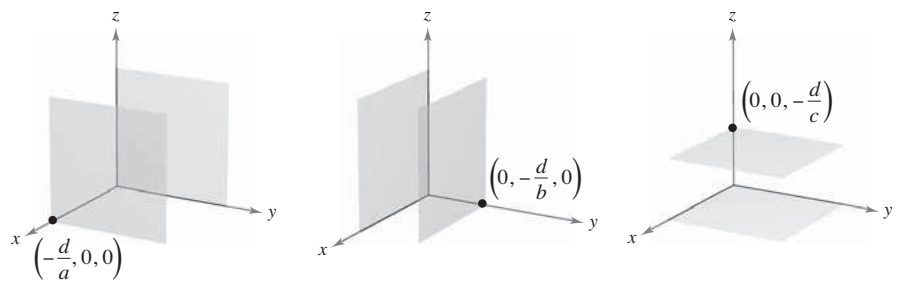
$$ax + d = 0$$

paralelo al plano coordenado correspondiente a las variables ausentes, como se muestra en la figura 1.51.



El plano $2x + z = 1$ es paralelo al eje y .

Figura 1.50

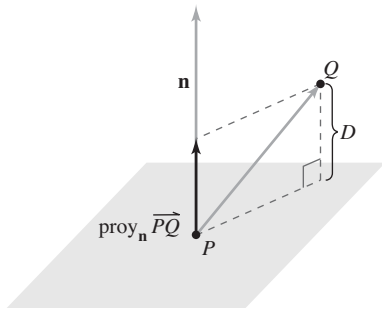


El plano $ax + d = 0$ es paralelo al plano yz .

El plano $by + d = 0$ es paralelo al plano xz .

El plano $cz + d = 0$ es paralelo al plano xy .

Figura 1.51



$$D = \|\text{proy}_n \vec{PQ}\|$$

La distancia entre un punto y un plano.
Figura 1.52

Distancias entre puntos, planos y rectas

Esta sección concluye con el análisis de dos tipos básicos de problemas sobre distancias en el espacio: (1) calcule la distancia de un punto a un plano, y (2) calcule la distancia de un punto a una recta. Las soluciones de estos problemas ilustran la versatilidad y utilidad de los vectores en la geometría analítica; el primer problema usa el *producto escalar* de dos vectores, y el segundo problema usa el *producto vectorial*.

La distancia D de un punto Q a un plano es la longitud del segmento de recta más corto que une a Q con el plano, como se muestra en la figura 1.52. Si P es un punto *cualquiera* del plano, esta distancia se puede hallar proyectando el vector \vec{PQ} sobre el vector normal \mathbf{n} . La longitud de esta proyección es la distancia buscada.

TEOREMA 1.13 Distancia de un punto a un plano

La distancia de un punto a un plano Q (no en el plano) es

$$D = \|\text{proy}_n \vec{PQ}\| = \frac{|\vec{PQ} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|}$$

donde P es un punto en el plano y \mathbf{n} es normal al plano.

Para encontrar un punto en el plano dado por $ax + by + cz + d = 0$, donde $a \neq 0$, se hace $y = 0$ y $z = 0$. Entonces, de la ecuación $ax + d = 0$ se puede concluir que el punto

$$\left(-\frac{d}{a}, 0, 0\right)$$

está en el plano.

EJEMPLO 5

Calcular la distancia de un punto a un plano

Calcule la distancia del punto $Q(1, 5, -4)$ al plano dado por $3x - y + 2z = 6$.

Solución Sabe que $\mathbf{n} = \langle 3, -1, 2 \rangle$ es normal al plano dado. Para hallar un punto en el plano, haga $y = 0$ y $z = 0$, y obtiene el punto $P(2, 0, 0)$. El vector que va de P a Q está dado por

$$\begin{aligned} \vec{PQ} &= \langle 1 - 2, 5 - 0, -4 - 0 \rangle \\ &= \langle -1, 5, -4 \rangle. \end{aligned}$$

Usando la fórmula para la distancia dada en el teorema 1.13 tiene

$$D = \frac{|\vec{PQ} \cdot \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{|\langle -1, 5, -4 \rangle \cdot \langle 3, -1, 2 \rangle|}{\sqrt{9 + 1 + 4}} = \frac{|-3 - 5 - 8|}{\sqrt{14}} = \frac{16}{\sqrt{14}} \approx 4.28.$$

Del teorema 1.13 puede determinar que la distancia del punto $Q(x_0, y_0, z_0)$ al plano dado por $ax + by + cz + d = 0$ es

$$D = \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

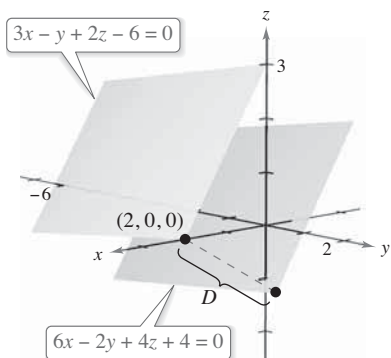
o

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Distancia entre un punto y un plano

donde $P(x_1, y_1, z_1)$ es un punto en el plano y $d = -(ax_1 + by_1 + cz_1)$.

...COMENTARIO En la solución, observe que el punto P que se eligió en el ejemplo 5 es arbitrario. Seleccione un punto diferente en el plano para verificar que se obtiene la misma distancia.



La distancia entre los planos paralelos es aproximadamente 2.14.

Figura 1.53

EJEMPLO 6

Encontrar la distancia entre dos planos paralelos

Los dos planos paralelos dados por $3x - y + 2z - 6 = 0$ y $6x - 2y + 4z + 4 = 0$, se muestran en la figura 1.53. Para encontrar la distancia entre los planos, elija un punto en el primer plano, digamos $(x_0, y_0, z_0) = (2, 0, 0)$. Después, del segundo plano, puede determinar que $a = 6, b = -2, c = 4$ y $d = 4$, y concluir que la distancia es

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\
 &= \frac{|6(2) + (-2)(0) + (4)(0) + 4|}{\sqrt{6^2 + (-2)^2 + 4^2}} \\
 &= \frac{16}{\sqrt{56}} = \frac{8}{\sqrt{14}} \approx 2.14.
 \end{aligned}$$

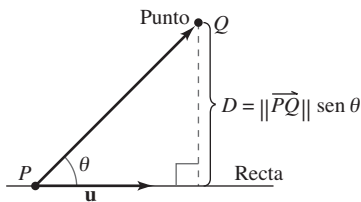
La fórmula para la distancia de un punto a una recta en el espacio se parece a la de la distancia de un punto a un plano, excepto que se reemplaza el producto vectorial por la magnitud del producto vectorial y el vector normal \mathbf{n} por un vector de dirección para la recta.

TEOREMA 1.14 Distancia de un punto a una recta en el espacio

La distancia de un punto Q a una recta en el espacio está dada por

$$D = \frac{\|\vec{PQ} \times \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|}$$

donde \mathbf{u} es un vector de dirección para la recta y P es un punto sobre la recta.



Distancia de un punto a una recta.
Figura 1.54

Demostración En la figura 1.54, sea D la distancia del punto Q a la recta dada. Entonces $D = \|\vec{PQ}\| \sin \theta$, donde θ es el ángulo entre \mathbf{u} y \vec{PQ} . Por la propiedad 2 del teorema 1.8, se tiene $\|\mathbf{u}\| \|\vec{PQ}\| \sin \theta = \|\mathbf{u} \times \vec{PQ}\| = \|\vec{PQ} \times \mathbf{u}\|$. Por consiguiente,

$$D = \|\vec{PQ}\| \sin \theta = \frac{\|\vec{PQ} \times \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|}.$$

Consulte LarsonCalculus.com para ver el video de esta demostración de Bruce Edwards.

EJEMPLO 7

Hallar la distancia de un punto a una recta

Encuentre la distancia del punto $Q(3, -1, 4)$ a la recta dada por

$$x = -2 + 3t, \quad y = -2t \quad \text{y} \quad z = 1 + 4t.$$

Solución Usando los números de dirección 3, -2 y 4, sabe que un vector de dirección de la recta es $\mathbf{u} = \langle 3, -2, 4 \rangle$. Para determinar un punto en la recta, haga $t = 0$ y obtiene $P = (-2, 0, 1)$. Así

$$\vec{PQ} = \langle 3 - (-2), -1 - 0, 4 - 1 \rangle = \langle 5, -1, 3 \rangle$$

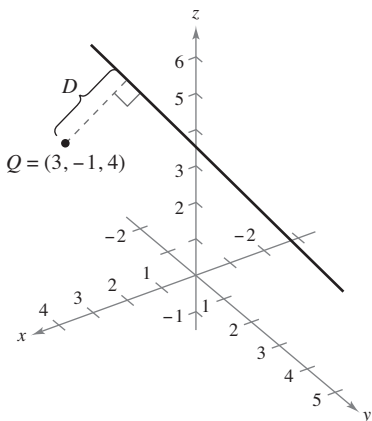
y se puede formar el producto vectorial

$$\vec{PQ} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - 11\mathbf{j} - 7\mathbf{k} = \langle 2, -11, -7 \rangle.$$

Por último, usando el teorema 1.14 se encuentra que la distancia es

$$D = \frac{\|\vec{PQ} \times \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{\sqrt{174}}{\sqrt{29}} = \sqrt{6} \approx 2.45.$$

Vea la figura 1.55.



La distancia entre el punto Q y la recta es $\sqrt{6} \approx 2.45$.
Figura 1.55

1.5 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Verificar los puntos de una recta En los ejercicios 1 y 2, determine si cada punto yace sobre la recta.

1. $x = -2 + t, y = 3t, z = 4 + t$

(a) (0, 6, 6) (b) (2, 3, 5)

2. $\frac{x-3}{2} = \frac{y-7}{8} = z+2$

(a) (7, 23, 0) (b) (1, -1, -3)

Hallar ecuaciones paramétricas y simétricas En los ejercicios 3-8, encuentre conjuntos de (a) ecuaciones paramétricas y (b) ecuaciones simétricas de la recta por el punto paralela al vector o recta dado (si es posible). (Para cada recta, escriba los números de dirección como enteros.)

Punto	Paralela a
3. (0, 0, 0)	$\mathbf{v} = \langle 3, 1, 5 \rangle$
4. (0, 0, 0)	$\mathbf{v} = \langle -2, \frac{5}{2}, 1 \rangle$
5. (-2, 0, 3)	$\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$
6. (-3, 0, 2)	$\mathbf{v} = 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
7. (1, 0, 1)	$x = 3 + 3t, y = 5 - 2t, z = -7 + t$
8. (-3, 5, 4)	$\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-2} = z-3$

Hallar ecuaciones paramétricas y simétricas En los ejercicios 9-12, encuentre conjuntos de (a) ecuaciones paramétricas y (b) ecuaciones simétricas de la recta que pasa por los dos puntos (si es posible). (Para cada recta, escriba los números de dirección como enteros.)

9. (5, -3, -2), $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1)$ 10. (0, 4, 3), (-1, 2, 5)
 11. (7, -2, 6), (-3, 0, 6) 12. (0, 0, 25), (10, 10, 0)

Hallar ecuaciones paramétricas En los ejercicios 13-20, encuentre un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta.

- La recta pasa por el punto (2, 3, 4) y es paralela al plano xz y al plano yz .
- La recta pasa por el punto (-4, 5, 2) y es paralela al plano xy y al plano yz .
- La recta pasa por el punto (2, 3, 4) y es perpendicular al plano dado por $3x + 2y - z = 6$.
- La recta pasa por el punto (-4, 5, 2) y es perpendicular al plano dado por $-x + 2y + z = 5$.
- La recta pasa por el punto (5, -3, -4) y es paralela a $\mathbf{v} = \langle 2, -1, 3 \rangle$.
- La recta pasa por el punto (-1, 4, -3) y es paralela a $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j}$.
- La recta pasa por el punto (2, 1, 2) y es paralela a la recta $x = -t, y = 1 + t, z = -2 + t$.
- La recta pasa por el punto (-6, 0, 8) y es paralela a la recta $x = 5 - 2t, y = -4 + 2t, z = 0$.

Usar ecuaciones paramétricas y simétricas En los ejercicios 21-24, determine las coordenadas de un punto P sobre la recta y un vector \mathbf{v} paralelo a la recta.

21. $x = 3 - t, y = -1 + 2t, z = -2$

22. $x = 4t, y = 5 - t, z = 4 + 3t$

23. $\frac{x-7}{4} = \frac{y+6}{2} = z+2$ 24. $\frac{x+3}{5} = \frac{y}{8} = \frac{z-3}{6}$

Determinar rectas paralelas En los ejercicios 25-28, determine si algunas de las rectas son paralelas o idénticas.

25. $L_1: x = 6 - 3t, y = -2 + 2t, z = 5 + 4t$

$L_2: x = 6t, y = 2 - 4t, z = 13 - 8t$

$L_3: x = 10 - 6t, y = 3 + 4t, z = 7 + 8t$

$L_4: x = -4 + 6t, y = 3 + 4t, z = 5 - 6t$

26. $L_1: x = 3 + 2t, y = -6t, z = 1 - 2t$

$L_2: x = 1 + 2t, y = -1 - t, z = 3t$

$L_3: x = -1 + 2t, y = 3 - 10t, z = 1 - 4t$

$L_4: x = 5 + 2t, y = 1 - t, z = 8 + 3t$

27. $L_1: \frac{x-8}{4} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z+9}{3}$

$L_2: \frac{x+7}{2} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+6}{5}$

$L_3: \frac{x+4}{-8} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+18}{-6}$

$L_4: \frac{x-2}{-2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{1.5}$

28. $L_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{2}$

$L_2: \frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{4}$

$L_3: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{0.5} = \frac{z-3}{1}$

$L_4: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{-1}$

Hallar un punto de intersección En los ejercicios 29-32, determine si las rectas se cortan, y si es así, halle el punto de intersección y el coseno del ángulo de intersección.

29. $x = 4t + 2, y = 3, z = -t + 1$

$x = 2s + 2, y = 2s + 3, z = s + 1$

30. $x = -3t + 1, y = 4t + 1, z = 2t + 4$

$x = 3s + 1, y = 2s + 4, z = -s + 1$

31. $\frac{x}{3} = \frac{y-2}{-1} = z+1, \frac{x-1}{4} = y+2 = \frac{z+3}{-3}$

32. $\frac{x-2}{-3} = \frac{y-2}{6} = z-3, \frac{x-3}{2} = y+5 = \frac{z+2}{4}$

Verificar puntos en un plano En los ejercicios 33 y 34, determine si el plano pasa por cada punto.

33. $x + 2y - 4z - 1 = 0$

(a) $(-7, 2, -1)$ (b) $(5, 2, 2)$

34. $2x + y + 3z - 6 = 0$

(a) $(3, 6, -2)$ (b) $(-1, 5, -1)$

Hallar la ecuación de un plano En los ejercicios 35-40, encuentre una ecuación del plano que pasa por el punto y es perpendicular al vector o recta dado.

Punto	Perpendicular a
35. $(1, 3, -7)$	$\mathbf{n} = \mathbf{j}$
36. $(0, -1, 4)$	$\mathbf{n} = \mathbf{k}$
37. $(3, 2, 2)$	$\mathbf{n} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$
38. $(0, 0, 0)$	$\mathbf{n} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$
39. $(-1, 4, 0)$	$x = -1 + 2t, y = 5 - t, z = 3 - 2t$
40. $(3, 2, 2)$	$\frac{x-1}{4} = y + 2 = \frac{z+3}{-3}$

Hallar una ecuación de un plano En los ejercicios 41-52, encuentre una ecuación del plano.

41. El plano que pasa por $(0, 0, 0)$, $(2, 0, 3)$ y $(-3, -1, 5)$.
 42. El plano que pasa por $(3, -1, 2)$, $(2, 1, 5)$ y $(1, -2, -2)$.
 43. El plano que pasa por $(1, 2, 3)$, $(3, 2, 1)$ y $(-1, -2, 2)$.
 44. El plano que pasa por el punto $(1, 2, 3)$ y es paralelo al plano yz .
 45. El plano que pasa por el punto $(1, 2, 3)$ y es paralelo al plano xy .
 46. El plano contiene el eje y y forma un ángulo de $\pi/6$ con el eje x positivo.
 47. El plano contiene las rectas dadas por

$$\frac{x-1}{-2} = y - 4 = z$$

y

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{-1}$$

48. El plano pasa por el punto $(2, 2, 1)$ y contiene la recta dada por

$$\frac{x}{2} = \frac{y-4}{-1} = z.$$

49. El plano pasa por los puntos $(2, 2, 1)$ y $(-1, 1, -1)$ y es perpendicular al plano $2x - 3y + z = 3$.
 50. El plano pasa por los puntos $(3, 2, 1)$ y $(3, 1, -5)$, y es perpendicular al plano $6x + 7y + 2z = 10$.
 51. El plano pasa por los puntos $(1, -2, -1)$ y $(2, 5, 6)$, y es paralelo al eje x .
 52. El plano pasa por los puntos $(4, 2, 1)$ y $(-3, 5, 7)$, y es paralelo al eje z .

Hallar una ecuación de un plano En los ejercicios 53-56, encuentre una ecuación del plano que contiene todos los puntos equidistantes de los puntos dados.

53. $(2, 2, 0)$, $(0, 2, 2)$ 54. $(1, 0, 2)$, $(2, 0, 1)$

55. $(-3, 1, 2)$, $(6, -2, 4)$ 56. $(-5, 1, -3)$, $(2, -1, 6)$

Comparar planos En los ejercicios 57-62, determine si los planos son paralelos, ortogonales o ninguna de las dos cosas. Si no son ni paralelos ni ortogonales, halle el ángulo de intersección.

57. $5x - 3y + z = 4$

58. $3x + y - 4z = 3$

$x + 4y + 7z = 1$

$-9x - 3y + 12z = 4$

59. $x - 3y + 6z = 4$

60. $3x + 2y - z = 7$

$5x + y - z = 4$

$x - 4y + 2z = 0$

61. $x - 5y - z = 1$

62. $2x - z = 1$

$5x - 25y - 5z = -3$

$4x + y + 8z = 10$

Trazar una gráfica de un plano En los ejercicios 63-70, dibuje una gráfica del plano y señale cualquier intersección.

63. $4x + 2y + 6z = 12$

64. $3x + 6y + 2z = 6$

65. $2x - y + 3z = 4$

66. $2x - y + z = 4$

67. $x + z = 6$

68. $2x + y = 8$

69. $x = 5$

70. $z = 8$

Planos paralelos En los ejercicios 71-74, determine si algunos de los planos son paralelos o idénticos.

71. $P_1: -5x + 2y - 8z = 6$ 72. $P_1: 2x - y + 3z = 8$

$P_2: 15x - 6y + 24z = 17$

$P_2: 3x - 5y - 2z = 6$

$P_3: 6x - 4y + 4z = 9$

$P_3: 8x - 4y + 12z = 5$

$P_4: 3x - 2y - 2z = 4$

$P_4: -4x - 2y + 6z = 11$

73. $P_1: 3x - 2y + 5z = 10$

$P_2: -6x + 4y - 10z = 5$

$P_3: -3x + 2y + 5z = 8$

$P_4: 75x - 50y + 125z = 250$

74. $P_1: -60x + 90y + 30z = 27$

$P_2: 6x - 9y - 3z = 2$

$P_3: -20x + 30y + 10z = 9$

$P_4: 12x - 18y + 6z = 5$

Intersección de planos En los ejercicios 75 y 76, (a) encuentre el ángulo entre los dos planos y (b) halle un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de los planos.

75. $3x + 2y - z = 7$

76. $6x - 3y + z = 5$

$x - 4y + 2z = 0$

$-x + y + 5z = 5$

Intersección de un plano y una recta En los ejercicios 77-80, encuentre el (los) punto(s) de intersección (si los hay) del plano y la recta. Investigue además si la recta se halla en el plano.

77. $2x - 2y + z = 12$, $x - \frac{1}{2} = \frac{y + (3/2)}{-1} = \frac{z + 1}{2}$

78. $2x + 3y = -5$, $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{6}$

79. $2x + 3y = 10, \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-2} = z-3$

80. $5x + 3y = 17, \frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z+2}{5}$

Encontrar la distancia entre un punto y un plano En los ejercicios 81-84, encuentre la distancia del punto al plano.

81. $(0, 0, 0)$ 82. $(0, 0, 0)$
 $2x + 3y + z = 12$ $5x + y - z = 9$

83. $(2, 8, 4)$ 84. $(1, 3, -1)$
 $2x + y + z = 5$ $3x - 4y + 5z = 6$

Encontrar la distancia entre dos planos paralelos En los ejercicios 85-88, verifique que los dos planos son paralelos, y halle la distancia entre ellos.

85. $x - 3y + 4z = 10$ 86. $4x - 4y + 9z = 7$
 $x - 3y + 4z = 6$ $4x - 4y + 9z = 18$

87. $-3x + 6y + 7z = 1$ 88. $2x - 4z = 4$
 $6x - 12y - 14z = 25$ $2x - 4z = 10$

Encontrar la distancia entre un punto y una recta En los ejercicios 89-92, encuentre la distancia del punto a la recta dada por medio del conjunto de ecuaciones paramétricas.

89. $(1, 5, -2); x = 4t - 2, y = 3, z = -t + 1$

90. $(1, -2, 4); x = 2t, y = t - 3, z = 2t + 2$

91. $(-2, 1, 3); x = 1 - t, y = 2 + t, z = -2t$

92. $(4, -1, 5); x = 3, y = 1 + 3t, z = 1 + t$

Encontrar la distancia entre dos rectas paralelas En los ejercicios 93 y 94, verifique que las rectas son paralelas y halle la distancia entre ellas.

93. $L_1: x = 2 - t, y = 3 + 2t, z = 4 + t$
 $L_2: x = 3t, y = 1 - 6t, z = 4 - 3t$

94. $L_1: x = 3 + 6t, y = -2 + 9t, z = 1 - 12t$
 $L_2: x = -1 + 4t, y = 3 + 6t, z = -8t$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

95. **Ecuaciones paramétricas y simétricas.** Dé las ecuaciones paramétricas y simétricas de una recta en el espacio. Describa qué se requiere para hallar estas ecuaciones.

96. **Ecuación estándar de un plano en el espacio** Dé la ecuación estándar de un plano en el espacio. Describa qué se requiere para hallar esta ecuación.

97. **Intersección de dos planos** Describa un método para hallar la recta de intersección entre dos planos.

98. **Planos paralelos y perpendiculares** Describa un método para determinar cuándo dos planos $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, y $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ son (a) paralelos y (b) perpendiculares. Explique su razonamiento.

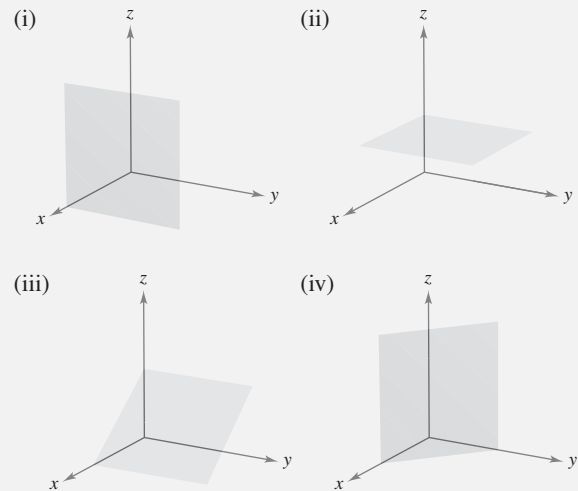
DESARROLLO DE CONCEPTOS (continuación)

99. **Vector normal** Sean L_1 y L_2 rectas no paralelas que no se cortan. ¿Es posible hallar un vector \mathbf{v} distinto de cero tal que \mathbf{v} sea perpendicular a ambos L_1 y L_2 ? Explique su razonamiento.



¿CÓMO LO VE? Relacione la ecuación general con su gráfica. Después indique qué eje o plano de la ecuación es paralelo a

- (a) $ax + by + d = 0$
- (c) $cz + d = 0$
- (b) $ax + d = 0$
- (d) $ax + cz + d = 0$



101. **Modelado de datos** En la tabla siguiente se muestran gastos de consumo personal (en miles de millones de dólares) de diferentes tipos de recreación del 2005 al 2010, donde x es el gasto en parques de atracciones y lugares para acampar, y es el gasto en entretenimiento en vivo (excluyendo deportes) y z es el gasto en espectadores de deportes. (Fuente: Oficina de Análisis Económico EE.UU.)

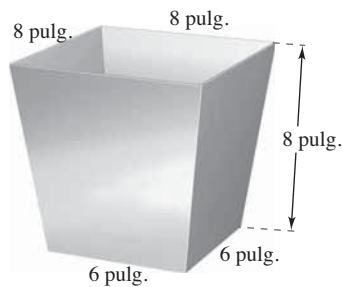
Año	2005	2006	2007	2008	2009	2010
x	36.4	39.0	42.4	44.7	43.0	45.2
y	15.3	16.6	17.4	17.5	17.0	17.3
z	16.4	18.1	20.0	20.5	20.1	21.4


un modelo para los datos está dado por

$0.46x + 0.30y - z = 4.94.$

- (a) Haga un cuarto renglón de la tabla usando el modelo para aproximar z con los valores dados de x y y . Compare las aproximaciones con los valores reales de z .
- (b) Según este modelo, cualquier incremento en el consumo de los dos tipos de recreación x y y correspondería a qué clase de cambio en gastos del tipo de recreación z ?

102. **Diseño industrial** La figura muestra un colector en la parte superior de un montacargas de grano que canaliza el grano a un contenedor. Halle el ángulo entre dos lados adyacentes.



103. **Distancia** Dos insectos se arrastran a lo largo de rectas diferentes en el espacio. En el instante t (en minutos), el primer insecto está en el punto (x, y, z) sobre la recta $x = 6 + t$, $y = 8 - t$, $z = 3 + t$. También en el instante t el segundo insecto está en el punto (x, y, z) sobre la recta $x = 1 + t$, $y = 2 + t$, $z = 2t$. Suponga que las distancias se dan en pulgadas.
- Encuentre la distancia entre los dos insectos en el instante $t = 0$.
-  (b) Use una herramienta de graficación para representar la distancia entre los insectos desde $t = 0$ hasta $t = 10$.
- Use la gráfica del inciso (b), ¿qué se puede concluir acerca de la distancia entre los insectos?
 - ¿Qué tanto se acercan los insectos?
104. **Encontrar una ecuación de una esfera** Encuentre la ecuación estándar de la esfera con el centro en $(-3, 2, 4)$, que es tangente al plano dado por $2x + 4y - 3z = 8$.

105. **Encontrar un punto de intersección** Encuentre el punto de intersección del plano $3x - y + 4z = 7$ con la recta que pasa por $(5, 4, -3)$ y que es perpendicular a este plano.

106. **Encontrar la distancia entre un plano y una recta** Demuestre que el plano $2x - y - 3z = 4$ es paralelo a la recta $x = -2 + 2t$, $y = -1 + 4t$, $z = 4$, y encuentre la distancia entre ambos.

107. **Encontrar un punto de intersección** Encuentre el punto de intersección de la recta que pasa por $(1, -3, 1)$ y $(3, -4, 2)$, y el plano dado por $x - y + z = 2$.

108. **Encontrar ecuaciones paramétricas** Encuentre un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $(1, 0, 2)$ y es paralela al plano dado por $x + y + z = 5$, y perpendicular a la recta $x = t$, $y = 1 + t$, $z = 1 + t$.

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 109-114, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que pruebe que es falso.

109. Si $\mathbf{v} = a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k}$ es cualquier vector en el plano dado por $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, entonces $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.
110. Todo par de rectas en el espacio o se cortan o son paralelas.
111. Dos planos en el espacio o se cortan o son paralelos.
112. Si dos rectas L_1 y L_2 son paralelas a un plano P , entonces L_1 y L_2 son paralelas.
113. Dos planos perpendiculares a un tercer plano en el espacio son paralelos.
114. Un plano y una recta en el espacio se intersecan o son paralelos.

PROYECTO DE TRABAJO

Distancias en el espacio

En esta sección ha visto dos fórmulas para distancia, la distancia de un punto a un plano y la distancia de un punto a una recta. En este proyecto estudiará un tercer problema de distancias, la distancia de dos rectas que se cruzan. Dos rectas en el espacio son *oblicuas* si no son paralelas ni se cortan (vea la figura).

- Considere las siguientes dos rectas en el espacio.

$$L_1: x = 4 + 5t, y = 5 + 5t, z = 1 - 4t$$

$$L_2: x = 4 + s, y = -6 + 8s, z = 7 - 3s$$
 - Demuestre que estas rectas no son paralelas,
 - Demuestre que estas rectas no se cortan, y por consiguiente las rectas se cruzan.
 - Demuestre que las dos rectas están en planos paralelos.
 - Encuentre la distancia entre los planos paralelos del inciso (iii). Ésta es la distancia entre las rectas que se cruzan originales.
- Use el procedimiento del inciso (a) para encontrar la distancia entre las rectas.

$$L_1: x = 2t, y = 4t, z = 6t$$

$$L_2: x = 1 - s, y = 4 + s, z = -1 + s$$

- Use el procedimiento del inciso (a) para encontrar la distancia entre las rectas.

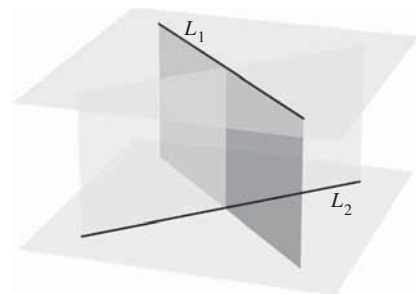
$$L_1: x = 3t, y = 2 - t, z = -1 + t$$

$$L_2: x = 1 + 4s, y = -2 + s, z = -3 - 3s$$

- Desarrolle una fórmula para encontrar la distancia de las rectas oblicuas.

$$L_1: x = x_1 + a_1t, y = y_1 + b_1t, z = z_1 + c_1t$$

$$L_2: x = x_2 + a_2s, y = y_2 + b_2s, z = z_2 + c_2s$$



1.6 Superficies en el espacio

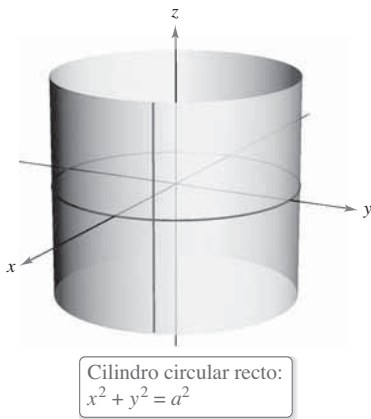
- Reconocer y dar las ecuaciones de superficies cilíndricas.
- Reconocer y dar las ecuaciones de superficies cuadráticas.
- Reconocer y dar las ecuaciones de superficies de revolución.

Superficies cilíndricas

Las primeras cinco secciones de esta unidad contienen la parte vectorial de los conocimientos preliminares necesarios para el estudio del cálculo vectorial y del cálculo en el espacio. En esta y en la próxima sección se estudian superficies en el espacio y sistemas alternativos de coordenadas para el espacio. Ya se han estudiado dos tipos especiales de superficies.

1. Esferas: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$ Sección 1.2
2. Planos: $ax + by + cz + d = 0$ Sección 1.5

Un tercer tipo de superficie en el espacio son las llamadas **superficies cilíndricas**, o simplemente **cilindros**. Para definir un cilindro, considere el cilindro circular recto mostrado en la figura 1.56. Puede imaginar que este cilindro es generado por una recta vertical que se mueve alrededor del círculo $x^2 + y^2 = a^2$ que se encuentra en el plano xy . A este círculo se le llama **curva generadora o directriz** para el cilindro, como se indica en la siguiente definición.



Las rectas generatrices son paralelas al eje z .

Figura 1.56

Definición de un cilindro

Sea C una curva en un plano y sea L una recta no paralela a ese plano. Al conjunto de todas las rectas paralelas a L que cortan a C se le llama **cilindro**. A C se le llama **curva generadora o directriz** del cilindro y a las rectas paralelas se les llama **rectas generatrices**.

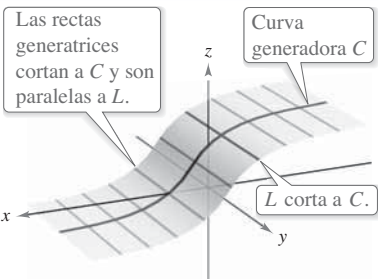
Sin pérdida de generalidad, puede suponer que C se encuentra en uno de los tres planos coordenados. En este texto se restringe la discusión a cilindros *rectos*, es decir, a cilindros cuyas rectas generatrices son perpendiculares al plano coordenado que contiene a C , como se muestra en la figura 1.57. Observe que las rectas generatrices cortan a C y son paralelas a la recta L .

Para el cilindro circular recto que se muestra en la figura 1.56, la ecuación de la curva generadora en el plano xy es

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Para encontrar una ecuación del cilindro, observe que se puede generar cualquiera de las (rectas) generatrices fijando los valores de x y y , y dejando que z tome todos los valores reales. En este caso, el valor de z es arbitrario y, por consiguiente, no está incluido en la ecuación. En otras palabras, la ecuación de este cilindro simplemente es la ecuación de su curva generadora.

$$x^2 + y^2 = a^2$$



Cilindro recto: las rectas generatrices cortan a C y son perpendiculares al plano coordenado que contiene a C .

Figura 1.57

Ecuación de un cilindro en el espacio

Ecuaciones de cilindros

La ecuación de un cilindro cuyas rectas generatrices son paralelas a uno de los ejes coordenados contiene solo las variables correspondientes a los otros dos ejes.

EJEMPLO 1

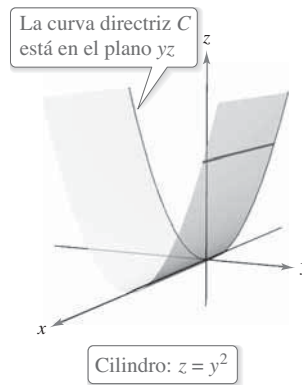
Trazar un cilindro

Trace la superficie representada por cada una de las ecuaciones.

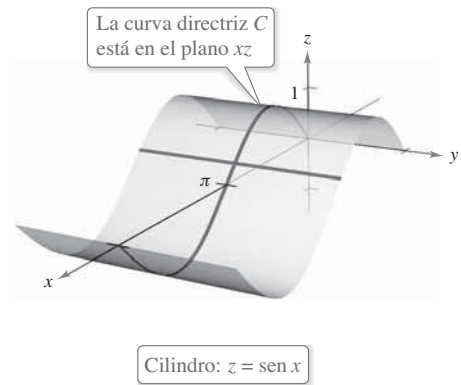
a. $z = y^2$ b. $z = \sin x$, $0 \leq x \leq 2\pi$

Solución

- a. La gráfica es un cilindro cuya curva directriz, $z = y^2$, es una parábola en el plano yz . Las generatrices del cilindro son paralelas al eje x , como se muestra en la figura 1.58(a).
- b. La gráfica es un cilindro generado por la curva del seno en el plano xz . Las generatrices son paralelas al eje y , como se muestra en la figura 1.58(b).



(a) Las generatrices son paralelas al eje x .



(b) Las generatrices son paralelas al eje y .

Figura 1.58

Superficies cuádricas

El cuarto tipo básico de superficies en el espacio son las **superficies cuádricas**. Estas son los análogos tridimensionales de las secciones cónicas.

Superficie cuádrica

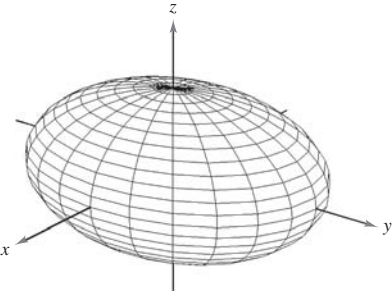
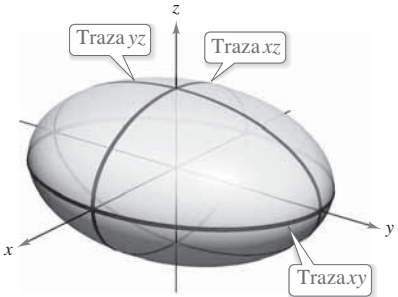
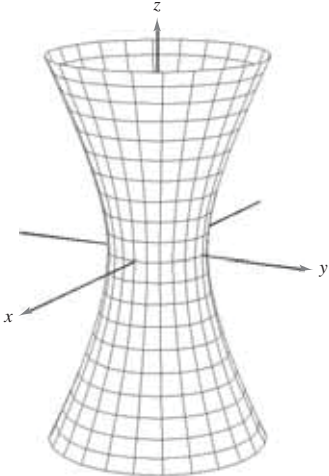
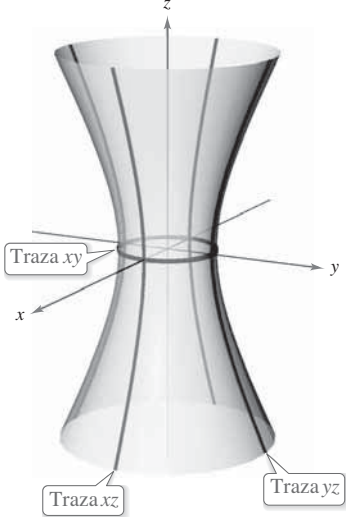
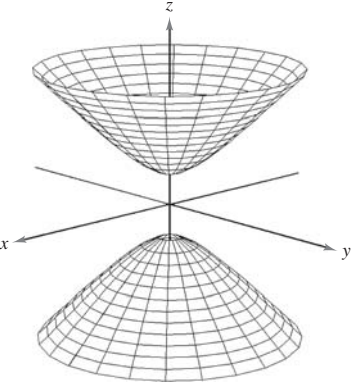
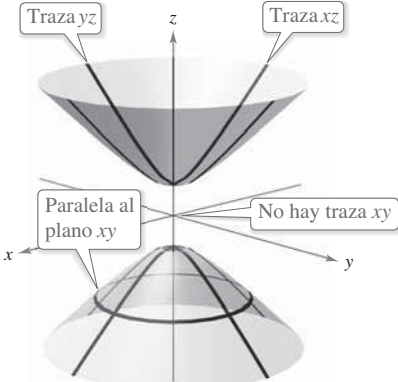
La ecuación de una **superficie cuádrica** en el espacio es una ecuación de segundo grado en tres variables. La **forma general** de la ecuación es

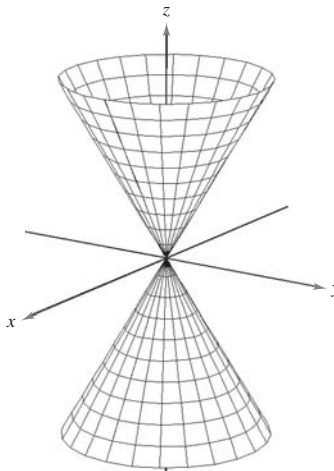
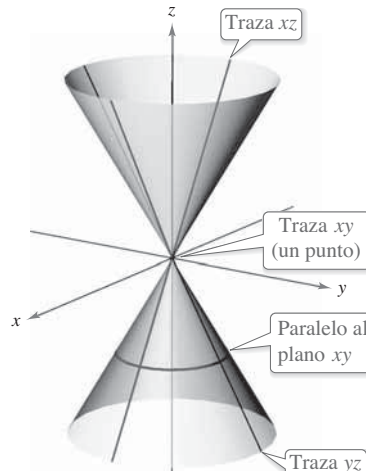
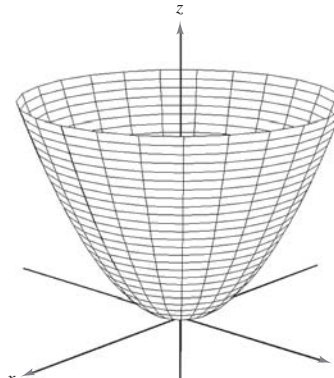
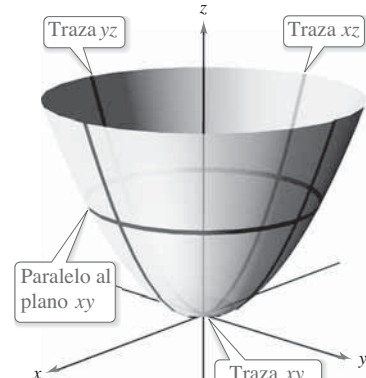
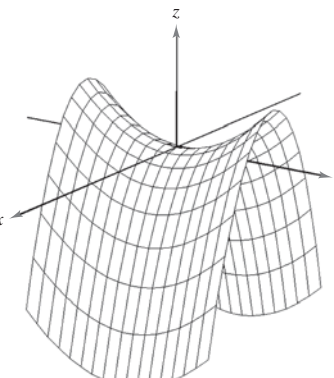
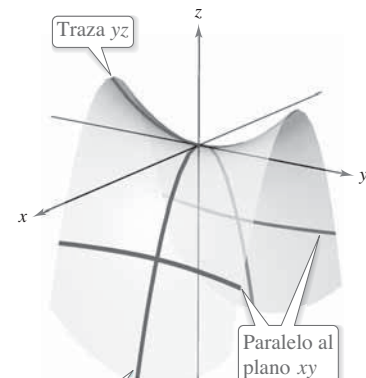
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0.$$

Hay seis tipos básicos de superficies cuádricas: **elipsoide**, **hiperboloide de una hoja**, **hiperboloide de dos hojas**, **cono elíptico**, **paraboloide elíptico** y **paraboloide hiperbólico**.

A la intersección de una superficie con un plano se le llama **traza de la superficie** en el plano. Para visualizar una superficie en el espacio, es útil determinar sus trazas en algunos planos elegidos inteligentemente. Las trazas de las superficies cuádricas son cónicas. Estas trazas, junto con la **forma canónica o estándar** de la ecuación de cada superficie cuádrica, se muestran en la tabla de las siguientes dos páginas.

En la tabla de las siguientes dos páginas se muestra solo una de las varias orientaciones posibles de cada superficie cuádrica. Si la superficie está orientada a lo largo de un eje diferente, su ecuación estándar cambiará consecuentemente, como se ilustra en los ejemplos 2 y 3. El hecho de que los dos tipos de paraboloides tengan una variable elevada a la primera potencia puede ser útil al clasificar las superficies cuádricas. Los otros cuatro tipos de superficies cuádricas básicas tienen ecuaciones que son de *segundo grado* en las tres variables.

	<p style="text-align: center;">Elipsoide</p> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ <p>Traza Elipse Elipse Elipse</p> <p>Plano Paralelo al plano xy Paralelo al plano xz Paralelo al plano yz</p> <p>La superficie es una esfera cuando $a = b = c \neq 0$.</p>	
	<p style="text-align: center;">Hiperboloide de una hoja</p> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ <p>Traza Elipse Hipérbola Hipérbola</p> <p>Plano Paralelo al plano xy Paralelo al plano xz Paralelo al plano yz</p> <p>El eje del hiperboloide corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo.</p>	
	<p style="text-align: center;">Hiperboloide de dos hojas</p> $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ <p>Traza Elipse Hipérbola Hipérbola</p> <p>Plano Paralelo al plano xy Paralelo al plano xz Paralelo al plano yz</p> <p>El eje del hiperboloide corresponde a la variable cuyo coeficiente es positivo. No hay traza en el plano coordenado perpendicular a este eje.</p>	

	<p style="text-align: center;">Cono elíptico</p> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ <p>Traza Plano</p> <p>Elipse Paralelo al plano xy Hipérbola Paralelo al plano xz Hipérbola Paralelo al plano yz</p> <p>El eje del cono corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo. Las trazas en los planos coordenados paralelos a este eje son rectas que se cortan.</p>	
	<p style="text-align: center;">Paraboloide elíptico</p> $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ <p>Traza Plano</p> <p>Elipse Paralelo al plano xy Parábola Paralelo al plano xz Parábola Paralelo al plano yz</p> <p>El eje del paraboloide corresponde a la variable elevada a la primera potencia.</p>	
	<p style="text-align: center;">Paraboloide hiperbólico</p> $z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$ <p>Traza Plano</p> <p>Hipérbola Paralelo al plano xy Parábola Paralelo al plano xz Parábola Paralelo al plano yz</p> <p>El eje del paraboloide corresponde a la variable elevada a la primera potencia.</p>	

Para clasificar una superficie cuádrica, empiece por escribir la superficie en la forma canónica o estándar. Después, determine varias trazas en los planos coordenados o en planos paralelos a los planos coordenados.

EJEMPLO 2 Trazar una superficie cuádrica

Clasifique y dibuje la superficie dada por

$$4x^2 - 3y^2 + 12z^2 + 12 = 0.$$

Solución Empiece por escribir la ecuación en forma canónica o estándar.

$$4x^2 - 3y^2 + 12z^2 + 12 = 0$$

Escriba la ecuación original.

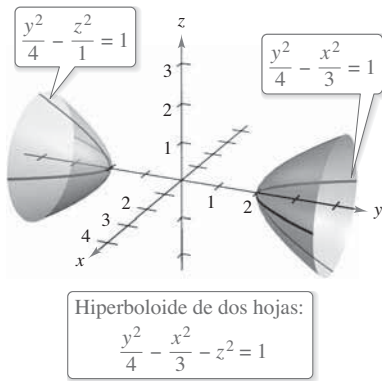
$$\frac{x^2}{-3} + \frac{y^2}{4} - z^2 - 1 = 0$$

Divida entre -12.

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{3} - \frac{z^2}{1} = 1$$

Forma canónica o estándar

De la tabla en las páginas 50 y 51 puede concluir que la superficie es un hiperboloide de dos hojas con el eje y como su eje. Para esbozar la gráfica de esta superficie, conviene hallar las trazas en los planos coordenados.



Traza xy ($z = 0$): $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{3} = 1$

Hipérbola

Traza xz ($y = 0$): $\frac{x^2}{3} + \frac{z^2}{1} = -1$

No hay traza

Traza yz ($x = 0$): $\frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{1} = 1$

Hipérbola

Figura 1.59

La gráfica se muestra en la figura 1.59.

EJEMPLO 3 Trazar una superficie cuádrica

Clasifique y dibuje la superficie dada por

$$x - y^2 - 4z^2 = 0.$$

Solución Como x está elevada solo a la primera potencia, la superficie es un paraboloide. El eje del paraboloide es el eje x . En la forma canónica o estándar la ecuación es

$$x = y^2 + 4z^2.$$

Forma canónica o estándar

Algunas trazas útiles son las siguientes.

Traza xy ($z = 0$): $x = y^2$

Parábola

Traza xz ($y = 0$): $x = 4z^2$

Parábola

Paralelo al plano yz ($x = 4$): $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{1} = 1$

Elipse

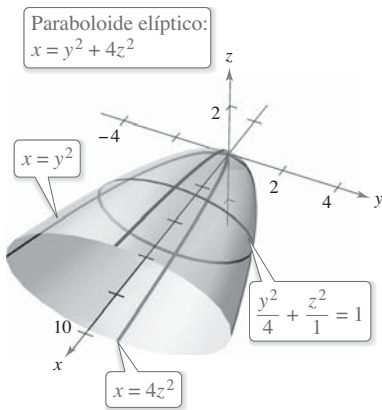


Figura 1.60

La superficie es un paraboloide *elíptico*, como se muestra en la figura 1.60.

Algunas ecuaciones de segundo grado en x , y y z no representan ninguno de los tipos básicos de superficies cuádricas. He aquí dos ejemplos.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

Un único punto

es un único punto, y la gráfica de

$$x^2 + y^2 = 1$$

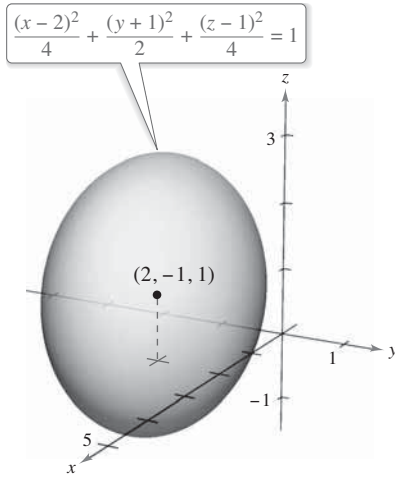
Cilindro recto circular

es un cilindro recto circular.

En el caso de una superficie cuádrica no centrada en el origen, puede formar la ecuación estándar completando cuadrados, como se muestra en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Una superficie cuádrica no centrada en el origen

•••► Consulte *LarsonCalculus.com* para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.



Un elipsoide centrado en $(2, -1, 1)$.

Figura 1.61

Clasifique y dibuje la superficie dada por

$$x^2 + 2y^2 + z^2 - 4x + 4y - 2z + 3 = 0.$$

Solución Empiece por agrupar términos y donde sea posible factorice.

$$x^2 - 4x + 2(y^2 + 2y) + z^2 - 2z = -3$$

Después, al completar el cuadrado de cada variable escriba la ecuación en su forma estándar:

$$(x^2 - 4x + \quad) + 2(y^2 + 2y + \quad) + (z^2 - 2z + \quad) = -3$$

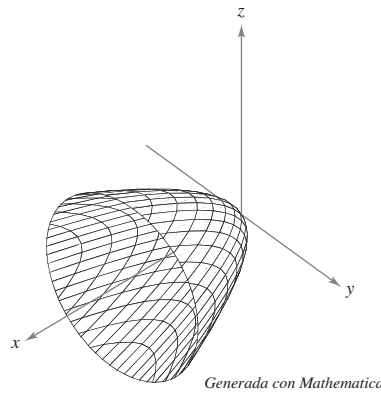
$$(x^2 - 4x + 4) + 2(y^2 + 2y + 1) + (z^2 - 2z + 1) = -3 + 4 + 2 + 1$$

$$(x - 2)^2 + 2(y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 4$$

$$\frac{(x - 2)^2}{4} + \frac{(y + 1)^2}{2} + \frac{(z - 1)^2}{4} = 1$$

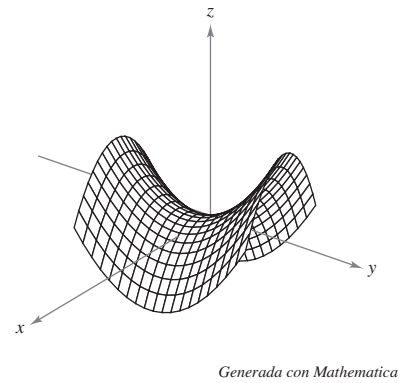
En esta ecuación puede ver que la superficie cuádrica es un elipsoide centrado en el punto $(2, -1, 1)$. Su gráfica se muestra en la figura 1.61.

► **TECNOLOGÍA** Un sistema algebraico por computadora puede ayudar a visualizar una superficie en el espacio.* La mayoría de estos sistemas algebraicos por computadora crean gráficas tridimensionales dibujando varias trazas de la superficie y aplicando una rutina de “línea oculta” que borra las porciones de la superficie situadas detrás de otras. Abajo se muestran dos ejemplos de figuras que se generaron con *Mathematica*.



Paraboloide elíptico

$$x = \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}$$



Paraboloide hiperbólico

$$z = \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{16}$$

Usar una herramienta de graficación para representar una superficie en el espacio requiere práctica. En primer lugar, se debe saber lo suficiente sobre la superficie en cuestión para poder especificar que dé una *vista* representativa de la superficie. También, a menudo se puede mejorar la vista de una superficie girando los ejes. Por ejemplo, se observa que el paraboloide elíptico de la figura se ve desde un punto más “alto” que el utilizado para ver el paraboloide hiperbólico.

*Algunas graficadoras 3-D requieren que se den las superficies mediante ecuaciones paramétricas.

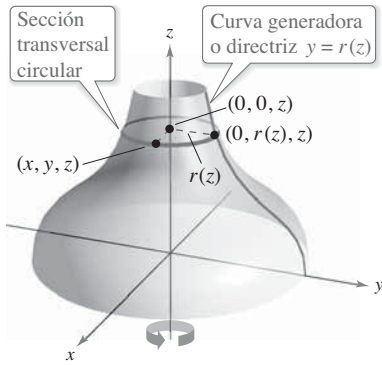


Figura 1.62

Superficies de revolución

El quinto tipo especial de superficie que estudiará recibe el nombre de **superficie de revolución**. Ahora verá un procedimiento para hallar su *ecuación*. Considere la gráfica de la **función radio**

$$y = r(z)$$

Curva generadora o directriz

en el plano yz . Si esta gráfica se gira sobre el eje z , forma una superficie de revolución, como se muestra en la figura 1.62. La traza de la superficie en el plano $z = z_0$ es un círculo cuyo radio es $r(z_0)$ y cuya ecuación es

$$x^2 + y^2 = [r(z_0)]^2.$$

Traza circular en el plano: $z = z_0$

Sustituyendo z_0 por z obtiene una ecuación que es válida para todos los valores de z . De manera similar, puede obtener ecuaciones de superficies de revolución para los otros dos ejes, y los resultados se resumen como sigue.

Superficie de revolución

Si la gráfica de una función radio r se gira sobre uno de los ejes coordenados, la ecuación de la superficie de revolución resultante tiene una de las formas siguientes.

1. Girada sobre el eje x : $y^2 + z^2 = [r(x)]^2$
2. Girada sobre el eje y : $x^2 + z^2 = [r(y)]^2$
3. Girada sobre el eje z : $x^2 + y^2 = [r(z)]^2$

EJEMPLO 5

Hallar una ecuación para una superficie de revolución

Encuentre una ecuación para la superficie de revolución generada al girar (a) la gráfica de $y = 1/z$ en torno al eje z y (b) la gráfica de $9x^2 = y^3$ con respecto al eje y .

Solución

a. Una ecuación para la superficie de revolución generada al girar la gráfica de

$$y = \frac{1}{z}$$

Función radio

en torno al eje z es

$$x^2 + y^2 = [r(z)]^2$$

Girada en torno al eje z

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{1}{z}\right)^2.$$

Sustituir $1/z$ por $r(z)$.

b. Para encontrar una ecuación para la superficie generada al girar la gráfica de $9x^2 = y^3$ en torno al eje y , despeje x en términos de y . Así obtiene

$$x = \frac{1}{3}y^{3/2} = r(y).$$

Función radio

Por tanto, la ecuación para esta superficie es

$$x^2 + z^2 = [r(y)]^2$$

Girada en torno al eje y

$$x^2 + z^2 = \left(\frac{1}{3}y^{3/2}\right)^2$$

Sustituir $\frac{1}{3}y^{3/2}$ por $r(y)$.

$$x^2 + z^2 = \frac{1}{9}y^3.$$

Ecuación de la superficie

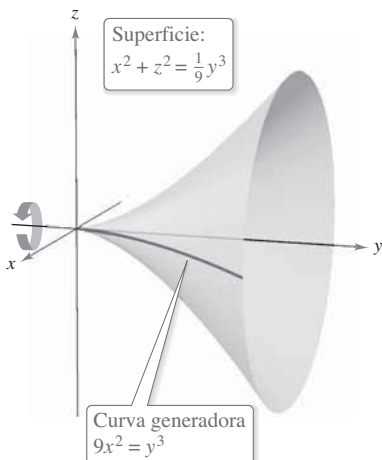


Figura 1.63

La gráfica se muestra en la figura 1.63.

La curva generadora o directriz de una superficie de revolución no es única. Por ejemplo, la superficie

$$x^2 + z^2 = e^{-2y}$$

puede generarse al girar la gráfica de

$$x = e^{-y}$$

en torno al eje y o la gráfica de

$$z = e^{-y}$$

sobre el eje y , como se muestra en la figura 1.64.

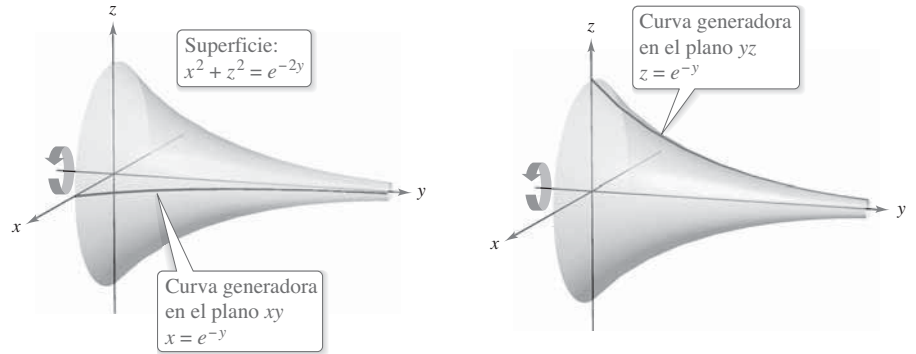


Figura 1.64

EJEMPLO 6

Hallar una curva generadora o directriz

Encuentre una curva generadora o directriz y el eje de revolución de la superficie dada por

$$x^2 + 3y^2 + z^2 = 9.$$

Solución La ecuación tiene una de las formas siguientes.

$$x^2 + y^2 = [r(z)]^2 \quad \text{Girada en torno al eje } z$$

$$y^2 + z^2 = [r(x)]^2 \quad \text{Girada en torno al eje } x$$

$$x^2 + z^2 = [r(y)]^2 \quad \text{Girada en torno al eje } y$$

Como los coeficientes de x^2 y y^2 son iguales, debe elegir la tercera forma y escribir

$$x^2 + z^2 = 9 - 3y^2.$$

El eje y es el eje de revolución. Puede elegir una curva directriz de las trazas siguientes.

$$x^2 = 9 - 3y^2 \quad \text{Traza en el plano } xy$$

o

$$z^2 = 9 - 3y^2. \quad \text{Traza en el plano } yz$$

Por ejemplo, usando la primera traza, la curva generadora es la semielipse dada por

$$x = \sqrt{9 - 3y^2}. \quad \text{Curva generadora}$$

La gráfica de esta superficie se muestra en la figura 1.65.

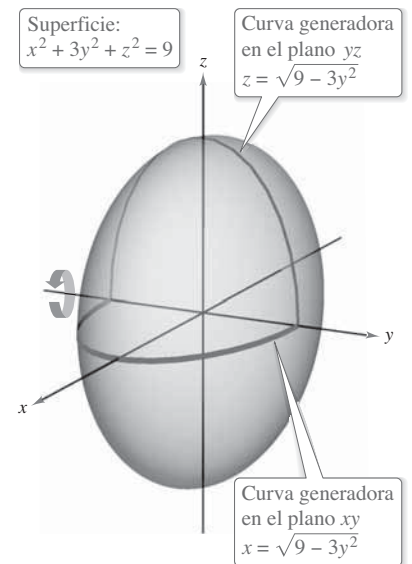
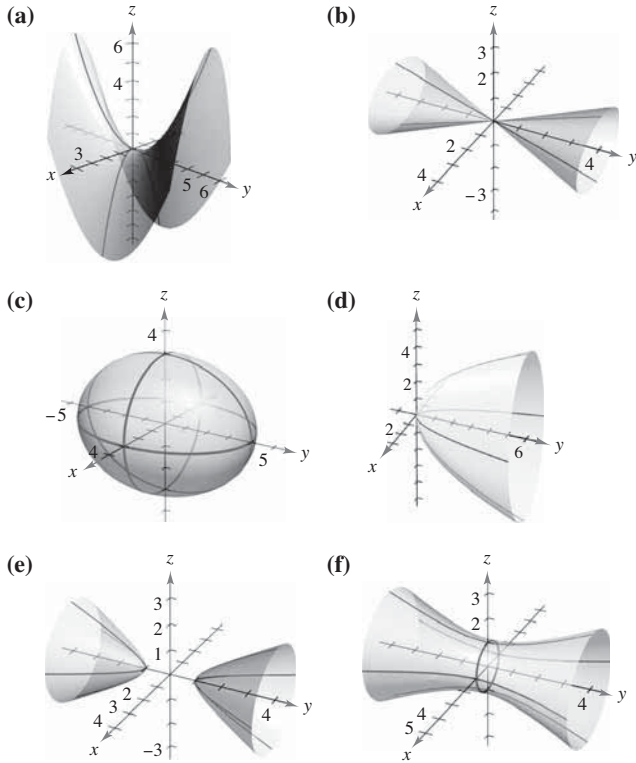


Figura 1.65

1.6 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Correspondencia En los ejercicios 1-6, relacione la ecuación con su gráfica. [Las gráficas están marcadas (a), (b), (c), (d), (e) y (f).]



- | | |
|---|--------------------------------|
| 1. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$ | 2. $15x^2 - 4y^2 + 15z^2 = -4$ |
| 3. $4x^2 - y^2 + 4z^2 = 4$ | 4. $y^2 = 4x^2 + 9z^2$ |
| 5. $4x^2 - 4y + z^2 = 0$ | 6. $4x^2 - y^2 + 4z = 0$ |

Trazar una superficie en el espacio En los ejercicios 7-12, describa y dibuje la superficie.

- | | |
|----------------------|----------------------|
| 7. $y = 5$ | 8. $z = 2$ |
| 9. $y^2 + z^2 = 9$ | 10. $y^2 + z = 6$ |
| 11. $4x^2 + y^2 = 4$ | 12. $y^2 - z^2 = 16$ |

Trazar una superficie cuádrica En los ejercicios 13-24, identifique y dibuje la superficie cuádrica. Use un sistema algebraico por computadora para confirmar su dibujo.

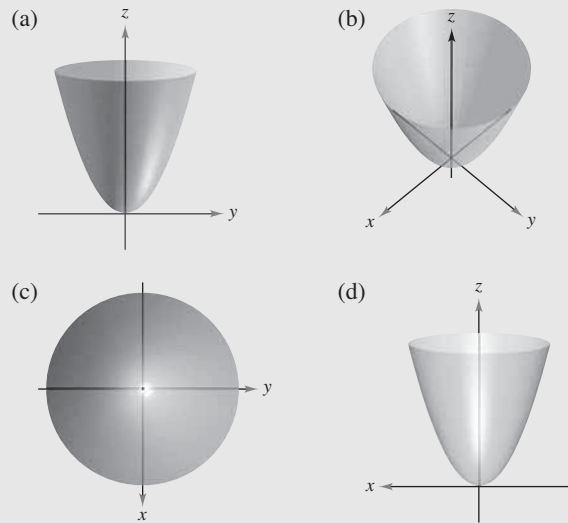
- | | |
|-------------------------------------|--|
| 13. $x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ | 14. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{25} = 1$ |
| 15. $16x^2 - y^2 + 16z^2 = 4$ | 16. $-8x^2 + 18y^2 + 18z^2 = 2$ |
| 17. $4x^2 - y^2 - z^2 = 1$ | 18. $z^2 - x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ |
| 19. $x^2 - y + z^2 = 0$ | 20. $z = x^2 + 4y^2$ |
| 21. $x^2 - y^2 + z = 0$ | 22. $3z = -y^2 + x^2$ |
| 23. $z^2 = x^2 + \frac{y^2}{9}$ | 24. $x^2 = 2y^2 + 2z^2$ |

DESARROLLO DE CONCEPTOS

- Cilindro** Dé la definición de un cilindro.
- Traza de una superficie** ¿Qué es la traza de una superficie? ¿Cómo encuentra una traza?
- Superficies cuádricas** Identifique las seis superficies cuádricas y dé la forma estándar de cada una.
- Clasificar una ecuación** ¿Qué representa la ecuación $z = x^2$ en el plano xz ? ¿Qué representa en el espacio tridimensional?
- Clasificar una ecuación** ¿Qué representa la ecuación $4x^2 + 6y^2 - 3z^2 = 12$ en el plano xy ? ¿Qué representa en el espacio tridimensional?



30. ¿CÓMO LO VE? Las cuatro figuras son gráficas de la superficie cuádrica $z = x^2 + y^2$. Relacione cada una de las cuatro gráficas con el punto en el espacio desde el cual se ve el paraboloides. Los cuatro puntos son $(0, 0, 20)$, $(0, 20, 0)$, $(20, 0, 0)$ y $(10, 10, 20)$.



Encontrar una ecuación de una superficie de revolución En los ejercicios 31-36, encuentre una ecuación para la superficie de revolución generada al girar la curva en el plano coordenado indicado sobre el eje dado.

Ecuación de la curva	Plano coordenado	Eje de revolución
31. $z^2 = 4y$	Plano yz	Eje y
32. $z = 3y$	Plano yz	Eje y
33. $z = 2y$	Plano yz	Eje z

Ecuación de la curva	Plano coordenado	Eje de revolución
34. $2z = \sqrt{4 - x^2}$	Plano xz	Eje x
35. $xy = 2$	Plano xy	Eje x
36. $z = \ln y$	Plano yz	Eje z

Encontrar una curva generadora En los ejercicios 37 y 38, encuentre una ecuación de una curva generadora dada la ecuación de su superficie de revolución.

37. $x^2 + y^2 - 2z = 0$ 38. $x^2 + z^2 = \cos^2 y$

Hallar el volumen de un sólido En los ejercicios 39 y 40, use el método de las capas para encontrar el volumen del sólido que se encuentra debajo de la superficie de revolución y sobre el plano xy .

39. La curva $z = 4x - x^2$ en el plano xz se gira en torno al eje z .
 40. La curva $z = \sin y$ ($0 \leq y \leq \pi$) en el plano yz se gira en torno al eje z .

Analizar una traza En los ejercicios 41 y 42, analice la traza cuando la superficie

$z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}y^2$

se corta con los planos indicados.

41. Encuentre las longitudes de los ejes mayor y menor, y las coordenadas del foco de la elipse generada cuando la superficie es cortada por los planos dados por
 (a) $z = 2$ y (b) $z = 8$.
 42. Encuentre las coordenadas del foco de la parábola formada cuando la superficie se corta con los planos dados por
 (a) $y = 4$ y (b) $x = 2$.

Encontrar una ecuación de una superficie En los ejercicios 43 y 44, encuentre una ecuación de la superficie que satisfaga las condiciones e identifique la superficie.

43. El conjunto de todos los puntos equidistantes del punto $(0, 2, 0)$ y del plano $y = -2$.
 44. El conjunto de todos los puntos equidistantes del punto $(0, 0, 4)$ y del plano xy .

•• **45. Geografía** •••••

Debido a las fuerzas causadas por su rotación, la Tierra es un elipsoide oblongo y no una esfera. El radio ecuatorial es de 3963 millas y el radio polar es de 3950 millas. Halle una ecuación del elipsoide. (Suponga que el centro de la Tierra está en el origen y que la traza formada por el plano corresponde al Ecuador.)



46. **Diseño de máquinas** La parte superior de un buje de caucho, diseñado para absorber las vibraciones en un automóvil, es la superficie de revolución generada al girar la curva

$z = \frac{1}{2}y^2 + 1$

para $0 \leq y \leq 2$ en el plano yz en torno al eje z .

- (a) Encuentre una ecuación de la superficie de revolución.
 (b) Todas las medidas están en centímetros y el buje está fijo en el plano xy . Use el método de las capas para encontrar su volumen.
 (c) El buje tiene un orificio de 1 centímetro de diámetro que pasa por su centro y es paralelo al eje de revolución. Encuentre el volumen del buje de caucho.

47. **Usar un paraboloides hiperbólico** Determine la intersección del paraboloides hiperbólico

$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$

con el plano $bx + ay - z = 0$. (Suponga $a, b > 0$.)

48. **Intersección de superficies** Explique por qué la curva de intersección de las superficies

$x^2 + 3y^2 - 2z^2 + 2y = 4$

y

$2x^2 + 6y^2 - 4z^2 - 3x = 2$

se encuentra en un plano.

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 49-52, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que pruebe que es falso.

49. Una esfera es un elipsoide.
 50. La curva generadora o directriz de una superficie de revolución es única.
 51. Todas las trazas de un elipsoide son elipses.
 52. Todas las trazas de un hiperboloides de una hoja son hiperboloides.
 53. **Piénselo** A continuación se muestran tres tipos de superficies "topológicas" clásicas, la esfera y el toro tienen "interior" y "exterior". ¿Tiene la botella de Klein interior y exterior? Explique.



Esfera



Toro



Botella de Klein



Botella de Klein

Denis Tabler/Shutterstock.com

Ejercicios de repaso

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Escribir vectores en formas diferentes En los ejercicios 1 y 2, sean $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$ y $\mathbf{v} = \overrightarrow{PR}$, (a) escriba \mathbf{u} y \mathbf{v} en la forma de componentes, (b) escriba \mathbf{u} como combinación lineal de vectores \mathbf{i} y \mathbf{j} unitarios estándar, (c) encuentre la magnitud de \mathbf{v} , y (d) encuentre $2\mathbf{u} + \mathbf{v}$.

- $P = (1, 2), Q = (4, 1), R = (5, 4)$
- $P = (-2, -1), Q = (5, -1), R = (2, 4)$

Hallar un vector En los ejercicios 3 y 4, encuentre las componentes del vector \mathbf{v} dada su magnitud y el ángulo que forma con el eje x positivo.

- $\|\mathbf{v}\| = 8, \theta = 60^\circ$
- $\|\mathbf{v}\| = \frac{1}{2}, \theta = 225^\circ$

- Encontrar coordenadas de un punto** Encuentre las coordenadas del punto en el plano xy cuatro unidades a la derecha del plano xz y cinco unidades detrás del plano yz .
- Encontrar coordenadas de un punto** Encuentre las coordenadas del punto localizado en el eje y y siete unidades a la izquierda del plano xz .

Hallar la distancia entre dos puntos en el espacio En los ejercicios 7 y 8, encuentre la distancia entre los puntos.

- $(1, 6, 3), (-2, 3, 5)$
- $(-2, 1, -5), (4, -1, -1)$

Hallar la ecuación de una esfera En los ejercicios 9 y 10, encuentre la ecuación estándar de la esfera.

- Centro: $(3, -2, 6)$; diámetro: 15.
- Puntos terminales de un diámetro: $(0, 0, 4), (4, 6, 0)$.

Hallar la ecuación de una esfera En los ejercicios 11 y 12, complete el cuadrado para dar la ecuación de la esfera en forma canónica o estándar. Encuentre el centro y el radio.

- $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 4 = 0$
- $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 6y - 4z + 34 = 0$

Escribir un vector en formas diferentes En los ejercicios 13 y 14 se dan los puntos inicial y final de un vector, (a) dibuje el segmento de recta dirigido, (b) encuentre la forma componente del vector, (c) escriba el vector usando notación vectorial unitaria estándar y (d) dibuje el vector con su punto inicial en el origen.

- Punto inicial: $(2, -1, 3)$ Punto terminal: $(4, 4, -7)$
- Punto inicial: $(6, 2, 0)$ Punto terminal: $(3, -3, 8)$

Usar vectores para determinar puntos colineales En los ejercicios 15 y 16, utilice vectores para determinar si los puntos son colineales.

- $(3, 4, -1), (-1, 6, 9), (5, 3, -6)$
- $(5, -4, 7), (8, -5, 5), (11, 6, 3)$

17. Encontrar un vector unitario Encuentre un vector unitario en la dirección de $\mathbf{u} = \langle 2, 3, 5 \rangle$.

18. Encontrar un vector unitario Encuentre el vector \mathbf{v} de magnitud 8 en la dirección $\langle 6, -3, 2 \rangle$.

Encontrar productos escalares En los ejercicios 19 y 20, sean $\mathbf{v} = \overrightarrow{PR}$ y $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$, encuentre (a) las componentes de \mathbf{u} y de \mathbf{v} , (b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, y (c) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$.

- $P = (5, 0, 0), Q = (4, 4, 0), R = (2, 0, 6)$
- $P = (2, -1, 3), Q = (0, 5, 1), R = (5, 5, 0)$

Encontrar el ángulo entre dos vectores En los ejercicios 21-24, encuentre el ángulo θ entre los vectores (a) en radianes y (b) en grados.

- $\mathbf{u} = 5[\cos(3\pi/4)\mathbf{i} + \sin(3\pi/4)\mathbf{j}]$
 $\mathbf{v} = 2[\cos(2\pi/3)\mathbf{i} + \sin(2\pi/3)\mathbf{j}]$
- $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$
- $\mathbf{u} = \langle 10, -5, 15 \rangle, \mathbf{v} = \langle -2, 1, -3 \rangle$
- $\mathbf{u} = \langle 1, 0, -3 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, -2, 1 \rangle$

Comparar vectores En los ejercicios 25 y 26, determine si \mathbf{u} y \mathbf{v} son ortogonales, paralelos o ninguna de las dos cosas.

- $\mathbf{u} = \langle 7, -2, 3 \rangle$ $\mathbf{v} = \langle -4, 3, -6 \rangle$
- $\mathbf{u} = \langle -1, 4, 5 \rangle$ $\mathbf{v} = \langle 16, -12, 24 \rangle$

Encontrar la proyección de \mathbf{u} sobre \mathbf{v} En los ejercicios 27-30, determine la proyección de \mathbf{u} sobre \mathbf{v} .

- $\mathbf{u} = \langle 7, 9 \rangle, \mathbf{v} = \langle 1, 5 \rangle$
- $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}, \mathbf{v} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$
- $\mathbf{u} = \langle 1, -1, 1 \rangle, \mathbf{v} = \langle 2, 0, 2 \rangle$
- $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

31. Vectores ortogonales Encuentre dos vectores en direcciones opuestas que sean ortogonales al vector $\mathbf{u} = \langle 5, 6, -3 \rangle$.

32. Trabajo Un objeto es arrastrado 8 pies por el suelo aplicando una fuerza de 75 libras. La dirección de la fuerza es de 30° sobre la horizontal. Encuentre el trabajo realizado.

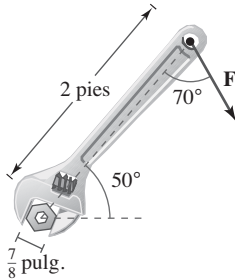
Encontrar productos vectoriales En los ejercicios 33-36, determine (a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, (b) $\mathbf{v} \times \mathbf{u}$ y (c) $\mathbf{v} \times \mathbf{v}$.

- $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ $\mathbf{u} = 6\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
 $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ $\mathbf{v} = -4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
- $\mathbf{u} = \langle 2, -4, -4 \rangle$ $\mathbf{u} = \langle 0, 2, 1 \rangle$
 $\mathbf{v} = \langle 1, 1, 3 \rangle$ $\mathbf{v} = \langle 1, -3, 4 \rangle$

37. Encontrar un vector unitario Encuentre un vector unitario que sea ortogonal tanto a $\mathbf{u} = \langle 2, -10, 8 \rangle$ como a $\mathbf{v} = \langle 4, 6, -8 \rangle$.

38. Área Encuentre el área del paralelogramo que tiene los vectores $\mathbf{u} = \langle 3, -1, 5 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 2, -4, 1 \rangle$ como lados adyacentes.

39. **Momento** Las especificaciones para un tractor establecen que el momento en un perno con tamaño de cabeza de $\frac{7}{8}$ de pulgada no puede exceder 200 pies-libras. Determine la fuerza máxima $\|\mathbf{F}\|$ que puede aplicarse a la llave de la figura.



40. **Volumen** Use el producto escalar triple para encontrar el volumen del paralelepípedo que tiene aristas adyacentes $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{w} = -\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Encontrar ecuaciones paramétricas y simétricas En los ejercicios 41 y 42, encuentre el conjunto de (a) ecuaciones paramétricas y (b) ecuaciones simétricas de la recta a través de los dos puntos. (Para cada recta, dé los números directores como enteros.)

41. $(3, 0, 2)$, $(9, 11, 6)$ 42. $(-1, 4, 3)$, $(8, 10, 5)$

Encontrar ecuaciones paramétricas En los ejercicios 43-46, determine un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta.

43. La recta pasa por el punto $(1, 2, 3)$ y es perpendicular al plano xz .
 44. La recta pasa por el punto $(1, 2, 3)$ y es paralela a la recta dada por $x = y = z$.
 45. La intersección de los planos $3x - 3y - 7z = -4$ y $x - y + 2z = 3$.
 46. La recta pasa por el punto $(0, 1, 4)$ y es perpendicular a $\mathbf{u} = \langle 2, -5, 1 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -3, 1, 4 \rangle$.

Encontrar una ecuación de un plano En los ejercicios 47-50, encuentre una ecuación del plano.

47. El plano pasa por $(-3, -4, 2)$, $(-3, 4, 1)$ y $(1, 1, -2)$.

48. El plano pasa por el punto $(-2, 3, 1)$ y es perpendicular a $\mathbf{n} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

49. El plano contiene las rectas dadas por

$$\frac{x-1}{-2} = y = z + 1 \quad \text{y} \quad \frac{x+1}{-2} = y - 1 = z - 2.$$

50. El plano pasa por los puntos $(5, 1, 3)$ y $(2, -2, 1)$, y es perpendicular al plano $2x + y - z = 4$.

51. **Distancia** Encuentre la distancia del punto $(1, 0, 2)$ al plano $2x - 3y + 6z = 6$.

52. **Distancia** Encuentre la distancia del punto $(3, -2, 4)$ al plano $2x - 5y + z = 10$.

53. **Distancia** Encuentre la distancia de los planos $5x - 3y + z = 2$ y $5x - 3y + z = -3$.

54. **Distancia** Encuentre la distancia del punto $(-5, 1, 3)$ a la recta dada por $x = 1 + t$, $y = 3 - 2t$ y $z = 5 - t$.

Trazar una superficie en el espacio En los ejercicios 55-64, describa y dibuje la superficie.

55. $x + 2y + 3z = 6$

56. $y = z^2$

57. $y = \frac{1}{2}z$

58. $y = \cos z$

59. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$

60. $16x^2 + 16y^2 - 9z^2 = 0$

61. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} + z^2 = -1$

62. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{100} = 1$

63. $x^2 + z^2 = 4$

64. $y^2 + z^2 = 16$

65. **Superficie de revolución** Encuentre una ecuación para la superficie de revolución generada al girar la curva $z^2 = 2y$ en el plano yz en torno del eje y .

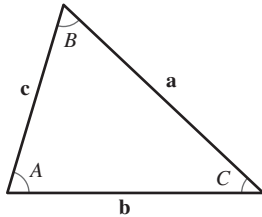
66. **Superficie de revolución** Encuentre una ecuación para la superficie de revolución generada al girar la curva $2x + 3z = 1$ en el plano xz en torno del eje x .

Solución de problemas

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.


1. **Demostración Utilizando vectores, demuestre la ley de los senos:** si a, b y c son los tres lados del triángulo de la figura, entonces

$$\frac{\text{sen } A}{\|a\|} = \frac{\text{sen } B}{\|b\|} = \frac{\text{sen } C}{\|c\|}.$$

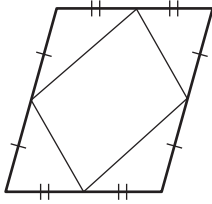


2. **Usar una ecuación** Considere la función

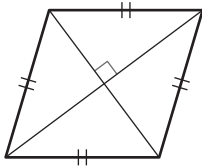
$$f(x) = \int_0^x \sqrt{t^4 + 1} dt.$$

-  (a) Use una herramienta de graficación para representar la función en el intervalo $-2 \leq x \leq 2$.
 (b) Encuentre un vector unitario paralelo a la gráfica de f en el punto $(0, 0)$.
 (c) Encuentre un vector unitario perpendicular a la gráfica de f en el punto $(0, 0)$.
 (d) Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(0, 0)$.


3. **Demostración** Utilizando vectores, demuestre que los segmentos de recta que unen los puntos medios de los lados de un paralelogramo forman un paralelogramo (vea la figura).



4. **Demostración** Utilizando vectores, demuestre que las diagonales de un rombo son perpendiculares (vea la figura).



5. **Distancia**

- (a) Encuentre la distancia más corta entre el punto $Q(2, 0, 0)$ y la recta determinada por los puntos $P_1(0, 0, 1)$ y $P_2(0, 1, 2)$.
 (b) Encuentre la distancia más corta entre el punto $Q(2, 0, 0)$ y el segmento de recta que une los puntos $P_1(0, 0, 1)$ y $P_2(0, 1, 2)$.

6. **Vectores ortogonales** Sea P_0 un punto en el plano con vector normal \mathbf{n} . Describa el conjunto de puntos P en el plano para los que $(\mathbf{n} + \overrightarrow{PP_0})$ es el ortogonal a $(\mathbf{n} - \overrightarrow{PP_0})$.

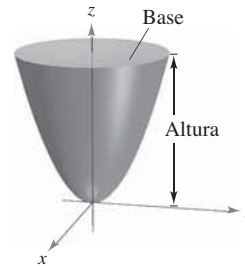
7. **Volumen**

- (a) Encuentre el volumen del sólido limitado abajo por el paraboloide $z = x^2 + y^2$, y arriba por el plano $z = 1$.
 (b) Encuentre el volumen del sólido limitado abajo por el paraboloide elíptico

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

y arriba por el plano $z = k$, donde $k > 0$.

- (c) Demuestre que el volumen del sólido del inciso (b) es igual a la mitad del producto del área de la base por la altura (vea la figura).



8. **Volumen**

- (a) Use el método de los discos para encontrar el volumen de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.
 (b) Encuentre el volumen del elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

9. **Demostración** Demuestre la propiedad siguiente del producto vectorial.

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times (\mathbf{w} \times \mathbf{z}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{z})\mathbf{w} - (\mathbf{u} \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{z}$$

-  10. **Usar ecuaciones paramétricas** Considere la recta dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = -t + 3, \quad y = \frac{1}{2}t + 1, \quad z = 2t - 1$$

y el punto para $(4, 3, s)$ para todo número real s .

- (a) Dé la distancia entre el punto y la recta como una función de s .
 (b) Use una herramienta de graficación para representar la función del inciso (a). Use la gráfica para encontrar un valor de s tal que la distancia entre el punto y la recta sea mínima.
 (c) Use el *zoom* de una herramienta de graficación para ampliar varias veces la gráfica del inciso (b). ¿Parece que la gráfica tenga asíntotas oblicuas? Explique. Si parece tener asíntotas oblicuas, encuéntrelas.

11. **Espiro** Una pelota que pesa 1 libra y está sujeta por una cuerda a un poste, es lanzada en dirección opuesta al poste

por una fuerza horizontal \mathbf{u} que hace que la cuerda forme un ángulo de θ grados con el poste (vea la figura).

- (a) Determine la tensión resultante en la cuerda y la magnitud de \mathbf{u} cuando $\theta = 30^\circ$.
- (b) Dé la tensión T de la cuerda y la magnitud de \mathbf{u} como funciones de θ . Determine los dominios de las funciones.
- (c) Use una herramienta de graficación para completar la tabla.

θ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
T							
$\ \mathbf{u}\ $							

- (d) Use una herramienta de graficación para representar las dos funciones para $0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$.
- (e) Compare T y $\|\mathbf{u}\|$ a medida que θ se aumenta.
- (f) Encuentre (si es posible) $\lim_{\theta \rightarrow \pi/2^-} T$ y $\lim_{\theta \rightarrow \pi/2^-} \|\mathbf{u}\|$. ¿Son los resultados que esperaba? Explique.

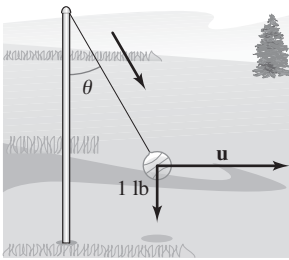


Figura para 13

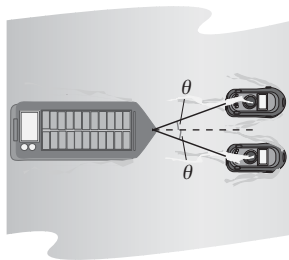


Figura para 14

12. Remolcar Una barcaza cargada es jalada por dos lanchas remolcadoras, y la magnitud de la resultante es de 6000 libras dirigidas a lo largo del eje de la barcaza (vea la figura). Cada cuerda del remolque forma un ángulo de θ grados con el eje de la barcaza.

- (a) Determine la tensión de las cuerdas del remolque si $\theta = 20^\circ$.
- (b) Dé la tensión T en cada cuerda como una función de θ . Determine el dominio de la función.
- (c) Use una herramienta de graficación para completar la tabla.

θ	10°	20°	30°	40°	50°	60°
T						

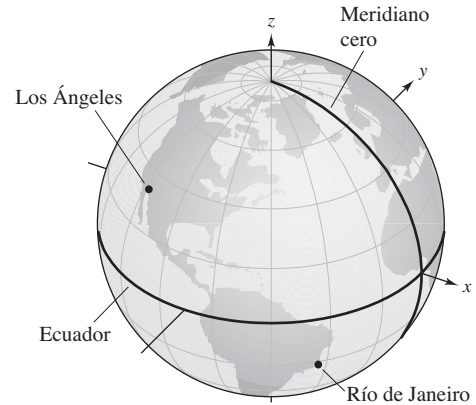
- (d) Use una herramienta de graficación para representar la función de tensión.
- (e) Explique por qué la tensión aumenta a medida que θ aumenta.

13. Demostración Considere los vectores $\mathbf{u} = \langle \cos \alpha, \sin \alpha, 0 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle \cos \beta, \sin \beta, 0 \rangle$, donde $\alpha > \beta$. Halle el producto vectorial de los vectores y use el resultado para demostrar la identidad

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

14. Sistema longitud-latitud Los Ángeles se localiza a 34.05° de latitud norte y 118.24° de longitud oeste, y Río de

Janeiro, Brasil, se localiza a 22.90° de latitud sur y 43.23° de longitud oeste (vea la figura). Suponga que la Tierra es esférica y tiene un radio de 4000 millas.



- (a) Encuentre las coordenadas esféricas para la ubicación de cada ciudad.
- (b) Encuentre las coordenadas rectangulares para la ubicación de cada ciudad.
- (c) Encuentre el ángulo (en radianes) entre los vectores del centro de la Tierra a cada ciudad.
- (d) Encuentre la distancia s del círculo máximo entre las ciudades. (Sugerencia: $s = r\theta$.)
- (e) Repita los incisos (a) a (d) con las ciudades de Boston, localizada a 42.36° latitud norte y 71.06° longitud oeste, y Honolulu, localizada a 21.31° latitud norte y 157.86° longitud oeste.

15. Distancia entre un punto y un plano Considere el plano que pasa por los puntos P, R y S . Demuestre que la distancia de un punto Q a este plano es

$$\text{Distancia} = \frac{|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}{\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|}$$

donde $\mathbf{u} = \overrightarrow{PR}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{PS}$ y $\mathbf{w} = \overrightarrow{PQ}$.

16. Distancia entre planos paralelos Demuestre que la distancia entre los planos paralelos

$$ax + by + cz + d_1 = 0 \quad \text{y} \quad ax + by + cz + d_2 = 0$$

es

$$\text{Distancia} = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

17. Intersección de planos Demuestre que la curva de intersección del plano $z = 2y$, y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ es una elipse.

18. Álgebra vectorial Lea el artículo "Tooth Tables: Solution of a Dental Problem by Vector Algebra", de Gary Hosler Meisters, en *Mathematics Magazine*. (Para ver este artículo, vaya a *MathArticles.com*.) Después escriba un párrafo que explique cómo se pueden usar los vectores y el álgebra vectorial en la construcción de incrustaciones dentales.

Curvas planas, ecuaciones paramétricas y coordenadas polares

- 2.1 Curvas planas y ecuaciones paramétricas
- 2.2 Ecuaciones paramétricas y cálculo
- 2.3 Coordenadas polares y gráficas polares
- 2.4 Área y longitud de arco en coordenadas polares



Radiación de una antena



Arte anamórfico



Arquitectura



El cometa Halley

2.1 Curvas planas y ecuaciones paramétricas

- Trazar la gráfica de una curva dada por un conjunto de ecuaciones paramétricas.
- Eliminar el parámetro en un conjunto de ecuaciones paramétricas.
- Hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas para representar una curva.
- Entender dos problemas clásicos del cálculo: el problema de la tautocrona y el problema de la braquistocrona.

Curvas planas y ecuaciones paramétricas

Hasta ahora se ha representado una gráfica mediante una sola ecuación con *dos* variables. En esta sección se estudiarán situaciones en las que se emplean *tres* variables para representar una curva en el plano.

Considere la trayectoria que recorre un objeto lanzado al aire con un ángulo de 45°. Si la velocidad inicial del objeto es 48 pies por segundo, el objeto recorre la trayectoria parabólica dada por

$$y = -\frac{x^2}{72} + x \quad \text{Ecuación rectangular}$$

como se muestra en la figura 2.1. Sin embargo, esta ecuación no proporciona toda la información. Si bien dice *dónde* se encuentra el objeto, no dice *cuándo* se encuentra en un punto dado (x, y) . Para determinar este instante, se introduce una tercera variable t , conocida como **parámetro**. Expresando x y y como funciones de t , se obtienen las **ecuaciones paramétricas**

$$x = 24\sqrt{2}t \quad \text{Ecuación paramétrica para } x$$

y

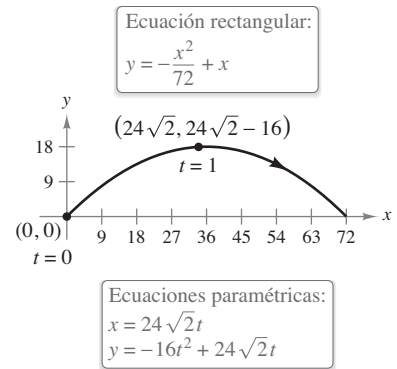
$$y = -16t^2 + 24\sqrt{2}t. \quad \text{Ecuación paramétrica para } y$$

A partir de este conjunto de ecuaciones se puede determinar que en el instante $t = 0$ el objeto se encuentra en el punto $(0, 0)$. De manera semejante, en el instante $t = 1$ el objeto está en el punto

$$(24\sqrt{2}, 24\sqrt{2} - 16)$$

y así sucesivamente. (Más adelante, en la sección 3.3, se estudiará un método para determinar este conjunto particular de ecuaciones paramétricas, las ecuaciones de movimiento.)

En este problema particular de movimiento, x y y son funciones continuas de t , y a la trayectoria resultante se le conoce como **curva plana**.



Movimiento curvilíneo: dos variables de posición y una de tiempo.

Figura 2.1

- **COMENTARIO** Algunas veces es importante distinguir entre una gráfica (conjunto de puntos) y una curva (los puntos junto con las ecuaciones paramétricas que los definen). Cuando sea importante hacer esta distinción, se hará de manera explícita. Cuando no sea importante se empleará C para representar la gráfica o la curva, indistintamente.

Definición de una curva plana

Si f y g son funciones continuas de t en el intervalo I , entonces a las ecuaciones

$$x = f(t) \quad y = g(t)$$

se les llama **ecuaciones paramétricas**, y a t se le llama el **parámetro**. Al conjunto de puntos (x, y) que se obtiene cuando t varía sobre el intervalo I se le llama la **gráfica** de las ecuaciones paramétricas. A las ecuaciones paramétricas y a la gráfica, juntas, es a lo que se llama una **curva plana**, que se denota por C .



Cuando se dibuja (a mano) una curva dada por un conjunto de ecuaciones paramétricas, se trazan puntos en el plano xy . Cada conjunto de coordenadas (x, y) está determinado por un valor elegido para el parámetro t . Al trazar los puntos resultantes de valores crecientes de t , la curva se va trazando en una dirección específica. A esto se le llama la **orientación** de la curva.

EJEMPLO 1 Trazar una curva

Trace la curva dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = f(t) = t^2 - 4$$

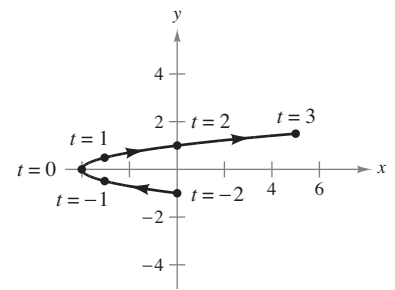
y

$$y = g(t) = \frac{t}{2}$$

donde $-2 \leq t \leq 3$.

Solución Para valores de t en el intervalo dado, obtiene, a partir de las ecuaciones paramétricas, los puntos (x, y) que se muestran en la tabla.

t	-2	-1	0	1	2	3
x	0	-3	-4	-3	0	5
y	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$



Ecuaciones paramétricas:
 $x = t^2 - 4$ y $y = \frac{t}{2}, -2 \leq t \leq 3$

Figura 2.2

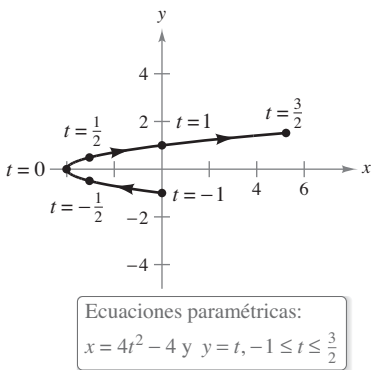
Al trazar estos puntos en orden de valores crecientes de t y usando la continuidad de f y de g obtiene la curva C que se muestra en la figura 2.2. Debe observar las flechas sobre la curva que indican su orientación conforme t aumenta de -2 a 3 .

De acuerdo con el criterio de la recta vertical, puede ver que la gráfica mostrada en la figura 2.2 no define y en función de x . Esto pone de manifiesto una ventaja de las ecuaciones paramétricas: pueden emplearse para representar gráficas más generales que las gráficas de funciones.

A menudo ocurre que dos conjuntos distintos de ecuaciones paramétricas tienen la misma gráfica. Por ejemplo, el conjunto de ecuaciones paramétricas

$$x = 4t^2 - 4 \quad y = t, \quad -1 \leq t \leq \frac{3}{2}$$

tiene la misma gráfica que el conjunto dado en el ejemplo 1 (vea la figura 2.3). Sin embargo, al comparar los valores de t en las figuras 2.2 y 2.3, se ve que la segunda gráfica se traza con mayor *rapidez* (considerando t como tiempo) que la primera gráfica. Por tanto, en las aplicaciones pueden emplearse distintas ecuaciones paramétricas para representar las diversas *rapideces* a las que los objetos recorren una trayectoria determinada.



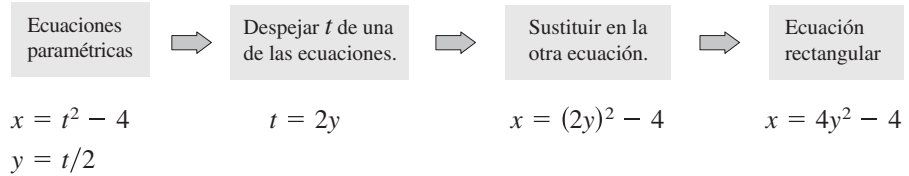
Ecuaciones paramétricas:
 $x = 4t^2 - 4$ y $y = t, -1 \leq t \leq \frac{3}{2}$

Figura 2.3

- **TECNOLOGÍA** La mayoría de las herramientas de graficación cuenta con un modo *paramétrico* de graficación. Se puede emplear uno de estos dispositivos para confirmar las gráficas que se muestran en las figuras 2.2 y 2.3. ¿Representa la curva dada por las ecuaciones paramétricas
- $$x = 4t^2 - 8t \quad y = 1 - t, \quad -\frac{1}{2} \leq t \leq 2$$
- la misma gráfica que la mostrada en las figuras 2.2 y 2.3? ¿Qué se observa respecto de la *orientación* de esta curva?

Eliminación del parámetro

Al hecho de encontrar la ecuación rectangular que representa la gráfica de un conjunto de ecuaciones paramétricas se le llama **eliminación del parámetro**. Por ejemplo, el parámetro del conjunto de ecuaciones paramétricas del ejemplo 1 se puede eliminar como sigue.



Una vez eliminado el parámetro, se ve que la ecuación $x = 4y^2 - 4$ representa una parábola con un eje horizontal y vértice en $(-4, 0)$, como se ilustra en la figura 2.2.

El rango de x y y implicado por las ecuaciones paramétricas puede alterarse al pasar a la forma rectangular. En esos casos el dominio de la ecuación rectangular debe ajustarse de manera que su gráfica coincida con la gráfica de las ecuaciones paramétricas. En el ejemplo siguiente se muestra esta situación.

EJEMPLO 2 Ajustar el dominio

Dibuje la curva representada por las ecuaciones

$$x = \frac{1}{\sqrt{t+1}} \quad y = \frac{t}{t+1}, \quad t > -1$$

eliminando el parámetro y ajustando el dominio de la ecuación rectangular resultante.

Solución Para empezar despeje t de una de las ecuaciones paramétricas. Por ejemplo, puede despejar t de la primera ecuación.

$$x = \frac{1}{\sqrt{t+1}} \quad \text{Ecuación paramétrica para } x$$

$$x^2 = \frac{1}{t+1} \quad \text{Eleve al cuadrado cada lado.}$$

$$t+1 = \frac{1}{x^2}$$

$$t = \frac{1}{x^2} - 1$$

$$t = \frac{1-x^2}{x^2} \quad \text{Despeje } t.$$

Sustituyendo ahora en la ecuación paramétrica para y , obtiene

$$y = \frac{t}{t+1} \quad \text{Ecuación paramétrica para } y$$

$$y = \frac{(1-x^2)/x^2}{[(1-x^2)/x^2] + 1} \quad \text{Sustituya } (1-x^2)/x^2 \text{ para } t.$$

$$y = 1 - x^2. \quad \text{Simplifique.}$$

La ecuación rectangular, $y = 1 - x^2$, está definida para todos los valores de x . Sin embargo, en la ecuación paramétrica para x se ve que la curva solo está definida para $t > -1$. Esto implica que el dominio de x debe restringirse a valores positivos, como se ilustra en la figura 2.4.

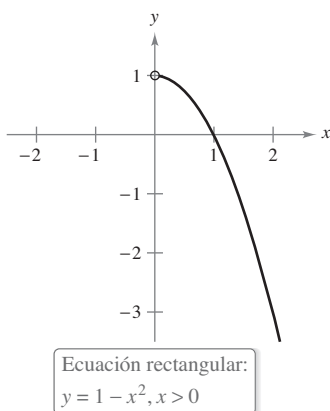
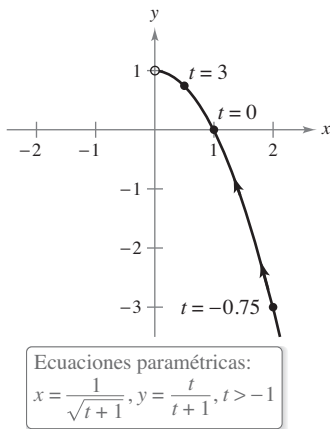


Figura 2.4

En un conjunto de ecuaciones paramétricas, el parámetro no necesariamente representa el tiempo. El siguiente ejemplo emplea un ángulo como parámetro.

EJEMPLO 3**Emplear trigonometría para eliminar un parámetro**

...► Consulte *LarsonCalculus.com* para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Dibuje la curva representada por

$$x = 3 \cos \theta \quad y = 4 \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

al eliminar el parámetro y hallar la ecuación rectangular correspondiente.

Solución Para empezar despeje $\cos \theta$ y $\sin \theta$ de las ecuaciones dadas.

$$\cos \theta = \frac{x}{3} \quad \text{Despeje } \cos \theta.$$

y

$$\sin \theta = \frac{y}{4} \quad \text{Despeje } \sin \theta.$$

A continuación, haga uso de la identidad

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

para formar una ecuación en la que solo aparezcan x y y .

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad \text{Identidad trigonométrica}$$

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1 \quad \text{Sustituya.}$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad \text{Ecuación rectangular}$$

En esta ecuación rectangular puede verse que la gráfica es una elipse centrada en $(0, 0)$, con vértices en $(0, 4)$ y $(0, -4)$ y eje menor de longitud $2b = 6$, como se muestra en la figura 2.5. Observe que la elipse está trazada en sentido *contrario al de las manecillas del reloj*, ya que θ va de 0 a 2π .

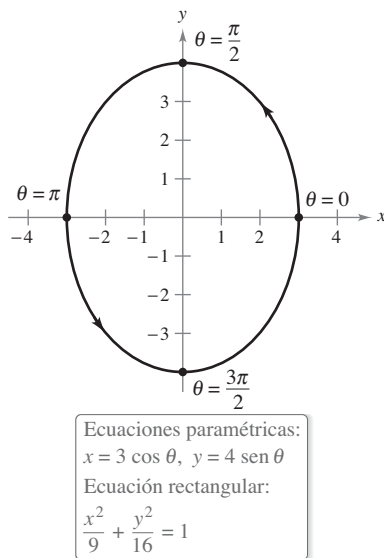


Figura 2.5

- **TECNOLOGÍA** Emplee
- una herramienta de graficación
 - en modo *paramétrico*
 - para elaborar las gráficas de
 - varias elipses.

El empleo de la técnica presentada en el ejemplo 3 permite concluir que la gráfica de las ecuaciones paramétricas

$$x = h + a \cos \theta \quad y = k + b \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

es una elipse (trazada en sentido contrario al de las manecillas del reloj) dada por

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1.$$

La gráfica de las ecuaciones paramétricas

$$x = h + a \sin \theta \quad y = k + b \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

también es una elipse (trazada en sentido de las manecillas del reloj) dada por

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1.$$

En los ejemplos 2 y 3 es importante notar que la eliminación del parámetro es principalmente una *ayuda para trazar la curva*. Si las ecuaciones paramétricas representan la trayectoria de un objeto en movimiento, la gráfica sola no es suficiente para describir el movimiento del objeto. Se necesitan las ecuaciones paramétricas que informan sobre la *posición, dirección y rapidez* en un instante determinado.

Hallar ecuaciones paramétricas

Los primeros tres ejemplos de esta sección ilustran técnicas para dibujar la gráfica que representa un conjunto de ecuaciones paramétricas. Ahora se investigará el problema inverso. ¿Cómo determinar un conjunto de ecuaciones paramétricas para una gráfica o una descripción física dada? Por el ejemplo 1 ya se sabe que tal representación no es única. Esto se demuestra más ampliamente en el ejemplo siguiente, en el que se encuentran dos representaciones paramétricas diferentes para una gráfica dada.

EJEMPLO 4

Hallar las ecuaciones paramétricas

Halle un conjunto de ecuaciones paramétricas para representar la gráfica de $y = 1 - x^2$, usando cada uno de los parámetros siguientes.

- a. $t = x$ b. La pendiente $m = \frac{dy}{dx}$ en el punto (x, y)

Solución

- a. Haciendo $x = t$ obtiene las ecuaciones paramétricas

$$x = t \quad y = 1 - x^2 = 1 - t^2.$$

- b. Para expresar x y y en términos del parámetro m , puede proceder como sigue.

$$m = \frac{dy}{dx}$$

$$m = -2x$$

Derive $y = 1 - x^2$.

$$x = -\frac{m}{2}$$

Despeje x .

Con esto obtiene una ecuación paramétrica para x . Para obtener una ecuación paramétrica para y , en la ecuación original sustituya x por $-m/2$.

$$y = 1 - x^2$$

Escriba la ecuación rectangular original.

$$y = 1 - \left(-\frac{m}{2}\right)^2$$

Sustituya x por $-m/2$.

$$y = 1 - \frac{m^2}{4}$$

Simplifique.

Por tanto, las ecuaciones paramétricas son

$$x = -\frac{m}{2} \quad y = 1 - \frac{m^2}{4}.$$

En la figura 2.6 observe que la orientación de la curva resultante es de derecha a izquierda, determinada por la dirección de los valores crecientes de la pendiente m . En el inciso (a), la curva tenía la orientación opuesta. ■

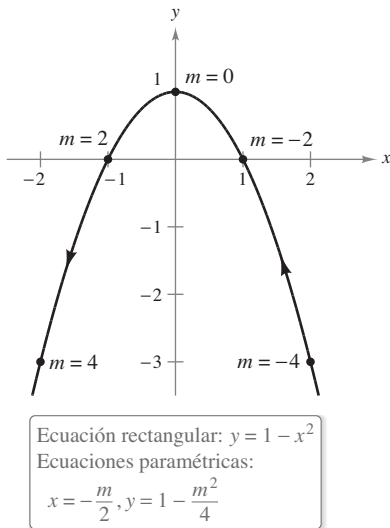


Figura 2.6

■ PARA INFORMACIÓN ADICIONAL

Para información adicional acerca de otros métodos para encontrar ecuaciones paramétricas, vea el artículo “Finding Rational Parametric Curves of Relative Degree One or Two”, de Dave Boyles, en *The College Mathematics Journal*. Para ver este artículo, vaya a MathArticles.com.

▷ TECNOLOGÍA

Para usar de manera eficiente una herramienta de graficación es importante desarrollar la destreza de representar una gráfica mediante un conjunto de ecuaciones paramétricas. La razón es que muchas herramientas de graficación solo tienen tres modos de graficación: (1) funciones, (2) ecuaciones paramétricas y (3) ecuaciones polares. La mayor parte de las herramientas de graficación no están programadas para elaborar la gráfica de una ecuación general. Suponga, por ejemplo, que se quiere elaborar la gráfica de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$. Para hacer la gráfica de la hipérbola en el modo función, se necesitan dos ecuaciones:

$$y = \sqrt{x^2 - 1} \quad y = -\sqrt{x^2 - 1}.$$

En el modo *paramétrico*, la gráfica puede representarse mediante $x = \sec t$ y $y = \tan t$.

CICLOIDES

Galileo fue el primero en llamar la atención hacia la cicloide, recomendando que se empleara en los arcos de los puentes. En cierta ocasión, Pascal pasó ocho días tratando de resolver muchos de los problemas de las cicloides, problemas como encontrar el área bajo un arco y el volumen del sólido de revolución generado al hacer girar la curva sobre una recta. La cicloide tiene tantas propiedades interesantes y ha generado tantas disputas entre los matemáticos que se le ha llamado “la Helena de la geometría” y “la manzana de la discordia”.

■ **PARA INFORMACIÓN ADICIONAL**

Para más información acerca de las cicloides, consulte el artículo “The Geometry of Rolling Curves”, de John Bloom y Lee Whitt, en *The American Mathematical Monthly*. Para ver este artículo, vaya a MathArticles.com.

EJEMPLO 5

Ecuaciones paramétricas de una cicloide

Determine la curva descrita por un punto P en la circunferencia de un círculo de radio a que rueda a lo largo de una recta en el plano. A estas curvas se les llama **cicloides**.

Solución Sea θ el parámetro que mide la rotación del círculo y suponga que al inicio el punto $P = (x, y)$ se encuentra en el origen. Cuando $\theta = 0$, P se encuentra en el origen. Cuando $\theta = \pi$, P está en un punto máximo $(\pi a, 2a)$. Cuando $\theta = 2\pi$, P vuelve al eje x en $(2\pi a, 0)$. En la figura 2.7 ve que $\angle APC = 180^\circ - \theta$. Por tanto,

$$\text{sen } \theta = \text{sen}(180^\circ - \theta) = \text{sen}(\angle APC) = \frac{AC}{a} = \frac{BD}{a}$$

$$\text{cos } \theta = -\text{cos}(180^\circ - \theta) = -\text{cos}(\angle APC) = \frac{AP}{-a}$$

lo cual implica que $AP = -a \text{cos } \theta$ y $BD = a \text{sen } \theta$.

Como el círculo rueda a lo largo del eje x , sabe que $OD = \widehat{PD} = a\theta$. Además, como $BA = DC = a$, se tiene

$$x = OD - BD = a\theta - a \text{sen } \theta$$

$$y = BA + AP = a - a \text{cos } \theta.$$

Por tanto, las ecuaciones paramétricas son

$$x = a(\theta - \text{sen } \theta) \quad \text{y} \quad y = a(1 - \text{cos } \theta).$$

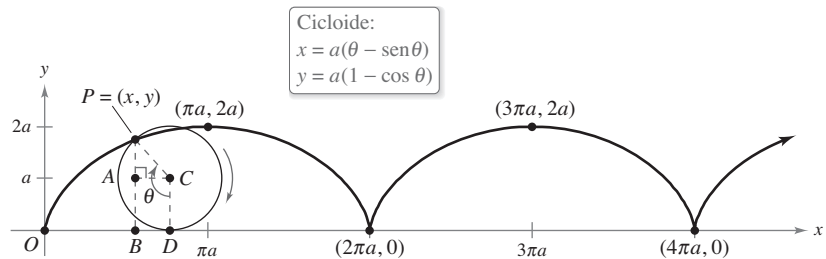


Figura 2.7

▷ **TECNOLOGÍA** Algunas herramientas de graficación permiten simular el movimiento de un objeto que se mueve en el plano o en el espacio. Se recomienda usar una de estas herramientas para trazar la trayectoria de la cicloide que se muestra en la figura 2.7.

La cicloide de la figura 2.7 tiene esquinas agudas en los valores $x = 2n\pi a$. Observe que las derivadas $x'(\theta)$ y $y'(\theta)$ son ambas cero en los puntos en los que $\theta = 2n\pi$.

$$x(\theta) = a(\theta - \text{sen } \theta) \quad y(\theta) = a(1 - \text{cos } \theta)$$

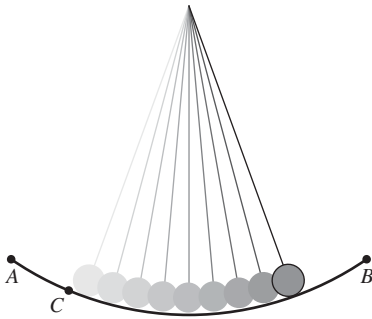
$$x'(\theta) = a - a \text{cos } \theta \quad y'(\theta) = a \text{sen } \theta$$

$$x'(2n\pi) = 0 \quad y'(2n\pi) = 0$$

Entre estos puntos, se dice que la cicloide es **suave**.

Definición de una curva suave

Una curva C representada por $x = f(t)$ y $y = g(t)$ en un intervalo I se dice que es **suave** si f' y g' son continuas en I y no son simultáneamente 0, excepto posiblemente en los puntos terminales de I . La curva C se dice que es **suave en partes** si es suave en todo subintervalo de alguna partición de I .



El tiempo que requiere un péndulo para realizar una oscilación completa si parte del punto C es aproximadamente el mismo que si parte del punto A .

Figura 2.8



JAMES BERNOULLI
(1654-1705)

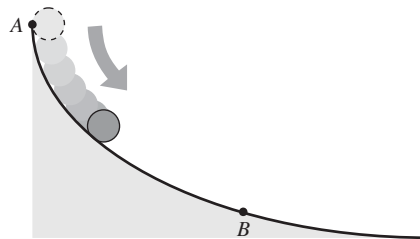
James Bernoulli, también llamado Jacques, era el hermano mayor de John. Fue uno de los matemáticos consumados de la familia suiza Bernoulli. Los logros matemáticos de James le han dado un lugar prominente en el desarrollo inicial del cálculo.

Consulte LarsonCalculus.com para leer más acerca de esta biografía.

Los problemas de la tautocrona y de la braquistocrona

El tipo de curva descrito en el ejemplo 5 está relacionado con uno de los más famosos pares de problemas de la historia del cálculo. El primer problema (llamado el **problema de la tautocrona**) empezó con el descubrimiento de Galileo de que el tiempo requerido para una oscilación completa de un péndulo dado es *aproximadamente* el mismo ya sea que efectúe un movimiento largo a alta velocidad o un movimiento corto a menor velocidad (vea la figura 2.8). Más tarde, Galileo (1564-1642) comprendió que podía emplear este principio para construir un reloj. Sin embargo, no logró llegar a la mecánica necesaria para construirlo. Christian Huygens (1629-1695) fue el primero en diseñar y construir un modelo que funcionara. En su trabajo con los péndulos, Huygens observó que un péndulo no realiza oscilaciones de longitudes diferentes en exactamente el mismo tiempo. (Esto no afecta al reloj de péndulo, porque la longitud del arco circular se mantiene constante, dando al péndulo un ligero impulso cada vez que pasa por su punto más bajo.) Pero al estudiar el problema, Huygens descubrió que una pelotita que rueda hacia atrás y hacia adelante en una cicloide invertida completa cada ciclo en exactamente el mismo tiempo.

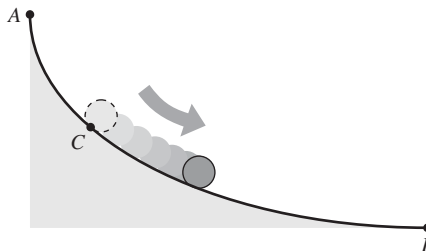
El segundo problema, que fue planteado por John Bernoulli en 1696, es el llamado **problema de la braquistocrona** (en griego *brachys* significa corto y *cronos*, tiempo). El problema consistía en determinar la trayectoria descendente por la que una partícula se desliza del punto A al punto B en el *menor tiempo*. Varios matemáticos se abocaron al problema, y un año después el problema fue resuelto por Newton, Leibniz, L'Hôpital, John Bernoulli y James Bernoulli. Como se encontró, la solución no es una recta de A a B , sino una cicloide invertida que pasa por los puntos A y B , como se muestra en la figura 2.9.



Una cicloide invertida es la trayectoria descendente que una pelotita rodará en el tiempo más corto.

Figura 2.9

Lo sorprendente de la solución es que una partícula que parte del reposo en *cualquier* otro punto C , entre A y B , de la cicloide tarda exactamente el mismo tiempo en llegar a B , como se muestra en la figura 2.10.



Una pelotita que parte del punto C tarda el mismo tiempo en llegar al punto B que una que parte del punto A .

Figura 2.10

■ **PARA INFORMACIÓN ADICIONAL** Para ver una demostración del famoso problema de la braquistocrona, consulte el artículo “A New Minimization Proof for the Brachistochrone”, de Gaiy Lawlor, en *The American Mathematical Monthly*. Para ver este artículo, vaya a MathArticles.com.

2.1 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Uso de ecuaciones paramétricas En los ejercicios 1-18, trace la curva que representa las ecuaciones paramétricas (indique la orientación de la curva) y, eliminando el parámetro, dé la ecuación rectangular correspondiente.

1. $x = 2t - 3, y = 3t + 1$
2. $x = 5 - 4t, y = 2 + 5t$
3. $x = t + 1, y = t^2$
4. $x = 2t^2, y = t^4 + 1$
5. $x = t^3, y = \frac{t^2}{2}$
6. $x = t^2 + t, y = t^2 - t$
7. $x = \sqrt{t}, y = t - 5$
8. $x = \sqrt[4]{t}, y = 8 - t$
9. $x = t - 3, y = \frac{t}{t - 3}$
10. $x = 1 + \frac{1}{t}, y = t - 1$
11. $x = 2t, y = |t - 2|$
12. $x = |t - 1|, y = t + 2$
13. $x = e^t, y = e^{3t} + 1$
14. $x = e^{-t}, y = e^{2t} - 1$
15. $x = \sec \theta, y = \cos \theta, 0 \leq \theta < \pi/2, \pi/2 < \theta \leq \pi$
16. $x = \tan^2 \theta, y = \sec^2 \theta$
17. $x = 8 \cos \theta, y = 8 \sin \theta$
18. $x = 3 \cos \theta, y = 7 \sin \theta$

Uso de ecuaciones paramétricas En los ejercicios 19-30, use una herramienta de graficación para trazar la curva que representa las ecuaciones paramétricas (indique la orientación de la curva). Elimine el parámetro y dé la ecuación rectangular correspondiente.

19. $x = 6 \sin 2\theta$
 $y = 4 \cos 2\theta$
20. $x = \cos \theta$
 $y = 2 \sin 2\theta$
21. $x = 4 + 2 \cos \theta$
 $y = -1 + \sin \theta$
22. $x = -2 + 3 \cos \theta$
 $y = -5 + 3 \sin \theta$
23. $x = -3 + 4 \cos \theta$
 $y = 2 + 5 \sin \theta$
24. $x = \sec \theta$
 $y = \tan \theta$
25. $x = 4 \sec \theta$
 $y = 3 \tan \theta$
26. $x = \cos^3 \theta$
 $y = \sin^3 \theta$
27. $x = t^3, y = 3 \ln t$
28. $x = \ln 2t, y = t^2$
29. $x = e^{-t}, y = e^{3t}$
30. $x = e^{2t}, y = e^t$

Comparación de curvas planas En los ejercicios 31-34, determine toda diferencia entre las curvas de las ecuaciones paramétricas. ¿Son iguales las gráficas? ¿Son iguales las orientaciones? ¿Son suaves las curvas? Explique.

31. (a) $x = t$
 $y = 2t + 1$
- (b) $x = \cos \theta$
 $y = 2 \cos \theta + 1$
- (c) $x = e^{-t}$
 $y = 2e^{-t} + 1$
- (d) $x = e^t$
 $y = 2e^t + 1$

32. (a) $x = 2 \cos \theta$
 $y = 2 \sin \theta$
- (b) $x = \sqrt{4t^2 - 1}/|t|$
 $y = 1/t$
- (c) $x = \sqrt{t}$
 $y = \sqrt{4 - t}$
- (d) $x = -\sqrt{4 - e^{2t}}$
 $y = e^t$
33. (a) $x = \cos \theta$
 $y = 2 \sin^2 \theta$
 $0 < \theta < \pi$
- (b) $x = \cos(-\theta)$
 $y = 2 \sin^2(-\theta)$
 $0 < \theta < \pi$
34. (a) $x = t + 1, y = t^3$
- (b) $x = -t + 1, y = (-t)^3$

35. Conjetura

- (a) Use una herramienta de graficación para trazar las curvas representadas por los dos conjuntos de ecuaciones paramétricas.

$$\begin{array}{ll} x = 4 \cos t & x = 4 \cos(-t) \\ y = 3 \sin t & y = 3 \sin(-t) \end{array}$$

- (b) Describa el cambio en la gráfica si se cambia el signo del parámetro.
- (c) Formule una conjetura respecto al cambio en la gráfica de las ecuaciones paramétricas cuando se cambia el signo del parámetro.
- (d) Pruebe la conjetura con otro conjunto de ecuaciones paramétricas.

36. Redacción Revise los ejercicios 31-34 y escriba un párrafo breve que describa cómo las gráficas de curvas representadas por diferentes conjuntos de ecuaciones paramétricas pueden diferir aun cuando la eliminación del parámetro dé la misma ecuación rectangular.

Eliminación de un parámetro En los ejercicios 37-40, elimine el parámetro y obtenga la forma estándar o canónica de la ecuación rectangular.

37. La recta pasa por (x_1, y_1) y (x_2, y_2) :
 $x = x_1 + t(x_2 - x_1), y = y_1 + t(y_2 - y_1)$
38. Circunferencia: $x = h + r \cos \theta, y = k + r \sin \theta$
39. Elipse: $x = h + a \cos \theta, y = k + b \sin \theta$
40. Hipérbola: $x = h + a \sec \theta, y = k + b \tan \theta$

Escribir un conjunto de ecuaciones paramétricas En los ejercicios 41-48, emplee los resultados de los ejercicios 37-40 para hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta o para la cónica.


41. Recta: pasa por $(0, 0)$ y $(4, -7)$
42. Recta: pasa por $(1, 4)$ y $(5, -2)$
43. Círculo: centro: $(3, 1)$; radio: 2
44. Círculo: centro: $(-6, 2)$; radio: 4
45. Elipse: vértices $(\pm 10, 0)$; focos: $(\pm 8, 0)$
46. Elipse: vértices: $(4, 7), (4, -3)$; focos: $(4, 5), (4, -1)$
47. Hipérbola: vértice: $(+4, 0)$; focos: $(\pm 5, 0)$
48. Hipérbola: vértices: $(0, \pm 1)$; focos: $(0, +2)$

Hallar ecuaciones paramétricas En los ejercicios 49-52, halle dos conjuntos diferentes de ecuaciones paramétricas para la ecuación rectangular.

49. $y = 6x - 5$ 50. $y = 4/(x - 1)$
 51. $y = x^3$ 52. $y = x^2$

Hallar ecuaciones paramétricas En los ejercicios 53-56, encuentre un conjunto de ecuaciones paramétricas para la ecuación rectangular que satisface la condición dada.

53. $y = 2x - 5, t = 0$ en el punto $(3, 1)$
 54. $y = 4x + 1, t = -1$ en el punto $(-2, -7)$
 55. $y = x^2, t = 4$ en el punto $(4, 16)$
 56. $y = 4 - x^2, t = 1$ en el punto $(1, 3)$

 **Graficar una curva plana** En los ejercicios 57-64, emplee una herramienta de graficación para representar la curva descrita por las ecuaciones paramétricas. Indique la dirección de la curva e identifique todos los puntos en los que la curva no sea suave.

57. Cicloide: $x = 2(\theta - \text{sen } \theta), y = 2(1 - \text{cos } \theta)$
 58. Cicloide: $x = \theta + \text{sen } \theta, y = 1 - \text{cos } \theta$
 59. Cicloide alargada: $x = \theta - \frac{3}{2} \text{sen } \theta, y = 1 - \frac{3}{2} \text{cos } \theta$
 60. Cicloide alargada: $x = 2\theta - 4 \text{sen } \theta, y = 2 - 4 \text{cos } \theta$
 61. Hipocicloide: $x = 3 \text{cos}^3 \theta, y = 3 \text{sen}^3 \theta$
 62. Cicloide corta: $x = 2\theta - \text{sen } \theta, y = 2 - \text{cos } \theta$
 63. Bruja de Agnesi: $x = 2 \cot \theta, y = 2 \text{sen}^2 \theta$
 64. Folio de Descartes: $x = 3t/(1 + t^2), y = 3t^2/(1 + t^2)$

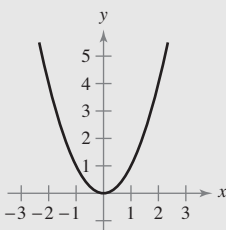
DESARROLLO DE CONCEPTOS

65. **Curva plana** Enuncie la definición de una curva dada por ecuaciones paramétricas.
 66. **Curva plana** Explique el proceso del trazado de una curva plana dada por ecuaciones paramétricas. ¿Qué se entiende por orientación de la curva?
 67. **Curva suave** Establezca la definición de una curva suave.

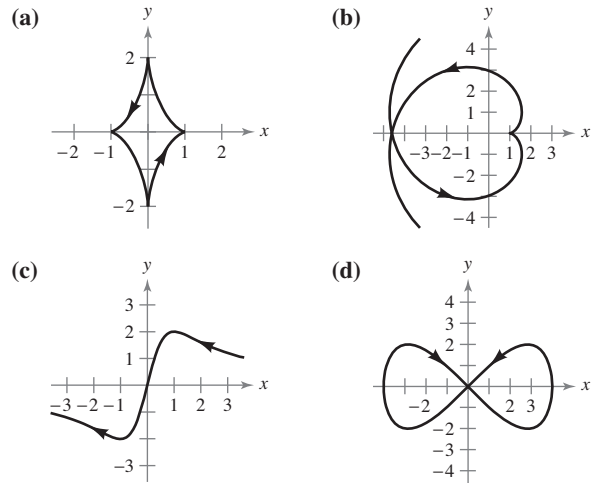


68. ¿CÓMO LO VE? ¿Qué conjunto de ecuaciones paramétricas corresponde con la gráfica que se muestra en seguida? Explique el razonamiento.

- (a) $x = t$ (b) $x = t^2$
 $y = t^2$ $y = t$



Correspondencia En los ejercicios 69-72, asocie cada conjunto de ecuaciones paramétricas con su gráfica correspondiente. [Las gráficas están etiquetadas (a), (b), (c), (d).] Explique su razonamiento.



69. Curva de Lissajous: $x = 4 \text{cos } \theta, y = 2 \text{sen } 2\theta$
 70. Evoluta de una elipse: $x = \text{cos}^3 \theta, y = 2 \text{sen}^3 \theta$
 71. Involuta de un círculo: $x = \text{cos } \theta + \theta \text{sen } \theta, y = \text{sen } \theta - \theta \text{cos } \theta$
 72. Curva serpentina: $x = \cot \theta, y = 4 \text{sen } \theta \text{cos } \theta$
 73. **Cicloide corta** Un disco de radio a rueda a lo largo de una recta sin deslizar. La curva trazada por un punto P que se encuentra a b unidades del centro ($b < a$) se denomina cicloide corta o acortada (vea la figura). Use el ángulo θ para hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas para esta curva.

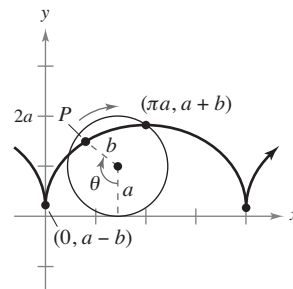


Figura para 73

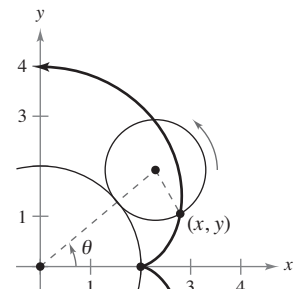


Figura para 74

74. **Epicycloide** Un círculo de radio 1 rueda sobre otro círculo de radio 2. La curva trazada por un punto sobre la circunferencia del círculo más pequeño se llama epicycloide (vea la figura). Use el ángulo θ para hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas de esta curva.

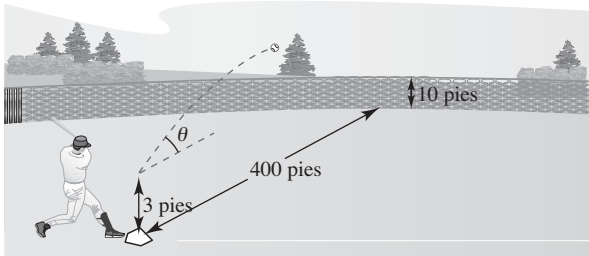
¿Verdadero o falso? En los ejercicios 75-77, determine si la afirmación es verdadera o falsa. En caso de que sea falsa, explique por qué o dé un ejemplo que muestre que es falsa.

75. La gráfica de las ecuaciones paramétricas $x = t^2$ y $y = t^2$ es la recta $y = x$.
 76. Si y es función de t y x es función de t , entonces y es función de x .
 77. La curva representada por las ecuaciones paramétricas $x = t$ y $y = \text{cos } t$ se puede escribir como una ecuación de la forma $y = f(x)$.

78. **Traslación de una curva plana** Considere las ecuaciones paramétricas $x = 8 \cos t$ y $y = 8 \sin t$.
- Describa la curva representada por las ecuaciones paramétricas.
 - ¿Cómo se representa la curva por las ecuaciones paramétricas $x = 8 \cos t + 3$ y $y = 8 \sin t + 6$ comparada con la curva descrita en el inciso (a)?
 - ¿Cómo cambia la curva original cuando el coseno y el seno se intercambian?

Movimiento de un proyectil En los ejercicios 79 y 80, considere un proyectil que se lanza a una altura de h pies sobre el suelo y a un ángulo θ con la horizontal. Si la velocidad inicial es v_0 pies por segundo, la trayectoria del proyectil queda descrita por las ecuaciones paramétricas $x = (v_0 \cos \theta)t$ y $y = h + (v_0 \sin \theta)t - 16t^2$.

79. La cerca que delimita el jardín central en un parque de béisbol tiene una altura de 10 pies y se encuentra a 400 pies del plato de home. La pelota es golpeada por el bate a una altura de 3 pies sobre el suelo. La pelota se aleja del bate con un ángulo de θ grados con la horizontal a una velocidad de 100 millas por hora (vea la figura).



- Dé un conjunto de ecuaciones paramétricas para la trayectoria de la pelota.
- Use una herramienta de graficación para representar la trayectoria de la pelota si $\theta = 15^\circ$. ¿Es el golpe un home run?
- Use una herramienta de graficación para representar la trayectoria de la pelota si $\theta = 23^\circ$. ¿Es el golpe un home run?
- Halle el ángulo mínimo al cual la pelota debe alejarse del bate si se quiere que el golpe sea un home run.

80. Una ecuación rectangular para la trayectoria de un proyectil es $y = 5 + x - 0.005x^2$.
- Elimine el parámetro t de la función de posición del movimiento de un proyectil para demostrar que la ecuación rectangular es

$$y = -\frac{16 \sec^2 \theta}{v_0^2} x^2 + (\tan \theta)x + h.$$

- Use el resultado del inciso (a) para hallar h , v_0 y θ . Halle las ecuaciones paramétricas de la trayectoria.
- Use una herramienta de graficación para trazar la gráfica de la ecuación rectangular de la trayectoria del proyectil. Confirme la respuesta dada en el inciso (b) y dibuje la curva representada por las ecuaciones paramétricas.
- Use una herramienta de graficación para aproximar la altura máxima del proyectil y su rango.

PROYECTO DE TRABAJO

Cicloides

En griego, la palabra *cicloide* significa *rueda*, la palabra *hipocicloide* significa *bajo la rueda*, y la palabra *epicicloide* significa *sobre la rueda*. Asocie la hipocicloide o epicicloide con su gráfica. [Las gráficas están marcadas (a), (b), (c), (d), (e) y (f).]

Hipocicloide, H(A, B)

Trayectoria descrita por un punto fijo en un círculo de radio B que rueda a lo largo de la cara interior de un círculo de radio A .

$$x = (A - B) \cos t + B \cos\left(\frac{A - B}{B}t\right)$$

$$y = (A - B) \sin t - B \sin\left(\frac{A - B}{B}t\right)$$

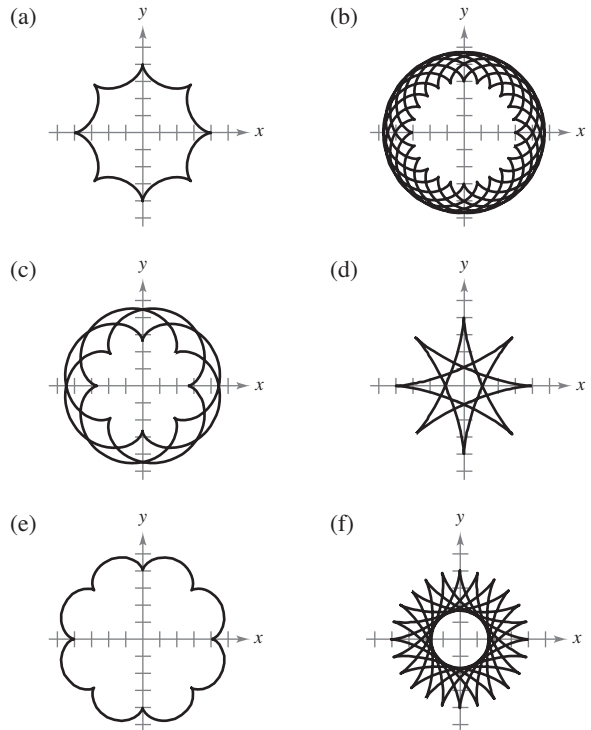
Epicicloide, E(A, B)

Trayectoria descrita por un punto fijo en un círculo de radio B que rueda a lo largo de la cara exterior de un círculo de radio A .

$$x = (A + B) \cos t - B \cos\left(\frac{A + B}{B}t\right)$$

$$y = (A + B) \sin t - B \sin\left(\frac{A + B}{B}t\right)$$

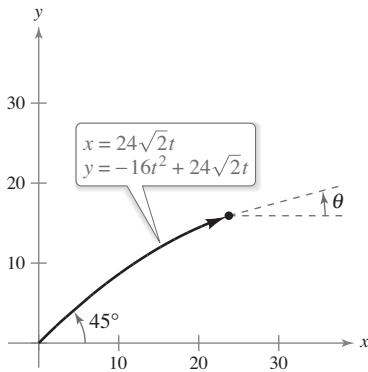
- | | | |
|----------------|---------------|----------------|
| I. $H(8, 3)$ | II. $E(8, 3)$ | III. $H(8, 7)$ |
| IV. $E(24, 3)$ | V. $H(24, 7)$ | VI. $E(24, 7)$ |



Ejercicios basados en "Mathematical Discovery via Computer Graphics: Hypocycloids and Epicycloids", de Florence S. Gordon y Sheldon P. Gordon, *College Mathematics Journal*, noviembre de 1984, p. 441. Uso autorizado por los autores.

2.2 Ecuaciones paramétricas y cálculo

- Hallar la pendiente de una recta tangente a una curva dada por un conjunto de ecuaciones paramétricas.
- Hallar la longitud de arco de una curva dada por un conjunto de ecuaciones paramétricas.
- Hallar el área de una superficie de revolución (forma paramétrica).



En el momento t , el ángulo de elevación del proyectil es θ .

Figura 2.11

Pendiente y rectas tangentes

Ahora que ya sabe representar una gráfica en el plano mediante un conjunto de ecuaciones paramétricas, lo natural es preguntarse cómo emplear el cálculo para estudiar estas curvas planas. Considere el proyectil representado por las ecuaciones paramétricas

$$x = 24\sqrt{2}t \quad y = -16t^2 + 24\sqrt{2}t$$

como se ilustra en la figura 2.11. De lo visto en la sección 2.1, sabe que estas ecuaciones permiten localizar la posición del proyectil en un instante dado. También sabe que el objeto es proyectado inicialmente con un ángulo de 45° , o una pendiente de $m = \tan 45^\circ = 1$. Pero, ¿cómo puede encontrar el ángulo θ que representa la dirección del objeto en algún otro instante t ? El teorema siguiente responde a esta pregunta proporcionando una fórmula para la pendiente de la recta tangente en función de t .

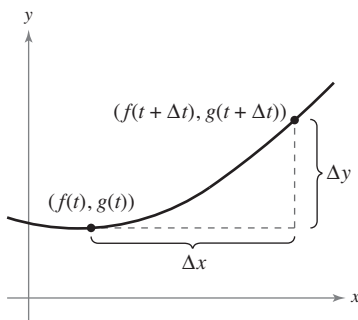
TEOREMA 2.1 Forma paramétrica de la derivada

Si una curva suave C está dada por las ecuaciones

$$x = f(t) \quad y = g(t)$$

entonces la pendiente de C en (x, y) es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}, \quad \frac{dx}{dt} \neq 0.$$



La pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $(f(t), g(t))$ y $(f(t + \Delta t), g(t + \Delta t))$ es $\Delta y/\Delta x$.

Figura 2.12

Demostración En la figura 2.12, considérese $\Delta t > 0$ y sea

$$\Delta y = g(t + \Delta t) - g(t) \quad y \quad \Delta x = f(t + \Delta t) - f(t).$$

Como $\Delta x \rightarrow 0$ entonces $\Delta t \rightarrow 0$, se puede escribir

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{f(t + \Delta t) - f(t)}. \end{aligned}$$

Dividiendo tanto el numerador como el denominador entre Δt , se puede emplear la derivabilidad de f y g para concluir que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[g(t + \Delta t) - g(t)]/\Delta t}{[f(t + \Delta t) - f(t)]/\Delta t} \\ &= \frac{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}}{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}} \\ &= \frac{g'(t)}{f'(t)} \\ &= \frac{dy/dt}{dx/dt}. \end{aligned}$$

Exploración

La curva del ejemplo 1 es una circunferencia. Emplee la fórmula

$$\frac{dy}{dx} = -\tan t$$

para hallar su pendiente en los puntos (1, 0) y (0, 1).

EJEMPLO 1**Derivación y forma paramétrica**

Halle dy/dx para la curva dada por $x = \sin t$ y $y = \cos t$.

Solución

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy/dt}{dx/dt} \\ &= \frac{-\sin t}{\cos t} \\ &= -\tan t\end{aligned}$$

Como dy/dx es función de t puede emplear el teorema 2.1 repetidamente para hallar las derivadas de *orden superior*. Por ejemplo,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left[\frac{d}{dx} \right] = \frac{d}{dt} \left[\frac{dy}{dx} \right] \quad \text{Segunda derivada}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx} \left[\frac{d^2y}{dx^2} \right] = \frac{d}{dt} \left[\frac{d^2y}{dx^2} \right] \quad \text{Tercera derivada}$$

EJEMPLO 2**Hallar pendiente y concavidad**

Para la curva dada por

$$x = \sqrt{t} \quad y = \frac{1}{4}(t^2 - 4), \quad t \geq 0$$

halle la pendiente y la concavidad en el punto (2, 3).

Solución Como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{(1/2)t}{(1/2)t^{-1/2}} = t^{3/2} \quad \text{Forma paramétrica de la primera derivada}$$

se puede hallar que la segunda derivada es

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}[dy/dx]}{dx/dt} = \frac{\frac{d}{dt}[t^{3/2}]}{(1/2)t^{-1/2}} = \frac{(3/2)t^{1/2}}{(1/2)t^{-1/2}} = 3t. \quad \text{Forma paramétrica de la segunda derivada}$$

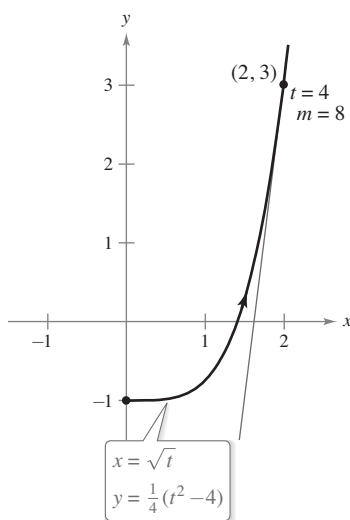
En $(x, y) = (2, 3)$, se tiene que $t = 4$, y la pendiente es

$$\frac{dy}{dx} = (4)^{3/2} = 8.$$

Y cuando $t = 4$, la segunda derivada es

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 3(4) = 12 > 0$$

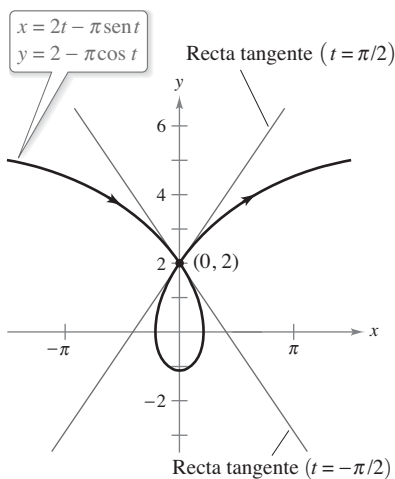
por lo que puede concluirse que en (2, 3) la gráfica es cóncava hacia arriba, como se muestra en la figura 2.13.



En (2, 3), donde $t = 4$, la gráfica es cóncava hacia arriba.

Figura 2.13

Como en las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$, no se necesita que y esté definida en función de x , puede ocurrir que una curva plana forme un lazo y se corte a sí misma. En esos puntos la curva puede tener más de una recta tangente, como se muestra en el ejemplo siguiente.



Esta cicloide alargada tiene dos rectas tangentes en el punto $(0, 2)$.

Figura 2.14

EJEMPLO 3 Una curva con dos rectas tangentes en un punto

Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

La cicloide alargada dada por

$$x = 2t - \pi \text{sen } t \quad y = 2 - \pi \text{cos } t$$

se corta a sí misma en el punto $(0, 2)$, como se ilustra en la figura 2.14. Halle las ecuaciones de las dos rectas tangentes en este punto.

Solución Como $x = 0$ y $y = 2$ cuando $t = \pm\pi/2$, y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\pi \text{sen } t}{2 - \pi \text{cos } t}$$

tiene $dy/dx = -\pi/2$ cuando $t = -\pi/2$ y $dy/dx = \pi/2$ cuando $t = \pi/2$. Por tanto, las dos rectas tangentes en $(0, 2)$ son

$$y - 2 = -\left(\frac{\pi}{2}\right)x \quad \text{Recta tangente cuando } t = -\frac{\pi}{2}$$

y

$$y - 2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)x. \quad \text{Recta tangente cuando } t = \frac{\pi}{2}$$

Si $dy/dt = 0$ y $dx/dt \neq 0$ cuando $t = t_0$, la curva representada por $x = f(t)$ y $y = g(t)$ tiene una tangente horizontal en $(f(t_0), g(t_0))$. Así, en el ejemplo 3, la curva dada tiene una tangente horizontal en el punto $(0, 2 - \pi)$ (cuando $t = 0$). De manera semejante, si $dx/dt = 0$ y $dy/dt \neq 0$ cuando $t = t_0$, la curva representada por $x = f(t)$ y $y = g(t)$ tiene una tangente vertical en $(f(t_0), g(t_0))$.

Longitud de arco

Se ha visto cómo pueden emplearse las ecuaciones paramétricas para describir la trayectoria de una partícula que se mueve en el plano. Ahora se desarrollará una fórmula para determinar la *distancia* recorrida por una partícula a lo largo de su trayectoria.

La fórmula para hallar la longitud de arco de una curva C dada por $y = h(x)$ en el intervalo $[x_0, x_1]$ es

$$\begin{aligned} s &= \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + [h'(x)]^2} \, dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx. \end{aligned}$$

Si C está representada por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, y si $dx/dt = f'(t) > 0$, se puede escribir

$$\begin{aligned} s &= \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)^2} \, dx \\ &= \int_a^b \sqrt{\frac{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2}{(dx/dt)^2}} \frac{dx}{dt} \, dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \, dt \\ &= \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} \, dt. \end{aligned}$$

TEOREMA 2.2 Longitud de arco en forma paramétrica

Si una curva suave C está dada por $x = f(t)$ y $y = g(t)$, y C no se corta a sí misma en el intervalo $a \leq t \leq b$ (excepto quizás en los puntos terminales), entonces la longitud de arco de C en ese intervalo está dada por

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} dt.$$

COMENTARIO Al aplicar la fórmula para la longitud de arco a una curva, hay que asegurarse de que la curva se recorra una sola vez en el intervalo de integración. Por ejemplo, el círculo dado por $x = \cos t$ y $y = \sin t$ recorre una sola vez el intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$, pero recorre dos veces el intervalo $0 \leq t \leq 4\pi$.

En la sección anterior se vio que si un círculo rueda a lo largo de una recta, cada punto de su circunferencia trazará una trayectoria llamada cicloide. Si el círculo rueda sobre otro círculo, la trayectoria del punto es una **epicloide**. El ejemplo siguiente muestra cómo hallar la longitud de arco de una epicicloide.

ARCO DE UNA CICLOIDE

La longitud de un arco de una cicloide fue calculada por vez primera en 1658 por el arquitecto y matemático inglés Christopher Wren, famoso por reconstruir muchos edificios e iglesias en Londres, entre los que se encuentra la Catedral de St. Paul.

EJEMPLO 4**Calcular la longitud de arco**

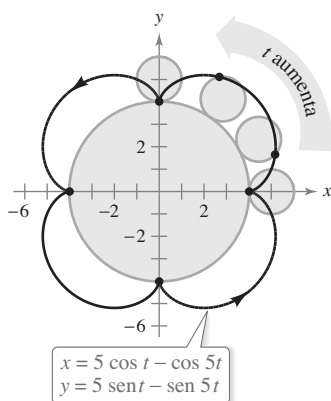
Un círculo de radio 1 rueda sobre otro círculo mayor de radio 4, como se muestra en la figura 2.15. La epicicloide trazada por un punto en el círculo más pequeño está dada por

$$x = 5 \cos t - \cos 5t \quad y \quad y = 5 \sin t - \sin 5t.$$

Halle la distancia recorrida por el punto al dar una vuelta completa alrededor del círculo mayor.

Solución Antes de aplicar el teorema 2.2, debe observar en la figura 2.15 que la curva tiene puntos angulosos en $t = 0$ y $t = \pi/2$. Entre estos dos puntos, dx/dt y dy/dt no son simultáneamente 0. Por tanto, la porción de la curva que se genera de $t = 0$ a $t = \pi/2$ es suave. Para hallar la distancia total recorrida por el punto, calcule la longitud de arco que se encuentra en el primer cuadrante y multiplique por 4.

$$\begin{aligned} s &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt && \text{Forma paramétrica de la longitud de arco} \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{(-5 \sin t + \cos 5t)^2 + (5 \cos t - \sin 5t)^2} dt \\ &= 20 \int_0^{\pi/2} \sqrt{2 - 2 \sin t \cos 5t - 2 \cos t \sin 5t} dt \\ &= 20 \int_0^{\pi/2} \sqrt{2 - 2 \cos 4t} dt && \text{Identidad trigonométrica} \\ &= 20 \int_0^{\pi/2} \sqrt{4 \sin^2 2t} dt && \text{Fórmula del doble de un ángulo} \\ &= 40 \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt \\ &= -20 \left[\cos 2t \right]_0^{\pi/2} \\ &= 40 \end{aligned}$$



Un punto en la circunferencia pequeña es el que traza una epicicloide en la medida que el círculo pequeño rueda alrededor de la circunferencia grande.

Figura 2.15

Para la epicicloide de la figura 2.15, una longitud de arco de 40 parece correcta, puesto que la circunferencia de un círculo de radio 6 es

$$2\pi r = 12\pi \approx 37.7.$$

Área de una superficie de revolución

La fórmula para el área de una superficie de revolución en forma rectangular puede usarse para desarrollar una fórmula para el área de la superficie en forma paramétrica.

TEOREMA 2.3 Área de una superficie de revolución

Si una curva suave C dada por $x = f(t)$ y $y = g(t)$ no se corta a sí misma en un intervalo $a \leq t \leq b$, entonces el área S de la superficie de revolución generada por rotación de C , en torno a uno de los ejes de coordenadas, está dada por

$$1. S = 2\pi \int_a^b g(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \quad \text{Revolución en torno al eje } x: g(t) \geq 0$$

$$2. S = 2\pi \int_a^b f(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \quad \text{Revolución en torno al eje } y: f(t) \geq 0$$

Estas fórmulas son fáciles de recordar si se considera al diferencial de la longitud de arco como

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

Entonces las fórmulas se expresan como sigue,

$$1. S = 2\pi \int_a^b g(t) ds \quad 2. S = 2\pi \int_a^b f(t) ds$$

EJEMPLO 5 Hallar el área de una superficie de revolución

Sea C el arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ que va desde $(3, 0)$ hasta

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

como se ve en la figura 2.16. Encuentre el área de la superficie generada por revolución de C alrededor del eje x .

Solución C se puede representar en forma paramétrica mediante las ecuaciones

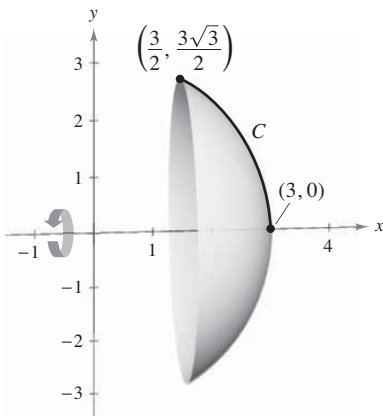
$$x = 3 \cos t \quad y = 3 \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi/3.$$

(El intervalo para t se obtiene observando que $t = 0$ cuando $x = 3$ y $t = \pi/3$ cuando $x = 3/2$.) En este intervalo, C es suave y y es no negativa, y se puede aplicar el teorema 2.3 para obtener el área de la superficie

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^{\pi/3} (3 \sin t) \sqrt{(-3 \sin t)^2 + (3 \cos t)^2} dt \\ &= 6\pi \int_0^{\pi/3} \sin t \sqrt{9(\sin^2 t + \cos^2 t)} dt \\ &= 6\pi \int_0^{\pi/3} 3 \sin t dt \\ &= -18\pi \left[\cos t \right]_0^{\pi/3} \\ &= -18\pi \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \\ &= 9\pi. \end{aligned}$$

Fórmula para el área de una superficie de revolución

Identidad trigonométrica



Esta superficie de revolución tiene un área de 9π .

Figura 2.16

2.2 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Hallar una derivada En los ejercicios 1-4, halle dy/dx .


1. $x = t^2$, $y = 7 - 6t$ 2. $x = \sqrt[3]{t}$, $y = 4 - t$
 3. $x = \sin^2 \theta$, $y = \cos^2 \theta$ 4. $x = 2e^\theta$, $y = e^{-\theta/2}$

Hallar pendiente y concavidad En los ejercicios 5-14, halle dy/dx y d^2y/dx^2 , así como la pendiente y la concavidad (de ser posible) en el punto correspondiente al valor dado del parámetro.

Ecuaciones paramétricas	Punto
5. $x = 4t$, $y = 3t - 2$	$t = 3$
6. $x = \sqrt{t}$, $y = 3t - 1$	$t = 1$
7. $x = t + 1$, $y = t^2 + 3t$	$t = -1$
8. $x = t^2 + 5t + 4$, $y = 4t$	$t = 0$
9. $x = 4 \cos \theta$, $y = 4 \sin \theta$	$\theta = \frac{\pi}{4}$
10. $x = \cos \theta$, $y = 3 \sin \theta$	$\theta = 0$
11. $x = 2 + \sec \theta$, $y = 1 + 2 \tan \theta$	$\theta = \frac{\pi}{6}$
12. $x = \sqrt{t}$, $y = \sqrt{t-1}$	$t = 2$
13. $x = \cos^3 \theta$, $y = \sin^3 \theta$	$\theta = \frac{\pi}{4}$
14. $x = \theta - \sin \theta$, $y = 1 - \cos \theta$	$\theta = \pi$

Hallar ecuaciones de rectas tangentes En los ejercicios 15-18, halle una ecuación para la recta tangente en cada uno de los puntos dados de la curva.

15. $x = 2 \cot \theta$, $y = 2 \sin^2 \theta$,
 $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{3}{2}\right)$, $(0, 2)$, $\left(2\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$
 16. $x = 2 - 3 \cos \theta$, $y = 3 + 2 \sin \theta$,
 $(-1, 3)$, $(2, 5)$, $\left(\frac{4 + 3\sqrt{3}}{2}, 2\right)$
 17. $x = t^2 - 4$, $y = t^2 - 2t$, $(0, 0)$, $(-3, -1)$, $(-3, 3)$
 18. $x = t^4 + 2$, $y = t^3 + t$, $(2, 0)$, $(3, -2)$, $(18, 10)$

 **Hallar una ecuación de una recta tangente** En los ejercicios 19-22, (a) use una herramienta de graficación para trazar la curva representada por las ecuaciones paramétricas, (b) use una herramienta de graficación para hallar dx/dt , dy/dt y dy/dx para el valor dado del parámetro, (c) halle una ecuación de la recta tangente a la curva en el valor dado del parámetro, y (d) use una herramienta de graficación para trazar la curva y la recta tangente del inciso (c).

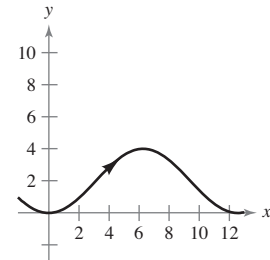
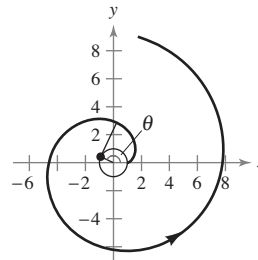
Ecuaciones paramétricas	Punto
19. $x = 6t$, $y = t^2 + 4$	$t = 1$
20. $x = t - 2$, $y = \frac{1}{t} + 3$	$t = 1$
21. $x = t^2 - t + 2$, $y = t^3 - 3t$	$t = -1$
22. $x = 3t - t^2$, $y = 2t^{3/2}$	$t = \frac{1}{4}$

Hallar ecuaciones de rectas tangentes En los ejercicios 23-26, halle las ecuaciones de las rectas tangentes en el punto en el que la curva se corta a sí misma.

23. $x = 2 \sin 2t$, $y = 3 \sin t$
 24. $x = 2 - \pi \cos t$, $y = 2t - \pi \sin t$
 25. $x = t^2 - t$, $y = t^3 - 3t - 1$
 26. $x = t^3 - 6t$, $y = t^2$

Tangencia horizontal y vertical En los ejercicios 27 y 28, halle todos los puntos de tangencia horizontal y vertical (si los hay) a la porción de la curva que se muestra.

27. Evolvente o involuta de un círculo:
 $x = \cos \theta + \theta \sin \theta$
 $y = \sin \theta - \theta \cos \theta$
28. $x = 2\theta$
 $y = 2(1 - \cos \theta)$



Tangencia horizontal y vertical En los ejercicios 29-38, halle todos los puntos de tangencia horizontal y vertical (si los hay) a la curva. Use una herramienta de graficación para confirmar los resultados.

29. $x = 4 - t$, $y = t^2$
 30. $x = t + 1$, $y = t^2 + 3t$
 31. $x = t + 4$, $y = t^3 - 3t$
 32. $x = t^2 - t + 2$, $y = t^3 - 3t$
 33. $x = 3 \cos \theta$, $y = 3 \sin \theta$
 34. $x = \cos \theta$, $y = 2 \sin 2\theta$
 35. $x = 5 + 3 \cos \theta$, $y = -2 + \sin \theta$
 36. $x = 4 \cos^2 \theta$, $y = 2 \sin \theta$
 37. $x = \sec \theta$, $y = \tan \theta$
 38. $x = \cos^2 \theta$, $y = \cos \theta$

Determinar concavidad En los ejercicios 39-44, determine los intervalos de t en los que la curva es cóncava hacia abajo o cóncava hacia arriba.

39. $x = 3t^2$, $y = t^3 - t$
 40. $x = 2 + t^2$, $y = t^2 + t^3$
 41. $x = 2t + \ln t$, $y = 2t - \ln t$
 42. $x = t^2$, $y = \ln t$
 43. $x = \sin t$, $y = \cos t$, $0 < t < \pi$
 44. $x = 4 \cos t$, $y = 2 \sin t$, $0 < t < 2\pi$

Longitud de arco En los ejercicios 45-50, halle la longitud de arco de la curva en el intervalo dado.

Ecuaciones paramétricas	Intervalo
45. $x = 3t + 5, y = 7 - 2t$	$-1 \leq t \leq 3$
46. $x = 6t^2, y = 2t^3$	$1 \leq t \leq 4$
47. $x = e^{-t} \cos t, y = e^{-t} \sin t$	$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$
48. $x = \arcsen t, y = \ln \sqrt{1 - t^2}$	$0 \leq t \leq \frac{1}{2}$
49. $x = \sqrt{t}, y = 3t - 1$	$0 \leq t \leq 1$
50. $x = t, y = \frac{t^5}{10} + \frac{1}{6t^3}$	$1 \leq t \leq 2$

Longitud de arco En los ejercicios 51-54, halle la longitud de arco de la curva en el intervalo $[0, 2\pi]$.


- 51. Perímetro de una hipocicloide: $x = a \cos^3 \theta, y = a \sin^3 \theta$
- 52. Circunferencia de un círculo: $x = a \cos \theta, y = a \sin \theta$
- 53. Arco de una cicloide: $x = a(\theta - \sin \theta), y = a(1 - \cos \theta)$
- 54. Evolvente o involuta de un círculo: $x = \cos \theta + \theta \sin \theta, y = \sin \theta - \theta \cos \theta$.

 **55. Trayectoria de un proyectil** La trayectoria de un proyectil se describe por medio de las ecuaciones paramétricas

$$x = (90 \cos 30^\circ)t \quad y = (90 \sin 30^\circ)t - 16t^2$$


donde x y y se miden en pies.

- (a) Utilice una herramienta de graficación para trazar la trayectoria del proyectil.
- (b) Utilice una herramienta de graficación para estimar el alcance del proyectil.
- (c) Utilice las funciones de integración de una herramienta de graficación para aproximar la longitud de arco de la trayectoria. Compare este resultado con el alcance del proyectil.

 **56. Trayectoria de un proyectil** Si el proyectil del ejercicio 55 se lanza formando un ángulo θ con la horizontal, sus ecuaciones paramétricas son

$$x = (90 \cos \theta)t \quad y = (90 \sin \theta)t - 16t^2.$$

Use una herramienta de graficación para hallar el ángulo que maximiza el alcance del proyectil. ¿Qué ángulo maximiza la longitud de arco de la trayectoria?

 **57. Folio de Descartes** Considere las ecuaciones paramétricas

$$x = \frac{4t}{1 + t^3} \quad y = \frac{4t^2}{1 + t^3}.$$


- (a) Use una herramienta de graficación para trazar la curva descrita por las ecuaciones paramétricas.
- (b) Use una herramienta de graficación para hallar los puntos de tangencia horizontal a la curva.
- (c) Use las funciones de integración de una herramienta de graficación para aproximar la longitud de arco del lazo cerrado. (Sugerencia: Use la simetría e integre sobre el intervalo $0 \leq t \leq 1$.)

 **58. Bruja de Agnesi** Considere las ecuaciones paramétricas

$$x = 4 \cot \theta \quad y = 4 \sin^2 \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

- (a) Emplee una herramienta de graficación para trazar la curva descrita por las ecuaciones paramétricas.
- (b) Utilice una herramienta de graficación para hallar los puntos de tangencia horizontal a la curva.
- (c) Use las funciones de integración de una herramienta de graficación para aproximar la longitud de arco en el intervalo $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$.

59. Redacción

 (a) Use una herramienta de graficación para representar cada conjunto de ecuaciones paramétricas.

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$


$$x = 2t - \sin(2t), \quad y = 1 - \cos(2t), \quad 0 \leq t \leq \pi$$

(b) Compare las gráficas de los dos conjuntos de ecuaciones paramétricas del inciso (a). Si la curva representa el movimiento de una partícula y t es tiempo, ¿qué puede inferirse acerca de las velocidades promedio de la partícula en las trayectorias representadas por los dos conjuntos de ecuaciones paramétricas?

(c) Sin trazar la curva, determine el tiempo que requiere la partícula para recorrer las mismas trayectorias que en los incisos (a) y (b) si la trayectoria está descrita por

$$x = \frac{1}{2}t - \sin\left(\frac{1}{2}t\right) \quad y = 1 - \cos\left(\frac{1}{2}t\right).$$

60. Redacción


 (a) Cada conjunto de ecuaciones paramétricas representa el movimiento de una partícula. Use una herramienta de graficación para representar cada conjunto.

$$\text{Primera partícula: } x = 3 \cos t, \quad y = 4 \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\text{Segunda partícula: } x = 4 \sin t, \quad y = 3 \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

- (b) Determine el número de puntos de intersección.
- (c) ¿Estarán las partículas en algún momento en el mismo lugar al mismo tiempo? Si es así, identifique esos puntos.
- (d) Explique qué ocurre si el movimiento de la segunda partícula se representa por

$$x = 2 + 3 \sin t, \quad y = 2 - 4 \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

 **Área de una superficie** En los ejercicios 61-64, dé una integral que represente el área de la superficie generada por revolución de la curva alrededor del eje x . Use una herramienta de graficación para aproximar la integral.

Ecuaciones paramétricas	Intervalo
61. $x = 3t, y = t + 2$	$0 \leq t \leq 4$
62. $x = \frac{1}{4}t^2, y = t + 3$	$0 \leq t \leq 3$
63. $x = \cos^2 \theta, y = \cos \theta$	$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
64. $x = \theta + \sin \theta, y = \theta + \cos \theta$	$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

Área de una superficie En los ejercicios 65-70, encuentre el área de la superficie generada por revolución de la curva alrededor de cada uno de los ejes dados.

65. $x = 2t, y = 3t, 0 \leq t \leq 3$
 (a) Eje x (b) Eje y
66. $x = t, y = 4 - 2t, 0 \leq t \leq 2$
 (a) Eje x (b) Eje y
67. $x = 5 \cos \theta, y = 5 \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, eje y
68. $x = \frac{1}{3}t^3, y = t + 1, 1 \leq t \leq 2$, eje y
69. $x = a \cos^3 \theta, y = a \sin^3 \theta, 0 \leq \theta \leq \pi$, eje x
70. $x = a \cos \theta, y = b \sin \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$
 (a) Eje x (b) Eje y

DESARROLLO DE CONCEPTOS

71. **Forma paramétrica de la derivada** Dé la forma paramétrica de la derivada.

Matemática mental En los ejercicios 72 y 73, determine mentalmente dy/dx .

72. $x = t, y = 3$ 73. $x = t, y = 6t - 5$

74. **Longitud de arco** Dé la fórmula integral para la longitud de arco en forma paramétrica.

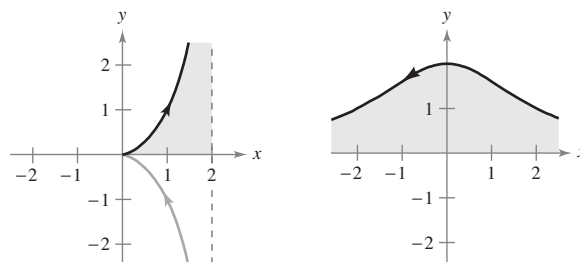
75. **Área de una superficie** Dé las fórmulas integrales para las áreas de superficies de revolución generadas por revolución de una curva suave C alrededor (a) del eje x y (b) del eje y .

78. **Área de una superficie** Una porción de una esfera de radio r se elimina cortando un cono circular con vértice en el centro de la esfera. El vértice del cono forma un ángulo 2θ . Halle el área de superficie eliminada de la esfera.

Área En los ejercicios 79 y 80, halle el área de la región. (Use el resultado del ejercicio 77.)

79. $x = 2 \sin^2 \theta$
 $y = 2 \sin^2 \theta \tan \theta$
 $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$

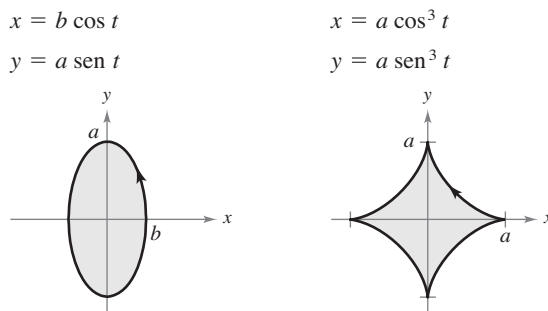
80. $x = 2 \cot \theta$
 $y = 2 \sin^2 \theta$
 $0 < \theta < \pi$



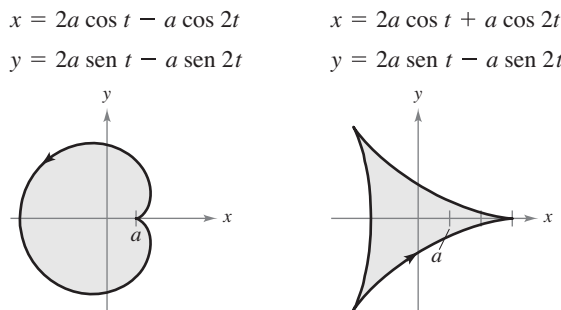
Áreas de curvas cerradas simples En los ejercicios 81-86, use un sistema algebraico por computadora y el resultado del ejercicio 77 para relacionar la curva cerrada con su área. (Estos ejercicios fueron adaptados del artículo "The Surveyor's Area Formula", de Bart Braden, en la publicación de septiembre de 1986 del *College Mathematics Journal*, pp. 335-337, con autorización del autor.)

- (a) $\frac{8}{3}ab$ (b) $\frac{3}{8}\pi a^2$ (c) $2\pi a^2$
 (d) πab (e) $2\pi ab$ (f) $6\pi a^2$

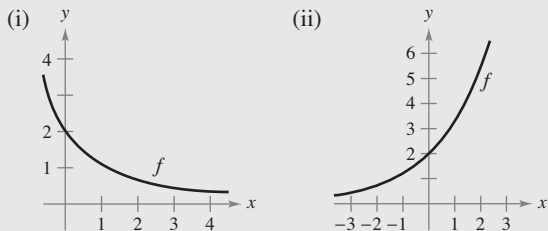
81. Elipse: ($0 \leq t \leq 2\pi$) 82. Astroide: ($0 \leq t \leq 2\pi$)



83. Cardioide: ($0 \leq t \leq 2\pi$) 84. Deltoide: ($0 \leq t \leq 2\pi$)



76. **¿CÓMO LO VE?** (a) Utilizando la gráfica de f , determine si dy/dt es positiva o negativa dado que dx/dt es negativa, y (b) determine si dy/dt es positiva o negativa dado que dy/dt es positiva. Explique su razonamiento.



77. **Integrar por sustitución** Mediante integración por sustitución demuestre que si y es una función continua de x en el intervalo $a \leq x \leq b$, donde $x = f(t)$ y $y = g(t)$, entonces

$$\int_a^b y \, dx = \int_{t_1}^{t_2} g(t)f'(t) \, dt$$

donde $f(t_1) = a, f(t_2) = b$, y tanto g como f' son continuas en $[t_1, t_2]$.

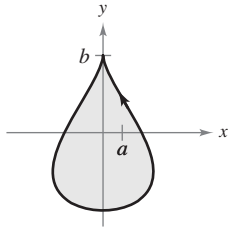
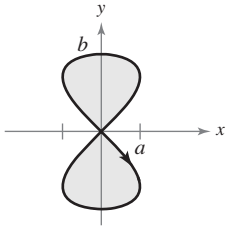
85. Reloj de arena: $(0 \leq t \leq 2\pi)$ 86. Lágrima: $(0 \leq t \leq 2\pi)$

$$x = a \sin 2t$$

$$y = b \sin t$$

$$x = 2a \cos t - a \sin 2t$$

$$y = b \sin t$$



Centroide En los ejercicios 87 y 88, halle el centroide de la región limitada por la gráfica de las ecuaciones paramétricas y los ejes de coordenadas. (Use el resultado del ejercicio 77.)

87. $x = \sqrt{t}$, $y = 4 - t$ 88. $x = \sqrt{4 - t}$, $y = \sqrt{t}$

Volumen En los ejercicios 89 y 90, halle el volumen del sólido generado por revolución en torno al eje x de la región limitada por la gráfica de las ecuaciones dadas. (Use el resultado del ejercicio 77.)

89. $x = 6 \cos \theta$, $y = 6 \sin \theta$

90. $x = \cos \theta$, $y = 3 \sin \theta$, $a > 0$

91. **Cicloide** Emplee las ecuaciones paramétricas

$$x = a(\theta - \sin \theta) \quad y = a(1 - \cos \theta), \quad a > 0$$

para responder lo siguiente.

- Halle dy/dx y d^2y/dx^2 .
- Halle las ecuaciones de la recta tangente en el punto en el que $\theta = \pi/6$.
- Localice todos los puntos (si los hay) de tangencia horizontal.
- Calcule dónde es la curva cóncava hacia arriba y dónde es cóncava hacia abajo.
- Halle la longitud de un arco de la curva.

92. **Uso de ecuaciones paramétricas** Emplee las ecuaciones paramétricas

$$x = t^2\sqrt{3} \quad y = 3t - \frac{1}{3}t^3$$

para los incisos siguientes.

- Emplee una herramienta de graficación para trazar la curva en el intervalo $-3 \leq t \leq 3$.
- Halle dy/dx y d^2y/dx^2 .
- Halle la ecuación de la recta tangente en el punto $(\sqrt{3}, \frac{8}{3})$.
- Halle la longitud de la curva.
- Halle el área de la superficie generada por revolución de la curva en torno al eje x .

93. **Evoluta o involuta de círculo** La evoluta o involuta de un círculo está descrita por el extremo P de una cuerda que se mantiene tensa mientras se desenrolla de un cañete que no gira (vea la figura). Demuestre que la siguiente es una representación paramétrica de la evoluta o involuta.

$$x = r(\cos \theta + \theta \sin \theta) \quad y = r(\sin \theta - \theta \cos \theta).$$

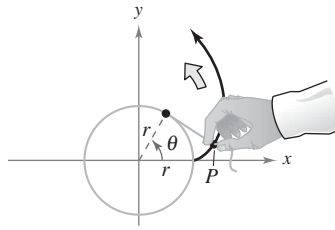


Figura para 93

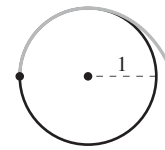


Figura para 94

94. **Evoluta o involuta de un círculo** La figura muestra un segmento de cuerda sujeto a un círculo de radio 1. La cuerda es justo lo suficientemente larga para llegar al lado opuesto del círculo. Encuentre el área que se cubre cuando la cuerda se desenrolla en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

95. **Uso de ecuaciones paramétricas**

- Use una herramienta de graficación para trazar la curva dada por

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad y = \frac{2t}{1 + t^2}$$

donde $-20 \leq t \leq 20$

- Describa la gráfica y confirme la respuesta en forma analítica.
- Analice la rapidez a la cual se traza la curva cuando t aumenta de -20 a 20 .

96. **Tractriz** Una persona se mueve desde el origen a lo largo del eje y y positivo tirando un peso atado al extremo de una cuerda de 12 metros de largo. Inicialmente, el peso está situado en el punto $(12, 0)$.

- En el ejercicio 90 de la sección 8.7 se demostró que la trayectoria del peso se describe mediante la siguiente ecuación rectangular

$$y = -12 \ln \left(\frac{12 - \sqrt{144 - x^2}}{x} \right) - \sqrt{144 - x^2}$$

donde $0 < x \leq 12$. Use una herramienta de graficación para representar la ecuación rectangular.

- Use una herramienta de graficación para trazar la gráfica de las ecuaciones paramétricas

$$x = 12 \operatorname{sech} \frac{t}{12} \quad y = t - 12 \tanh \frac{t}{12}$$

donde $t \geq 0$. Compare esta gráfica con la del inciso (a). ¿Qué gráfica (si hay alguna) representa mejor la trayectoria?

- Emplee las ecuaciones paramétricas de la tractriz para verificar que la distancia de la intersección con el eje y de la recta tangente al punto de tangencia es independiente de la ubicación del punto de tangencia.

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 97 y 98, determine si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explique por qué o dé un ejemplo que demuestre que es falsa.

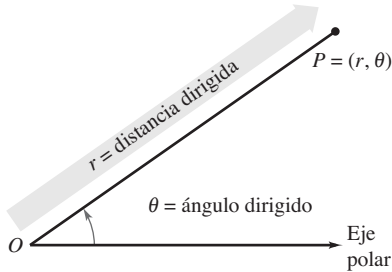
97. Si $x = f(t)$ y $y = g(t)$, entonces $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{g''(t)}{f''(t)}$.

98. La curva dada por $x = t^3$, $y = t^2$ tiene una tangente horizontal en el origen puesto que $dy/dt = 0$ cuando $t = 0$.

2.3 Coordenadas polares y gráficas polares

- Comprender el sistema de coordenadas polares.
- Expresar coordenadas y ecuaciones rectangulares en forma polar y viceversa.
- Trazar la gráfica de una ecuación dada en forma polar.
- Hallar la pendiente de una recta tangente a una gráfica polar.
- Identificar diversos tipos de gráficas polares especiales.

Coordenadas polares



Coordenadas polares.

Figura 2.17

Hasta ahora las gráficas se han venido representando como colecciones de puntos (x, y) en el sistema de coordenadas rectangulares. Las ecuaciones correspondientes a estas gráficas han estado en forma rectangular o en forma paramétrica. En esta sección se estudiará un sistema de coordenadas denominado **sistema de coordenadas polares**.

Para formar el sistema de coordenadas polares en el plano, se fija un punto O , llamado el **polo** (u **origen**), y a partir de O se traza un rayo inicial llamado eje polar, como se muestra en la figura 2.17. A continuación, a cada punto P en el plano se le asignan **coordenadas polares** (r, θ) , como sigue.

$r =$ distancia dirigida de O a P

$\theta =$ ángulo dirigido, en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el eje polar hasta el segmento OP

La figura 2.18 muestra tres puntos en el sistema de coordenadas polares. Observe que en este sistema es conveniente localizar los puntos con respecto a una retícula de circunferencias concéntricas cortadas por **rectas radiales** que pasan por el polo.

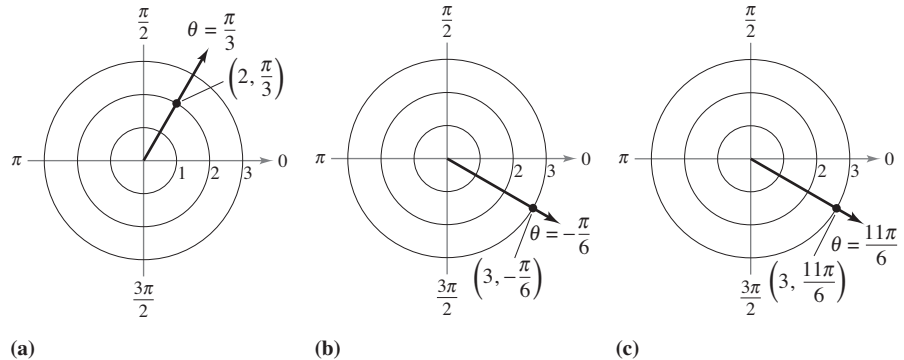


Figura 2.18

En coordenadas rectangulares, cada punto (x, y) tiene una representación única. Esto no sucede con las coordenadas polares. Por ejemplo, las coordenadas

$$(r, \theta) \quad \text{y} \quad (r, 2\pi + \theta)$$

representan el mismo punto [ver los incisos (b) y (c) de la figura 2.18]. También, como r es una distancia dirigida, las coordenadas

$$(r, \theta) \quad \text{y} \quad (-r, \theta + \pi)$$

representan el mismo punto. En general, el punto (r, θ) puede expresarse como

$$(r, \theta) = (r, \theta + 2n\pi)$$

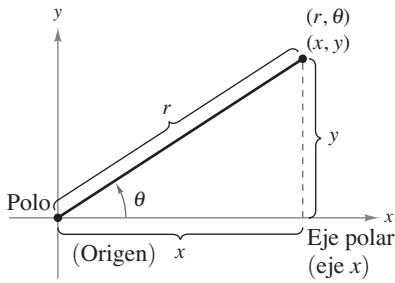
o

$$(r, \theta) = (-r, \theta + (2n + 1)\pi)$$

donde n es cualquier entero. Además, el polo está representado por $(0, \theta)$, donde θ es cualquier ángulo.

COORDENADAS POLARES

El matemático al que se le atribuye haber usado por primera vez las coordenadas polares es James Bernoulli, quien las introdujo en 1691. Sin embargo, ciertas evidencias señalan la posibilidad de que fuera Isaac Newton el primero en usarlas.



Relación entre coordenadas polares y rectangulares.
Figura 2.19

Transformación de coordenadas

Para establecer una relación entre coordenadas polares y rectangulares, se hace coincidir el eje polar con el eje x positivo y el polo con el origen, como se ilustra en la figura 2.19. Puesto que (x, y) se encuentra en un círculo de radio r , se sigue que

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Para $r > 0$, la definición de las funciones trigonométricas implica que

$$\tan \theta = \frac{y}{x}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r} \quad \text{y} \quad \text{sen } \theta = \frac{y}{r}.$$

Si $r < 0$, estas relaciones también son válidas, como se puede verificar.

TEOREMA 2.4 Transformación de coordenadas

Las coordenadas polares (r, θ) de un punto están relacionadas con las coordenadas rectangulares (x, y) de ese punto como sigue.

Polar a rectangular

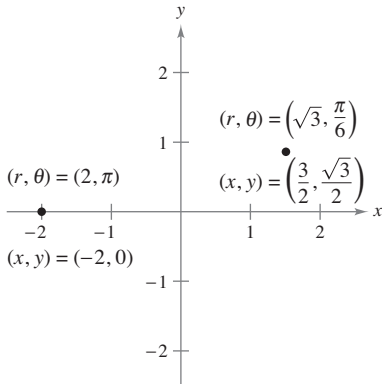
$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \text{ sen } \theta$$

Rectangular a polar

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$



Para pasar de coordenadas polares a rectangulares, se toma $x = r \cos \theta$ y $y = r \text{ sen } \theta$.

Figura 2.20

EJEMPLO 1

Transformar coordenadas polares a rectangulares

- a. Dado el punto $(r, \theta) = (2, \pi)$,

$$x = r \cos \theta = 2 \cos \pi = -2 \quad \text{y} \quad y = r \text{ sen } \theta = 2 \text{ sen } \pi = 0.$$

Por tanto, las coordenadas rectangulares son $(x, y) = (-2, 0)$.

- b. Dado el punto $(r, \theta) = (\sqrt{3}, \pi/6)$,

$$x = \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2} \quad \text{y} \quad y = \sqrt{3} \text{ sen } \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Por tanto, las coordenadas rectangulares son $(x, y) = (3/2, \sqrt{3}/2)$.
Vea la figura 2.20.

EJEMPLO 2

Transformar coordenadas rectangulares a polares

- a. Dado el punto del segundo cuadrante $(x, y) = (-1, 1)$,

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = -1 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{3\pi}{4}.$$

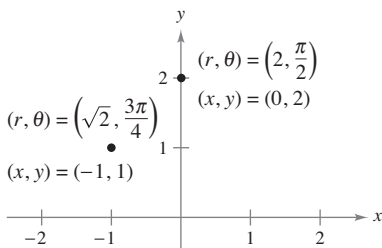
Como θ se eligió en el mismo cuadrante que (x, y) , se debe usar un valor positivo para r .

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ &= \sqrt{(-1)^2 + (1)^2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Esto implica que un conjunto de coordenadas polares es $(r, \theta) = (\sqrt{2}, 3\pi/4)$.

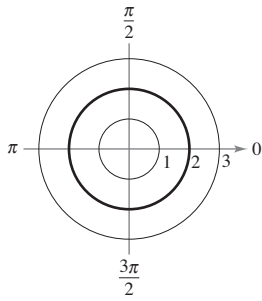
- b. Dado que el punto $(x, y) = (0, 2)$ se encuentra en el eje y positivo, se elige $\theta = \pi/2$ y $r = 2$, y un conjunto de coordenadas polares es $(r, \theta) = (2, \pi/2)$.

Vea la figura 2.21.

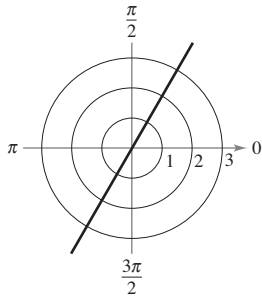


Para pasar de coordenadas rectangulares a polares, se toma $\tan \theta = y/x$ y $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

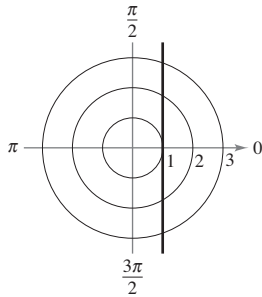
Figura 2.21



(a) Círculo: $r = 2$



(b) Recta radial: $\theta = \frac{\pi}{3}$



(c) Recta vertical: $r = \sec \theta$

Figura 2.22

Gráficas polares

Una manera de trazar la gráfica de una ecuación polar consiste en transformarla a coordenadas rectangulares, para luego trazar la gráfica de la ecuación rectangular.

EJEMPLO 3

Trazar ecuaciones polares

Describa la gráfica de cada ecuación polar. Confirme cada descripción transformando la ecuación a ecuación rectangular.

- a. $r = 2$ b. $\theta = \frac{\pi}{3}$ c. $r = \sec \theta$

Solución

a. La gráfica de la ecuación polar $r = 2$ consta de todos los puntos que se encuentran a dos unidades del polo. En otras palabras, esta gráfica es la circunferencia que tiene su centro en el origen y radio 2. [Vea la figura 2.22(a).] Esto se puede confirmar utilizando la relación $r^2 = x^2 + y^2$ para obtener la ecuación rectangular

$$x^2 + y^2 = 2^2. \quad \text{Ecuación rectangular}$$

b. La gráfica de la ecuación polar $\theta = \pi/3$ consta de todos los puntos sobre la semirrecta que forma un ángulo de $\pi/3$ con el semieje x positivo. [Vea la figura 2.22(b).] Para confirmar esto, se puede utilizar la relación $\tan \theta = y/x$ para obtener la ecuación rectangular

$$y = \sqrt{3}x. \quad \text{Ecuación rectangular}$$

c. La gráfica de la ecuación polar $r = \sec \theta$ no resulta evidente por inspección simple, por lo que hay que empezar por pasarla a la forma rectangular mediante la relación

$$\begin{aligned} r &= \sec \theta && \text{Ecuación polar} \\ r \cos \theta &= 1 \\ x &= 1 && \text{Ecuación rectangular} \end{aligned}$$

Por la ecuación rectangular se puede ver que la gráfica es una recta vertical. [Vea la figura 2.22(c).]

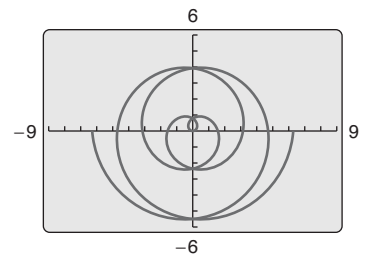
► **TECNOLOGÍA** Dibujar *a mano* las gráficas de ecuaciones polares complicadas puede ser tedioso. Sin embargo, con el empleo de la tecnología la tarea no es difícil. Si la herramienta de graficación que se emplea cuenta con modo *polar*, úsela para trazar la gráfica de las ecuaciones de la serie de ejercicios. Si la herramienta de graficación no cuenta con modo *polar*, pero sí con modo *paramétrico*, puede trazar la gráfica de $r = f(\theta)$ expresando la ecuación como

$$\begin{aligned} x &= f(\theta) \cos \theta \\ y &= f(\theta) \sin \theta. \end{aligned}$$

Por ejemplo, la gráfica de $r = \frac{1}{2}\theta$ que se muestra en la figura 2.23 se generó con una herramienta de graficación en modo paramétrico. La gráfica de la ecuación se obtuvo usando las ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\theta \cos \theta \\ y &= \frac{1}{2}\theta \sin \theta \end{aligned}$$

con valores de θ que van desde -4π hasta 4π . Esta curva es de la forma $r = a\theta$ y se denomina **espiral de Arquímedes**.



Espiral de Arquímedes.

Figura 2.23

EJEMPLO 4 Trazar una gráfica polar

•••► Consulte *LarsonCalculus.com* para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Dibuje la gráfica de $r = 2 \cos 3\theta$.



Solución Para empezar, exprese la ecuación polar en forma paramétrica.

$$x = 2 \cos 3\theta \cos \theta \quad \text{y} \quad y = 2 \cos 3\theta \sin \theta$$

Tras experimentar un poco, encuentre que la curva completa, la cual se llama **curva rosa**, puede dibujarse haciendo variar a θ desde 0 hasta π , como se muestra en la figura 2.24. Si traza la gráfica con una herramienta de graficación, verá que haciendo variar a θ desde 0 hasta 2π , se traza la curva entera *dos veces*.

• **COMENTARIO** Una forma de bosquejar la gráfica de $r = 2 \cos 3\theta$ a mano, es elaborar una tabla de valores.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
r	2	0	-2	0	2

Si se amplía la tabla y se representan los puntos gráficamente se obtiene la curva mostrada en el ejemplo 4.

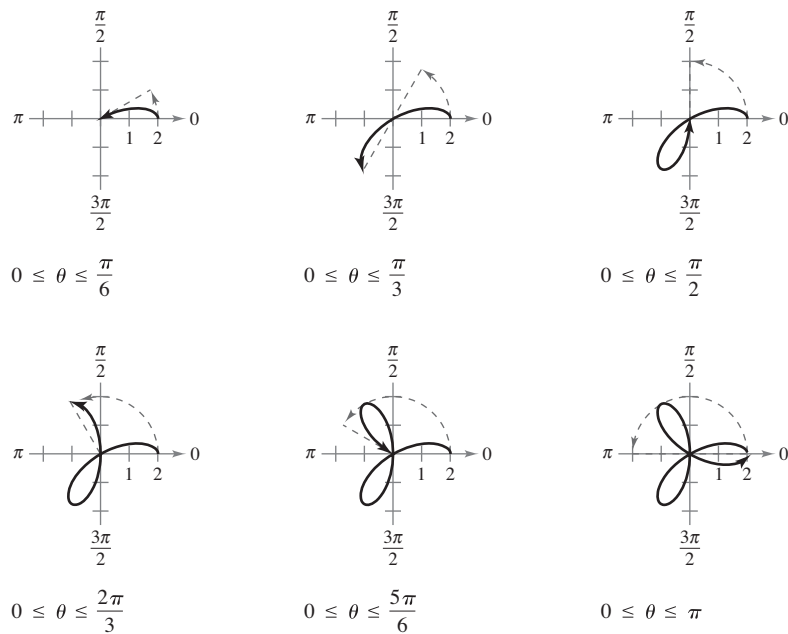
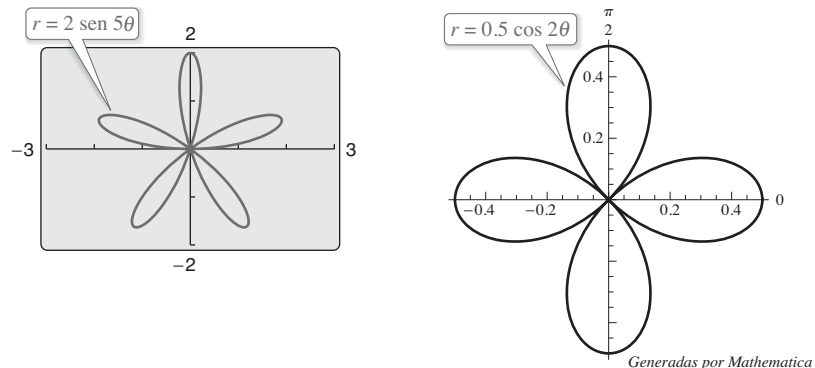


Figura 2.24

Use una herramienta de graficación para experimentar con otras curvas rosa. Observe que estas curvas son de la forma

$$r = a \cos n\theta \quad \text{o} \quad r = a \sin n\theta.$$

Por ejemplo, las curvas que se muestran en la figura 2.25 son otros dos tipos de curvas rosa.



Generadas por Mathematica

Curvas rosa.
Figura 2.25

Pendiente y rectas tangentes

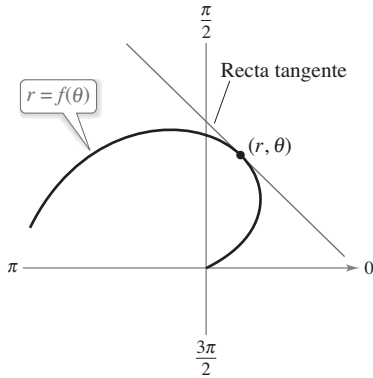
Para encontrar la pendiente de una recta tangente a una gráfica polar, considere una función derivable $r = f(\theta)$. Para encontrar la pendiente en forma polar, se usan las ecuaciones paramétricas

$$x = r \cos \theta = f(\theta) \cos \theta \quad y \quad y = r \sin \theta = f(\theta) \sin \theta.$$

Mediante el uso de la forma paramétrica de dy/dx dada en el teorema 2.1, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{f(\theta) \cos \theta + f'(\theta) \sin \theta}{-f(\theta) \sin \theta + f'(\theta) \cos \theta}$$

con lo cual se establece el teorema siguiente.



Recta tangente a la curva polar.

Figura 2.26

TEOREMA 2.5 Pendiente en forma polar

Si f es una función derivable de θ , entonces la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $r = f(\theta)$ en el punto (r, θ) es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{f(\theta) \cos \theta + f'(\theta) \sin \theta}{-f(\theta) \sin \theta + f'(\theta) \cos \theta}$$

siempre que $dx/dy \neq 0$ en (r, θ) . (Vea la figura 2.26.)

En el teorema 2.5 se pueden hacer las observaciones siguientes:

1. Las soluciones $\frac{dy}{d\theta} = 0$ dan una tangente horizontal, siempre que $\frac{dx}{d\theta} \neq 0$.
2. Las soluciones $\frac{dx}{d\theta} = 0$ dan una tangente vertical, siempre que $\frac{dy}{d\theta} \neq 0$.

Si $dy/d\theta$ y $dx/d\theta$ *simultáneamente* son 0, no se puede extraer ninguna conclusión respecto a las rectas tangentes.

EJEMPLO 5

Hallar rectas tangentes horizontales y verticales

Halle las rectas tangentes horizontales y verticales a $r = \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

Solución Para empezar, exprese la ecuación en forma paramétrica.

$$x = r \cos \theta = \sin \theta \cos \theta$$

y

$$y = r \sin \theta = \sin \theta \sin \theta = \sin^2 \theta$$

Después, derive x y y respecto de θ e iguale a 0 cada una de las derivadas.

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0, \frac{\pi}{2}$$

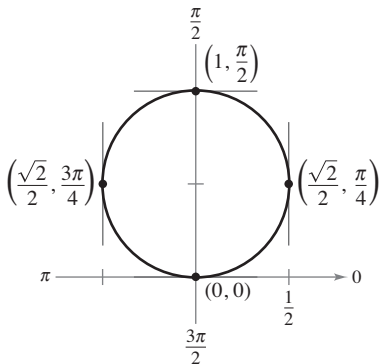
Por tanto, la gráfica tiene rectas tangentes verticales en

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right) \quad y \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$$

y tiene rectas tangentes horizontales en

$$(0, 0) \quad y \quad \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$$

como se muestra en la figura 2.27.



Rectas tangentes horizontales y verticales a $r = \sin \theta$.

Figura 2.27

EJEMPLO 6

Hallar las rectas tangentes horizontales y verticales

Halle las rectas tangentes horizontales y verticales a la gráfica de $r = 2(1 - \cos \theta)$.

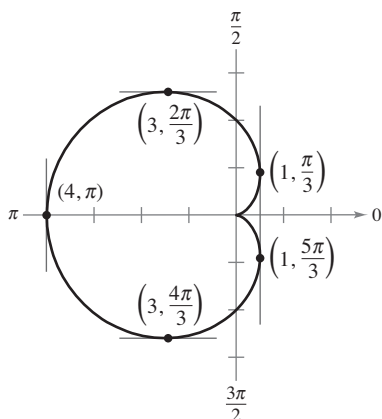
Solución Use $y = r \sin \theta$, y entonces derive respecto de θ .

$$\begin{aligned} y &= r \sin \theta \\ &= 2(1 - \cos \theta) \sin \theta \\ \frac{dy}{d\theta} &= 2[(1 - \cos \theta)(\cos \theta) + \sin \theta(\sin \theta)] \\ &= 2(\cos \theta - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\ &= 2(\cos \theta - \cos^2 \theta + 1 - \cos^2 \theta) \\ &= -2(2 \cos^2 \theta - \cos \theta - 1) \\ &= -2(2 \cos \theta + 1)(\cos \theta - 1) \end{aligned}$$

Igualando $dy/d\theta$ igual a 0, puede ver que $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ y $\cos \theta = 1$. Se concluye que $dy/d\theta = 0$ cuando $\theta = 0, 2\pi/3, 4\pi/3$ y 2π . De manera semejante, al emplear $x = r \cos \theta$, tiene

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ &= 2(1 - \cos \theta) \cos \theta \\ &= 2 \cos \theta - 2 \cos^2 \theta \\ \frac{dx}{d\theta} &= -2 \sin \theta + 4 \cos \theta \sin \theta \\ &= 2 \sin \theta(2 \cos \theta - 1). \end{aligned}$$

Haciendo $dx/d\theta$ igual a 0, puede ver que $\sin \theta = 0$ y $\cos \theta = \frac{1}{2}$. Se concluye que $dx/d\theta = 0$ cuando $\theta = 0, \pi, \pi/3$ y $5\pi/3$. A partir de estos resultados y de la gráfica que se presenta en la figura 2.28, se concluye que la gráfica tiene tangentes horizontales en $(3, 2\pi/3)$ y $(3, 4\pi/3)$, y tangentes verticales en $(1, \pi/3)$, $(1, 5\pi/3)$ y $(4, \pi)$. A esta gráfica se le llama **cardioides**. Observe que cuando $\theta = 0$ ambas derivadas ($dy/d\theta$ y $dx/d\theta$) son cero (es decir, se anulan). Sin embargo, esta única información no permite saber si la gráfica tiene una recta tangente horizontal o vertical en el polo. Pero a partir de la figura 2.28 se puede observar que la gráfica tiene una cúspide en el polo.



Rectas tangentes horizontales y verticales de $r = 2(1 - \cos \theta)$.

Figura 2.28

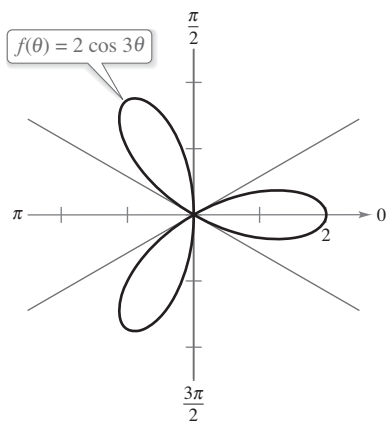
El teorema 2.5 tiene una consecuencia importante. Suponga que la gráfica de $r = f(\theta)$ pasa por el polo cuando $\theta = a$ y $f'(a) \neq 0$. Entonces la fórmula para dy/dx se simplifica como sigue.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(\alpha) \sin \alpha + f(\alpha) \cos \alpha}{f'(\alpha) \cos \alpha - f(\alpha) \sin \alpha} = \frac{f'(\alpha) \sin \alpha + 0}{f'(\alpha) \cos \alpha - 0} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

Por tanto, la recta $\theta = a$ es tangente a la gráfica en el polo $(0, a)$.

TEOREMA 2.6 Rectas tangentes en el polo

Si $f(a) = 0$ y $f'(a) \neq 0$, entonces la recta $\theta = a$ es tangente a la gráfica de $r = f(\theta)$ en el polo.



Esta curva rosa tiene, en el polo, tres rectas tangentes ($\theta = \pi/6, \theta = \pi/2$ y $\theta = 5\pi/6$).

Figura 2.29

El teorema 2.6 es útil porque establece que las raíces de $r = f(\theta)$ pueden usarse para encontrar las rectas tangentes en el polo. Observe que, puesto que una curva polar puede cruzar el polo más de una vez, en el polo puede haber más de una recta tangente. Por ejemplo, la curva rosa $f(\theta) = 2 \cos 3\theta$ tiene tres rectas tangentes en el polo, como se ilustra en la figura 2.29. En esta curva, $f(\theta) = 2 \cos 3\theta$ es 0 cuando θ es $\pi/6, \pi/2$ y $5\pi/6$. La derivada $f'(\theta) = -6 \sin 3\theta$ no es 0 en estos valores de θ .

Gráficas polares especiales

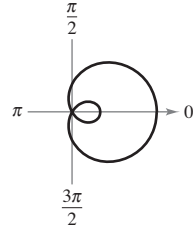
Algunos tipos importantes de gráficas tienen ecuaciones que son más simples en forma polar que en forma rectangular. Por ejemplo, la ecuación polar de un círculo de radio a y centro en el origen es simplemente $r = a$. Más adelante se verán las ventajas que esto tiene. Por ahora, se muestran abajo algunos tipos de gráficas cuyas ecuaciones son más simples en forma polar.

Caracoles

$$r = a \pm b \cos \theta$$

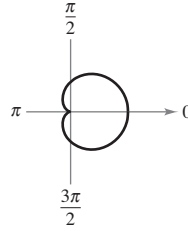
$$r = a \pm b \sin \theta$$

($a > 0, b > 0$)



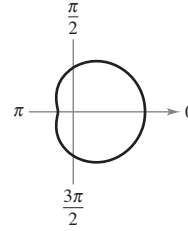
$$\frac{a}{b} < 1$$

Caracol con lazo interior



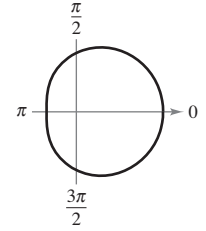
$$\frac{a}{b} = 1$$

Cardioide (forma de corazón)



$$1 < \frac{a}{b} < 2$$

Caracol con hoyuelo

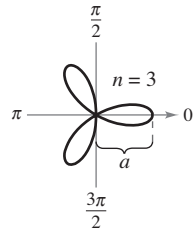


$$\frac{a}{b} \geq 2$$

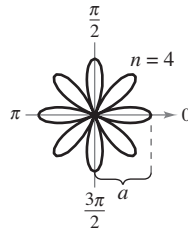
Caracol convexo

Curvas rosa

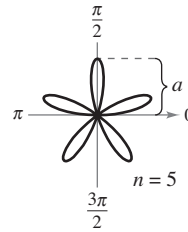
n pétalos si n es impar; $2n$ pétalos si n es par ($n > 2$)



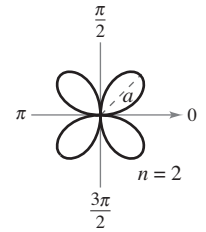
$r = a \cos n\theta$
Curva rosa



$r = a \cos n\theta$
Curva rosa

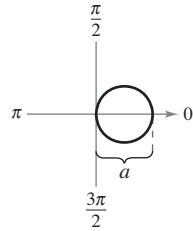


$r = a \sin n\theta$
Curva rosa

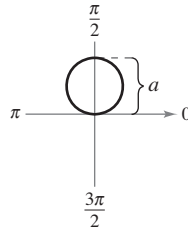


$r = a \sin n\theta$
Curva rosa

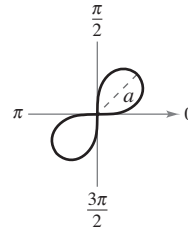
Círculos y lemniscatas



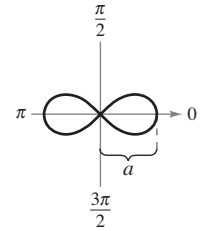
$r = a \cos \theta$
Círculo



$r = a \sin \theta$
Círculo



$r^2 = a^2 \sin 2\theta$
Lemniscata



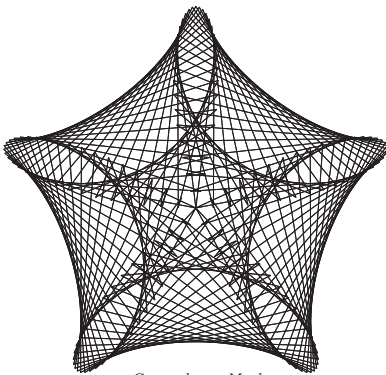
$r^2 = a^2 \cos 2\theta$
Lemniscata

TECNOLOGÍA Las curvas rosa descritas arriba son de la forma $r = a \cos n\theta$ o $r = a \sin n\theta$, donde n es un entero positivo mayor o igual a 2. Use una herramienta de graficación para trazar las gráficas de

$$r = a \cos n\theta \quad \text{o} \quad r = a \sin n\theta$$

con valores no enteros de n . ¿Son estas gráficas también curvas rosa? Por ejemplo, trace la gráfica de

$$r = \cos \frac{2}{3}\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 6\pi.$$



Generada con Maple.

PARA INFORMACIÓN ADICIONAL Para más información sobre curvas rosa y otras curvas relacionadas con ellas, vea el artículo “A Rose is a Rose . . .”, de Peter M. Maurer, en *The American Mathematical Monthly*. La gráfica generada por computadora que se observa al lado izquierdo, es resultado de un algoritmo que Maurer llama “La rosa”. Para ver este artículo vaya a MathArticles.com.

2.3 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Transformar polar a rectangular En los ejercicios 1-10, represente gráficamente el punto dado en coordenadas polares y halle las coordenadas rectangulares correspondientes.

1. $(8, \frac{\pi}{2})$
2. $(-2, \frac{5\pi}{3})$
3. $(-4, -\frac{3\pi}{4})$
4. $(0, -\frac{7\pi}{6})$
5. $(7, \frac{5\pi}{4})$
6. $(-2, \frac{11\pi}{6})$
7. $(\sqrt{2}, 2.36)$
8. $(-3, -1.57)$
9. $(-4.5, 3.5)$
10. $(9.25, 1.2)$

Transformar rectangular a polar En los ejercicios 11-20 se dan las coordenadas rectangulares de un punto dado. Localice gráficamente el punto y halle *dos* conjuntos de coordenadas polares del punto con $0 \leq \theta < 2\pi$.

11. $(2, 2)$
12. $(0, -6)$
13. $(-3, 4)$
14. $(4, -2)$
15. $(-1, -\sqrt{3})$
16. $(3, -\sqrt{3})$
17. $(3, -2)$
18. $(3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$
19. $(\frac{7}{4}, \frac{5}{2})$
20. $(0, -5)$

21. **Trazar un punto** Represente gráficamente el punto $(4, 3.5)$ si el punto está dado

- (a) en coordenadas rectangulares
- (b) en coordenadas polares.



22. **Razonamiento gráfico**

- (a) En una herramienta de graficación, seleccione formato de ventana para coordenadas polares y coloque el cursor en cualquier posición fuera de los ejes. Mueva el cursor en sentido horizontal y en sentido vertical. Describa todo cambio en las coordenadas de los puntos.
- (b) En una herramienta de graficación, seleccione el formato de ventana para coordenadas polares y coloque el cursor en cualquier posición fuera de los ejes. Mueva el cursor en sentido horizontal y en sentido vertical. Describa todo cambio en las coordenadas de los puntos.
- (c) ¿Por qué difieren los resultados obtenidos en los incisos (a) y (b)?

Transformar rectangular a polar En los ejercicios 23-32, transforme la ecuación rectangular a la forma polar y trace su gráfica.

23. $x^2 + y^2 = 9$
24. $x^2 - y^2 = 9$
25. $x^2 + y^2 = a^2$
26. $x^2 + y^2 - 2ax = 0$
27. $y = 8$
28. $x = 12$
29. $3x - y + 2 = 0$
30. $xy = 4$
31. $y^2 = 9x$
32. $(x^2 + y^2)^2 - 9(x^2 - y^2) = 0$

Transformar rectangular a polar En los ejercicios 33-42, transforme la ecuación rectangular a la forma polar y trace su gráfica.

33. $r = 4$
34. $r = -5$
35. $r = 3 \sin \theta$
36. $r = 5 \cos \theta$
37. $r = \theta$
38. $\theta = \frac{5\pi}{6}$
39. $r = 3 \sec \theta$
40. $r = 2 \csc \theta$
41. $r = \sec \theta \tan \theta$
42. $r = \cot \theta \csc \theta$



Graficar una ecuación polar En los ejercicios 43-52, use una herramienta de graficación para representar la ecuación polar. Halle un intervalo para θ en el que la gráfica se trace solo una vez.

43. $r = 2 - 5 \cos \theta$
44. $r = 3(1 - 4 \cos \theta)$
45. $r = 2 + \sin \theta$
46. $r = 4 + 3 \cos \theta$
47. $r = \frac{2}{1 + \cos \theta}$
48. $r = \frac{2}{4 - 3 \sin \theta}$
49. $r = 2 \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$
50. $r = 3 \sin\left(\frac{5\theta}{2}\right)$
51. $r^2 = 4 \sin 2\theta$
52. $r^2 = \frac{1}{\theta}$

53. **Verificar una ecuación polar** Convierta la ecuación

$$r = 2(h \cos \theta + k \sin \theta)$$

a la forma rectangular y verifique que sea la ecuación de un círculo. Halle el radio y las coordenadas rectangulares de su centro.

54. **Fórmula para la distancia**

- (a) Verifique que la fórmula para la distancia entre dos puntos (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2) dados en coordenadas polares es

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}.$$

- (b) Describa las posiciones de los puntos, en relación uno con otro, si $\theta_1 = \theta_2$. Simplifique la fórmula de la distancia para este caso. ¿Es la simplificación lo que se esperaba? Explique por qué.
- (c) Simplifique la fórmula de la distancia si $\theta_1 - \theta_2 = 90^\circ$. ¿Es la simplificación lo que se esperaba? Explique por qué.
- (d) Seleccione dos puntos en el sistema de coordenadas polares y encuentre la distancia entre ellos. Luego elija representaciones polares diferentes para los mismos dos puntos y aplique la fórmula para la distancia. Analice el resultado.

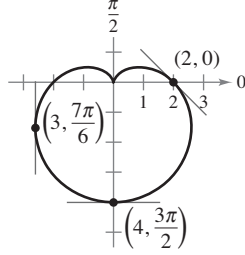
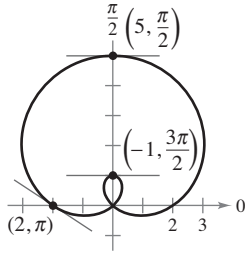
Fórmula para la distancia En los ejercicios 55-58, use el resultado del ejercicio 54 para aproximar la distancia entre los dos puntos descritos en coordenadas polares.

55. $(1, \frac{5\pi}{6})$, $(4, \frac{\pi}{3})$
56. $(8, \frac{7\pi}{4})$, $(5, \pi)$
57. $(2, 0.5)$, $(7, 1.2)$
58. $(4, 2.5)$, $(12, 1)_t$

Hallar pendientes de rectas tangentes En los ejercicios 59 y 60, halle dy/dx y las pendientes de las rectas tangentes que se muestran en las gráficas de las ecuaciones polares.

59. $r = 2 + 3 \operatorname{sen} \theta$

60. $r = 2(1 - \operatorname{sen} \theta)$



Hallar pendientes de rectas tangentes En los ejercicios 61-64, use una herramienta de graficación y (a) trace la gráfica de la ecuación polar, (b) dibuje la recta tangente en el valor dado de θ y (c) halle dy/dx en el valor dado de θ . (Sugerencia: Tome incrementos de θ iguales a $\pi/24$.)

61. $r = 3(1 - \cos \theta)$, $\theta = \frac{\pi}{2}$

62. $r = 3 - 2 \cos \theta$, $\theta = 0$

63. $r = 3 \operatorname{sen} \theta$, $\theta = \frac{\pi}{3}$

64. $r = 4$, $\theta = \frac{\pi}{4}$

Tangencia horizontal y vertical En los ejercicios 65 y 66, halle los puntos de tangencia horizontal y vertical (si los hay) a la curva polar.

65. $r = 1 - \operatorname{sen} \theta$

66. $r = a \operatorname{sen} \theta$

Tangencia horizontal En los ejercicios 67 y 68, halle los puntos de tangencia horizontal (si los hay) a la curva polar.

67. $r = 2 \operatorname{csc} \theta + 3$

68. $r = a \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta$

Rectas tangentes en el polo En los ejercicios 69-76, represente una gráfica de la ecuación polar.

69. $r = 5 \operatorname{sen} \theta$

70. $r = 5 \cos \theta$

71. $r = 2(1 - \operatorname{sen} \theta)$

72. $r = 3(1 - \cos \theta)$

73. $r = 4 \cos 3\theta$

74. $r = -\operatorname{sen} 5\theta$

75. $r = 3 \operatorname{sen} 2\theta$

76. $r = 3 \cos 2\theta$

Trazar una gráfica polar En los ejercicios 77-88, represente una gráfica de la ecuación polar.

77. $r = 8$

78. $r = 1$

79. $r = 4(1 + \cos \theta)$

80. $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$

81. $r = 3 - 2 \cos \theta$

82. $r = 5 - 4 \operatorname{sen} \theta$

83. $r = 3 \operatorname{csc} \theta$

84. $r = \frac{6}{2 \operatorname{sen} \theta - 3 \cos \theta}$

85. $r = 2\theta$

86. $r = \frac{1}{\theta}$

87. $r^2 = 4 \cos 2\theta$

88. $r^2 = 4 \operatorname{sen} \theta$

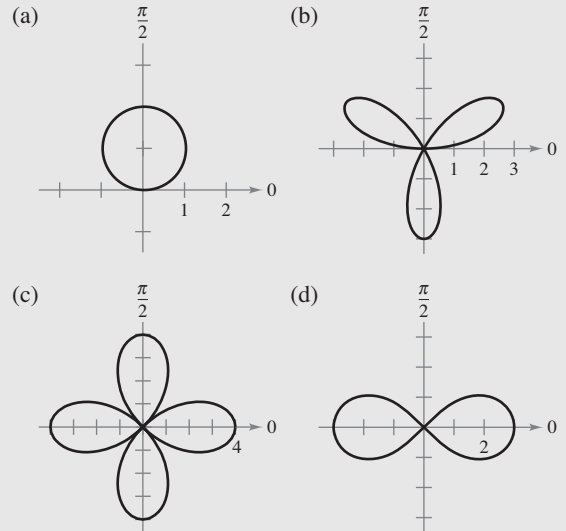
Asíntotas En los ejercicios 89-92, use una herramienta de graficación para representar la ecuación y demostrar que la recta dada es una asíntota de la gráfica.

Nombre de la gráfica	Ecuación polar	Asíntota
89. Concoide	$r = 2 - \sec \theta$	$x = -1$
90. Concoide	$r = 2 + \operatorname{csc} \theta$	$y = 1$
91. Espiral hiperbólica	$r = 2/\theta$	$y = 2$
92. Estrofoide	$r = 2 \cos 2\theta \sec \theta$	$x = -2$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

- 93. **Comparar sistemas coordenados** Describa las diferencias entre el sistema de coordenadas rectangulares y el sistema de coordenadas polares.
- 94. **Transformación de coordenadas** Dé las ecuaciones para pasar de coordenadas rectangulares a coordenadas polares y viceversa.
- 95. **Rectas tangentes** ¿Cómo se determinan las pendientes de rectas tangentes en coordenadas polares? ¿Qué son las rectas tangentes en el polo y cómo se determinan?

96. ¿CÓMO LO VE? Identifique cada gráfica polar especial y escriba su ecuación.



97. **Trazar una gráfica** Trace la gráfica de $r = 4 \operatorname{sen} \theta$ sobre el intervalo dado.

(a) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ (c) $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

98. **Para pensar** Utilice una herramienta graficadora para representar la ecuación polar $r = 6[1 + \cos(\theta - \phi)]$ para (a) $\phi = 0$, (b) $\phi = \pi/4$ y (c) $\phi = \pi/2$. Use las gráficas para describir el efecto del ángulo ϕ . Escriba la ecuación como función de $\operatorname{sen} \theta$ para el inciso (c).

99. **Curva rotada** Verifique que si la curva correspondiente a la ecuación polar $r = f(\theta)$ gira un ángulo ϕ , alrededor del polo, entonces la ecuación de la curva girada es $r = f(\theta - \phi)$.

100. Curva rotada La forma polar de una ecuación de una curva es $r = f(\text{sen } \theta)$. Compruebe que la forma se convierte en

- (a) $r = f(-\cos \theta)$ si la curva gira $\pi/2$ radianes alrededor del polo en sentido contrario a las manecillas del reloj.
- (b) $r = f(-\text{sen } \theta)$ si la curva gira π radianes alrededor del polo en sentido contrario a las manecillas del reloj.
- (c) $r = f(\cos \theta)$ si la curva gira $3\pi/2$ radianes alrededor del polo en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Curva rotada En los ejercicios 101-104, use los resultados de los ejercicios 99 y 100.

101. Dé la ecuación del caracol $r = 2 - \text{sen } \theta$ después de girar la cantidad indicada. Utilice una herramienta de graficación para representar el giro del caracol para (a) $\theta = \pi/4$, (b) $\theta = \pi/2$, (c) $\theta = \pi$ y (d) $\theta = 3\pi/2$.

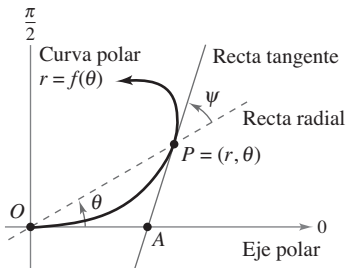
102. Dé una ecuación para la curva rosa $r = 2 \text{ sen } 2\theta$ después de girar la cantidad dada. Verifique los resultados usando una herramienta de graficación para representar el giro de la curva rosa para (a) $\theta = \pi/6$, (b) $\theta = \pi/2$, (c) $\theta = 2\pi/3$ y (d) $\theta = \pi$.

103. Dibuje la gráfica de cada ecuación.

(a) $r = 1 - \text{sen } \theta$ (b) $r = 1 - \text{sen} \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right)$

104. Demuestre que la tangente del ángulo ψ ($0 \leq \psi < \pi/2$) entre la recta radial y la recta tangente en el punto (r, θ) en la gráfica de $r = f(\theta)$ (vea la figura) está dada por

$$\tan \psi = \left| \frac{r}{dr/d\theta} \right|.$$



Encontrar un ángulo En los ejercicios 105-110, use los resultados del ejercicio 104 para hallar el ángulo ψ entre las rectas radial y tangente a la gráfica en el valor indicado de θ . Use una herramienta de graficación para representar la ecuación polar, de la recta radial y la recta tangente en el valor indicado de θ . Identifique el ángulo ψ .

Ecuación polar	Valor de θ
105. $r = 2(1 - \cos \theta)$	$\theta = \pi$
106. $r = 3(1 - \cos \theta)$	$\theta = \frac{3\pi}{4}$
107. $r = 2 \cos 3\theta$	$\theta = \frac{\pi}{4}$
108. $r = 4 \text{ sen } 2\theta$	$\theta = \frac{\pi}{6}$
109. $r = \frac{6}{1 - \cos \theta}$	$\theta = \frac{2\pi}{3}$
110. $r = 5$	$\theta = \frac{\pi}{6}$

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 111-114, determine si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explique por qué o dé un ejemplo que muestre que es falsa.

- 111. Si (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2) representan el mismo punto en el sistema de coordenadas polares, entonces $|r_1| = |r_2|$.
- 112. Si (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2) representan el mismo punto en el sistema de coordenadas polares, entonces $\theta_1 = \theta_2 + 2\pi n$ para algún entero n .
- 113. Si $x > 0$, entonces el punto (x, y) en el sistema de coordenadas rectangulares (o cartesianas) puede representarse mediante (r, θ) en el sistema de coordenadas polares, donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\theta = \arctan(y/x)$.
- 114. Las ecuaciones polares $r = \text{sen } 2\theta$, $r = -\text{sen } 2\theta$ y $r = \text{sen}(-2\theta)$ tienen la misma gráfica.

PROYECTO DE TRABAJO

Arte anamórfico

El arte anamórfico parece distorsionado, pero cuando se ve desde un particular punto de vista o con un dispositivo como un espejo parece que está normal. Use las siguientes transformaciones anamórficas

$$r = y + 16 \quad y \quad \theta = -\frac{\pi}{8}x, \quad -\frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$$

para dibujar la imagen polar transformada de la gráfica rectangular. Cuando se observa la reflexión (en un espejo cilíndrico centrado en el polo) de una imagen polar desde el eje polar, el espectador ve la imagen rectangular original.

- (a) $y = 3$ (b) $x = 2$ (c) $y = x + 5$ (d) $x^2 + (y - 5)^2 = 5^2$



Este ejemplo de arte anamórfico es de la Colección Millington-Barnard en la Universidad de Mississippi. Cuando se observa el reflejo de la "pintura polar" transformada en el espejo, el espectador ve el arte distorsionado en sus proporciones adecuadas.

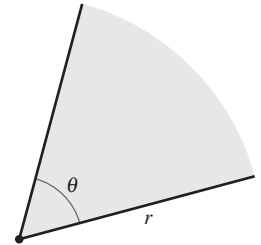
PARA INFORMACIÓN ADICIONAL Para más información sobre arte anamórfico, consulte al artículo "Anamorphisms", de Philip Hickin, en *Mathematical Gazette*.

2.4 Área y longitud de arco en coordenadas polares

- Hallar el área de una región limitada por una gráfica polar.
- Hallar los puntos de intersección de dos gráficas polares.
- Hallar la longitud de arco de una gráfica polar.
- Hallar el área de una superficie de revolución (forma polar).

Área de una región polar

El desarrollo de una fórmula para el área de una región polar se asemeja al del área de una región en el sistema de coordenadas rectangulares (o cartesianas), pero en lugar de rectángulos se usan sectores circulares como elementos básicos del área. En la figura 2.30, observe que el área de un sector circular de radio r es $\frac{1}{2}\theta r^2$, siempre que θ esté dado en radianes.



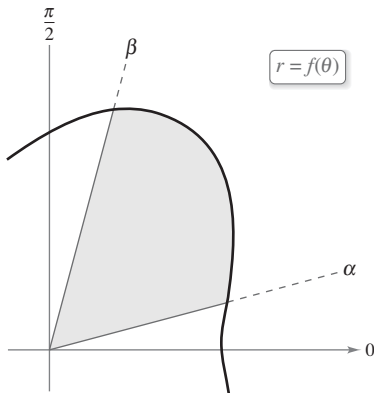
El área de un sector circular es $A = \frac{1}{2}\theta r^2$.

Figura 2.30

Considere la función dada por $r = f(\theta)$, donde f es continua y no negativa en el intervalo $\alpha \leq \theta \leq \beta$. La región limitada por la gráfica de f y las rectas radiales $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ se muestra en la figura 2.31(a). Para encontrar el área de esta región, se hace una partición del intervalo $[\alpha, \beta]$ en n subintervalos iguales

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_{n-1} < \theta_n = \beta.$$

A continuación se aproxima el área de la región por medio de la suma de las áreas de los n sectores, como se muestra en la figura 2.31(b).



(a)

Radio del i -ésimo sector = $f(\theta_i)$

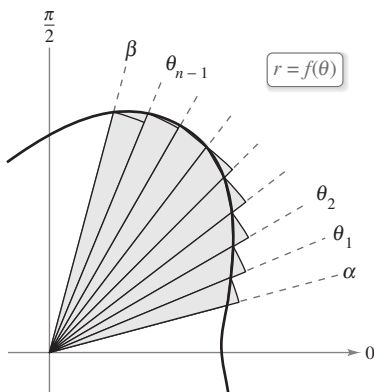
$$\text{Ángulo central del } i\text{-ésimo sector} = \frac{\beta - \alpha}{n} = \Delta\theta$$

$$A \approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2}\right) \Delta\theta [f(\theta_i)]^2$$

Tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$ se obtiene

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [f(\theta_i)]^2 \Delta\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta \end{aligned}$$

lo cual conduce al teorema siguiente.



(b)

Figura 2.31

TEOREMA 2.7 Área en coordenadas polares

Si f es continua y no negativa en el intervalo $[\alpha, \beta]$, $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi$, entonces el área de la región limitada (o acotada) por la gráfica de $r = f(\theta)$ entre las rectas radiales $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ está dada por

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta. \quad 0 < \beta - \alpha \leq 2\pi \end{aligned}$$

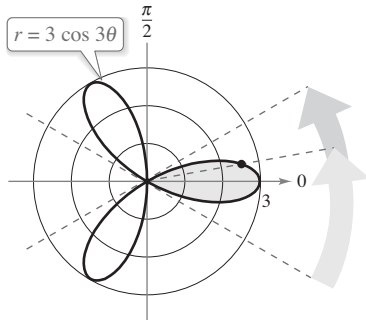
Se puede usar la misma fórmula del teorema 2.7 para hallar el área de una región limitada por la gráfica de una función continua *no positiva*. Sin embargo, la fórmula no es necesariamente válida si toma valores tanto positivos como negativos en el intervalo $[\alpha, \beta]$.

EJEMPLO 1 Encontrar el área de una región polar

•••► Consulte *LarsonCalculus.com* para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Encuentre el área de un pétalo de la curva rosa dada por $r = 3 \cos 3\theta$.

Solución En la figura 2.32 puede ver que el pétalo al lado derecho se recorre a medida que θ aumenta de $-\pi/6$ a $\pi/6$. Por tanto, el área es



El área de un pétalo de la curva rosa que se encuentra entre las rectas radiales $\theta = -\pi/6$ y $\theta = \pi/6$ es $3\pi/4$.

Figura 2.32

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} (3 \cos 3\theta)^2 d\theta \\ &= \frac{9}{2} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \frac{1 + \cos 6\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{9}{4} \left[\theta + \frac{\sin 6\theta}{6} \right]_{-\pi/6}^{\pi/6} \\ &= \frac{9}{4} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \right) \\ &= \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

Use la fórmula para el área en coordenadas polares.

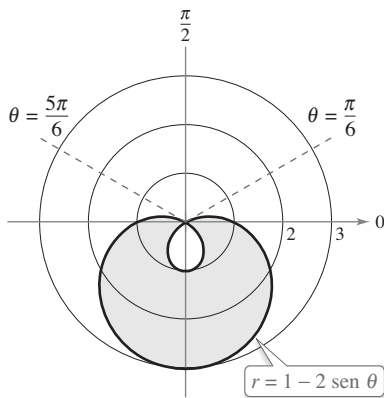
Identidad trigonométrica

Para hallar el área de la región comprendida dentro de los tres pétalos de la curva rosa del ejemplo 1, *no* puede simplemente integrar entre 0 y 2π . Si lo hace así, obtiene $9\pi/2$, que es el doble del área de los tres pétalos. Esta duplicación ocurre debido a que la curva rosa es trazada dos veces cuando θ aumenta de 0 a 2π .

EJEMPLO 2 Hallar el área limitada por una sola curva

Halle el área de la región comprendida entre los lazos interior y exterior del caracol $r = 1 - 2 \sin \theta$.

Solución En la figura 2.33, observe que el lazo interior es trazado a medida que θ aumenta de $\pi/6$ a $5\pi/6$. Por tanto, el área comprendida por el lazo interior es



El área entre los lazos interior y exterior es aproximadamente 8.34.

Figura 2.33

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (1 - 2 \sin \theta)^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (1 - 4 \sin \theta + 4 \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \left[1 - 4 \sin \theta + 4 \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) \right] d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (3 - 4 \sin \theta - 2 \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[3\theta + 4 \cos \theta - \sin 2\theta \right]_{\pi/6}^{5\pi/6} \\ &= \frac{1}{2} (2\pi - 3\sqrt{3}) \\ &= \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Use la fórmula para el área en coordenadas polares.

Identidad trigonométrica

Simplifique.

De manera similar, puede integrar de $5\pi/6$ a $13\pi/6$ para hallar que el área de la región comprendida por el lazo exterior es $A_2 = 2\pi + (3\sqrt{3}/2)$. El área de la región comprendida entre los dos lazos es la diferencia entre A_2 y A_1 .

$$A = A_2 - A_1 = \left(2\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) - \left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) = \pi + 3\sqrt{3} \approx 8.34$$

Puntos de intersección de gráficas polares

Debido a que un punto en coordenadas polares se puede representar de diferentes maneras, hay que tener cuidado al determinar los puntos de intersección de dos gráficas. Por ejemplo, considere los puntos de intersección de las gráficas de

$$r = 1 - 2 \cos \theta \quad \text{y} \quad r = 1$$

mostradas en la figura 2.34. Si, como se hace con ecuaciones rectangulares, se trata de hallar los puntos de intersección resolviendo las dos ecuaciones en forma simultánea, se obtiene

$r = 1 - 2 \cos \theta$	Primera ecuación
$1 = 1 - 2 \cos \theta$	Sustituir $r = 1$ de la segunda ecuación en la primera ecuación.
$\cos \theta = 0$	Simplificar.
$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$	Despeje θ .

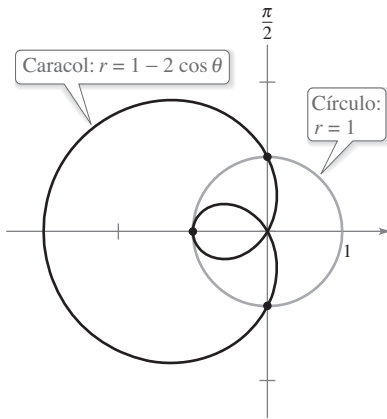
Los puntos de intersección correspondientes son $(1, \pi/2)$ y $(1, 3\pi/2)$. Sin embargo, en la figura 2.34 se ve que hay un *tercer* punto de intersección que no apareció al resolver simultáneamente las dos ecuaciones polares. (Esta es una de las razones por las que es necesario trazar una gráfica cuando se busca el área de una región polar.) La razón por la que el tercer punto no se encontró es que no aparece con las mismas coordenadas en ambas gráficas. En la gráfica de $r = 1$, el punto se encuentra en las coordenadas $(1, \pi)$, mientras que en la gráfica de

$$r = 1 - 2 \cos \theta$$

el punto se encuentra en las coordenadas $(-1, 0)$.

Además de resolver simultáneamente las ecuaciones y dibujar una gráfica, considere que puesto que el polo puede representarse mediante $(0, \theta)$, donde θ es *cualquier* ángulo, el polo debe verificarse por separado cuando se buscan puntos de intersección.

El problema de hallar los puntos de intersección de dos gráficas polares se puede comparar con el problema de encontrar los puntos de colisión de dos satélites cuyas órbitas alrededor de la Tierra se cortan, como se ilustra en la figura 2.35. Los satélites no colisionan mientras lleguen a los puntos de intersección en momentos diferentes (valores de θ). Las colisiones solo ocurren en los puntos de intersección que sean “puntos simultáneos”, puntos a los que llegan al mismo tiempo (valor de θ).



Tres puntos de intersección $(1, \pi/2)$, $(-1, 0)$ y $(1, 3\pi/2)$.

Figura 2.34



Las trayectorias de los satélites pueden cruzarse sin causar colisiones.

Figura 2.35

■ **PARA INFORMACIÓN ADICIONAL** Para más información sobre el uso de la tecnología para encontrar puntos de intersección, consulte el artículo “Finding Points of Intersection of Polar-Coordinate Graphs”, de Warren W. Esty, en *Mathematics Teacher*. Para ver este artículo vaya a MathArticles.com.

EJEMPLO 3

Hallar el área de la región entre dos curvas

Halle el área de la región común a las dos regiones limitadas por las curvas siguientes.

$$r = -6 \cos \theta \quad \text{Circunferencia}$$

y

$$r = 2 - 2 \cos \theta. \quad \text{Cardioide}$$

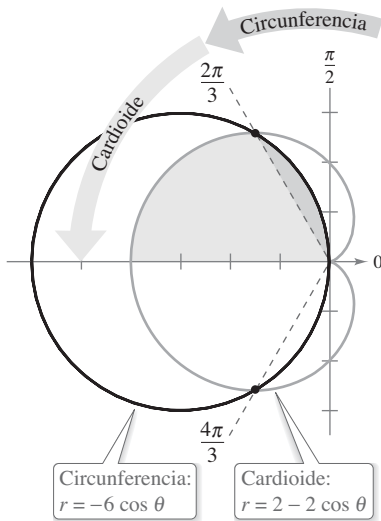


Figura 2.36

Solución Debido a que ambas curvas son simétricas respecto al eje x , puede trabajar con la mitad superior del plano, como se ilustra en la figura 2.36. La región sombreada en gris oscuro se encuentra entre la circunferencia y la recta radial

$$\theta = \frac{2\pi}{3}.$$

Puesto que la circunferencia tiene coordenadas $(0, \pi/2)$ en el polo, puede integrar entre $\pi/2$ y $2\pi/3$ para obtener el área de esta región. La región sombreada en gris claro está limitada por las rectas radiales $\theta = 2\pi/3$ y $\theta = \pi$ y la cardioide. Por tanto, el área de esta segunda región se puede encontrar por integración entre $2\pi/3$ y π . La suma de estas dos integrales da el área de la región común que se encuentra *sobre* la recta radial $\theta = \pi$.

$$\begin{aligned} \frac{A}{2} &= \underbrace{\int_{\pi/2}^{2\pi/3} (-6 \cos \theta)^2 d\theta}_{\text{Región entre la cardioide y las rectas radiales } \theta = 2\pi/3} + \underbrace{\int_{2\pi/3}^{\pi} (2 - 2 \cos \theta)^2 d\theta}_{\text{Región entre la circunferencia y la recta radial } \theta = 2\pi/3 \text{ y } \theta = \pi} \\ &= 18 \int_{\pi/2}^{2\pi/3} \cos^2 \theta d\theta + \frac{1}{2} \int_{2\pi/3}^{\pi} (4 - 8 \cos \theta + 4 \cos^2 \theta) d\theta \\ &= 9 \int_{\pi/2}^{2\pi/3} (1 + \cos 2\theta) d\theta + \int_{2\pi/3}^{\pi} (3 - 4 \cos \theta + \cos 2\theta) d\theta \\ &= 9 \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_{\pi/2}^{2\pi/3} + \left[3\theta - 4 \sin \theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_{2\pi/3}^{\pi} \\ &= 9 \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{2} \right) + \left(3\pi - 2\pi + 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \\ &= \frac{5\pi}{2} \end{aligned}$$

Por último, multiplicando por 2 se concluye que el área total es

$$5\pi \approx 15.7. \quad \text{Área de una región dentro de la circunferencia y la cardioide}$$

Para verificar que el resultado obtenido en el ejemplo 3 es razonable, note que el área de la región circular es

$$\pi r^2 = 9\pi. \quad \text{Área de la circunferencia}$$

Por tanto, parece razonable que el área de la región que se encuentra dentro de la circunferencia y dentro de la cardioide sea 5π .

Para apreciar la ventaja de las coordenadas polares al encontrar el área del ejemplo 3, considérese la integral siguiente, que da el área en coordenadas rectangulares.

$$\frac{A}{2} = \int_{-4}^{-3/2} \sqrt{2\sqrt{1-2x} - x^2 - 2x + 2} dx + \int_{-3/2}^0 \sqrt{-x^2 - 6x} dx$$

Emplee las funciones de integración de una herramienta de graficación para comprobar que se obtiene la misma área encontrada en el ejemplo 3.

Longitud de arco en forma polar

La fórmula para la longitud de un arco en coordenadas polares se obtiene a partir de la fórmula para la longitud de arco de una curva descrita mediante ecuaciones paramétricas.



- **COMENTARIO** Cuando se aplica la fórmula de la longitud de arco a una curva polar, es necesario asegurarse que la curva esté trazada solo una vez en el intervalo de integración. Por ejemplo, la rosa dada por $r = \cos 3\theta$ está trazada una sola vez en el intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$, pero está trazada (se recorre) dos veces en el intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

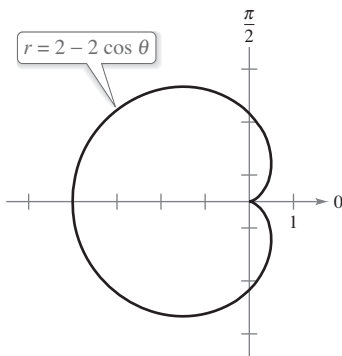


Figura 2.37

TEOREMA 2.8 Longitud de arco de una curva polar

Sea f una función cuya derivada es continua en un intervalo $\alpha \leq \theta \leq \beta$. La longitud de la gráfica de $r = f(\theta)$, desde $\theta = \alpha$ hasta $\theta = \beta$, es

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

EJEMPLO 4 Encontrar la longitud de una curva polar

Encuentre la longitud del arco que va de $\theta = 0$ a $\theta = 2\pi$ en la cardioide

$$r = f(\theta) = 2 - 2 \cos \theta$$

que se muestra en la figura 2.37.

Solución Como $f'(\theta) = 2 \operatorname{sen} \theta$, puede encontrar la longitud de arco de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} s &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta && \text{Fórmula para la longitud de arco de una curva polar} \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(2 - 2 \cos \theta)^2 + (2 \operatorname{sen} \theta)^2} d\theta \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos \theta} d\theta && \text{Simplifique.} \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}} d\theta && \text{Identidad trigonométrica} \\ &= 4 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} d\theta && \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \geq 0 \text{ para } 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ &= 8 \left[-\cos \frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi} \\ &= 8(1 + 1) \\ &= 16 \end{aligned}$$

Empleando la figura 2.37, puede ver que esta respuesta es razonable mediante comparación con la circunferencia de un círculo. Por ejemplo, un círculo con radio $\frac{5}{2}$ tiene una circunferencia de

$$5\pi \approx 15.7.$$

Observe que en el quinto paso de la solución, es legítimo escribir

$$\sqrt{2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}} = \sqrt{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}$$

en lugar de

$$\sqrt{2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}} = \sqrt{2} \left| \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \right|$$

porque $\operatorname{sen}(\theta/2)$ para $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Área de una superficie de revolución

La versión, en coordenadas polares, de las fórmulas para el área de una superficie de revolución se puede obtener a partir de las versiones paramétricas dadas en el teorema 2.3, usando las ecuaciones $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$.

• **COMENTARIO** Al aplicar el teorema 2.9, hay que verificar que la gráfica de $r = f(\theta)$ se recorra una sola vez en el intervalo $\alpha \leq \theta \leq \beta$. Por ejemplo, la circunferencia dada por $r = \cos \theta$ se recorre solo una vez en el intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$.

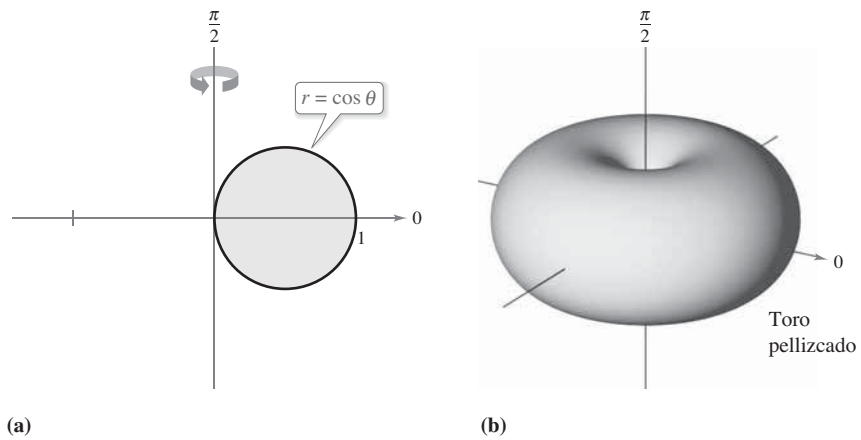
TEOREMA 2.9 Área de una superficie de revolución

Sea f una función cuya derivada es continua en un intervalo $\alpha \leq \theta \leq \beta$. El área de la superficie generada por revolución de la gráfica de $r = f(\theta)$, desde $\theta = \alpha$ hasta $\theta = \beta$, alrededor de la recta indicada es la siguiente.

1. $S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta) \sin \theta \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta$ Alrededor del eje polar
2. $S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta) \cos \theta \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta$ Alrededor de la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$

EJEMPLO 5 Hallar el área de una superficie de revolución

Halle el área de la superficie obtenida por revolución de la circunferencia $r = f(\theta) = \cos \theta$ alrededor de la recta $\theta = \pi/2$, como se ilustra en la figura 2.38.



(a) **Figura 2.38**

Solución Puede usar la segunda fórmula dada en el teorema 2.9 con $f'(\theta) = -\text{sen } \theta$. Puesto que la circunferencia se recorre solo una vez cuando θ aumenta de 0 a π , se tiene

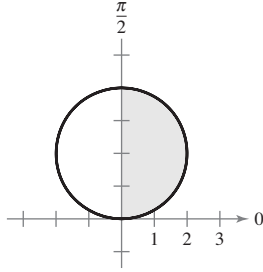
$$\begin{aligned}
 S &= 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta) \cos \theta \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta && \text{Fórmula para el área de una superficie de revolución} \\
 &= 2\pi \int_0^{\pi} \cos \theta (\cos \theta) \sqrt{\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta} d\theta \\
 &= 2\pi \int_0^{\pi} \cos^2 \theta d\theta && \text{Identidad trigonométrica} \\
 &= \pi \int_0^{\pi} (1 + \cos 2\theta) d\theta && \text{Identidad trigonométrica} \\
 &= \pi \left[\theta + \frac{\text{sen } 2\theta}{2} \right]_0^{\pi} \\
 &= \pi^2.
 \end{aligned}$$

2.4 Ejercicios

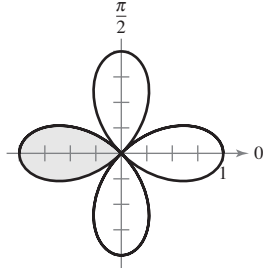
Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Área de una región polar En los ejercicios 1-4, dé una integral que represente el área de la región sombreada que se muestra en la figura. No evalúe la integral.

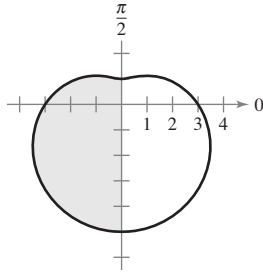
1. $r = 4 \operatorname{sen} \theta$



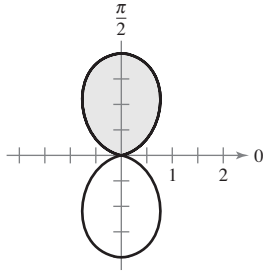
2. $r = \cos 2\theta$



3. $r = 3 - 2 \operatorname{sen} \theta$



4. $r = 1 - \cos 2\theta$



Hallar el área de una región polar En los ejercicios 5-16, determine el área de la región.

5. Interior de $r = 6 \operatorname{sen} \theta$
6. Interior de $r = 3 \cos \theta$
7. Un pétalo de $r = 2 \cos 3\theta$
8. Un pétalo de $r = 4 \operatorname{sen} 3\theta$
9. Un pétalo de $r = \operatorname{sen} 2\theta$
10. Un pétalo de $r = \cos 5\theta$
11. Interior de $r = 1 - \operatorname{sen} \theta$
12. Interior de $r = 1 - \operatorname{sen} \theta$ (arriba del eje polar)
13. Interior de $r = 5 + 2 \operatorname{sen} \theta$
14. Interior de $r = 4 - 4 \cos \theta$
15. Interior de $r^2 = 4 \cos 2\theta$
16. Interior de $r^2 = 6 \operatorname{sen} 2\theta$

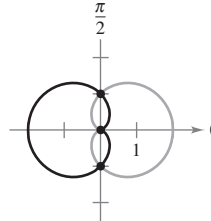
Hallar el área de una región polar En los ejercicios 17-24, use una herramienta de graficación para representar la ecuación polar y encuentre el área de la región indicada.

17. Lazo interior de $r = 1 + 2 \cos \theta$
18. Lazo interior de $r = 2 - 4 \cos \theta$
19. Lazo interior de $r = 1 + 2 \operatorname{sen} \theta$
20. Lazo interior de $r = 4 - 6 \operatorname{sen} \theta$
21. Entre los lazos de $r = 1 + 2 \cos \theta$
22. Entre los lazos de $r = 2(1 + 2 \operatorname{sen} \theta)$
23. Entre los lazos de $r = 3 - 6 \operatorname{sen} \theta$
24. Entre los lazos de $r = \frac{1}{2} + \cos \theta$

Hallar puntos de intersección En los ejercicios 25-32, encuentre los puntos de intersección de las gráficas de las ecuaciones.

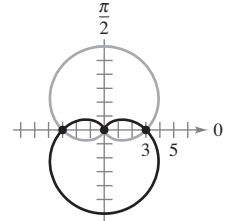
25. $r = 1 + \cos \theta$

$r = 1 - \cos \theta$



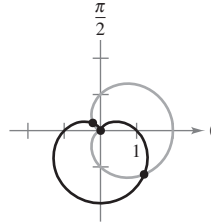
26. $r = 3(1 + \operatorname{sen} \theta)$

$r = 3(1 - \operatorname{sen} \theta)$



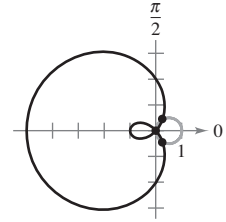
27. $r = 1 + \cos \theta$

$r = 1 - \operatorname{sen} \theta$



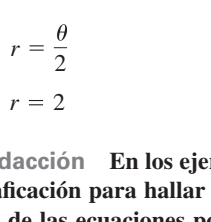
28. $r = 2 - 3 \cos \theta$

$r = \cos \theta$



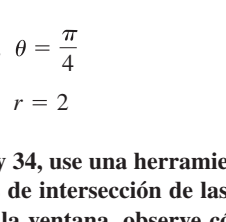
29. $r = 4 - 5 \operatorname{sen} \theta$

$r = 3 \operatorname{sen} \theta$



30. $r = 3 + \operatorname{sen} \theta$

$r = 2 \operatorname{csc} \theta$



31. $r = \frac{\theta}{2}$

$r = 2$

32. $\theta = \frac{\pi}{4}$

$r = 2$

Redacción En los ejercicios 33 y 34, use una herramienta de graficación para hallar los puntos de intersección de las gráficas de las ecuaciones polares. En la ventana, observe cómo se van trazando las gráficas. Explique por qué el polo no es un punto de intersección que se obtenga al resolver las ecuaciones en forma simultánea.

33. $r = \cos \theta$

$r = 2 - 3 \operatorname{sen} \theta$

34. $r = 4 \operatorname{sen} \theta$

$r = 2(1 + \operatorname{sen} \theta)$

Hallar el área de una región polar entre dos curvas En los ejercicios 35-42, use una herramienta de graficación para representar las ecuaciones polares y halle el área de la región dada.

35. Interior común a $r = 4 \operatorname{sen} 2\theta$ y $r = 2$
36. Interior común a $r = 2(1 + \cos \theta)$ y $r = 2(1 - \cos \theta)$
37. Interior común a $r = 3 - 2 \operatorname{sen} \theta$ y $r = -3 + 2 \operatorname{sen} \theta$
38. Interior común a $r = 5 - 3 \operatorname{sen} \theta$ y $r = 5 - 3 \cos \theta$
39. Interior común a $r = 4 \operatorname{sen} \theta$ y $r = 2$
40. Interior común de $r = 2 \cos \theta$ y $r = 2 \operatorname{sen} \theta$
41. Interior $r = 2 \cos \theta$ y exterior $r = 1$
42. Interior $r = 3 \operatorname{sen} \theta$ y exterior $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$

Hallar el área de una región polar entre dos curvas En los ejercicios 43-46, encuentre el área de la región.

- 43. En el interior de $r = a(1 + \cos \theta)$ y en el exterior de $r = a \cos \theta$
- 44. En el interior de $r = 2a \cos \theta$ y en el exterior de $r = a$
- 45. Interior común a $r = a(1 + \cos \theta)$ y $r = a \sin \theta$
- 46. Interior común a $r = a \cos \theta$ y a $r = a \sin \theta$, donde $a > 0$

47. Radiación de una antena

La radiación proveniente de una antena de transmisión no es uniforme en todas direcciones. La intensidad de la transmisión proveniente de una determinada antena se describe por medio del modelo $r = a \cos^2 \theta$.



- (a) Transforme la ecuación polar a la forma rectangular.
- (b) Utilice una herramienta de graficación para trazar el modelo con $a = 4$ y $a = 6$.
- (c) Halle el área de la región geográfica que se encuentra entre las dos curvas del inciso (b).

48. Área El área en el interior de una o más de las tres circunferencias entrelazadas

$$r = 2a \cos \theta, \quad r = 2a \sin \theta \quad \text{y} \quad r = a$$

está dividida en siete regiones. Determine el área de cada región.

49. Conjetura Halle el área de la región limitada por

$$r = a \cos(n\theta)$$

para $n = 1, 2, 3, \dots$ Con base en los resultados, formule una conjetura acerca del área limitada por la función cuando n es par y cuando n es impar.

50. Área Dibuje la estrofoide

$$r = \sec \theta - 2 \cos \theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

Transforme estas ecuaciones a coordenadas rectangulares. Encuentre el área comprendida en el lazo.

Hallar la longitud de arco de una curva polar En los ejercicios 51-56, encuentre la longitud de la curva sobre el intervalo indicado.

Ecuación polar	Intervalo
51. $r = 8$	$0 \leq \theta \leq 2\pi$
52. $r = a$	$0 \leq \theta \leq 2\pi$
53. $r = 4 \sin \theta$	$0 \leq \theta \leq \pi$
54. $r = 2a \cos \theta$	$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
55. $r = 1 + \sin \theta$	$0 \leq \theta \leq 2\pi$
56. $r = 8(1 + \cos \theta)$	$0 \leq \theta \leq 2\pi$

Hallar la longitud de arco de una curva polar En los ejercicios 57-62, utilice una herramienta de graficación para representar la ecuación polar sobre el intervalo dado. Emplee las funciones de integración de una herramienta de graficación para estimar la longitud de la curva con una precisión de dos decimales.

Ecuación polar	Intervalo
57. $r = 2\theta$	$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$
58. $r = \sec \theta$	$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$
59. $r = \frac{1}{\theta}$	$\pi \leq \theta \leq 2\pi$
60. $r = e^\theta$	$0 \leq \theta \leq \pi$
61. $r = \sin(3 \cos \theta)$	$0 \leq \theta \leq \pi$
62. $r = 2 \sin(2 \cos \theta)$	$0 \leq \theta \leq \pi$

Hallar el área de una superficie de revolución En los ejercicios 63-66, encuentre el área de la superficie generada por revolución de la curva en torno a la recta dada.

Ecuación polar	Intervalo	Eje de revolución
63. $r = 6 \cos \theta$	$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	Eje polar
64. $r = a \cos \theta$	$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$\theta = \frac{\pi}{2}$
65. $r = e^{a\theta}$	$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$\theta = \frac{\pi}{2}$
66. $r = a(1 + \cos \theta)$	$0 \leq \theta \leq \pi$	Eje polar

Hallar el área de una superficie de revolución En los ejercicios 67 y 68, use las funciones de integración de una herramienta de graficación para estimar, con una precisión de dos cifras decimales, el área de la superficie generada por revolución de la curva alrededor del eje polar.

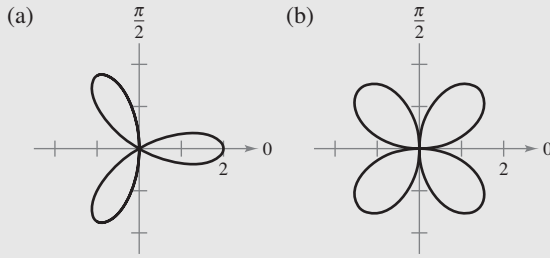
- 67. $r = 4 \cos 2\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$
- 68. $r = \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

- 69. **Puntos de intersección** Explique por qué para encontrar puntos de intersección de gráficas polares es necesario efectuar un análisis además de resolver dos ecuaciones en forma simultánea.
- 70. **Área de una superficie de revolución** Dé las fórmulas de las integrales para el área de una superficie de revolución generada por la gráfica de $r = f(\theta)$ alrededor
 - (a) del eje x
 - (b) de la recta $\theta = \pi/2$.
- 71. **Área de una región** Para cada ecuación polar, dibuje su gráfica, determine el intervalo que traza la gráfica solo una vez y encuentre el área de la región acotada por la gráfica utilizando una fórmula geométrica e integración.
 - (a) $r = 10 \cos \theta$
 - (b) $r = 5 \sin \theta$



¿CÓMO LO VE? ¿Qué gráfica, trazada una sola vez, tiene la longitud de arco más grande?



73. Área de la superficie de un toro Determine el área de la superficie del toro generado por revolución de la circunferencia $r = 2$ alrededor de la recta $r = 5 \sec \theta$.

74. Área de la superficie de un toro Encuentre el área de la superficie del toro generado por revolución de la circunferencia $r = a$ en torno a la recta $r = b \sec \theta$, donde $0 < a < b$.

75. Aproximar un área Considere la circunferencia $r = 8 \cos \theta$.

- (a) Halle el área del círculo.
- (b) Complete la tabla dando las áreas A de los sectores circulares entre $\theta = 0$ y los valores de θ dados en la tabla.

θ	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
A							

(c) Use la tabla del inciso (b) para aproximar los valores de θ para los cuales el sector circular contiene $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$ del área total de la circunferencia.

(d) Use una herramienta de graficación para aproximar, con una precisión de dos cifras decimales, los ángulos θ para los cuales el sector circular contiene $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$ del área total de la circunferencia.

(e) ¿Los resultados del inciso (d) dependen del radio del círculo? Explique su respuesta.

76. Aproximación de un área Considere la circunferencia $r = 3 \sin \theta$.

- (a) Halle el área del círculo.
- (b) Complete la tabla dando las áreas A de los sectores circulares entre $\theta = 0$ y los valores de θ dados en la tabla.

θ	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
A							

(c) Use la tabla del inciso (b) para aproximar los valores de θ para los cuales el sector circular contiene $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$ del área total de la circunferencia.

(d) Use una herramienta de graficación para aproximar, con una precisión de dos cifras decimales, los ángulos θ para los cuales el sector circular contiene $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$ del área total de la circunferencia.

77. Cónica ¿Que sección cónica representa la siguiente ecuación polar: $r = a \sin \theta + b \cos \theta$?

78. Área Encuentre el área del círculo dado por $r = \sin \theta + \cos \theta$.

Compruebe el resultado transformando la ecuación polar a la forma rectangular y usando después la fórmula para el área del círculo.

79. Espiral de Arquímedes La curva representada por la ecuación $r = a\theta$, donde a es una constante, recibe el nombre de espiral de Arquímedes.

- (a) Use una herramienta de graficación para trazar la gráfica de $r = \theta$, donde $\theta \geq 0$. ¿Qué ocurre con la gráfica de $r = a\theta$ a medida que a aumenta? ¿Qué pasa si $\theta \leq 0$?
- (b) Determine los puntos de la espiral $r = a\theta$ ($a > 0$, $\theta \geq 0$), en los que la curva cruza el eje polar.
- (c) Halle la longitud de $r = \theta$ sobre el intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
- (d) Halle el área bajo la curva $r = \theta$ para $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

80. Espiral logarítmica La curva descrita por la ecuación $r = ae^{b\theta}$, donde a y b son constantes, se denomina **espiral logarítmica**. La figura siguiente muestra la gráfica de $r = e^{\theta/6}$, $-2\pi \leq \theta \leq 2\pi$. Halle el área de la zona sombreada.

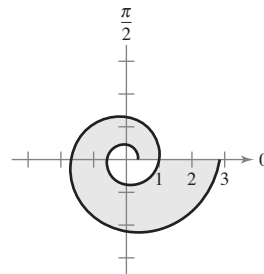


Figura para 80

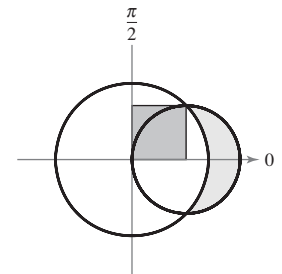


Figura para 81

81. Área La mayor de las circunferencias mostradas en la figura es la gráfica de $r = 1$. Halle la ecuación polar para la circunferencia menor, de manera que las áreas sombreadas sean iguales.

82. Folio de Descartes La curva llamada **folio de Descartes** puede representarse por medio de las ecuaciones paramétricas

$$x = \frac{3t}{1+t^3} \quad y = \frac{3t^2}{1+t^3}$$

- (a) Convierta las ecuaciones paramétricas a la forma polar.
- (b) Dibuje la gráfica de la ecuación polar del inciso (a).

(c) Use una herramienta de graficación para aproximar el área comprendida en el lazo de la curva.

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 83 y 84, determine si la afirmación es verdadera o falsa. Si es falsa, explique por qué o dé un ejemplo que demuestre que es falsa.

83. Si $f(\theta) > 0$ para todo θ y $g(\theta) < 0$ para todo θ , entonces las gráficas de $r = f(\theta)$ y $r = g(\theta)$ no se intersecan.

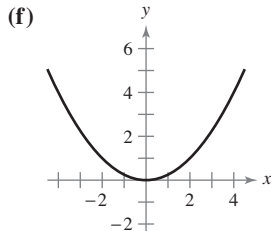
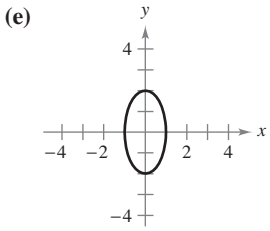
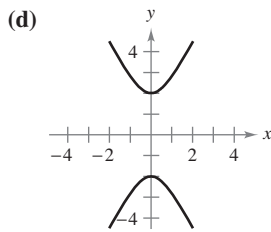
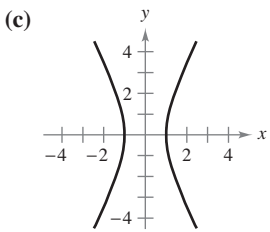
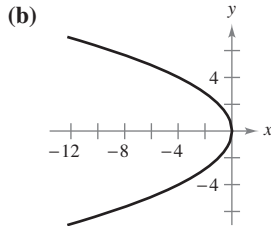
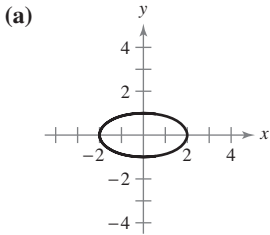
84. Si $f(\theta) = g(\theta)$ para $\theta = 0, \pi/2$ y $3\pi/2$, entonces las gráficas de $r = f(\theta)$ y $r = g(\theta)$ tienen cuando menos cuatro puntos de intersección.

85. Longitud de arco en forma polar Use la fórmula para la longitud de arco de una curva en forma paramétrica para obtener la fórmula de la longitud de arco de una curva polar.

Ejercicios de repaso

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Correspondencia En los ejercicios 1-6, relacione la ecuación con su gráfica. [Las gráficas están etiquetadas (a), (b), (c), (d), (e) y (f).]



- | | |
|---------------------|---------------------|
| 1. $4x^2 + y^2 = 4$ | 2. $4x^2 - y^2 = 4$ |
| 3. $y^2 = -4x$ | 4. $y^2 - 4x^2 = 4$ |
| 5. $x^2 + 4y^2 = 4$ | 6. $x^2 = 4y$ |

Identificar una cónica En los ejercicios 7-14, identifique la cónica, analice la ecuación (centro, radio, vértices, focos, excentricidad, directriz y asíntotas, si es posible) y trace su gráfica. Use una herramienta de graficación para confirmar los resultados.

- $16x^2 + 16y^2 - 16x + 24y - 3 = 0$
- $y^2 - 12y - 8x + 20 = 0$
- $3x^2 - 2y^2 + 24x + 12y + 24 = 0$
- $5x^2 + y^2 - 20x + 19 = 0$
- $3x^2 + 2y^2 - 12x + 12y + 29 = 0$
- $12x^2 - 12y^2 - 12x + 24y - 45 = 0$
- $x^2 - 6x - 8y + 1 = 0$
- $9x^2 + 25y^2 + 18x - 100y - 116 = 0$

Hallar una ecuación de una parábola En los ejercicios 15 y 16, determine una ecuación de la parábola.

- | | |
|--|-------------------------------------|
| 15. Vértice: (0, 2)
Directriz: $x = -3$ | 16. Vértice: (2, 6)
Foco: (2, 4) |
|--|-------------------------------------|

Hallar una ecuación de una elipse En los ejercicios 17-20, determine una ecuación de la elipse.

- | | |
|--|--|
| 17. Centro: (0, 0)
Foco: (5, 0)
Vértice: (7, 0) | 18. Centro: (0, 0)
Eje mayor: vertical
Puntos de la elipse: (1, 2), (2, 0) |
| 19. Vértices: (3, 1), (3, 7)
Excentricidad: $\frac{2}{3}$ | 20. Focos: (0, ± 7)
Longitud del eje mayor: 20 |

Hallar una ecuación de una hipérbola En los ejercicios 21-24, determine una ecuación de la hipérbola.

- | | |
|---|--|
| 21. Vértices: (0, ± 8)
Asíntotas: $y = \pm 2x$ | 22. Vértices: (± 2 , 0)
Asíntotas: $y = \pm 32x$ |
| 23. Vértices: (± 7 , -1)
Focos: (± 9 , -1) | 24. Centro: (0, 0)
Vértices: (0, 3)
Focos: (0, 6) |

25. Antena satelital La sección transversal de una gran antena parabólica se modela por medio de la gráfica de

$$y = \frac{x^2}{200}, \quad -100 \leq x \leq 100.$$

- El equipo de recepción y transmisión se coloca en el foco.
- Determine las coordenadas del foco.
 - Encuentre el área de la superficie de la antena.

26. Usar una elipse Considere la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

- Determine el área de la región acotada por la elipse.
- Encuentre el volumen del sólido generado al girar la región alrededor de su eje mayor.

Usar ecuaciones paramétricas En los ejercicios 27-34, trace la curva representada por las ecuaciones paramétricas (indique la orientación de la curva) y dé las ecuaciones rectangulares correspondientes mediante la eliminación del parámetro.

- | | |
|--|-----------------------------|
| 27. $x = 1 + 8t, y = 3 - 4t$ | 28. $x = t - 6, y = t^2$ |
| 29. $x = e^t - 1, y = e^{3t}$ | 30. $x = e^{4t}, y = t + 4$ |
| 31. $x = 6 \cos \theta, y = 6 \operatorname{sen} \theta$ | |
| 32. $x = 2 + 5 \cos t, y = 3 + 2 \operatorname{sen} t$ | |
| 33. $x = 2 + \sec \theta, y = 3 + \tan \theta$ | |
| 34. $x = 5 \operatorname{sen}^3 \theta, y = 5 \cos^3 \theta$ | |

Hallar las ecuaciones paramétricas En los ejercicios 35 y 36, encuentre dos conjuntos diferentes de ecuaciones paramétricas para la ecuación rectangular.

- | | |
|------------------|-------------------|
| 35. $y = 4x + 3$ | 36. $y = x^2 - 2$ |
|------------------|-------------------|

- 37. Motor rotatorio** El motor rotatorio fue inventado por Félix Wankel en la década de los cincuenta. Contiene un rotor que es un triángulo equilátero modificado. El rotor se mueve en una cámara que, en dos dimensiones, es un epitrocoide. Use una herramienta de graficación para trazar la cámara que describen las ecuaciones paramétricas.

$$x = \cos 3\theta + 5 \cos \theta$$

y

$$y = \sin 3\theta + 5 \sin \theta.$$

- 38. Curva serpentina** Considere las ecuaciones paramétricas $x = 2 \cot \theta$ y $y = 4 \sin \theta \cos \theta$, $0 < \theta < \pi$.

- (a) Use una herramienta de graficación para trazar la curva.
(b) Elimine el parámetro para demostrar que la ecuación rectangular de la curva serpentina es $(4 + x^2)y = 8x$.

Hallar pendiente y concavidad En los ejercicios 39-46, determine dy/dx y d^2y/dx^2 , y la pendiente y concavidad (si es posible) para el valor dado del parámetro.

Ecuaciones paramétricas	Parámetro
39. $x = 2 + 5t$, $y = 1 - 4t$	$t = 3$
40. $x = t - 6$, $y = t^2$	$t = 5$
41. $x = \frac{1}{t}$, $y = 2t + 3$	$t = -1$
42. $x = \frac{1}{t}$, $y = t^2$	$t = -2$
43. $x = 5 + \cos \theta$, $y = 3 + 4 \sin \theta$	$\theta = \frac{\pi}{6}$
44. $x = 10 \cos \theta$, $y = 10 \sin \theta$	$\theta = \frac{\pi}{4}$
45. $x = \cos^3 \theta$, $y = 4 \sin^3 \theta$	$\theta = \frac{\pi}{3}$
46. $x = e^t$, $y = e^{-t}$	$t = 1$

- Hallar una ecuación de una recta tangente** En los ejercicios 47 y 48, (a) use una herramienta de graficación para trazar la curva representada por las ecuaciones paramétricas, (b) use una herramienta de graficación para hallar $dx/d\theta$, $dy/d\theta$ y dy/dx , para el valor dado del parámetro, (c) halle una ecuación de la recta tangente a la curva en el valor dado del parámetro, y (d) use una herramienta de graficación para trazar la recta tangente a la curva del inciso (c).

Ecuaciones paramétricas	Parámetro
47. $x = \cot \theta$, $y = \sin 2\theta$	$\theta = \frac{\pi}{6}$
48. $x = \frac{1}{4} \tan \theta$, $y = 6 \sin \theta$	$\theta = \frac{\pi}{3}$

Tangencia horizontal y vertical En los ejercicios 49-52, encuentre todos los puntos (si los hay) de tangencia horizontal y vertical a la curva. Use una herramienta de graficación para confirmar los resultados.

49. $x = 5 - t$, $y = 2t^2$
50. $x = t + 2$, $y = t^3 - 2t$

51. $x = 2 + 2 \sin \theta$, $y = 1 + \cos \theta$

52. $x = 2 - 2 \cos \theta$, $y = 2 \sin 2\theta$

Longitud de arco En los ejercicios 53 y 54, determine la longitud de arco de la curva sobre el intervalo que se indica.

Ecuaciones paramétricas	Intervalo
53. $x = t^2 + 1$, $y = 4t^3 + 3$	$0 \leq t \leq 2$
54. $x = 6 \cos \theta$, $y = 6 \sin \theta$	$0 \leq \theta \leq \pi$

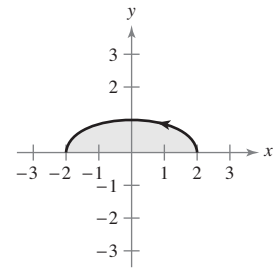
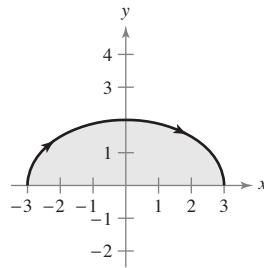
Área de una superficie En los ejercicios 55 y 56, determine el área de la superficie generada por revolución de la curva en torno (a) al eje x y (b) al eje y.

55. $x = t$, $y = 3t$, $0 \leq t \leq 2$

56. $x = 2 \cos \theta$, $y = 2 \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

Área En los ejercicios 57 y 58, encuentre el área de la región.

57. $x = 3 \sin \theta$ $y = 2 \cos \theta$ $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	58. $x = 2 \cos \theta$ $y = \sin \theta$ $0 \leq \theta \leq \pi$
---	--



Transformar coordenadas polares a rectangulares En los ejercicios 59-62, represente gráficamente el punto en coordenadas polares y determine las coordenadas rectangulares correspondientes al punto.

59. $(5, \frac{3\pi}{2})$ 60. $(-6, \frac{7\pi}{6})$
61. $(\sqrt{3}, 1.56)$ 62. $(-2, -2.45)$

Transformar coordenadas rectangulares a polares En los ejercicios 63-66 se dan las coordenadas rectangulares de un punto. Represente gráficamente el punto y determine dos pares de coordenadas polares del punto para $0 \leq \theta < 2\pi$.

63. $(4, -4)$ 64. $(0, -7)$
65. $(-1, 3)$ 66. $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$

Transformar coordenadas rectangulares a polares En los ejercicios 67-72, convierta la ecuación rectangular a la forma polar y trace su gráfica.

67. $x^2 + y^2 = 25$ 68. $x^2 - y^2 = 4$
69. $y = 9$ 70. $x = 6$
71. $x^2 = 4y$ 72. $x^2 + y^2 - 4x = 0$

Transformar coordenadas polares a rectangulares En los ejercicios 73-78, convierta la ecuación polar a la forma rectangular y trace su gráfica.

73. $r = 3 \cos \theta$ 74. $r = 10$
 75. $r = 6 \operatorname{sen} \theta$ 76. $r = 3 \operatorname{csc} \theta$
 77. $r = -2 \operatorname{sec} \theta \tan \theta$ 78. $\theta = \frac{3\pi}{4}$

 **Trazar una ecuación polar** En los ejercicios 79-82, use una herramienta de graficación para representar la ecuación polar.

79. $r = \frac{3}{\cos(\theta - \pi/4)}$
 80. $r = 2 \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta$
 81. $r = 4 \cos 2\theta \operatorname{sec} \theta$
 82. $r = 4(\operatorname{sec} \theta - \cos \theta)$

Tangencia horizontal y vertical En los ejercicios 83 y 84, encuentre todos los puntos de tangencia horizontal y vertical (si los hay) a la curva polar.

83. $r = 1 - \cos \theta$ 84. $r = 3 \tan \theta$

Rectas tangentes al polo En los ejercicios 85 y 86, represente una ecuación polar y encuentre las tangentes en el polo.


85. $r = 4 \operatorname{sen} 3\theta$ 86. $r = 3 \cos 4\theta$

Trazar una gráfica polar En los ejercicios 87-96, represente una gráfica de la ecuación polar.

87. $r = 6$ 88. $\theta = \frac{\pi}{10}$
 89. $r = -\operatorname{sec} \theta$ 90. $r = 5 \operatorname{csc} \theta$
 91. $r^2 = 4 \operatorname{sen}^2 2\theta$ 92. $r = 3 - 4 \cos \theta$
 93. $r = 4 - 3 \cos \theta$ 94. $r = 4\theta$
 95. $r = -3 \cos 2\theta$ 96. $r = \cos 5\theta$

Hallar el área de una región polar En los ejercicios 97-102, encuentre el área de la región.

97. Un pétalo de $r = 3 \cos 5\theta$
 98. Un pétalo de $r = 2 \operatorname{sen} 6\theta$
 99. Interior de $r = 2 + \cos \theta$
 100. Interior de $r = 5(1 - \operatorname{sen} \theta)$
 101. Interior de $r^2 = 4 \operatorname{sen} 2\theta$
 102. Interior común a $r = 4 \cos \theta$ y $r = 2$

 **Hallar el área de una región polar** En los ejercicios 103-106, use una herramienta de graficación para representar la ecuación polar. Encuentre analíticamente el área de la región dada.


103. Lazo interior de $r = 3 - 6 \cos \theta$
 104. Lazo interior de $r = 2 + 4 \operatorname{sen} \theta$
 105. Entre los lazos de $r = 3 - 6 \cos \theta$
 106. Entre los lazos de $r = 2 + 4 \operatorname{sen} \theta$

Hallar puntos de intersección En los ejercicios 107 y 108, determine los puntos de intersección de las gráficas de las ecuaciones.

107. $r = 1 - \cos \theta$ 108. $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$
 $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$ $r = 3 \operatorname{sen} \theta$

Hallar la longitud de arco de una curva polar En los ejercicios 109 y 110, encuentre la longitud de la curva sobre el intervalo dado.

- | Ecuación polar | Intervalo |
|-------------------------------|--------------------------------------|
| 109. $r = 5 \cos \theta$ | $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ |
| 110. $r = 3(1 - \cos \theta)$ | $0 \leq \theta \leq \pi$ |

 **Hallar el área de una superficie de revolución** En los ejercicios 111 y 112, use una herramienta de graficación para representar la ecuación polar. Dé una integral para encontrar el área de la región dada y use las funciones de integración de una herramienta de graficación para aproximar el valor de la integral con una precisión de dos cifras decimales.

- | Ecuación polar | Intervalo | Eje de revolución |
|--|------------------------------------|--------------------------|
| 111. $r = 1 + 4 \cos \theta$ | $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ | Eje polar |
| 112. $r = 2 \operatorname{sen} \theta$ | $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ | $\theta = \frac{\pi}{2}$ |

Trazar e identificar una cónica En los ejercicios 113-118, determine la excentricidad y la distancia del polo a la directriz de la cónica. Después trace e identifique la gráfica. Use una herramienta de graficación para confirmar los resultados.

- | | |
|--|--|
| 113. $r = \frac{6}{1 - \operatorname{sen} \theta}$ | 114. $r = \frac{2}{1 + \cos \theta}$ |
| 115. $r = \frac{6}{3 + 2 \cos \theta}$ | 116. $r = \frac{4}{5 - 3 \operatorname{sen} \theta}$ |
| 117. $r = \frac{4}{2 - 3 \operatorname{sen} \theta}$ | 118. $r = \frac{8}{2 - 5 \cos \theta}$ |

Hallar una ecuación polar En los ejercicios 119-124, determine una ecuación polar de la cónica con foco en el polo. (Por conveniencia, la ecuación de la directriz está dada en forma rectangular.)

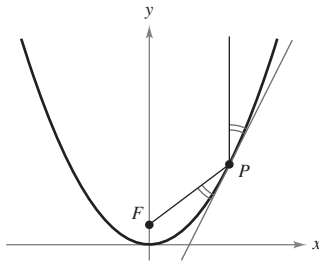
- | Cónica | Excentricidad | Directriz |
|----------------|-------------------|-----------|
| 119. Parábola | $e = 1$ | $x = 4$ |
| 120. Elipse | $e = \frac{3}{4}$ | $y = -2$ |
| 121. Hipérbola | $e = 3$ | $y = 3$ |

- | Cónica | Vértice o vértices |
|----------------|----------------------|
| 122. Parábola | $(2, \frac{\pi}{2})$ |
| 123. Elipse | $(5, 0), (1, \pi)$ |
| 124. Hipérbola | $(1, 0), (7, 0)$ |

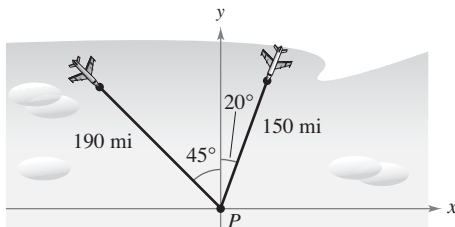
Solución de problemas


Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

- Uso de una parábola** Considere la parábola $x^2 = 4y$ y la cuerda focal $y = \frac{3}{4}x + 1$.
 - Dibuje la gráfica de la parábola y la cuerda focal.
 - Demuestre que las rectas tangentes a la parábola en los extremos de la cuerda focal se intersectan en ángulo recto.
 - Demuestre que las rectas tangentes a la parábola en los extremos de la cuerda focal se cortan en la directriz de la parábola.
- Uso de una parábola** Considere la parábola $x^2 = 4py$ y una de sus cuerdas focales.
 - Demuestre que las rectas tangentes a la parábola en los extremos de la cuerda focal se cortan en ángulos rectos.
 - Demuestre que las rectas tangentes a la parábola en los extremos de la cuerda focal se cortan en la directriz de la parábola.
- Demostración** Demuestre el teorema 2.2, la propiedad de reflexión de una parábola, como se ilustra en la figura.



- Trayectorias de vuelos** Un controlador de tráfico aéreo ubica a la misma altitud dos aviones que vuelan uno hacia el otro (vea la figura). Sus trayectorias de vuelo son 20° y 315° . Un avión está a 150 millas del punto P con una velocidad de 375 millas por hora. El otro se encuentra a 190 millas del punto P con una velocidad de 450 millas por hora.



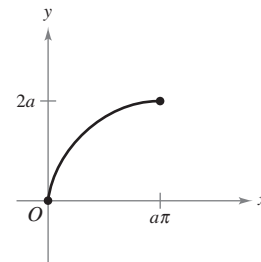
- Determine las ecuaciones paramétricas para la trayectoria de cada avión donde t es el tiempo en horas y corresponda al instante en que el controlador de tráfico aéreo localiza a los aviones.
- Use el resultado del inciso (a) para expresar la distancia entre los aviones como función de t .
-  Use una herramienta de graficación para representar la función del inciso (b). ¿Cuándo será mínima la distancia entre los aviones? Si los aviones deben conservar una distancia entre ellos de por lo menos 3 millas, ¿se satisface este requerimiento?

- Estrofoide** La curva descrita por las ecuaciones paramétricas

$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad y \quad y(t) = \frac{t(1-t^2)}{1+t^2}$$

se denomina **estrofoide**.

- Determine una ecuación rectangular de la estrofoide.
 - Determine una ecuación polar de la estrofoide.
 - Trace una gráfica de la estrofoide.
 - Determine la ecuación de las dos rectas tangentes en el origen.
 - Encuentre los puntos de la gráfica en los que las rectas tangentes son horizontales.
- Hallar una ecuación rectangular** Encuentre una ecuación rectangular para la porción de la cicloide dada por las ecuaciones paramétricas $x = a(\theta - \sin \theta)$ y $y = a(\theta - \cos \theta)$, $0 \leq \theta \leq \pi$, como se muestra en la figura.



- Espiral de Cornu** Considere la espiral de Cornu dada por

$$x(t) = \int_0^t \cos\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du \quad y \quad y(t) = \int_0^t \sin\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du.$$



- Use una herramienta de graficación para representar la espiral en el intervalo $-\pi \leq t \leq \pi$.
 - Demuestre que la espiral de Cornu es simétrica respecto al origen.
 - Encuentre la longitud de la espiral de Cornu desde $t = 0$ hasta $t = a$. ¿Cuál es la longitud de la espiral desde $t = -\pi$ hasta $t = \pi$?
- Usar una elipse** Considere la región limitada por la elipse con excentricidad.

- Demuestre que el área de la región es πab .
- Demuestre que el volumen del sólido (esferoide oblato) generado por revolución de la región en torno al eje menor de la elipse tiene un volumen de $V = 4\pi^2 b^3/3$ y el área de la superficie es

$$S = 2\pi a^2 + \pi \left(\frac{b^2}{e}\right) \ln\left(\frac{1+e}{1-e}\right).$$

- Demuestre que el volumen del sólido (esferoide prolato) generado por revolución de la región alrededor del eje mayor de la elipse es $V = 4\pi^2 b/3$ y el área de la superficie es

$$S = 2\pi b^2 + 2\pi \left(\frac{ab}{e}\right) \arcsen e.$$

9. **Área** Sean a y b constantes positivas. Encuentre el área de la región del primer cuadrante limitada por la gráfica de la ecuación polar

$$r = \frac{ab}{(a \sin \theta + b \cos \theta)}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

10. **Usar un triángulo rectángulo** Considere el triángulo rectángulo de la figura.

(a) Demuestre que el área del triángulo es $A(\alpha) = \frac{1}{2} \int_0^\alpha \sec^2 \theta \, d\theta$.

(b) Demuestre que $\alpha = \int_0^\alpha \sec^2 \theta \, d\theta$.

(c) Use el inciso (b) para deducir la fórmula para la derivada de la función tangente.

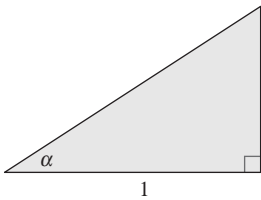


Figura para 10

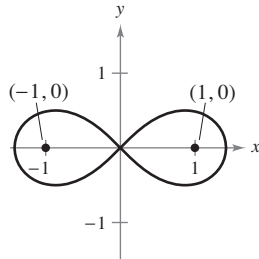
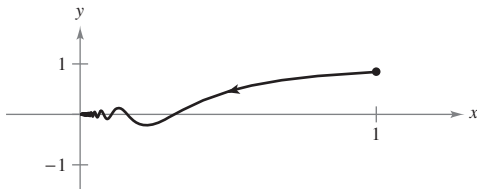


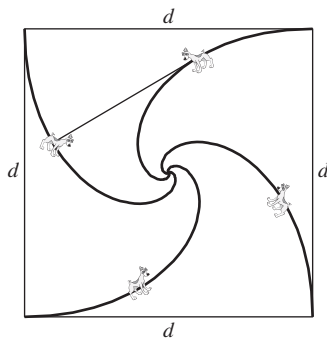
Figura para 11

11. **Hallar una ecuación polar** Determine la ecuación polar del conjunto de todos los puntos (r, θ) , el producto de cuyas distancias desde los puntos y es igual a 1, como se observa en la figura.

12. **Longitud de arco** Una partícula se mueve a lo largo de la trayectoria descrita por las ecuaciones paramétricas $x = 1/t$ y $y = (\sin t)/t$, con $1 \leq t < \infty$, como se muestra en la figura. Determine la longitud de esta trayectoria.



13. **Hallar una ecuación polar** Cuatro perros se encuentran en las esquinas de un cuadrado con lados de longitud d . Todos los perros se mueven en sentido contrario al de las manecillas del reloj a la misma velocidad y en dirección al siguiente perro, como se muestra en la figura. Encuentre la ecuación polar de la trayectoria de un perro a medida que se acerca en espiral hacia el centro del cuadrado.



14. **Usar una hipérbola** Considere la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con focos F_1 y F_2 , como se ilustra en la figura. Sea T la recta tangente en un punto de la hipérbola. Demuestre que los rayos de luz incidente en un foco son reflejados por un espejo hiperbólico hacia el otro foco.

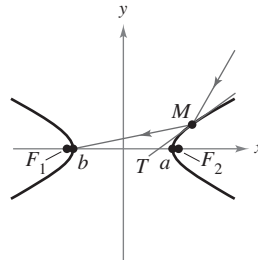


Figura para 14

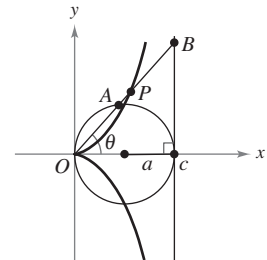


Figura para 15

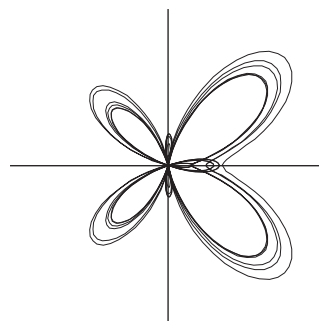
15. **Cisoide de Diocles** Considere un círculo con radio a tangente al eje y y a la recta $x = 2a$, como se ilustra en la figura. Sea A el punto en el cual el segmento OB corta el círculo. La cisoide de Diocles consiste de todos los puntos P tales que $OP = AB$.

- (a) Determine una ecuación polar de la cisoide.
- (b) Encuentre un conjunto de ecuaciones paramétricas para la cisoide que no contengan funciones trigonométricas.
- (c) Halle la ecuación rectangular de la cisoide.

16. **Curva mariposa** Use una herramienta de graficación para trazar la curva que se muestra abajo. La curva está dada por

$$r = e^{\cos \theta} - 2 \cos 4\theta + \sin^5 \frac{\theta}{12}.$$

¿Sobre qué intervalo debe variar θ para generar la curva?



■ **PARA INFORMACIÓN ADICIONAL** Para más información sobre esta curva, consulte el artículo “A Study in Step Size”, de Temple H. Fay, en *Mathematics Magazine*.

17. **Trazar ecuaciones polares** Use una herramienta de graficación para representar la ecuación polar $r = \cos 5\theta + n \cos \theta$ para $0 \leq \theta < \pi$ y para los enteros desde $n = -5$ hasta $n = 5$. ¿Qué valores de n producen la porción de la curva en forma de “corazón”? ¿Qué valores de n producen la porción de la curva en forma de “campana”? (Esta curva, creada por Michael W. Chamberlin, fue publicada en *The College Mathematics Journal*.)

Funciones vectoriales

- 3.1 Funciones vectoriales
- 3.2 Derivación e integración de funciones vectoriales
- 3.3 Velocidad y aceleración
- 3.4 Vectores tangentes y vectores normales
- 3.5 Longitud de arco y curvatura



Rapidez



Control de tráfico aéreo



Futbol



Tiro de lanzamiento de bala



Resbaladilla

Rapidez (06photo/Shutterstock.com); Control de tráfico aéreo (Elena Aliaga/Shutterstock.com); Tiro de lanzamiento de bala (Jamie Roach/Shutterstock.com); Resbaladilla (Jack. Q/Shutterstock.com); Futbol (Nicholas Moore/Shutterstock.com).

3.1 Funciones vectoriales

- Analizar y dibujar una curva en el espacio dada por una función vectorial.
- Extender los conceptos de límite y continuidad a funciones vectoriales.

Curvas en el espacio y funciones vectoriales

En la sección 2.2 se definió una *curva plana* como un conjunto de pares ordenados $(f(t), g(t))$ junto con sus ecuaciones paramétricas

$$x = f(t) \quad y = g(t)$$

donde f y g son funciones continuas de t en un intervalo I . Esta definición puede extenderse de manera natural al espacio tridimensional como sigue. Una **curva en el espacio C** es un conjunto de todas las demás ordenadas $(f(t), g(t), h(t))$ junto con sus ecuaciones paramétricas

$$x = f(t), \quad y = g(t) \quad y \quad z = h(t)$$

donde f, g y h son funciones continuas de t en un intervalo I .

Antes de ver ejemplos de curvas en el espacio, se introduce un nuevo tipo de función, llamada **función vectorial**. Este tipo de función asigna vectores a números reales.

Definición de función vectorial

Una función de la forma

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} \quad \text{Plano}$$

o

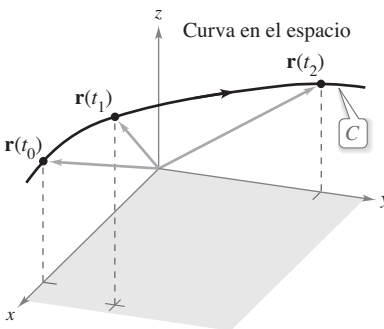
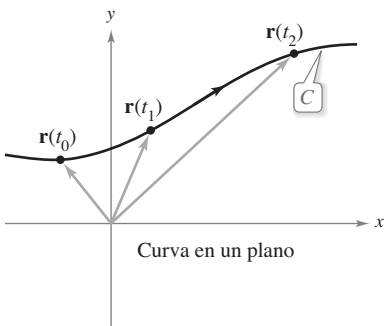
$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k} \quad \text{Espacio}$$

es una **función vectorial**, donde las **funciones componentes** f, g y h son funciones del parámetro t . Algunas veces las funciones vectoriales se denotan como

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t) \rangle \quad \text{Plano}$$

o

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle. \quad \text{Espacio}$$



La curva C es trazada por el punto final del vector posición $\mathbf{r}(t)$.

Figura 3.1

Técnicamente, una curva en el plano o en el espacio consiste en una colección de puntos y ecuaciones paramétricas que la definen. Dos curvas diferentes pueden tener la misma gráfica. Por ejemplo, cada una de las curvas dadas por

$$\mathbf{r}(t) = \sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} \quad y \quad \mathbf{r}(t) = \sin t^2 \mathbf{i} + \cos t^2 \mathbf{j}$$

tiene como gráfica el círculo unitario, pero estas ecuaciones no representan la misma curva, porque el círculo está trazado de diferentes maneras.

Es importante que se asegure de ver la diferencia entre la función vectorial \mathbf{r} y las funciones reales f, g y h . Todas son funciones de la variable real t , pero $\mathbf{r}(t)$ es un vector, mientras que $f(t), g(t)$ y $h(t)$ son números reales (para cada valor específico de t).

Las funciones vectoriales juegan un doble papel en la representación de curvas. Tomando como parámetro t , que representa el tiempo, se puede usar una función vectorial para representar el movimiento a lo largo de una curva. O, en el caso más general, puede usar una función vectorial para *trazar la gráfica* de una curva. En ambos casos el punto final del vector posición $\mathbf{r}(t)$ coincide con el punto (x, y) o (x, y, z) de la curva dada por las ecuaciones paramétricas, como se muestra en la figura 3.1. La punta de flecha en la curva indica la *orientación* de la curva apuntando en la dirección de valores crecientes de t .

A menos que se especifique otra cosa, se considera que el **dominio** de una función vectorial \mathbf{r} es la intersección de los dominios de las funciones componentes f, g y h . Por ejemplo, el dominio de $\mathbf{r}(t) = \ln t \mathbf{i} + \sqrt{1-t} \mathbf{j} + t \mathbf{k}$ es el intervalo $(0, 1]$.

EJEMPLO 1 Trazar una curva plana

Dibujar la curva plana representada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} - 3 \sin t \mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad \text{Función vectorial}$$

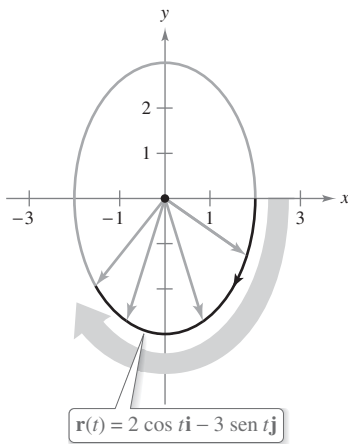
Solución A partir del vector de posición $\mathbf{r}(t)$, se pueden dar las ecuaciones paramétricas

$$x = 2 \cos t \quad \text{y} \quad y = -3 \sin t.$$

Despejando $\cos t$ y $\sin t$, y utilizando la identidad $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, se obtiene la ecuación rectangular

$$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1. \quad \text{Ecuación rectangular}$$

La gráfica de esta ecuación rectangular es la elipse mostrada en la figura 3.2. La curva está orientada en el *sentido de las manecillas del reloj*. Es decir, cuando t aumenta de 0 a 2π , el vector de posición $\mathbf{r}(t)$ se mueve en el sentido de las manecillas del reloj, y sus puntos finales describen la elipse.



La elipse es trazada en el sentido de las manecillas del reloj a medida que t aumenta de 0 a 2π .

Figura 3.2

EJEMPLO 2 Trazar una curva en el espacio

...► Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Dibuje la curva en el espacio representada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = 4 \cos t \mathbf{i} + 4 \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 4\pi. \quad \text{Función vectorial}$$

Solución De las dos primeras ecuaciones paramétricas

$$x = 4 \cos t \quad \text{y} \quad y = 4 \sin t$$

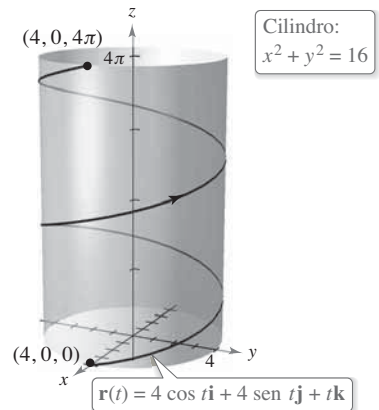
obtiene

$$x^2 + y^2 = 16. \quad \text{Función vectorial}$$

Esto significa que la curva se encuentra en un cilindro circular recto de radio 4, centrado en el eje z . Para localizar en este cilindro la curva, use la tercera ecuación paramétrica

$$z = t.$$

En la figura 3.3, observe que a medida que t crece de 0 a 4π el punto sube en espiral por el cilindro describiendo una **hélice**. Un ejemplo de una hélice de la vida real se muestra en el dibujo de la izquierda.



A medida que t crece de 0 a 4π , se describen dos espirales sobre la hélice.

Figura 3.3



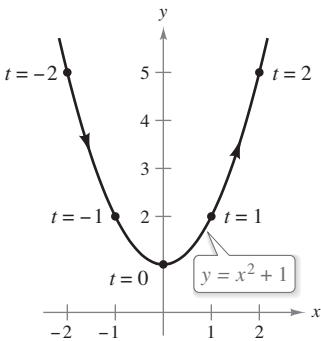
En 1953, Francis Crick y James D. Watson descubrieron la estructura de doble hélice del ADN.

En los ejemplos 1 y 2 se dio una función vectorial y se le pidió dibujar la curva correspondiente. Los dos ejemplos siguientes se refieren a la situación inversa: hallar una función vectorial para representar una gráfica dada. Claro está que si la gráfica se da en forma paramétrica, su representación por medio de una función vectorial es inmediata. Por ejemplo, para representar en el espacio la recta dada por $x = 2 + t$, $y = 3t$ y $z = 4 - t$, use simplemente la función vectorial dada por

$$\mathbf{r}(t) = (2 + t)\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + (4 - t)\mathbf{k}.$$

Si no se da un conjunto de ecuaciones paramétricas para la gráfica, el problema de representar la gráfica mediante una función vectorial se reduce a hallar un conjunto de ecuaciones paramétricas.

EJEMPLO 3 Representar una gráfica mediante una función vectorial



Hay muchas maneras de parametrizar esta gráfica. Una de ellas es tomar $x = t$.

Figura 3.4

Represente la parábola

$$y = x^2 + 1$$

mediante una función vectorial.

Solución Aunque usted tiene muchas maneras de elegir el parámetro t , una opción natural es tomar $x = t$. Entonces $y = t^2 + 1$ y tiene

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (t^2 + 1)\mathbf{j}. \quad \text{Función vectorial}$$

Observe en la figura 3.4 la orientación obtenida con esta elección particular de parámetro. Si hubiera elegido como parámetro $x = -t$, la curva habría estado orientada en dirección opuesta.

EJEMPLO 4 Representar una gráfica mediante una función vectorial

Dibuje la gráfica C representada por la intersección del semielipsoide

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{24} + \frac{z^2}{4} = 1, \quad z \geq 0$$

y el cilindro parabólico $y = x^2$. Después, halle una función vectorial que represente la gráfica.

Solución En la figura 3.5 se muestra la intersección de las dos superficies. Como en el ejemplo 3, una opción natural para el parámetro es $x = t$. Con esta opción, se usa la ecuación dada $y = x^2$ para obtener $y = t^2$. Entonces

$$\frac{z^2}{4} = 1 - \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{24} = 1 - \frac{t^2}{12} - \frac{t^4}{24} = \frac{24 - 2t^2 - t^4}{24} = \frac{(6 + t^2)(4 - t^2)}{24}.$$

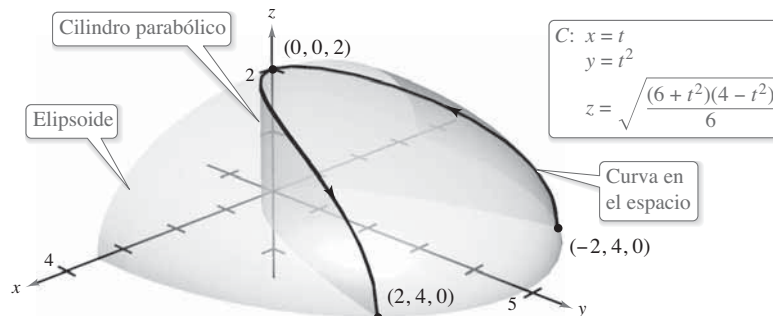
Como la curva se encuentra sobre el plano xy , debe elegir para z la raíz cuadrada positiva. Así obtiene las ecuaciones paramétricas siguientes.

$$x = t, \quad y = t^2 \quad y \quad z = \sqrt{\frac{(6 + t^2)(4 - t^2)}{6}}.$$

La función vectorial resultante es

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \sqrt{\frac{(6 + t^2)(4 - t^2)}{6}}\mathbf{k}, \quad -2 \leq t \leq 2. \quad \text{Función vectorial}$$

(Observe que el componente \mathbf{k} de $\mathbf{r}(t)$ implica $-2 \leq t \leq 2$.) De los puntos $(-2, 4, 0)$ y $(2, 4, 0)$ que se muestran en la figura 3.5, puede ver que la curva es trazada a medida que t crece de -2 a 2 .



La curva C es la intersección del semielipsoide y el cilindro parabólico.

Figura 3.5

COMENTARIO Las curvas en el espacio pueden especificarse de varias maneras. Por ejemplo, la curva del ejemplo 4 se describe como la intersección de dos superficies en el espacio.

Límites y continuidad

Muchas de las técnicas y definiciones utilizadas en el cálculo de funciones reales se pueden aplicar a funciones vectoriales. Por ejemplo, usted puede sumar y restar funciones vectoriales, multiplicar por un escalar, tomar su límite, derivarlas, y así sucesivamente. La estrategia básica consiste en aprovechar la linealidad de las operaciones vectoriales y extender las definiciones en una base, componente por componente. Por ejemplo, para sumar o restar dos funciones vectoriales (en el plano), tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t) &= [f_1(t)\mathbf{i} + g_1(t)\mathbf{j}] + [f_2(t)\mathbf{i} + g_2(t)\mathbf{j}] && \text{Suma} \\ &= [f_1(t) + f_2(t)]\mathbf{i} + [g_1(t) + g_2(t)]\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Para restar dos funciones vectoriales, puede escribir

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t) &= [f_1(t)\mathbf{i} + g_1(t)\mathbf{j}] - [f_2(t)\mathbf{i} + g_2(t)\mathbf{j}] && \text{Resta} \\ &= [f_1(t) - f_2(t)]\mathbf{i} + [g_1(t) - g_2(t)]\mathbf{j}.\end{aligned}$$

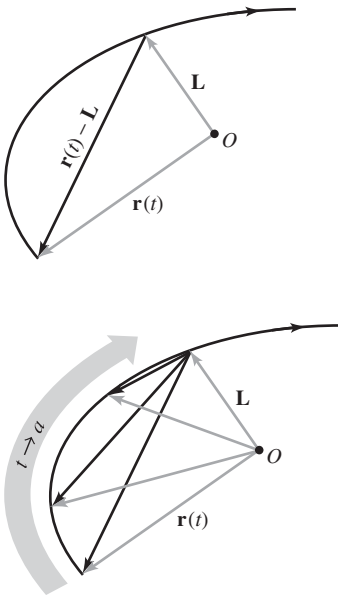
De manera similar, para multiplicar y dividir una función vectorial por un escalar tiene

$$\begin{aligned}c\mathbf{r}(t) &= c[f_1(t)\mathbf{i} + g_1(t)\mathbf{j}] && \text{Multiplicación escalar} \\ &= cf_1(t)\mathbf{i} + cg_1(t)\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Para dividir una función vectorial entre un escalar,

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{r}(t)}{c} &= \frac{[f_1(t)\mathbf{i} + g_1(t)\mathbf{j}]}{c}, \quad c \neq 0 && \text{División escalar} \\ &= \frac{f_1(t)}{c}\mathbf{i} + \frac{g_1(t)}{c}\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Esta extensión, componente por componente, de las operaciones con funciones reales a funciones vectoriales se ilustra más ampliamente en la definición siguiente del límite de una función vectorial.



A medida que t tiende a a , $\mathbf{r}(t)$ tiende al límite \mathbf{L} . Para que el límite \mathbf{L} exista, no es necesario que $\mathbf{r}(a)$ esté definida o que $\mathbf{r}(a)$ sea igual a \mathbf{L} .

Figura 3.6

Definición del límite de una función vectorial

1. Si \mathbf{r} es una función vectorial tal que $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \left[\lim_{t \rightarrow a} f(t) \right] \mathbf{i} + \left[\lim_{t \rightarrow a} g(t) \right] \mathbf{j} \quad \text{Plano}$$

siempre que existan los límites de f y g cuando $t \rightarrow a$.

2. Si \mathbf{r} es una función vectorial tal que $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \left[\lim_{t \rightarrow a} f(t) \right] \mathbf{i} + \left[\lim_{t \rightarrow a} g(t) \right] \mathbf{j} + \left[\lim_{t \rightarrow a} h(t) \right] \mathbf{k} \quad \text{Espacio}$$

siempre que existan los límites de f , g y h cuando $t \rightarrow a$.

Si $\mathbf{r}(t)$ tiende al vector \mathbf{L} cuando $t \rightarrow a$, entonces la longitud del vector $\mathbf{r}(t) - \mathbf{L}$ tiende a 0. Es decir,

$$\|\mathbf{r}(t) - \mathbf{L}\| \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow a.$$

Esto se ilustra de manera gráfica en la figura 3.6. Con esta definición del límite de una función vectorial, usted puede desarrollar versiones vectoriales de la mayor parte de los teoremas del límite. Por ejemplo, el límite de la suma de dos funciones vectoriales es la suma de sus límites individuales. También puede usar la orientación de la curva $\mathbf{r}(t)$ para definir límites unilaterales de funciones vectoriales. La definición siguiente extiende la noción de continuidad a funciones vectoriales.

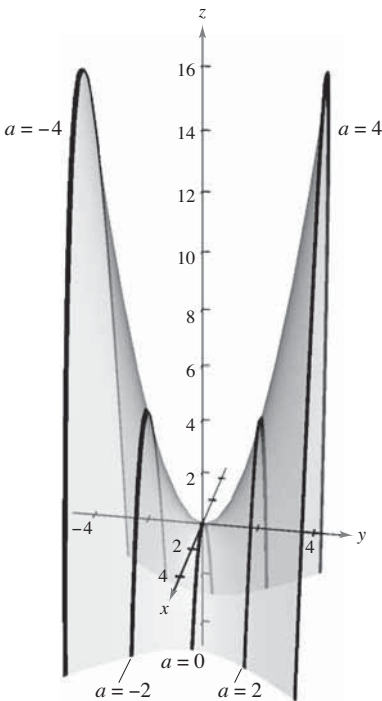
Definición de continuidad de una función vectorial

Una función vectorial \mathbf{r} es **continua en un punto** dado por $t = a$ si el límite de $\mathbf{r}(t)$ cuando $t \rightarrow a$ existe y

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a).$$

Una función vectorial \mathbf{r} es **continua en un intervalo** I si es continua en todos los puntos del intervalo.

De acuerdo con esta definición, una función vectorial es continua en $t = a$ si y solo si cada una de sus funciones componentes es continua en $t = a$.



Para todo a , la curva representada por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + a\mathbf{j} + (a^2 - t^2)\mathbf{k}$ es una parábola.

Figura 3.7

► **TECNOLOGÍA** Casi

- cualquier tipo de dibujo tridimensional es difícil hacerlo a mano, pero trazar curvas en el espacio es especialmente difícil.
- El problema consiste en crear la impresión de tres dimensiones.
- Las herramientas de graficación usan diversas técnicas para dar la “impresión de tres dimensiones” en gráficas de curvas en el espacio: una manera es mostrar la curva en una superficie, como en la figura 3.7.

EJEMPLO 5 Continuidad de funciones vectoriales

Analice la continuidad de la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + a\mathbf{j} + (a^2 - t^2)\mathbf{k} \quad a \text{ es una constante.}$$

cuando $t = 0$.

Solución Cuando t tiende a 0, el límite es

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{r}(t) &= \left[\lim_{t \rightarrow 0} t \right] \mathbf{i} + \left[\lim_{t \rightarrow 0} a \right] \mathbf{j} + \left[\lim_{t \rightarrow 0} (a^2 - t^2) \right] \mathbf{k} \\ &= 0\mathbf{i} + a\mathbf{j} + a^2\mathbf{k} \\ &= a\mathbf{j} + a^2\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(0) &= (0)\mathbf{i} + (a)\mathbf{j} + (a^2)\mathbf{k} \\ &= a\mathbf{j} + a^2\mathbf{k} \end{aligned}$$

puede concluir que \mathbf{r} es continua en $t = 0$. Mediante un razonamiento similar, concluye que la función vectorial \mathbf{r} es continua para todo valor real de t .

Para cada valor de a , la curva representada por la función vectorial del ejemplo 5,

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + a\mathbf{j} + (a^2 - t^2)\mathbf{k} \quad a \text{ es una constante.}$$

es una parábola. Usted puede imaginar cada una de estas parábolas como la intersección del plano vertical con el paraboloides hiperbólico

$$y^2 - x^2 = z$$

como se muestra en la figura 3.7.

EJEMPLO 6 Continuidad de funciones vectoriales

Determine los intervalo(s) en los cuales la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \sqrt{t+1}\mathbf{j} + (t^2 + 1)\mathbf{k}$$

es continua.

Solución Las funciones componentes son $f(t) = t$, $g(t) = \sqrt{t+1}$ y $h(t) = (t^2 + 1)$. Tanto f como h son continuas para todos los valores de t . Sin embargo, la función g es continua solo para $t \geq -1$. Por lo que \mathbf{r} es continua en el intervalo $[-1, \infty)$.

3.1 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Determinar el dominio En los ejercicios 1-8, halle el dominio de la función vectorial.

1. $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{t+1}\mathbf{i} + \frac{t}{2}\mathbf{j} - 3t\mathbf{k}$

2. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{4-t^2}\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} - 6t\mathbf{k}$

3. $\mathbf{r}(t) = \ln t\mathbf{i} - e^t\mathbf{j} - t\mathbf{k}$

4. $\mathbf{r}(t) = \sin t\mathbf{i} + 4\cos t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

5. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(t) + \mathbf{G}(t)$, donde

$$\mathbf{F}(t) = \cos t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j} + \sqrt{t}\mathbf{k}, \quad \mathbf{G}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$$

6. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(t) - \mathbf{G}(t)$, donde

$$\mathbf{F}(t) = \ln t\mathbf{i} + 5t\mathbf{j} - 3t^2\mathbf{k}, \quad \mathbf{G}(t) = \mathbf{i} + 4t\mathbf{j} - 3t^2\mathbf{k}$$

7. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(t) \times \mathbf{G}(t)$, donde

$$\mathbf{F}(t) = \sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}, \quad \mathbf{G}(t) = \sin t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k}$$

8. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(t) \times \mathbf{G}(t)$, donde

$$\mathbf{F}(t) = t^3\mathbf{i} - t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad \mathbf{G}(t) = \sqrt[3]{t}\mathbf{i} + \frac{1}{t+1}\mathbf{j} + (t+2)\mathbf{k}$$

Evaluar una función En los ejercicios 9-12, evalúe (si es posible) la función vectorial en cada valor dado de t .

9. $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}t^2\mathbf{i} - (t-1)\mathbf{j}$

(a) $\mathbf{r}(1)$ (b) $\mathbf{r}(0)$ (c) $\mathbf{r}(s+1)$

(d) $\mathbf{r}(2+\Delta t) - \mathbf{r}(2)$

10. $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j}$

(a) $\mathbf{r}(0)$ (b) $\mathbf{r}(\pi/4)$ (c) $\mathbf{r}(\theta - \pi)$

(d) $\mathbf{r}(\pi/6 + \Delta t) - \mathbf{r}(\pi/6)$

11. $\mathbf{r}(t) = \ln t\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$

(a) $\mathbf{r}(2)$ (b) $\mathbf{r}(-3)$ (c) $\mathbf{r}(t-4)$

(d) $\mathbf{r}(1+\Delta t) - \mathbf{r}(1)$

12. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\mathbf{i} + t^{3/2}\mathbf{j} + e^{-t/4}\mathbf{k}$

(a) $\mathbf{r}(0)$ (b) $\mathbf{r}(4)$ (c) $\mathbf{r}(c+2)$

(d) $\mathbf{r}(9+\Delta t) - \mathbf{r}(9)$

Escribir una función vectorial En los ejercicios 13-16, represente el segmento de recta desde P hasta Q mediante una función vectorial y mediante un conjunto de ecuaciones paramétricas.

13. $P(0, 0, 0), Q(3, 1, 2)$

14. $P(0, 2, -1), Q(4, 7, 2)$

15. $P(-2, 5, -3), Q(-1, 4, 9)$

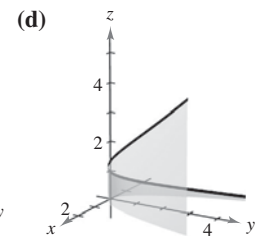
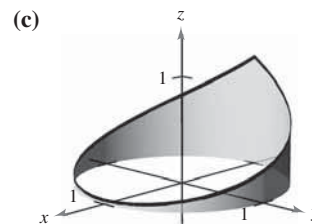
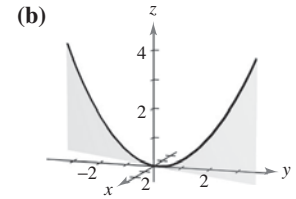
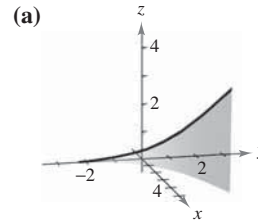
16. $P(1, -6, 8), Q(-3, -2, 5)$

Piénselo En los ejercicios 17 y 18, halle $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)$. ¿Es el resultado una función vectorial? Explique.

17. $\mathbf{r}(t) = (3t-1)\mathbf{i} + \frac{1}{4}t^3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}, \quad \mathbf{u}(t) = t^2\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$

18. $\mathbf{r}(t) = \langle 3\cos t, 2\sin t, t-2 \rangle, \quad \mathbf{u}(t) = \langle 4\sin t, -6\cos t, t^2 \rangle$

Relacionar En los ejercicios 19-22, relacione cada ecuación con su gráfica. [Las gráficas están marcadas (a), (b), (c) y (d).]



19. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad -2 \leq t \leq 2$

20. $\mathbf{r}(t) = \cos(\pi t)\mathbf{i} + \sin(\pi t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad -1 \leq t \leq 1$

21. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + e^{0.75t}\mathbf{k}, \quad -2 \leq t \leq 2$

22. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \ln t\mathbf{j} + \frac{2t}{3}\mathbf{k}, \quad 0.1 \leq t \leq 5$

Trazar una curva En los ejercicios 23-28, dibuje la curva representada por la función vectorial y dé la orientación de la curva.

23. $\mathbf{r}(t) = \frac{t}{4}\mathbf{i} + (t-1)\mathbf{j}$ 24. $\mathbf{r}(t) = (5-t)\mathbf{i} + \sqrt{t}\mathbf{j}$

25. $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$ 26. $\mathbf{r}(t) = (t^2+t)\mathbf{i} + (t^2-t)\mathbf{j}$

27. $\mathbf{r}(\theta) = \cos \theta\mathbf{i} + 3\sin \theta\mathbf{j}$

28. $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j}$

29. $\mathbf{r}(\theta) = 3\sec \theta\mathbf{i} + 2\tan \theta\mathbf{j}$

30. $\mathbf{r}(t) = 2\cos^3 t\mathbf{i} + 2\sin^3 t\mathbf{j}$

31. $\mathbf{r}(t) = (-t+1)\mathbf{i} + (4t+2)\mathbf{j} + (2t+3)\mathbf{k}$

32. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (2t-5)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$

33. $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

34. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 3\cos t\mathbf{j} + 3\sin t\mathbf{k}$

35. $\mathbf{r}(t) = 2\sin t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$

36. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + \frac{3}{2}t\mathbf{k}$

37. $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, \frac{2}{3}t^3 \rangle$

38. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t, t \rangle$




Identificar una curva común En los ejercicios 39-42, use un sistema algebraico por computadora a fin de representar gráficamente la función vectorial e identifique la curva común.

39. $\mathbf{r}(t) = -\frac{1}{2}t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} - \frac{\sqrt{3}}{2}t^2\mathbf{k}$

40. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}t^2\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}$

41. $\mathbf{r}(t) = \sin t\mathbf{i} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t - \frac{1}{2}t\right)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{2}\cos t + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathbf{k}$

42. $\mathbf{r}(t) = -\sqrt{2}\sin t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} + \sqrt{2}\sin t\mathbf{k}$

 **Piénselo** En los ejercicios 43 y 44, use un sistema algebraico por computadora a fin de representar gráficamente la función vectorial $\mathbf{r}(t)$. Para cada $\mathbf{u}(t)$, haga una conjetura sobre la transformación (si la hay) de la gráfica de $\mathbf{r}(t)$. Use un sistema algebraico por computadora para verificar su conjetura.

43. $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t\mathbf{k}$

(a) $\mathbf{u}(t) = 2(\cos t - 1)\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t\mathbf{k}$

(b) $\mathbf{u}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$

(c) $\mathbf{u}(t) = 2\cos(-t)\mathbf{i} + 2\sin(-t)\mathbf{j} + \frac{1}{2}(-t)\mathbf{k}$

(d) $\mathbf{u}(t) = \frac{1}{2}t\mathbf{i} + 2\sin t\mathbf{j} + 2\cos t\mathbf{k}$

(e) $\mathbf{u}(t) = 6\cos t\mathbf{i} + 6\sin t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t\mathbf{k}$

44. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^3\mathbf{k}$

(a) $\mathbf{u}(t) = t\mathbf{i} + (t^2 - 2)\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^3\mathbf{k}$

(b) $\mathbf{u}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^3\mathbf{k}$

(c) $\mathbf{u}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \left(\frac{1}{2}t^3 + 4\right)\mathbf{k}$

(d) $\mathbf{u}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{1}{8}t^3\mathbf{k}$

(e) $\mathbf{u}(t) = (-t)\mathbf{i} + (-t)^2\mathbf{j} + \frac{1}{2}(-t)^3\mathbf{k}$

Representar una gráfica mediante una función vectorial En los ejercicios 45-52, represente la curva plana por medio de una función vectorial. (Hay muchas respuestas correctas.)

45. $y = x + 5$

46. $2x - 3y + 5 = 0$

47. $y = (x - 2)^2$

48. $y = 4 - x^2$

49. $x^2 + y^2 = 25$

50. $(x - 2)^2 + y^2 = 4$

51. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$

52. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

Representar una gráfica mediante una función vectorial En los ejercicios 53-60, dibuje la curva en el espacio representada por la intersección de las superficies. Después represente la curva por una función vectorial utilizando el parámetro dado.

Superficies

Parámetro

53. $z = x^2 + y^2, \quad x + y = 0$

$x = t$

54. $z = x^2 + y^2, \quad z = 4$

$x = 2\cos t$

55. $x^2 + y^2 = 4, \quad z = x^2$

$x = 2\sin t$

56. $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16, \quad x = z^2$

$z = t$

57. $x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x + z = 2$

$x = 1 + \sin t$

58. $x^2 + y^2 + z^2 = 10, \quad x + y = 4$

$x = 2 + \sin t$

59. $x^2 + z^2 = 4, \quad y^2 + z^2 = 4$

$x = t$ (primer octante)

60. $x^2 + y^2 + z^2 = 16, \quad xy = 4$

$x = t$ (primer octante)

61. **Dibujar una curva** Demuestre que la función vectorial $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\cos t\mathbf{j} + 2t\sin t\mathbf{k}$ se encuentra en el cono $4x^2 = y^2 + z^2$. Dibuje la curva.

62. **Dibujar una curva** Demuestre que la función vectorial $\mathbf{r}(t) = e^{-t}\cos t\mathbf{i} + e^{-t}\sin t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$ se encuentra en el cono $z^2 = x^2 + y^2$. Dibuje la curva.

Determinar un límite En los ejercicios 63-68, evalúe el límite (si existe).

63. $\lim_{t \rightarrow \pi} (t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \sin t\mathbf{k})$

64. $\lim_{t \rightarrow 2} \left(3t\mathbf{i} + \frac{2}{t^2 - 1}\mathbf{j} + \frac{1}{t}\mathbf{k} \right)$

65. $\lim_{t \rightarrow 0} \left(t^2\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + \frac{1 - \cos t}{t}\mathbf{k} \right)$

66. $\lim_{t \rightarrow 1} \left(\sqrt{t}\mathbf{i} + \frac{\ln t}{t^2 - 1}\mathbf{j} + \frac{1}{t - 1}\mathbf{k} \right)$

67. $\lim_{t \rightarrow 0} \left(e^t\mathbf{i} + \frac{\sin t}{t}\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k} \right)$

68. $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(e^{-t}\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j} + \frac{t}{t^2 + 1}\mathbf{k} \right)$

Continuidad de una función vectorial En los ejercicios 69-74, determine el (los) intervalo(s) en que la función vectorial es continua.

69. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j}$

70. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\mathbf{i} + \sqrt{t - 1}\mathbf{j}$

71. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \arcsen t\mathbf{j} + (t - 1)\mathbf{k}$

72. $\mathbf{r}(t) = 2e^{-t}\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + \ln(t - 1)\mathbf{k}$

73. $\mathbf{r}(t) = \langle e^{-t}, t^2, \tan t \rangle$ 74. $\mathbf{r}(t) = \langle 8, \sqrt{t}, \sqrt[3]{t} \rangle$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

Escribir una transformación En los ejercicios 75-78, considere la función vectorial

$\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (t - 3)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$.

Dé una función vectorial $s(t)$ que sea la transformación especificada de \mathbf{r} .

75. Una traslación vertical tres unidades hacia arriba.

76. Una traslación vertical dos unidades hacia abajo.

77. Una traslación horizontal dos unidades en dirección del eje x negativo.

78. Una traslación horizontal cinco unidades en dirección del eje y positivo.

79. **Continuidad de una función vectorial** Escriba la definición de continuidad para una función vectorial. Dé un ejemplo de una función vectorial que esté definida pero no sea continua en $t = 2$.

80. **Comparar funciones** ¿Cuáles de las siguientes gráficas representa la misma gráfica?

(a) $\mathbf{r}(t) = (-3\cos t + 1)\mathbf{i} + (5\sin t + 2)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

(b) $\mathbf{r}(t) = 4\mathbf{i} + (-3\cos t + 1)\mathbf{j} + (5\sin t + 2)\mathbf{k}$

(c) $\mathbf{r}(t) = (3\cos t - 1)\mathbf{i} + (-5\sin t - 2)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

(d) $\mathbf{r}(t) = (-3\cos 2t + 1)\mathbf{i} + (5\sin 2t + 2)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

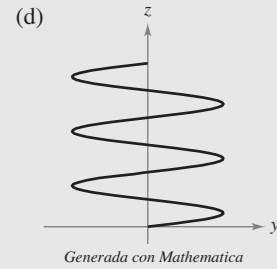
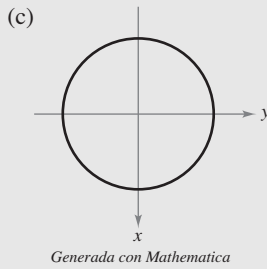
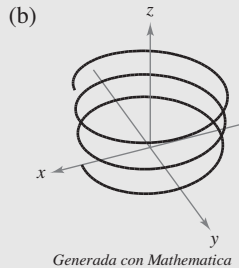
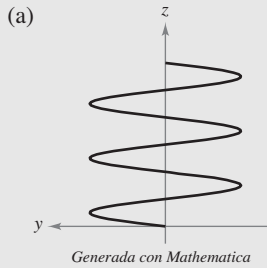
81. Resbaladilla

El borde exterior de una resbaladilla tiene forma de una hélice de 1.5 metros de radio. La resbaladilla tiene una altura de 2 metros y hace una revolución completa desde arriba hacia abajo. Encuentre una función vectorial para la hélice. Use un sistema algebraico por computadora para graficar la función. (Existen muchas respuestas correctas.)



82.

¿CÓMO LO VE? Las cuatro figuras que se muestran a continuación son las gráficas de la función vectorial $\mathbf{r}(t) = 4 \cos t \mathbf{i} + 4 \sin t \mathbf{j} + (t/4)\mathbf{k}$. Relacione cada una de las cuatro gráficas con el punto en el espacio desde el cual se ve la hélice. Los cuatro puntos son $(0, 0, 20)$, $(20, 0, 0)$, $(-20, 0, 0)$ y $(10, 20, 10)$.



83. **Demostración** Sean $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$ funciones vectoriales cuyos límites existen cuando $t \rightarrow c$. Demuestre que

$$\lim_{t \rightarrow c} [\mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}(t)] = \lim_{t \rightarrow c} \mathbf{r}(t) \times \lim_{t \rightarrow c} \mathbf{u}(t).$$

84. **Demostración** Sean $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$ funciones vectoriales cuyos límites existen cuando $t \rightarrow c$. Demuestre que

$$\lim_{t \rightarrow c} [\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)] = \lim_{t \rightarrow c} \mathbf{r}(t) \cdot \lim_{t \rightarrow c} \mathbf{u}(t).$$

85. **Demostración** Demuestre que si \mathbf{r} es una función vectorial continua en c , entonces $\|\mathbf{r}\|$ es continua en c .

86. **Comprobar un inverso** Verifique que el recíproco de lo que se afirma en el ejercicio 85 no es verdad encontrando una función vectorial \mathbf{r} tal que $\|\mathbf{r}\|$ sea continua en c pero \mathbf{r} no sea continua en c .

Movimiento de una partícula En los ejercicios 87 y 88, dos partículas viajan a lo largo de las curvas de espacio $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$. Una colisión ocurrirá en el punto de intersección P si ambas partículas están en P al mismo tiempo. ¿Colisionan las partículas? ¿Se intersecan sus trayectorias?

87. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (9t - 20)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$

$\mathbf{u}(t) = (3t + 4)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + (5t - 4)\mathbf{k}$

88. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$

$\mathbf{u}(t) = (-2t + 3)\mathbf{i} + 8t\mathbf{j} + (12t + 2)\mathbf{k}$

Piénselo En los ejercicios 89 y 90, dos partículas viajan a lo largo de las curvas de espacio $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$.

89. Si $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$ se intersecan, ¿colisionarán las partículas?

90. Si las partículas colisionan, ¿se intersecan sus trayectorias $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$?

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 91-94, determine si la declaración es verdadera o falsa. Si es falsa, explique por qué o dé un ejemplo que pruebe que es falsa.

91. Si f , g y h son funciones polinomiales de primer grado, entonces la curva dada por $x = f(t)$, $y = g(t)$ y $z = h(t)$ es una recta.

92. Si la curva dada por $x = f(t)$, $y = g(t)$ y $z = h(t)$ es una recta, entonces f , g y h son funciones polinomiales de primer grado de t .

93. Dos partículas viajan a través de las curvas de espacio $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$. La intersección de sus trayectorias depende solo de las curvas trazadas por $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{u}(t)$ en tanto la colisión depende de la parametrización.

94. La función vectorial $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t \sin t \mathbf{j} + \cos t \mathbf{k}$ se encuentra en el paraboloides $x = y^2 + z^2$.

PROYECTO DE TRABAJO

Bruja de Agnesi

Con anterioridad se estudió una curva famosa llamada **bruja de Agnesi**. En este proyecto se profundiza sobre esta función.

Considere un círculo de radio a centrado en el punto $(0, a)$ del eje y . Sea A un punto en la recta horizontal $y = 2a$, O el origen y B el punto donde el segmento OA corta el círculo. Un punto P está en la bruja de Agnesi si P se encuentra en la recta horizontal que pasa por B y en la recta vertical que pasa por A .

(a) Demuestre que el punto A está descrito por la función vectorial donde $\mathbf{r}_A(\theta) = 2a \cot \theta \mathbf{i} + 2a\mathbf{j}$ para $0 < \theta < \pi$, donde θ es el ángulo formado por OA con el eje x positivo.

(b) Demuestre que el punto B está descrito por la función vectorial $\mathbf{r}_B(\theta) = a \sin 2\theta \mathbf{i} + a(1 - \cos 2\theta)\mathbf{j}$ para $0 < \theta < \pi$.

(c) Combine los resultados de los incisos (a) y (b) para hallar la función vectorial $\mathbf{r}(\theta)$ para la bruja de Agnesi. Use una herramienta de graficación para representar esta curva para $a = 1$.

(d) Describa los límites $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \mathbf{r}(\theta)$ y $\lim_{\theta \rightarrow \pi^-} \mathbf{r}(\theta)$.

(e) Elimine el parámetro θ y determine la ecuación rectangular de la bruja de Agnesi. Use una herramienta de graficación para representar esta función para $a = 1$ y compare la gráfica con la obtenida en el inciso (c).

3.2 Derivación e integración de funciones vectoriales

- Derivar una función vectorial.
- Integrar una función vectorial.

Derivación de funciones vectoriales

En las secciones 3.3 a 3.5 estudiará varias aplicaciones importantes que emplean cálculo de funciones vectoriales. Como preparación para ese estudio, esta sección está dedicada a las mecánicas de derivación e integración de funciones vectoriales.

La definición de la derivada de una función vectorial es paralela a la dada para funciones reales.

Definición de la derivada de una función vectorial

La derivada de una función vectorial \mathbf{r} se define como

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

para todo t para el cual existe el límite. Si $\mathbf{r}'(t)$ existe, entonces \mathbf{r} es derivable en t . Si $\mathbf{r}'(t)$ existe para toda t en un intervalo abierto I , entonces \mathbf{r} es derivable en el intervalo I . La derivabilidad de funciones vectoriales puede extenderse a intervalos cerrados considerando límites unilaterales.

...COMENTARIO Además de la notación $\mathbf{r}'(t)$, otras notaciones para la derivada de una función vectorial son

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)], \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad \text{y} \quad D_t[\mathbf{r}(t)].$$

La derivación de funciones vectoriales puede hacerse *componente por componente*. Para ver que esto es cierto, considere la función dada por $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$. Aplicando la definición de derivada se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t)\mathbf{i} + g(t + \Delta t)\mathbf{j} - f(t)\mathbf{i} - g(t)\mathbf{j}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \left[\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \right] \mathbf{i} + \left[\frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t} \right] \mathbf{j} \right\} \\ &= \left\{ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \right] \right\} \mathbf{i} + \left\{ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t} \right] \right\} \mathbf{j} \\ &= f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} \end{aligned}$$

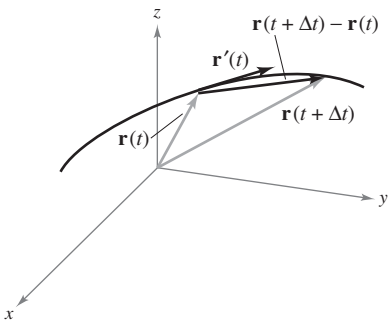


Figura 3.8

Este importante resultado se enuncia en el teorema de la página siguiente. Observe que la derivada de la función vectorial \mathbf{r} es también una función vectorial. En la figura 3.8 puede ver que $\mathbf{r}'(t)$ es un vector tangente a la curva dada por $\mathbf{r}(t)$ y que apunta en la dirección de los valores crecientes de t .

TEOREMA 3.1 Derivación de funciones vectoriales

1. Si $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, donde f y g son funciones derivables de t , entonces

$$\mathbf{r}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j}. \quad \text{Plano}$$

2. Si $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, donde f , g y h son funciones derivables de t , entonces

$$\mathbf{r}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k}. \quad \text{Espacio}$$

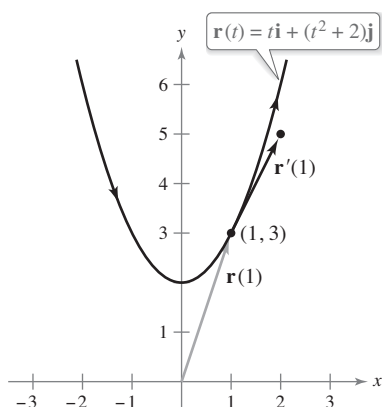


Figura 3.9

EJEMPLO 1 Derivación de funciones vectoriales

Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Para la función vectorial dada por

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (t^2 + 2)\mathbf{j}$$

encuentre $\mathbf{r}'(t)$. A continuación, bosqueje la curva plana representada por $\mathbf{r}(t)$ y las gráficas de $\mathbf{r}(1)$ y $\mathbf{r}'(1)$.

Solución Derive cada una de las componentes base para obtener

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j}. \quad \text{Derivada}$$

Del vector de posición $\mathbf{r}(t)$, puede escribir las ecuaciones paramétricas $x = t$ y $y = t^2 + 2$. La ecuación rectangular correspondiente es $y = x^2 + 2$. Cuando $t = 1$,

$$\mathbf{r}(1) = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

y

$$\mathbf{r}'(1) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}.$$

En la figura 3.9, $\mathbf{r}(1)$ se dibuja iniciando en el origen, y $\mathbf{r}'(1)$ se dibuja en el punto final de $\mathbf{r}(1)$.

Derivadas de orden superior de funciones vectoriales se obtienen por derivación sucesiva de cada una de las funciones componentes.

EJEMPLO 2 Derivadas de orden superior

Para la función vectorial dada por

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$$

encuentre

- $\mathbf{r}'(t)$
- $\mathbf{r}''(t)$
- $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)$
- $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)$

Solución

$$\mathbf{a.} \quad \mathbf{r}'(t) = -\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \quad \text{Primera derivada}$$

$$\mathbf{b.} \quad \mathbf{r}''(t) = -\cos t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \\ = -\cos t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j} \quad \text{Segunda derivada}$$

$$\mathbf{c.} \quad \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t) = \sin t \cos t - \sin t \cos t = 0 \quad \text{Producto escalar}$$

$$\mathbf{d.} \quad \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin t & \cos t & 2 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} \quad \text{Producto vectorial}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos t & 2 \\ -\sin t & 0 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} -\sin t & 2 \\ -\cos t & 0 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} -\sin t & \cos t \\ -\cos t & -\sin t \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ = 2 \sin t\mathbf{i} - 2 \cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

En el inciso 2(c) observe que el producto escalar es una función real, no una función vectorial.

La parametrización de la curva representada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$$

es suave en un intervalo abierto I si f' , g' y h' son continuas en I y $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo valor de t en el intervalo I .

EJEMPLO 3 Intervalos en los que una curva es suave

Halle los intervalos en los que la epicicloide C dada por

$$\mathbf{r}(t) = (5 \cos t - \cos 5t)\mathbf{i} + (5 \sin t - \sin 5t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

es suave.

Solución La derivada de \mathbf{r} es

$$\mathbf{r}'(t) = (-5 \sin t + 5 \sin 5t)\mathbf{i} + (5 \cos t - 5 \cos 5t)\mathbf{j}.$$

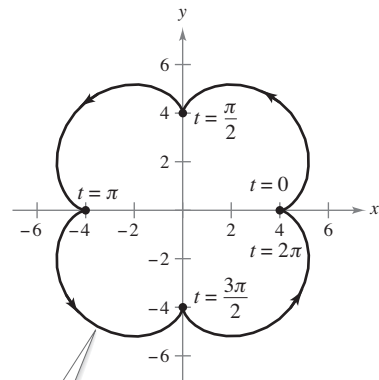
En el intervalo $[0, 2\pi]$ los únicos valores de t para los cuales

$$\mathbf{r}'(t) = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}$$

son $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ y 2π . Por consiguiente, puede concluir que C es suave en los intervalos

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \text{ y } \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$$

como se muestra en la figura 3.10.



$$\mathbf{r}(t) = (5 \cos t - \cos 5t)\mathbf{i} + (5 \sin t - \sin 5t)\mathbf{j}$$

La epicicloide no es suave en los puntos en los que corta los ejes.

Figura 3.10

En la figura 3.10, observe que la curva no es suave en los puntos en los que tiene cambios abruptos de dirección. Tales puntos se llaman **cúspides** o **nodos**.

La mayoría de las reglas de derivación tienen sus análogas para funciones vectoriales, y varias de ellas se dan en el teorema siguiente. Observe que el teorema contiene tres versiones de “reglas del producto”. La propiedad 3 da la derivada del producto de una función real w y por una función vectorial \mathbf{r} , la propiedad 4 da la derivada del producto escalar de dos funciones vectoriales y la propiedad 5 da la derivada del producto vectorial de dos funciones vectoriales (en el espacio).

TEOREMA 3.2 Propiedades de la derivada

Sean \mathbf{r} y \mathbf{u} funciones vectoriales derivables de t , w una función real derivable de t y c un escalar.

1. $\frac{d}{dt} [c\mathbf{r}(t)] = c\mathbf{r}'(t)$
2. $\frac{d}{dt} [\mathbf{r}(t) \pm \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}'(t) \pm \mathbf{u}'(t)$
3. $\frac{d}{dt} [w(t)\mathbf{r}(t)] = w(t)\mathbf{r}'(t) + w'(t)\mathbf{r}(t)$
4. $\frac{d}{dt} [\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}'(t) + \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{u}(t)$
5. $\frac{d}{dt} [\mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}'(t) + \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{u}(t)$
6. $\frac{d}{dt} [\mathbf{r}(w(t))] = \mathbf{r}'(w(t))w'(t)$
7. Si $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = c$, entonces $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$.

...**COMENTARIO** Observe que la propiedad 5 solo se aplica a funciones vectoriales tridimensionales, porque el producto vectorial no está definido para vectores bidimensionales.

Demostración Para demostrar la propiedad 4, sea

$$\mathbf{r}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + g_1(t)\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}(t) = f_2(t)\mathbf{i} + g_2(t)\mathbf{j}$$

donde f_1, f_2, g_1 y g_2 son funciones derivables de t . Entonces,

$$\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t) = f_1(t)f_2(t) + g_1(t)g_2(t)$$

y se deduce que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)] &= f_1(t)f_2'(t) + f_1'(t)f_2(t) + g_1(t)g_2'(t) + g_1'(t)g_2(t) \\ &= [f_1(t)f_2'(t) + g_1(t)g_2'(t)] + [f_1'(t)f_2(t) + g_1'(t)g_2(t)] \\ &= \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}'(t) + \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{u}(t). \end{aligned}$$

Consulte *LarsonCalculus.com* para el video de Bruce Edwards de esta demostración. ■

Las demostraciones de las otras propiedades se dejan como ejercicios (vea los ejercicios 67 a 71 y el ejercicio 74).

EJEMPLO 4

Aplicar las propiedades de la derivada

Para $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{t}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \ln t\mathbf{k}$ y $\mathbf{u}(t) = t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + \mathbf{k}$, halle

a. $\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)]$ y b. $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{u}'(t)]$.

Solución

a. Como $\mathbf{r}'(t) = -\frac{1}{t^2}\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{k}$ y $\mathbf{u}'(t) = 2t\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)] &= \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}'(t) + \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{u}(t) \\ &= \left(\frac{1}{t}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \ln t\mathbf{k}\right) \cdot (2t\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) + \left(-\frac{1}{t^2}\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{k}\right) \cdot (t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + \mathbf{k}) \\ &= 2 + 2 + (-1) + \frac{1}{t} \\ &= 3 + \frac{1}{t}. \end{aligned}$$

b. Como $\mathbf{u}'(t) = 2t\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{u}''(t) = 2\mathbf{i}$, tiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{u}'(t)] &= [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{u}''(t)] + [\mathbf{u}'(t) \times \mathbf{u}'(t)] \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ t^2 & -2t & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \mathbf{0} \\ &= \begin{vmatrix} -2t & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} t^2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} t^2 & -2t \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= 0\mathbf{i} - (-2)\mathbf{j} + 4t\mathbf{k} \\ &= 2\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Haga de nuevo los incisos (a) y (b) del ejemplo 4 pero formando primero los productos escalar y vectorial, y derivando después para comprobar que obtiene los mismos resultados.

Exploración

Sea $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$.

Dibuje la gráfica de $\mathbf{r}(t)$.

Explique por qué la gráfica es

un círculo de radio 1 centrado

en el origen. Calcule $\mathbf{r}(\pi/4)$

y $\mathbf{r}'(\pi/4)$. Coloque el vector

$\mathbf{r}'(\pi/4)$ de manera que su

punto inicial esté en el punto

final de $\mathbf{r}(\pi/4)$. ¿Qué observa?

Demuestre que $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)$ es

constante y que $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$

para todo t . ¿Qué relación tiene

este ejemplo con la propiedad 7

del teorema 3.2?

Integración de funciones vectoriales

La siguiente definición es una consecuencia lógica de la definición de la derivada de una función vectorial.

Definición de integración de funciones vectoriales

1. Si $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, donde f y g son continuas en $[a, b]$, entonces la **integral indefinida (antiderivada)** de \mathbf{r} es

$$\int \mathbf{r}(t) dt = \left[\int f(t) dt \right] \mathbf{i} + \left[\int g(t) dt \right] \mathbf{j} \quad \text{Plano}$$

y su **integral definida** en el intervalo $a \leq t \leq b$ es

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \left[\int_a^b f(t) dt \right] \mathbf{i} + \left[\int_a^b g(t) dt \right] \mathbf{j}.$$

2. Si $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$, donde f , g y h son continuas en $[a, b]$, entonces la **integral indefinida (antiderivada)** de \mathbf{r} es

$$\int \mathbf{r}(t) dt = \left[\int f(t) dt \right] \mathbf{i} + \left[\int g(t) dt \right] \mathbf{j} + \left[\int h(t) dt \right] \mathbf{k} \quad \text{Espacio}$$

y su **integral definida** en el intervalo $a \leq t \leq b$ es

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \left[\int_a^b f(t) dt \right] \mathbf{i} + \left[\int_a^b g(t) dt \right] \mathbf{j} + \left[\int_a^b h(t) dt \right] \mathbf{k}.$$

La antiderivada de una función vectorial es una familia de funciones vectoriales que difieren entre sí en un vector constante \mathbf{C} . Por ejemplo, si es una función vectorial tridimensional, entonces al hallar la integral indefinida $\int \mathbf{r}(t) dt$, se obtienen tres constantes de integración

$$\int f(t) dt = F(t) + C_1, \quad \int g(t) dt = G(t) + C_2, \quad \int h(t) dt = H(t) + C_3$$

donde $F'(t) = f(t)$, $G'(t) = g(t)$ y $H'(t) = h(t)$. Estas tres constantes *escalares* forman un *vector* como constante de integración,

$$\begin{aligned} \int \mathbf{r}(t) dt &= [F(t) + C_1]\mathbf{i} + [G(t) + C_2]\mathbf{j} + [H(t) + C_3]\mathbf{k} \\ &= [F(t)\mathbf{i} + G(t)\mathbf{j} + H(t)\mathbf{k}] + [C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}] \\ &= \mathbf{R}(t) + \mathbf{C} \end{aligned}$$

donde $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$.

EJEMPLO 5

Integrar una función vectorial

Encuentre la integral indefinida

$$\int (t\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) dt.$$

Solución Integrando componente por componente obtiene

$$\int (t\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) dt = \frac{t^2}{2}\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + \mathbf{C}.$$

El ejemplo 6 muestra cómo evaluar la integral definida de una función vectorial.

EJEMPLO 6 Integral definida de una función vectorial

Evalúe la integral

$$\int_0^1 \mathbf{r}(t) dt = \int_0^1 \left(\sqrt[3]{t} \mathbf{i} + \frac{1}{t+1} \mathbf{j} + e^{-t} \mathbf{k} \right) dt.$$

Solución

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mathbf{r}(t) dt &= \left(\int_0^1 t^{1/3} dt \right) \mathbf{i} + \left(\int_0^1 \frac{1}{t+1} dt \right) \mathbf{j} + \left(\int_0^1 e^{-t} dt \right) \mathbf{k} \\ &= \left[\left(\frac{3}{4} \right) t^{4/3} \right]_0^1 \mathbf{i} + \left[\ln|t+1| \right]_0^1 \mathbf{j} + \left[-e^{-t} \right]_0^1 \mathbf{k} \\ &= \frac{3}{4} \mathbf{i} + (\ln 2) \mathbf{j} + \left(1 - \frac{1}{e} \right) \mathbf{k} \end{aligned}$$

Como ocurre con las funciones reales, puede reducir la familia de primitivas de una función vectorial \mathbf{r}' a una sola primitiva imponiendo una condición inicial a la función vectorial \mathbf{r} , como muestra el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 7 La primitiva de una función vectorial

Encuentre la primitiva de

$$\mathbf{r}'(t) = \cos 2t \mathbf{i} - 2 \operatorname{sen} t \mathbf{j} + \frac{1}{1+t^2} \mathbf{k}$$

que satisface la condición inicial

$$\mathbf{r}(0) = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Solución

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \int \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \left(\int \cos 2t dt \right) \mathbf{i} + \left(\int -2 \operatorname{sen} t dt \right) \mathbf{j} + \left(\int \frac{1}{1+t^2} dt \right) \mathbf{k} \\ &= \left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t + C_1 \right) \mathbf{i} + (2 \cos t + C_2) \mathbf{j} + (\arctan t + C_3) \mathbf{k} \end{aligned}$$

Haciendo $t = 0$,

$$\mathbf{r}(0) = (0 + C_1) \mathbf{i} + (2 + C_2) \mathbf{j} + (0 + C_3) \mathbf{k}.$$

Usando el hecho que $\mathbf{r}(0) = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, tiene

$$(0 + C_1) \mathbf{i} + (2 + C_2) \mathbf{j} + (0 + C_3) \mathbf{k} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Igualando los componentes correspondientes obtiene

$$C_1 = 3, \quad 2 + C_2 = -2 \quad \text{y} \quad C_3 = 1.$$

Por tanto, la primitiva que satisface la condición inicial dada es

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t + 3 \right) \mathbf{i} + (2 \cos t - 4) \mathbf{j} + (\arctan t + 1) \mathbf{k}.$$

3.2 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Derivación de funciones vectoriales En los ejercicios 1-6, halle $r'(t)$, $r(t_0)$ y $r'(t_0)$ para el valor dado de t_0 . Después dibuje la curva plana representada por la función vectorial, y dibuje los vectores $r(t_0)$ y $r'(t_0)$. Coloque los vectores de manera que el punto inicial de $r(t_0)$ esté en el origen y el punto inicial de $r'(t_0)$ esté en el punto final de $r(t_0)$. ¿Qué relación hay entre $r'(t_0)$ y la curva?

- $r(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j}$, $t_0 = 2$
- $r(t) = (1 + t)\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$, $t_0 = 1$
- $r(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$
- $r(t) = 3 \sin t\mathbf{i} + 4 \cos t\mathbf{j}$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$
- $r(t) = \langle e^t, e^{2t} \rangle$, $t_0 = 0$
- $r(t) = \langle e^{-t}, e^t \rangle$, $t_0 = 0$

Derivar funciones vectoriales En los ejercicios 7-8, halle $r'(t)$, $r(t_0)$ y $r'(t_0)$ para el valor dado de t_0 . Después dibuje la curva plana representada por la función vectorial, y dibuje los vectores $r(t_0)$ y $r'(t_0)$.

- $r(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $t_0 = \frac{3\pi}{2}$
- $r(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{3}{2}\mathbf{k}$, $t_0 = 2$

Hallar una derivada En los ejercicios 9-20, halle $r'(t)$.

- $r(t) = t^3\mathbf{i} - 3t\mathbf{j}$
- $r(t) = \sqrt{t}\mathbf{i} + (1 - t^3)\mathbf{j}$
- $r(t) = \langle 2 \cos t, 5 \sin t \rangle$
- $r(t) = \langle t \cos t, -2 \sin t \rangle$
- $r(t) = 6t\mathbf{i} - 7t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$
- $r(t) = \frac{1}{t}\mathbf{i} + 16t\mathbf{j} + \frac{t^2}{2}\mathbf{k}$
- $r(t) = a \cos^3 t\mathbf{i} + a \sin^3 t\mathbf{j} + \mathbf{k}$
- $r(t) = 4\sqrt{t}\mathbf{i} + t^2\sqrt{t}\mathbf{j} + \ln t^2\mathbf{k}$
- $r(t) = e^{-t}\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5te^t\mathbf{k}$
- $r(t) = \langle t^3, \cos 3t, \sin 3t \rangle$
- $r(t) = \langle t \sin t, t \cos t, t \rangle$
- $r(t) = \langle \arcsen t, \arccos t, 0 \rangle$

Derivadas de orden superior En los ejercicios 21-24, halle (a) $r'(t)$, (b) $r''(t)$, y (c) $r'(t) \cdot r''(t)$.

- $r(t) = t^3\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j}$
- $r(t) = (t^2 + t)\mathbf{i} + (t^2 - t)\mathbf{j}$
- $r(t) = 4 \cos t\mathbf{i} + 4 \sin t\mathbf{j}$
- $r(t) = 8 \cos t\mathbf{i} + 3 \sin t\mathbf{j}$

Derivadas de orden superior En los ejercicios 25-28, halle (a) $r'(t)$, (b) $r''(t)$, (c) $r'(t) \cdot r''(t)$, y (d) $r'(t) \times r''(t)$.

- $r(t) = \frac{1}{2}t^2\mathbf{i} - t\mathbf{j} + \frac{1}{6}t^3\mathbf{k}$
- $r(t) = t^3\mathbf{i} + (2t^2 + 3)\mathbf{j} + (3t - 5)\mathbf{k}$
- $r(t) = \langle \cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t, t \rangle$
- $r(t) = \langle e^{-t}, t^2, \tan t \rangle$

Determinar los intervalos en los que la curva es suave En los ejercicios 29-38, halle el (los) intervalo(s) abierto(s) en que la curva dada por la función vectorial es suave.

- $r(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$
- $r(t) = \frac{1}{t-1}\mathbf{i} + 3t\mathbf{j}$
- $r(\theta) = 2 \cos^3 \theta\mathbf{i} + 3 \sin^3 \theta\mathbf{j}$
- $r(\theta) = (\theta + \sin \theta)\mathbf{i} + (1 - \cos \theta)\mathbf{j}$
- $r(\theta) = (\theta - 2 \sin \theta)\mathbf{i} + (1 - 2 \cos \theta)\mathbf{j}$
- $r(t) = \frac{2t}{8+t^3}\mathbf{i} + \frac{2t^2}{8+t^3}\mathbf{j}$
- $r(t) = (t-1)\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j} - t^2\mathbf{k}$
- $r(t) = e^t\mathbf{i} - e^{-t}\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$
- $r(t) = t\mathbf{i} - 3t\mathbf{j} + \tan t\mathbf{k}$
- $r(t) = \sqrt{t}\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j} + \frac{1}{4}t\mathbf{k}$

Usar las propiedades de la derivada En los ejercicios 39 y 40, use las propiedades de la derivada para encontrar lo siguiente.

- $r'(t)$
- $\frac{d}{dt} [3r(t) - u(t)]$
- $\frac{d}{dt} (5t)u(t)$
- $\frac{d}{dt} [r(t) \cdot u(t)]$
- $\frac{d}{dt} [r(t) \times u(t)]$
- $\frac{d}{dt} r(2t)$

- $r(t) = t\mathbf{i} + 3t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, $u(t) = 4t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$
- $r(t) = t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j} + 2 \cos t\mathbf{k}$
 $u(t) = \frac{1}{t}\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j} + 2 \cos t\mathbf{k}$

Utilizar dos métodos En los ejercicios 41 y 42, halle

- $\frac{d}{dt} [r(t) \cdot u(t)]$ y (b) $\frac{d}{dt} [r(t) \times u(t)]$ en dos diferentes formas.
- (i) Encuentre primero el producto y luego derive.
- (ii) Aplique las propiedades del teorema 3.2.

- $r(t) = t\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $u(t) = t^4\mathbf{k}$
- $r(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $u(t) = \mathbf{j} + t\mathbf{k}$

Determinar una integral indefinida En los ejercicios 43-50, encuentre la integral indefinida.

- $\int (2t\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) dt$
- $\int (4t^3\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} - 4\sqrt{t}\mathbf{k}) dt$
- $\int \left(\frac{1}{t}\mathbf{i} + \mathbf{j} - t^{3/2}\mathbf{k} \right) dt$
- $\int \left(\ln t\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j} + \mathbf{k} \right) dt$
- $\int \left[(2t-1)\mathbf{i} + 4t^3\mathbf{j} + 3\sqrt{t}\mathbf{k} \right] dt$
- $\int (e^t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k}) dt$
- $\int \left(\sec^2 t\mathbf{i} + \frac{1}{1+t^2}\mathbf{j} \right) dt$
- $\int (e^{-t} \sin t\mathbf{i} + e^{-t} \cos t\mathbf{j}) dt$

Calcular una integral indefinida En los ejercicios 51-56, evalúe la integral definida.

$$51. \int_0^1 (8t\mathbf{i} + t\mathbf{j} - \mathbf{k}) dt \quad 52. \int_{-1}^1 (t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + \sqrt[3]{t}\mathbf{k}) dt$$

$$53. \int_0^{\pi/2} [(a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{j} + \mathbf{k}] dt$$

$$54. \int_0^{\pi/4} [(\sec t \tan t)\mathbf{i} + (\tan t)\mathbf{j} + (2 \sin t \cos t)\mathbf{k}] dt$$

$$55. \int_0^2 (t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} - te^t\mathbf{k}) dt \quad 56. \int_0^3 \|t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}\| dt$$

Determinar una antiderivada En los ejercicios 57-62, determine $\mathbf{r}(t)$ que satisfaga las condiciones iniciales.

$$57. \mathbf{r}'(t) = 4e^{2t}\mathbf{i} + 3e^t\mathbf{j}, \quad \mathbf{r}(0) = 2\mathbf{i}$$

$$58. \mathbf{r}'(t) = 3t^2\mathbf{j} + 6\sqrt{t}\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

$$59. \mathbf{r}''(t) = -32\mathbf{j}, \quad \mathbf{r}'(0) = 600\sqrt{3}\mathbf{i} + 600\mathbf{j}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$$

$$60. \mathbf{r}''(t) = -4 \cos t\mathbf{j} - 3 \sin t\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}'(0) = 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(0) = 4\mathbf{j}$$

$$61. \mathbf{r}'(t) = te^{-t^2}\mathbf{i} - e^{-t}\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(0) = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$62. \mathbf{r}'(t) = \frac{1}{1+t^2}\mathbf{i} + \frac{1}{t^2}\mathbf{j} + \frac{1}{t}\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(1) = 2\mathbf{i}$$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

63. Derivar Escriba la definición de derivada de una función vectorial. Describa cómo hallar la derivada de una función vectorial y dé su interpretación geométrica.

64. Integrar ¿Cómo encuentra la integral de una función vectorial?

65. Usar una derivada Las tres componentes de la derivada de una función vectorial \mathbf{u} son positivas en $t = t_0$. Describa el comportamiento de \mathbf{u} en $t = t_0$.

66. Usar una derivada La componente z de la derivada de una función vectorial \mathbf{u} es 0 para t en el dominio de la función. ¿Qué implica esta información acerca de la gráfica de \mathbf{u} ?

Demostración En los ejercicios 67-74, demuestre la propiedad. En todos los casos, suponga que \mathbf{r} , \mathbf{u} y \mathbf{v} son funciones vectoriales derivables de t , que w es una función real derivable de t , y que c es un escalar.

$$67. \frac{d}{dt}[c\mathbf{r}(t)] = c\mathbf{r}'(t)$$

$$68. \frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \pm \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}'(t) \pm \mathbf{u}'(t)$$

$$69. \frac{d}{dt}[w(t)\mathbf{r}(t)] = w(t)\mathbf{r}'(t) + w'(t)\mathbf{r}(t)$$

$$70. \frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}'(t) + \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{u}(t)$$

$$71. \frac{d}{dt}[\mathbf{r}(w(t))] = \mathbf{r}'(w(t))w'(t)$$

$$72. \frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)] = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t)$$

$$73. \frac{d}{dt}\{\mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)]\} = \mathbf{r}'(t) \cdot [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] + \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(t)] + \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(t)]$$

74. Si $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)$ es una constante, entonces $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$.

75. Movimiento de una partícula Una partícula se mueve en el plano xy a lo largo de la curva representada por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = (t - \sin t)\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j}$.



(a) Use una herramienta de graficación para representar \mathbf{r} . Describa la curva.

(b) Halle los valores mínimo y máximo de $\|\mathbf{r}\|$ y $\|\mathbf{r}''\|$.

76. Movimiento de una partícula Una partícula se mueve en el plano yz a lo largo de la curva representada por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = (2 \cos t)\mathbf{j} + (3 \sin t)\mathbf{k}$.

(a) Describa la curva.

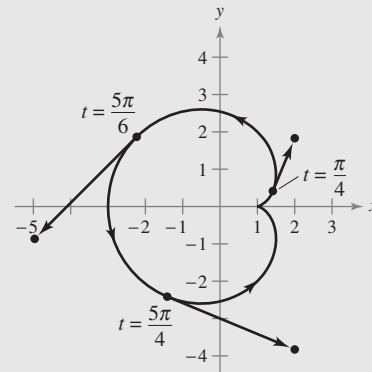
(b) Halle los valores mínimo y máximo de $\|\mathbf{r}\|$ y $\|\mathbf{r}''\|$.

77. Vectores perpendiculares Considere la función vectorial $\mathbf{r}(t) = (e^t \sin t)\mathbf{i} + (e^t \cos t)\mathbf{j}$. Demuestre que $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{r}''(t)$ son siempre perpendiculares a cada uno.



78.

¿CÓMO LO VE? La gráfica muestra una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ para $0 \leq t \leq 2\pi$ y su derivada $\mathbf{r}'(t)$ para diferentes valores de t .



(a) Para cada derivada que se muestra en la gráfica, determine si cada componente es positiva o negativa.

(b) ¿Es suave la curva en el intervalo $[0, 2\pi]$? Explique su razonamiento.

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 79-82, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que muestre que es falso.

79. Si una partícula se mueve a lo largo de una esfera centrada en el origen, entonces su vector derivada es siempre tangente a la esfera.

80. La integral definida de una función vectorial es un número real.

$$81. \frac{d}{dt}[\|\mathbf{r}(t)\|] = \|\mathbf{r}'(t)\|$$

82. Si \mathbf{r} y \mathbf{u} son funciones vectoriales derivables de t , entonces

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)] = \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{u}'(t).$$

3.3 Velocidad y aceleración

- Describir la velocidad y la aceleración relacionadas con una función vectorial.
- Usar una función vectorial para analizar el movimiento de un proyectil.

Velocidad y aceleración

Ahora combinará el estudio de ecuaciones paramétricas, curvas, vectores y funciones vectoriales, a fin de formular un modelo para el movimiento a lo largo de una curva. Empezará por ver el movimiento de un objeto en el plano. (El movimiento de un objeto en el espacio puede desarrollarse de manera similar.)

Conforme el objeto se mueve a lo largo de una curva en el plano, la coordenada x y la coordenada y de su centro de masa cada una función del tiempo t . En lugar de utilizar las letras f y g para representar estas dos funciones, es conveniente escribir $x = x(t)$ y $y = y(t)$. Por tanto, el vector de posición $\mathbf{r}(t)$ toma la forma

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}. \quad \text{Vector de posición}$$

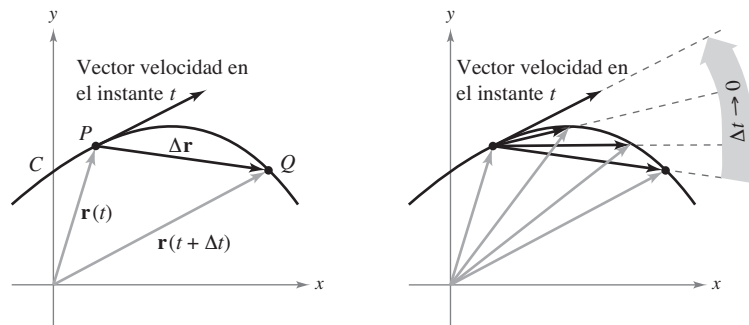
Lo mejor de este modelo vectorial para representar movimiento es que puede usar la primera y la segunda derivadas de la función vectorial \mathbf{r} para hallar la velocidad y la aceleración del objeto. (Recuerde del capítulo anterior que la velocidad y la aceleración son cantidades vectoriales que tienen magnitud y dirección.) Para hallar los vectores velocidad y aceleración en un instante dado t , considere un punto $Q(x(t + \Delta t), y(t + \Delta t))$ que se aproxima al punto $P(x(t), y(t))$ a lo largo de la curva C dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, como se muestra en la figura 3.11. A medida que $\Delta t \rightarrow 0$, la dirección del vector \overrightarrow{PQ} (denotada por $\Delta \mathbf{r}$) se aproxima a la *dirección del movimiento* en el instante t .

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{r} &= \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) \\ \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} &= \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \end{aligned}$$

Si este límite existe, se define como **vector velocidad** o **vector tangente** a la curva en el punto P . Observe que este es el mismo límite usado en la definición de $\mathbf{r}'(t)$. Por tanto, la dirección de $\mathbf{r}'(t)$ da la dirección del movimiento en el instante t . Además, la magnitud del vector $\mathbf{r}'(t)$

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \|x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

da la **rapidez** del objeto en el instante t . De manera similar, puede usar $\mathbf{r}''(t)$ para hallar la aceleración, como se indica en las definiciones siguientes.



Conforme $\Delta t \rightarrow 0$, $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ se aproxima al vector velocidad.

Figura 3.11

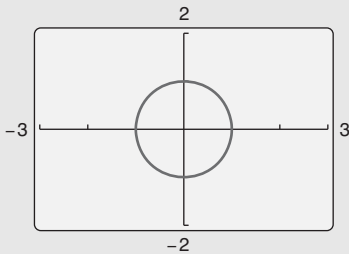
Exploración

Exploración de velocidad

Considere el círculo dado por

$$\mathbf{r}(t) = (\cos \omega t)\mathbf{i} + (\sin \omega t)\mathbf{j}.$$

(El símbolo ω es la letra griega omega.) Use una herramienta de graficación en modo *paramétrico* para representar este círculo para varios valores de ω . ¿Cómo afecta ω a la velocidad del punto terminal cuando se traza la curva? Para un valor dado de ω , ¿parece ser constante la velocidad? ¿Parece ser constante la aceleración? Explique su razonamiento.



Definiciones de velocidad y aceleración

Si x y y son funciones de t que tienen primera y segunda derivadas, y \mathbf{r} es una función vectorial dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, entonces el vector velocidad, el vector aceleración y la rapidez en el instante t se definen como sigue

Velocidad = $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}$

Aceleración = $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = x''(t)\mathbf{i} + y''(t)\mathbf{j}$

Rapidez = $\|\mathbf{v}(t)\| = \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$

Para el movimiento a lo largo de una curva en el espacio, las definiciones son similares. Es decir, para $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, se tiene

Velocidad = $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$

Aceleración = $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = x''(t)\mathbf{i} + y''(t)\mathbf{j} + z''(t)\mathbf{k}$

Rapidez = $\|\mathbf{v}(t)\| = \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}$.

.....► **COMENTARIO** En el ejemplo 1, observe que los vectores velocidad y aceleración son ortogonales en todo punto y en cualquier instante. Esto es característico del movimiento con rapidez constante. (Vea el ejercicio 53.)

EJEMPLO 1

Hallar la velocidad y la aceleración a lo largo de una curva plana

Encuentre el vector velocidad, la rapidez y el vector aceleración de una partícula que se mueve a lo largo de la curva plana C descrita por

$\mathbf{r}(t) = 2 \sin \frac{t}{2} \mathbf{i} + 2 \cos \frac{t}{2} \mathbf{j}$. Vector de posición

Solución

El vector velocidad es

$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \cos \frac{t}{2} \mathbf{i} - \sin \frac{t}{2} \mathbf{j}$. Vector velocidad

La rapidez (en cualquier tiempo) es

$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}} = 1$. Rapidez

El vector aceleración es

$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = -\frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} \mathbf{i} - \frac{1}{2} \cos \frac{t}{2} \mathbf{j}$. Vector aceleración

Las ecuaciones paramétricas de la curva del ejemplo 1 son

$x = 2 \sin \frac{t}{2}$ y $y = 2 \cos \frac{t}{2}$.

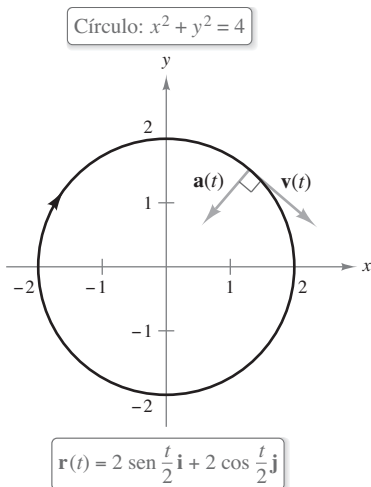
Eliminando el parámetro t , obtiene la ecuación rectangular

$x^2 + y^2 = 4$. Ecuación rectangular

Por tanto, la curva es un círculo de radio 2 centrado en el origen, como se muestra en la figura 3.12. Como el vector velocidad

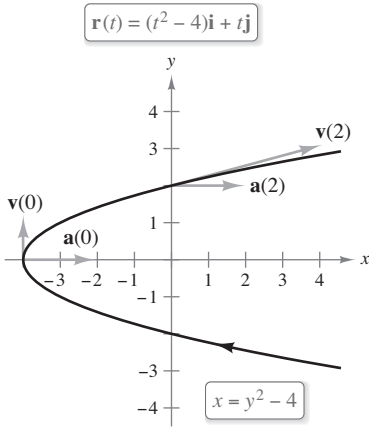
$\mathbf{v}(t) = \cos \frac{t}{2} \mathbf{i} - \sin \frac{t}{2} \mathbf{j}$

tiene una magnitud constante pero cambia de dirección a medida que t aumenta, la partícula se mueve alrededor del círculo con una rapidez constante



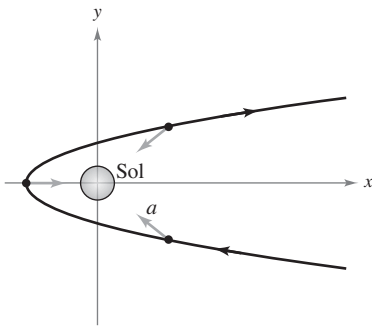
La partícula se mueve alrededor del círculo con rapidez constante.

Figura 3.12



En todo punto en la curva, el vector aceleración apunta a la derecha.

Figura 3.13



En todo punto de la órbita del cometa, el vector aceleración apunta hacia el Sol.

Figura 3.14

EJEMPLO 2 Vectores velocidad y aceleración en el plano

Dibuje la trayectoria de un objeto que se mueve a lo largo de la curva plana dada por

$$\mathbf{r}(t) = (t^2 - 4)\mathbf{i} + t\mathbf{j} \quad \text{Vector posición}$$

y encuentre los vectores velocidad y aceleración cuando $t = 0$ y $t = 2$.

Solución Utilizando las ecuaciones paramétricas $x = t^2 - 4$ y $y = t$, puede determinar que la curva es una parábola dada por

$$x = y^2 - 4 \quad \text{Ecuación rectangular}$$

como se muestra en la figura 3.13. El vector velocidad (en cualquier instante) es

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} + \mathbf{j} \quad \text{Vector velocidad}$$

y el vector aceleración (en cualquier instante) es

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = 2\mathbf{i}. \quad \text{Vector aceleración}$$

Cuando $t = 0$, los vectores velocidad y aceleración están dados por

$$\mathbf{v}(0) = 2(0)\mathbf{i} + \mathbf{j} = \mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{a}(0) = 2\mathbf{i}.$$

Cuando $t = 2$, los vectores velocidad y aceleración están dados por

$$\mathbf{v}(2) = 2(2)\mathbf{i} + \mathbf{j} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{a}(2) = 2\mathbf{i}.$$

Si el objeto se mueve por la trayectoria mostrada en la figura 3.13, observe que el vector aceleración es constante (tiene una magnitud de 2 y apunta hacia la derecha). Esto implica que la rapidez del objeto va decreciendo conforme el objeto se mueve hacia el vértice de la parábola, y la rapidez va creciendo conforme el objeto se aleja del vértice de la parábola.

Este tipo de movimiento *no* es el característico de cometas que describen trayectorias parabólicas en nuestro sistema solar. En estos cometas el vector aceleración apunta siempre hacia el origen (el Sol), lo que implica que la rapidez del cometa aumenta a medida que se aproxima al vértice de su trayectoria y disminuye cuando se aleja del vértice. (Vea la figura 3.14.)

EJEMPLO 3 Vectores velocidad y aceleración en el espacio

⋮⋮⋮▶ Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Dibuje la trayectoria de un objeto que se mueve a lo largo de la curva en el espacio C dada por

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}, \quad t \geq 0 \quad \text{Vector posición}$$

y encuentre los vectores velocidad y aceleración cuando $t = 1$.

Solución Utilizando las ecuaciones paramétricas $x = t$ y $y = t^3$, puede determinar que la trayectoria del objeto se encuentra en el cilindro cúbico dado por

$$y = x^3. \quad \text{Ecuación rectangular}$$

Como $z = 3t$, el objeto parte de $(0, 0, 0)$ y se mueve hacia arriba a medida que t aumenta, como se muestra en la figura 3.15. Como $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$, tiene

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \quad \text{Vector velocidad}$$

y

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = 6t\mathbf{j}. \quad \text{Vector aceleración}$$

Cuando $t = 1$, los vectores velocidad y aceleración están dados por

$$\mathbf{v}(1) = \mathbf{r}'(1) = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{a}(1) = \mathbf{r}''(1) = 6\mathbf{j}.$$

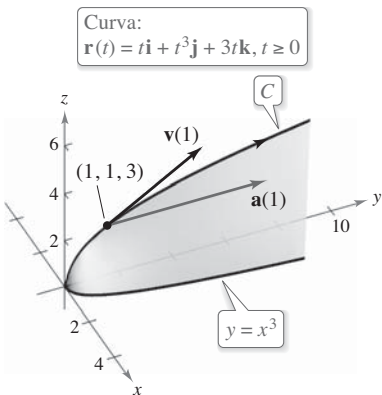


Figura 3.15

Hasta aquí usted ha tratado de hallar la velocidad y la aceleración derivando la función de posición. En muchas aplicaciones prácticas se tiene el problema inverso, halle la función de posición dada una velocidad o una aceleración. Esto se muestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4 Hallar una función posición por integración

Un objeto parte del reposo del punto $P(1, 2, 0)$ y se mueve con una aceleración de

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{j} + 2\mathbf{k} \quad \text{Vector aceleración}$$

donde $\|\mathbf{a}(t)\|$ se mide en pies por segundo al cuadrado. Determine la posición del objeto después de $t = 2$ segundos.

Solución A partir de la descripción del movimiento del objeto, se pueden deducir las *condiciones iniciales* siguientes. Como el objeto parte del reposo, se tiene

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{0}.$$

Como el objeto parte del punto $(x, y, z) = (1, 2, 0)$, tiene

$$\mathbf{r}(0) = x(0)\mathbf{i} + y(0)\mathbf{j} + z(0)\mathbf{k} = 1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}.$$

Para hallar la función de posición, debe integrar dos veces, usando cada vez una de las condiciones iniciales para hallar la constante de integración. El vector velocidad es

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \int \mathbf{a}(t) dt \\ &= \int (\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) dt \\ &= t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k} + \mathbf{C} \end{aligned}$$

donde $\mathbf{C} = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}$. Haciendo $t = 0$ y aplicando la condición inicial $\mathbf{v}(0) = \mathbf{0}$, obtiene

$$\mathbf{v}(0) = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k} = \mathbf{0} \Rightarrow C_1 = C_2 = C_3 = 0.$$

Por tanto, la *velocidad* en cualquier instante t es

$$\mathbf{v}(t) = t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}. \quad \text{Vector velocidad}$$

Integrando una vez más se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \int \mathbf{v}(t) dt \\ &= \int (t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}) dt \\ &= \frac{t^2}{2}\mathbf{j} + t^2\mathbf{k} + \mathbf{C} \end{aligned}$$

donde $\mathbf{C} = C_4\mathbf{i} + C_5\mathbf{j} + C_6\mathbf{k}$. Haciendo $t = 0$ y aplicando la condición inicial $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, tiene

$$\mathbf{r}(0) = C_4\mathbf{i} + C_5\mathbf{j} + C_6\mathbf{k} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} \Rightarrow C_4 = 1, C_5 = 2, C_6 = 0.$$

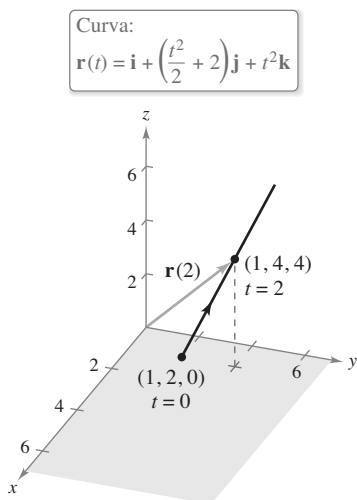
Por tanto, el vector *posición* es

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \left(\frac{t^2}{2} + 2\right)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}. \quad \text{Vector posición}$$

La posición del objeto después de $t = 2$ segundos está dada por

$$\mathbf{r}(2) = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

como se muestra en la figura 3.16.



El objeto tarda 2 segundos en moverse del punto $(1, 2, 0)$ al punto $(1, 4, 4)$ a lo largo de la curva.

Figura 3.16

Movimiento de proyectiles

Ahora ya dispone de lo necesario para deducir las ecuaciones paramétricas de la trayectoria de un proyectil. Suponga que la gravedad es la única fuerza que actúa sobre un proyectil después de su lanzamiento. Por tanto, el movimiento ocurre en un plano vertical que puede representarse por el sistema de coordenadas xy con el origen correspondiente a un punto sobre la superficie de la Tierra, como se muestra en la figura 3.17. Para un proyectil de masa m , la fuerza gravitatoria es

$$\mathbf{F} = -mg\mathbf{j} \quad \text{Fuerza gravitatoria}$$

donde la aceleración de la gravedad es $g = 32$ pies por segundo al cuadrado, o 9.81 metros por segundo al cuadrado. Por la **segunda ley del movimiento de Newton**, esta misma fuerza produce una aceleración $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ y satisface la ecuación $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Por consiguiente, la aceleración del proyectil está dada por $m\mathbf{a} = -mg\mathbf{j}$, lo que implica que

$$\mathbf{a} = -g\mathbf{j}. \quad \text{Aceleración del proyectil}$$

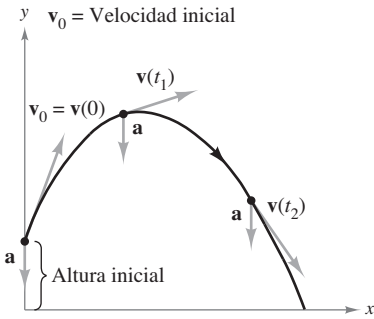


Figura 3.17

EJEMPLO 5 Deducir la función de posición de un proyectil

Un proyectil de masa m se lanza desde una posición inicial \mathbf{r}_0 con una velocidad inicial \mathbf{v}_0 . Determine su vector posición en función del tiempo.

Solución Comience con el vector aceleración $\mathbf{a}(t) = -g\mathbf{j}$ e integre dos veces.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \int \mathbf{a}(t) dt = \int -g\mathbf{j} dt = -gt\mathbf{j} + \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{r}(t) &= \int \mathbf{v}(t) dt = \int (-gt\mathbf{j} + \mathbf{C}_1) dt = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + \mathbf{C}_1t + \mathbf{C}_2 \end{aligned}$$

Puede usar el hecho de que $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ y $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0$ para hallar los vectores constantes \mathbf{C}_1 y \mathbf{C}_2 . Haciendo esto obtiene

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{v}_0 \quad \text{y} \quad \mathbf{C}_2 = \mathbf{r}_0.$$

Por consiguiente, el vector posición es

$$\mathbf{r}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + t\mathbf{v}_0 + \mathbf{r}_0. \quad \text{Vector posición}$$

En muchos problemas sobre proyectiles, los vectores constantes \mathbf{r}_0 y \mathbf{v}_0 no se dan explícitamente. A menudo se dan la altura inicial h , la rapidez inicial v_0 y el ángulo θ con que el proyectil es lanzado, como se muestra en la figura 3.18. De la altura dada, se puede deducir que $\mathbf{r}_0 = h\mathbf{j}$. Como la rapidez da la magnitud de la velocidad inicial, se deduce que $v_0 = \|\mathbf{v}_0\|$ y puede escribir

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \\ &= (\|\mathbf{v}_0\| \cos \theta)\mathbf{i} + (\|\mathbf{v}_0\| \sin \theta)\mathbf{j} \\ &= v_0 \cos \theta \mathbf{i} + v_0 \sin \theta \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Por tanto, el vector posición puede expresarse en la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + t\mathbf{v}_0 + \mathbf{r}_0 \quad \text{Vector posición} \\ &= -\frac{1}{2}gt^2\mathbf{j} + tv_0 \cos \theta \mathbf{i} + tv_0 \sin \theta \mathbf{j} + h\mathbf{j} \\ &= (v_0 \cos \theta)t\mathbf{i} + \left[h + (v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \right] \mathbf{j}. \end{aligned}$$

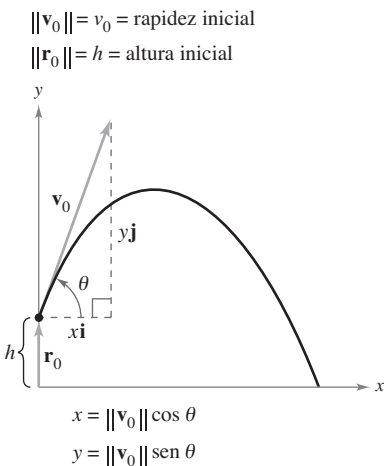


Figura 3.18

TEOREMA 3.3 Vector posición de un proyectil

Despreciando la resistencia del aire, la trayectoria de un proyectil lanzado de una altura inicial h con rapidez inicial v_0 y ángulo de elevación θ se describe por medio de la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = (v_0 \cos \theta)t\mathbf{i} + \left[h + (v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \right]\mathbf{j}$$

donde g es la aceleración de la gravedad.

EJEMPLO 6**Describir la trayectoria de una pelota de béisbol**

Una pelota de béisbol es golpeada 3 pies sobre el nivel del suelo a 100 pies por segundo y con un ángulo de 45° respecto al suelo, como se muestra en la figura 3.19. Encuentre la altura máxima que alcanza la pelota de béisbol. ¿Pasará por encima de una cerca de 10 pies de altura localizada a 300 pies del plato de lanzamiento?

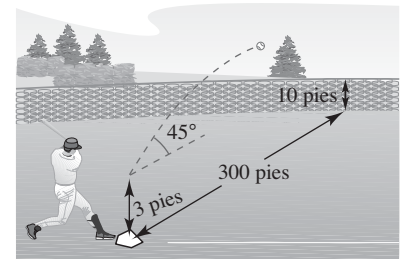


Figura 3.19

Solución Usted tiene que

$$h = 3, \quad v_0 = 100 \quad y \quad \theta = 45^\circ.$$

Así, utilizando el teorema 3.3 con $g = 32$ pies por segundo al cuadrado obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \left(100 \cos \frac{\pi}{4} \right)t\mathbf{i} + \left[3 + \left(100 \sin \frac{\pi}{4} \right)t - 16t^2 \right]\mathbf{j} \\ &= (50\sqrt{2}t)\mathbf{i} + (3 + 50\sqrt{2}t - 16t^2)\mathbf{j}. \end{aligned}$$

El vector velocidad es

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 50\sqrt{2}\mathbf{i} + (50\sqrt{2} - 32t)\mathbf{j}.$$

La altura máxima se alcanza cuando

$$y'(t) = 50\sqrt{2} - 32t$$

es igual a 0, lo cual implica que

$$t = \frac{25\sqrt{2}}{16} \approx 2.21 \text{ segundos.}$$

Por tanto, la altura máxima que alcanza la pelota es

$$\begin{aligned} y &= 3 + 50\sqrt{2} \left(\frac{25\sqrt{2}}{16} \right) - 16 \left(\frac{25\sqrt{2}}{16} \right)^2 \\ &= \frac{649}{8} \\ &\approx 81 \text{ pies.} \end{aligned}$$

Altura máxima cuando $t \approx 2.21$ segundos

La pelota está a 300 pies de donde fue golpeada cuando

$$300 = x(t) \quad \Rightarrow \quad 300 = 50\sqrt{2}t.$$

Despejando t de esta ecuación se obtiene $t = 3\sqrt{2} \approx 4.24$ segundos. En este instante, la altura de la pelota es

$$\begin{aligned} y &= 3 + 50\sqrt{2} (3\sqrt{2}) - 16(3\sqrt{2})^2 \\ &= 303 - 288 \\ &= 15 \text{ pies.} \end{aligned}$$

Altura cuando $t \approx 4.24$ segundos

Por consiguiente, la pelota pasará sobre la cerca de 10 pies.

3.3 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Determinar la velocidad y la aceleración a lo largo de una curva plana En los ejercicios 1-8 el vector posición \mathbf{r} describe la trayectoria de un objeto que se mueve en el plano xy .

- (a) Halle la velocidad, la rapidez y el vector aceleración del objeto.
- (b) Evalúe el vector velocidad y el vector aceleración del objeto en el punto dado.
- (c) Dibuje una gráfica de la trayectoria y trace los vectores velocidad y aceleración en el punto dado.

Vector de posición	Punto
1. $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + (t - 1)\mathbf{j}$	(3, 0)
2. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (-t^2 + 4)\mathbf{j}$	(1, 3)
3. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j}$	(4, 2)
4. $\mathbf{r}(t) = (\frac{1}{4}t^3 + 1)\mathbf{i} + t\mathbf{j}$	(3, 2)
5. $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j}$	$(\sqrt{2}, \sqrt{2})$
6. $\mathbf{r}(t) = 3 \cos t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j}$	(3, 0)
7. $\mathbf{r}(t) = \langle t - \sin t, 1 - \cos t \rangle$	$(\pi, 2)$
8. $\mathbf{r}(t) = \langle e^{-t}, e^t \rangle$	(1, 1)

Determinar los vectores velocidad y aceleración En los ejercicios 9-18, el vector posición \mathbf{r} describe la trayectoria de un objeto que se mueve en el espacio.

- (a) Halle la velocidad, rapidez y el vector aceleración del objeto.
- (b) Evalúe el vector velocidad y el vector aceleración del objeto a un valor dado de t .

Vector de posición	Tiempo
9. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 5t\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$	$t = 1$
10. $\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} + 4t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$	$t = 3$
11. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}$	$t = 4$
12. $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \frac{1}{4}t^2\mathbf{k}$	$t = 2$
13. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \sqrt{9 - t^2}\mathbf{k}$	$t = 0$
14. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2t^{3/2}\mathbf{k}$	$t = 4$
15. $\mathbf{r}(t) = \langle 4t, 3 \cos t, 3 \sin t \rangle$	$t = \pi$
16. $\mathbf{r}(t) = \langle 2 \cos t, 2 \sin t, t^2 \rangle$	$t = \frac{\pi}{4}$
17. $\mathbf{r}(t) = \langle e^t \cos t, e^t \sin t, e^t \rangle$	$t = 0$
18. $\mathbf{r}(t) = \left\langle \ln t, \frac{1}{t}, t^4 \right\rangle$	$t = 2$

Determinar un vector de posición por integración En los ejercicios 19-24, use la función aceleración dada para determinar los vectores velocidad y posición. Después, halle la posición en el instante $t = 2$.

19. $\mathbf{a}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$

- 20. $\mathbf{a}(t) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}, \quad \mathbf{v}(0) = 4\mathbf{j}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$
- 21. $\mathbf{a}(t) = t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad \mathbf{v}(1) = 5\mathbf{j}, \quad \mathbf{r}(1) = \mathbf{0}$
- 22. $\mathbf{a}(t) = -32\mathbf{k}, \quad \mathbf{v}(0) = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(0) = 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
- 23. $\mathbf{a}(t) = -\cos t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{i}$
- 24. $\mathbf{a}(t) = e^t\mathbf{i} - 8\mathbf{k}, \quad \mathbf{v}(0) = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{0}$

Movimiento de proyectiles En los ejercicios 25-38, use el modelo para el movimiento de un proyectil, suponiendo que no hay resistencia del aire.


- 25. Una pelota de béisbol es golpeada 2.5 pies sobre el nivel del suelo, se aleja del bate con una velocidad inicial de 140 pies por segundo y con un ángulo de 22° arriba de la horizontal. Encuentre la altura máxima alcanzada por la pelota de béisbol. Determine si librárá una cerca de 10 pies de altura que se encuentra a 375 pies del plato de lanzamiento.
- 26. Determine la altura máxima y el alcance de un proyectil disparado desde una altura de 3 pies sobre el nivel del suelo con velocidad inicial de 900 pies por segundo y con un ángulo de 45° sobre la horizontal.
- 27. Una pelota de béisbol es golpeada 3 pies sobre el nivel del suelo, se aleja del bate con un ángulo de 45° y es cachada por un jardinero a 3 pies sobre el nivel del suelo y a 300 pies del plato de lanzamiento. ¿Cuál es la rapidez inicial de la pelota y qué altura alcanza?
- 28. Un jugador de béisbol en segunda base lanza una pelota al jugador de primera base a 90 pies. La pelota es lanzada desde 5 pies sobre el nivel del suelo con una velocidad inicial de 50 millas por hora y con un ángulo de 15° con la horizontal. ¿A qué altura cacha la pelota el jugador de primera base?
- 29. Elimine el parámetro t de la función de posición para el movimiento de un proyectil y demuestre que la ecuación rectangular es

$$y = -\frac{16 \sec^2 \theta}{v_0^2}x^2 + (\tan \theta)x + h.$$

- 30. La trayectoria de una pelota la da la ecuación rectangular

$$y = x - 0.005x^2.$$

Use el resultado del ejercicio 29 para hallar la función de posición. Después, encuentre la velocidad y la dirección de la pelota en el punto en que ha recorrido 60 pies horizontalmente.

- 31. El Rogers Centre en Toronto, Ontario, tiene una cerca en su campo central que tiene 10 pies de altura y está a 400 pies del plato de lanzamiento. Una pelota es golpeada a 3 pies sobre el nivel del suelo y se da el batazo a una velocidad de 100 millas por hora.
 - (a) La pelota se aleja del bate formando un ángulo de $\theta = \theta_0$ con la horizontal. Dé la función vectorial para la trayectoria de la pelota.
 -  (b) Use una herramienta de graficación para representar la función vectorial para $\theta_0 = 10^\circ, \theta_0 = 15^\circ, \theta_0 = 20^\circ$ y $\theta_0 = 25^\circ$. Use las gráficas para aproximar el ángulo mínimo requerido para que el golpe sea un home run.
 - (c) Determine analíticamente el ángulo mínimo requerido para que el golpe sea un home run.

•• •32. Fútbol •••••

El mariscal de campo de un equipo de fútbol americano lanza un pase a una altura de 7 pies sobre el campo de juego, y el balón lo captura un receptor a 30 yardas, a una altura de 4 pies. El pase se lanza con un ángulo de 35° con la horizontal.

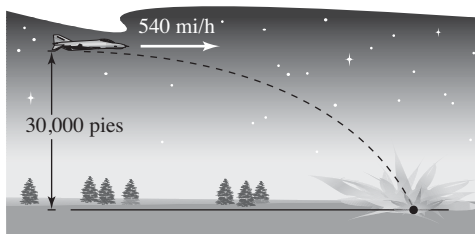


- (a) Determine la rapidez del balón de fútbol al ser lanzado.
 (b) Encuentre la altura máxima del balón de fútbol.
 (c) Calcule el tiempo que el receptor tiene para alcanzar la posición apropiada después que el mariscal de campo lanza el balón de fútbol.

33. Un expulsor de pacas consiste en dos bandas de velocidad variable al final del expulsor. Su función es lanzar pacas a un camión. Al cargar la parte trasera del camión, una paca debe lanzarse a una posición 8 pies hacia arriba y 16 pies detrás del expulsor.

- (a) Halle la velocidad inicial mínima de la paca y el ángulo correspondiente al que debe ser lanzada del expulsor.
 (b) El expulsor tiene un ángulo fijo de 45° . Halle la velocidad inicial requerida.

34. Un bombardero vuela a una altitud de 30,000 pies a una velocidad de 540 millas por hora (vea la figura). ¿Cuándo debe lanzar la bomba para que pegue en el blanco? (Dé su respuesta en términos del ángulo de depresión del avión con relación al blanco.) ¿Cuál es la velocidad de la bomba en el momento del impacto?



35. Un disparo de un arma con una velocidad de 1200 pies por segundo se lanza hacia un blanco a 3000 pies de distancia. Determine el ángulo mínimo de elevación del arma.

36. Un proyectil se lanza desde el suelo con un ángulo de 12° con la horizontal. El proyectil debe tener un alcance de 200 pies. Halle la velocidad inicial mínima requerida.



37. Use una herramienta de graficación para representar la trayectoria de un proyectil para los valores dados de θ y v_0 . En cada caso, use la gráfica para aproximar la altura máxima y el alcance del proyectil. (Suponga que el proyectil se lanza desde el nivel del suelo.)

- (a) $\theta = 10^\circ$, $v_0 = 66$ pies/s
 (b) $\theta = 10^\circ$, $v_0 = 146$ pies/s
 (c) $\theta = 45^\circ$, $v_0 = 66$ pies/s
 (d) $\theta = 45^\circ$, $v_0 = 146$ pies/s
 (e) $\theta = 60^\circ$, $v_0 = 66$ pies/s
 (f) $\theta = 60^\circ$, $v_0 = 146$ pies/s

38. Halle el ángulo con el que un objeto debe lanzarse para tener (a) el alcance máximo y (b) la altura máxima.

Movimiento de un proyectil En los ejercicios 39 y 40, use el modelo para el movimiento de un proyectil, suponiendo que no hay resistencia del aire. [$g = -9.8$ metros por segundo al cuadrado.]

39. Determine la altura y el alcance máximos de un proyectil disparado desde una altura de 1.5 metros sobre el nivel del suelo con una velocidad inicial de 100 metros por segundo y con un ángulo de 30° sobre la horizontal.

40. Un proyectil se dispara desde el nivel del suelo con un ángulo de 8° con la horizontal. El proyectil debe tener un alcance de 50 metros. Halle la velocidad mínima necesaria.

41. **Lanzamiento de peso** La trayectoria de un objeto lanzado con un ángulo θ es

$$\mathbf{r}(t) = (v_0 \cos \theta)t \mathbf{i} + \left[h + (v_0 \sin \theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \right] \mathbf{j}$$

donde v_0 es la rapidez inicial, h es la altura inicial, t es el tiempo en segundos y g es la aceleración debida a la gravedad. Verifique que el objeto permanecerá en el aire

$$t = \frac{v_0 \sin \theta + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \theta + 2gh}}{g} \text{ segundos}$$

y recorrerá una distancia horizontal de

$$\frac{v_0^2 \cos \theta}{g} \left(\sin \theta + \sqrt{\sin^2 \theta + \frac{2gh}{v_0^2}} \right) \text{ pies.}$$

•• •42. Tiro de lanzamiento de bala •••••

Un peso es lanzado desde una altura de $h = 6$ pies con rapidez inicial $v_0 = 45$ pies por segundo y con un ángulo de $\theta = 42.5^\circ$ con la horizontal. Utilice el resultado del ejercicio 41 para hallar el tiempo total de recorrido y la distancia horizontal recorrida.



Movimiento cicloidal En los ejercicios 43 y 44, considere el movimiento de un punto (o partícula) en la circunferencia de un círculo que rueda. A medida que el círculo rueda genera la cicloide

$$\mathbf{r}(t) = b(\omega t - \sin \omega t) \mathbf{i} + b(1 - \cos \omega t) \mathbf{j}$$

donde ω es la velocidad angular constante del círculo y b es el radio del círculo.

43. Halle los vectores velocidad y aceleración de la partícula. Use los resultados para determinar los instantes en que la rapidez de la partícula será (a) cero y (b) máxima.

44. Encuentre la rapidez máxima de un punto de un neumático de automóvil de radio 1 pie cuando el automóvil viaja a 60 millas por hora. Compare esta rapidez con la rapidez del automóvil.

Movimiento circular En los ejercicios 45-58, considere una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria circular de radio b descrita por $\mathbf{r}(t) = b \cos \omega t \mathbf{i} + b \sin \omega t \mathbf{j}$, donde $\omega = du/dt$ es la velocidad angular constante.

45. Encuentre el vector velocidad y muestre que es ortogonal a $\mathbf{r}(t)$.
46. (a) Demuestre que la rapidez de la partícula es $b\omega$.
 (b) Use una herramienta de graficación en modo *paramétrico* para representar el círculo para $b = 6$. Pruebe con distintos valores de ω . ¿La herramienta de graficación dibuja más rápido los círculos para los valores mayores de ω ?
47. Halle el vector aceleración y demuestre que su dirección es siempre hacia el centro del círculo.
48. Demuestre que la magnitud del vector aceleración es $b\omega^2$.

Movimiento circular En los ejercicios 49 y 50, use los resultados de los ejercicios 45-58.

49. Una piedra que pesa 1 libra se ata a un cordel de 2 pies de largo y se hace girar horizontalmente (vea la figura). El cordel se romperá con una fuerza de 10 libras. Halle la velocidad máxima que la piedra puede alcanzar sin que se rompa el cordel. (Use $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, donde $m = \frac{1}{32}$.)

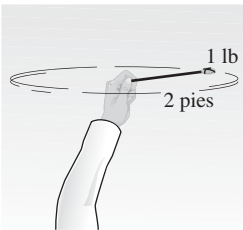


Figura para 49

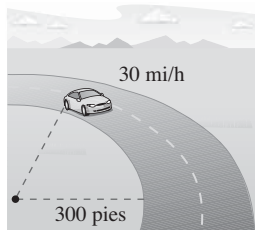


Figura para 50

50. Un automóvil de 3400 libras está tomando una curva circular de 300 pies de radio a 30 millas por hora (vea la figura). Suponiendo que la carretera está nivelada, encuentre la fuerza necesaria entre los neumáticos y el pavimento para que el automóvil mantenga la trayectoria circular sin derrapar. (Use $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, donde $m = 3400/32$.) Determine el ángulo de peralte necesario para que ninguna fuerza de fricción lateral sea ejercida sobre los neumáticos del automóvil.

DESARROLLO DE CONCEPTOS

51. **Velocidad y rapidez** Con sus propias palabras, explique la diferencia entre la velocidad de un objeto y su rapidez.
52. **Movimiento de una partícula** Considere una partícula que se mueve sobre la trayectoria $\mathbf{r}_1(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$.
 (a) Analice todo cambio en la posición, velocidad o aceleración de la partícula si su posición está dada por la función vectorial $\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}_1(2t)$.
 (b) Generalice los resultados a la función posición $\mathbf{r}_3(t) = \mathbf{r}_1(\omega t)$.

53. **Demostración** Demuestre que cuando un objeto se mueve con una rapidez constante, sus vectores velocidad y aceleración son ortogonales.
54. **Demostración** Demuestre que cuando un objeto se mueve en una línea recta a una rapidez constante tiene aceleración cero.

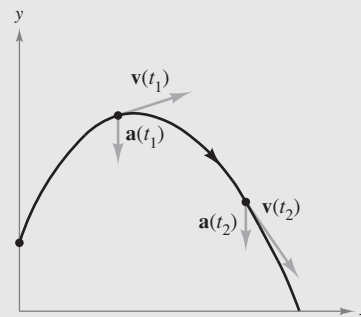
55. **Investigación** Una partícula sigue una trayectoria elíptica dada por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = 6 \cos t \mathbf{i} + 3 \sin t \mathbf{j}$.
 (a) Halle $\mathbf{v}(t)$, $\|\mathbf{v}(t)\|$ y $\mathbf{a}(t)$.
 (b) Use una herramienta de graficación para completar la tabla.

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
Rapidez					

- (c) Represente gráficamente la trayectoria elíptica y los vectores velocidad y aceleración para los valores de t dados en la tabla del inciso (b).
 - (d) Use los resultados de los incisos (b) y (c) para describir la relación geométrica entre los vectores velocidad y aceleración cuando la rapidez de la partícula aumenta y cuando disminuye.
56. **Movimiento de una partícula** Considere una partícula que se mueve sobre una trayectoria elíptica descrita por $\mathbf{r}(t) = a \cos \omega t \mathbf{i} + b \sin \omega t \mathbf{j}$, donde $\omega = d\theta/dt$ es la velocidad angular constante.
 (a) Encuentre el vector velocidad. ¿Cuál es la rapidez de la partícula?
 (b) Encuentre el vector aceleración y demuestre que su dirección es siempre hacia el centro de la elipse.
 57. **Trayectoria de un objeto** Cuando $t = 0$, un objeto está en el punto $(0, 1)$ y tiene un vector velocidad $\mathbf{v}(0) = -\mathbf{i}$. Se mueve con aceleración $\mathbf{a}(t) = \sin t \mathbf{i} - \cos t \mathbf{j}$. Demuestre que la trayectoria del objeto es un círculo.



¿CÓMO LO VE? La gráfica muestra la trayectoria de un proyectil y los vectores velocidad y aceleración t_1 y t_2 . Clasifique el ángulo entre el vector velocidad y el vector aceleración en los instantes t_1 y t_2 . ¿La rapidez aumenta o disminuye en los instantes t_1 y t_2 ? Explique su razonamiento.



¿Verdadero o falso? En los ejercicios 59-62, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que pruebe que es falso.

59. La aceleración de un objeto es la derivada de la rapidez.
60. La velocidad de un objeto es la derivada de la posición.
61. El vector velocidad apunta en la dirección de movimiento.
62. Si una partícula se mueve a lo largo de una línea recta, entonces los vectores velocidad y aceleración son ortogonales.

3.4 Vectores tangentes y vectores normales

- Hallar un vector unitario tangente en un punto a una curva en el espacio.
- Hallar las componentes tangencial y normal de la aceleración.

Vectores tangentes y vectores normales

En la sección precedente aprendió que el vector velocidad apunta en la dirección del movimiento. Esta observación lleva a la definición siguiente, que es válida para cualquier curva suave, no solo para aquellas en las que el parámetro es el tiempo.

Definición del vector unitario tangente

Sea C una curva suave en un intervalo abierto I representada por \mathbf{r} . El **vector unitario tangente** $\mathbf{T}(t)$ en t se define como

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}, \quad \mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}.$$

Como recordará, una curva es *suave* en un intervalo si \mathbf{r}' es continua y distinta de cero en el intervalo. Por tanto, la “suavidad” es suficiente para garantizar que una curva tenga un vector unitario tangente.

EJEMPLO 1

Hallar el vector unitario tangente

Encuentre el vector unitario tangente a la curva dada por

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$$

cuando $t = 1$.

Solución La derivada de $\mathbf{r}(t)$ es

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j}. \quad \text{Derivada de } \mathbf{r}(t)$$

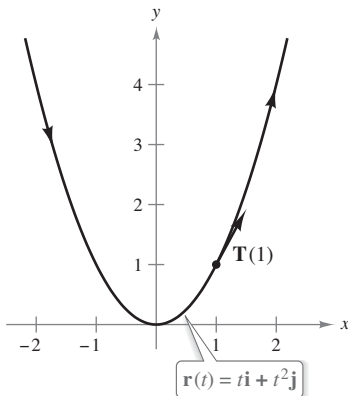
Por tanto, el vector unitario tangente es

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &= \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} && \text{Definición de } \mathbf{T}(t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2}}(\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}). && \text{Sustituya } \mathbf{r}'(t). \end{aligned}$$

Cuando $t = 1$, el vector unitario tangente es

$$\mathbf{T}(1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\mathbf{i} + 2\mathbf{j})$$

como se muestra en la figura 3.20. ■



La dirección del vector unitario tangente depende de la orientación de la curva.

Figura 3.20

En el ejemplo 1, observe que la dirección del vector unitario tangente depende de la orientación de la curva. Para la parábola descrita por

$$\mathbf{r}(t) = -(t - 2)\mathbf{i} + (t - 2)^2\mathbf{j}$$

$\mathbf{T}(1)$ representaría al vector unitario tangente en el punto $(1, 1)$, pero apuntaría en dirección opuesta. Trate de verificar esto.

La **recta tangente a una curva** en un punto es la recta que pasa por el punto y es paralela al vector unitario tangente. En el ejemplo 2 se usa el vector unitario tangente para hallar la recta tangente a una hélice en un punto.

EJEMPLO 2 Hallar la recta tangente a una curva en un punto

Encuentre $\mathbf{T}(t)$ y enseguida halle un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la hélice dada por

$$\mathbf{r}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$$

en el punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$.

Solución La derivada de $\mathbf{r}(t)$ es

$$\mathbf{r}'(t) = -2 \sin t \mathbf{i} + 2 \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

lo que implica que $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t + 1} = \sqrt{5}$. Por consiguiente, el vector unitario tangente es

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &= \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(-2 \sin t \mathbf{i} + 2 \cos t \mathbf{j} + \mathbf{k}). \end{aligned} \quad \text{Vector unitario tangente}$$

En el punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \pi/4)$, $t = \pi/4$ y el vector unitario tangente es

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-2 \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{i} + 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{j} + \mathbf{k}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(-\sqrt{2} \mathbf{i} + \sqrt{2} \mathbf{j} + \mathbf{k}). \end{aligned}$$

Usando los números directores $a = -\sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$ y $c = 1$, y el punto $(x_1, y_1, z_1) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \pi/4)$, puede obtener las ecuaciones paramétricas siguientes (dadas con el parámetro s).

$$\begin{aligned} x &= x_1 + as = \sqrt{2} - \sqrt{2}s \\ y &= y_1 + bs = \sqrt{2} + \sqrt{2}s \\ z &= z_1 + cs = \frac{\pi}{4} + s \end{aligned}$$

Esta recta tangente se muestra en la figura 3.21. ■

En el ejemplo 2 hay una cantidad infinita de vectores que son ortogonales al vector tangente $\mathbf{T}(t)$. Uno de estos vectores es el vector $\mathbf{T}'(t)$. Esto se desprende de la propiedad 7 del teorema 3.2. Es decir,

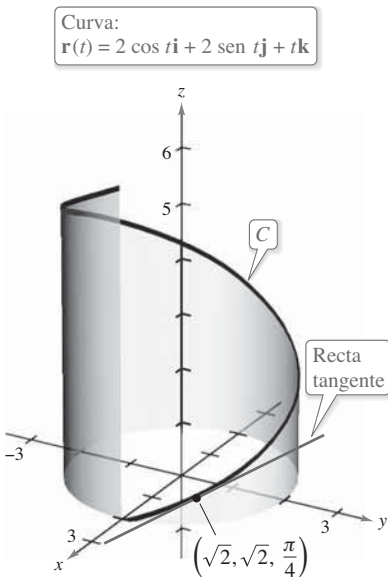
$$\mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}(t) = \|\mathbf{T}(t)\|^2 = 1 \implies \mathbf{T}(t) \cdot \mathbf{T}'(t) = 0.$$

Normalizando el vector $\mathbf{T}'(t)$ usted obtiene un vector especial llamado **vector unitario normal principal**, como se indica en la definición siguiente.

Definición de vector unitario normal principal

Sea C una curva suave en un intervalo abierto I representada por \mathbf{r} . Si $\mathbf{T}'(t) \neq \mathbf{0}$, entonces el **vector unitario normal principal** en t se define como

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|}.$$



La recta tangente a una curva en un punto está determinada por el vector unitario tangente en el punto.

Figura 3.21

EJEMPLO 3

Hallar el vector unitario normal principal

Encuentre $\mathbf{N}(t)$ y $\mathbf{N}(1)$ para la curva representada por $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j}$.

Solución Derivando, obtiene

$$\mathbf{r}'(t) = 3\mathbf{i} + 4t\mathbf{j}$$

lo que implica

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{9 + 16t^2}.$$

Por lo que el vector unitario tangente es

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(t) &= \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{9 + 16t^2}}(3\mathbf{i} + 4t\mathbf{j}). \end{aligned} \quad \text{Vector unitario tangente}$$

Usando el teorema 3.2, derive $\mathbf{T}(t)$ con respecto a t para obtener

$$\begin{aligned} \mathbf{T}'(t) &= \frac{1}{\sqrt{9 + 16t^2}}(4\mathbf{j}) - \frac{16t}{(9 + 16t^2)^{3/2}}(3\mathbf{i} + 4t\mathbf{j}) \\ &= \frac{12}{(9 + 16t^2)^{3/2}}(-4t\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \end{aligned}$$

lo que implica que

$$\|\mathbf{T}'(t)\| = 12 \sqrt{\frac{9 + 16t^2}{(9 + 16t^2)^3}} = \frac{12}{9 + 16t^2}.$$

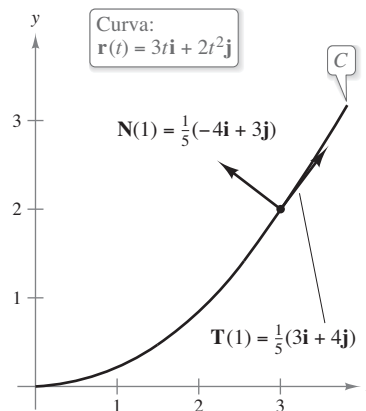
Por tanto, el vector unitario normal principal es

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(t) &= \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{9 + 16t^2}}(-4t\mathbf{i} + 3\mathbf{j}). \end{aligned} \quad \text{Vector unitario normal principal}$$

Cuando $t = 1$, el vector unitario normal principal es

$$\mathbf{N}(1) = \frac{1}{5}(-4\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$$

como se muestra en la figura 3.22.



El vector unitario normal principal apunta hacia el lado cóncavo de la curva.

Figura 3.22

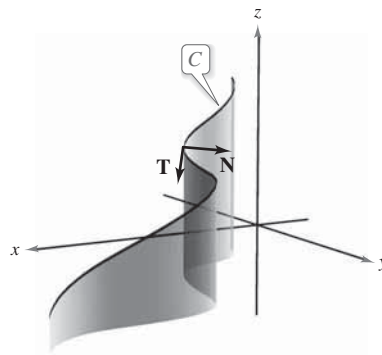
El vector unitario normal principal puede ser difícil de evaluar algebraicamente. En curvas planas, puede simplificar el álgebra hallando

$$\mathbf{T}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \quad \text{Vector unitario tangente}$$

y observando que $\mathbf{N}(t)$ debe ser

$$\mathbf{N}_1(t) = y(t)\mathbf{i} - x(t)\mathbf{j} \quad \text{o} \quad \mathbf{N}_2(t) = -y(t)\mathbf{i} + x(t)\mathbf{j}.$$

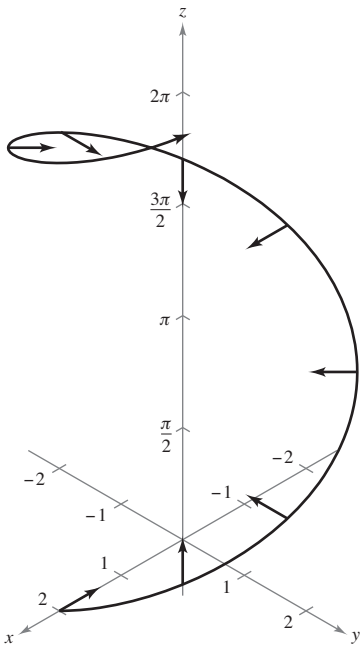
Como $\sqrt{[x(t)]^2 + [y(t)]^2} = 1$, se deduce que tanto $\mathbf{N}_1(t)$ como $\mathbf{N}_2(t)$ son vectores unitarios normales. El vector unitario normal *principal* es \mathbf{N} , el que apunta hacia el lado cóncavo de la curva, como se muestra en la figura 3.22 (vea el ejercicio 76). Esto también es válido para curvas en el espacio. Es decir, si un objeto se mueve a lo largo de la curva C en el espacio, el vector $\mathbf{T}(t)$ apunta hacia la dirección en la que se mueve el objeto, mientras que el vector $\mathbf{N}(t)$ es ortogonal a $\mathbf{T}(t)$ y apunta hacia la dirección en que gira el objeto, como se muestra en la figura 3.23.



En todo punto de una curva, un vector unitario normal es ortogonal al vector unitario tangente. El vector unitario normal *principal* apunta hacia la dirección en que gira la curva.

Figura 3.23

Hélice:
 $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$



$\mathbf{N}(t)$ es horizontal y apunta hacia el eje z.

Figura 3.24

EJEMPLO 4 Determinar el vector unitario normal principal

Encuentre el vector unitario normal principal para la hélice dada por $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$.

Solución De acuerdo con el ejemplo 2, usted sabe que el vector unitario tangente es

$$\mathbf{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2 \sin t\mathbf{i} + 2 \cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}). \quad \text{Vector unitario tangente}$$

Así, $\mathbf{T}'(t)$ está dado por

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2 \cos t\mathbf{i} - 2 \sin t\mathbf{j}).$$

Como $\|\mathbf{T}'(t)\| = 2/\sqrt{5}$, se deduce que el vector unitario normal principal es

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(t) &= \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|} \\ &= \frac{1}{2}(-2 \cos t\mathbf{i} - 2 \sin t\mathbf{j}) \\ &= -\cos t\mathbf{i} - \sin t\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Vector unitario normal principal

Observe que este vector es horizontal y apunta hacia el eje z, como se muestra en la figura 3.24.

Componentes tangencial y normal de la aceleración

Ahora se vuelve al problema de describir el movimiento de un objeto a lo largo de una curva. En la sección anterior usted vio que si un objeto se mueve con *rapidez constante*, los vectores velocidad y aceleración son perpendiculares. Esto parece razonable, porque la rapidez no sería constante si alguna aceleración actuara en dirección del movimiento. Esta afirmación se puede verificar observando que

$$\mathbf{r}''(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

si $\|\mathbf{r}'(t)\|$ es una constante. (Vea la propiedad 7 del teorema 3.2.)

Sin embargo, si un objeto viaja con *rapidez variable*, los vectores velocidad y aceleración no necesariamente son perpendiculares. Por ejemplo, vio que en un proyectil el vector aceleración siempre apunta hacia abajo, sin importar la dirección del movimiento.

En general, parte de la aceleración (la componente tangencial) actúa en la línea del movimiento, y otra parte (la componente normal) actúa perpendicular a la línea del movimiento. Para determinar estas dos componentes, puede usar los vectores unitarios $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$, que juegan un papel análogo a \mathbf{i} y \mathbf{j} cuando se representan los vectores en el plano. El teorema siguiente establece que el vector aceleración se encuentra en el plano determinado por $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$.

TEOREMA 3.4 Vector aceleración

Si $\mathbf{r}(t)$ es el vector posición de una curva suave C y existe $\mathbf{N}(t)$, entonces el vector aceleración $\mathbf{a}(t)$ se encuentra en el plano determinado por $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$.

Demostración Para simplificar la notación, escriba \mathbf{T} en lugar de $\mathbf{T}(t)$, \mathbf{T}' en lugar de $\mathbf{T}'(t)$ y así sucesivamente. Como $\mathbf{T} = \mathbf{r}'/\|\mathbf{r}'\| = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$, se deduce que

$$\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\mathbf{T}.$$

Por derivación, obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{v}' && \text{Regla del producto} \\ &= \frac{d}{dt} [\|\mathbf{v}\|]\mathbf{T} + \|\mathbf{v}\|\mathbf{T}' \\ &= \frac{d}{dt} [\|\mathbf{v}\|]\mathbf{T} + \|\mathbf{v}\|\mathbf{T}' \left(\frac{\|\mathbf{T}'\|}{\|\mathbf{T}'\|} \right) \\ &= \frac{d}{dt} [\|\mathbf{v}\|]\mathbf{T} + \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{T}'\|\mathbf{N}. && \mathbf{N} = \mathbf{T}'/\|\mathbf{T}'\| \end{aligned}$$

Como \mathbf{a} se expresa mediante una combinación lineal de \mathbf{T} y \mathbf{N} , se deduce que \mathbf{a} está en el plano determinado por \mathbf{T} y \mathbf{N} .

Consulte LarsonCalculus.com para el video de esta demostración de Bruce Edwards. 

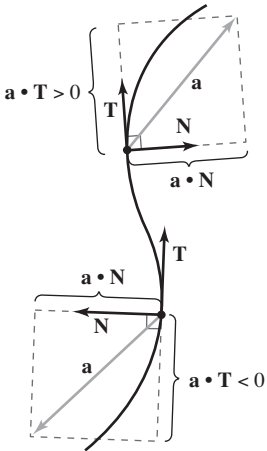
A los coeficientes de \mathbf{T} y de \mathbf{N} en la demostración del teorema 3.4 se les conoce como **componentes tangencial y normal de la aceleración**, y se denotan por

$$a_{\mathbf{T}} = \frac{d}{dt} [\|\mathbf{v}\|]$$

y $a_{\mathbf{N}} = \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{T}'\|$. Por tanto, puede escribir

$$\mathbf{a}(t) = a_{\mathbf{T}}\mathbf{T}(t) + a_{\mathbf{N}}\mathbf{N}(t).$$

El teorema siguiente da algunas fórmulas útiles para $a_{\mathbf{N}}$ y $a_{\mathbf{T}}$.



Las componentes tangencial y normal de la aceleración se obtienen proyectando \mathbf{a} sobre \mathbf{T} y \mathbf{N} .

Figura 3.25

TEOREMA 3.5 Componentes tangencial y normal de la aceleración

Si $\mathbf{r}(t)$ es el vector posición de una curva suave C [para la cual $\mathbf{N}(t)$ existe], entonces las componentes tangencial y normal de la aceleración son las siguientes.

$$a_T = \frac{d}{dt} [\|\mathbf{v}\|] = \mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|}$$

$$a_N = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{T}'\| = \mathbf{a} \cdot \mathbf{N} = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_T^2}$$

Observe que $a_N \geq 0$. A la componente normal de la aceleración también se le llama **componente centrípeta de la aceleración**.

Demostración Observe que \mathbf{a} se encuentra en el plano de \mathbf{T} y \mathbf{N} . Por tanto, puede usar la figura 3.25 para concluir que, en cualquier instante t , las componentes de la proyección del vector aceleración sobre \mathbf{T} y sobre \mathbf{N} están dadas por $a_T = \mathbf{a} \cdot \mathbf{T}$ y $a_N = \mathbf{a} \cdot \mathbf{N}$, respectivamente. Además, como $\mathbf{a} = \mathbf{v}'$ y $\mathbf{T} = \mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|$, tiene

$$a_T = \mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{a} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \cdot \mathbf{a} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|}.$$

En los ejercicios 78 y 79 se le pide demostrar las otras partes del teorema.

Consulte *LarsonCalculus.com* para el video de esta demostración de Bruce Edwards.

EJEMPLO 5 Componentes tangencial y normal de la aceleración

•••► Consulte *LarsonCalculus.com* para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Encuentre las componentes tangencial y normal de la aceleración para el vector posición dado por $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} - t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$.

Solución Comience determinando la velocidad, la rapidez y la aceleración.

$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$	Vector velocidad
$\ \mathbf{v}(t)\ = \sqrt{9 + 1 + 4t^2} = \sqrt{10 + 4t^2}$	Rapidez
$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = 2\mathbf{k}$	Vector aceleración

De acuerdo con el teorema 3.5, la componente tangencial de la aceleración es

$$a_T = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{4t}{\sqrt{10 + 4t^2}} \quad \text{Componente tangencial de la aceleración}$$

y como

$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & 2t \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$$

la componente normal de la aceleración es

$$a_N = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\sqrt{4 + 36}}{\sqrt{10 + 4t^2}} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10 + 4t^2}}. \quad \text{Componente normal de la aceleración}$$

En el ejemplo 5 podría haber usado la fórmula alternativa siguiente para a_N .

$$a_N = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_T^2} = \sqrt{(2)^2 - \frac{16t^2}{10 + 4t^2}} = \frac{2\sqrt{10}}{\sqrt{10 + 4t^2}}$$

EJEMPLO 6

Hallar a_T y a_N para una hélice circular

Encuentre las componentes tangencial y normal de la aceleración para la hélice dada por

$$\mathbf{r}(t) = b \cos t \mathbf{i} + b \sin t \mathbf{j} + c t \mathbf{k}, \quad b > 0.$$

Solución

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = -b \sin t \mathbf{i} + b \cos t \mathbf{j} + c \mathbf{k}$$

Vector velocidad

$$\|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{b^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t + c^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$$

Rapidez

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = -b \cos t \mathbf{i} - b \sin t \mathbf{j}$$

Vector aceleración

De acuerdo con el teorema 3.5, la componente tangencial de la aceleración es

$$a_T = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{b^2 \sin t \cos t - b^2 \sin t \cos t + 0}{\sqrt{b^2 + c^2}} = 0.$$

Componente tangencial de la aceleración

Como

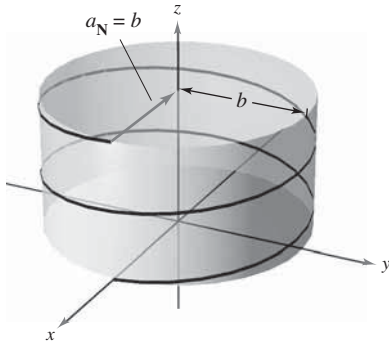
$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{b^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = b$$

puede usar la fórmula alternativa para la componente normal de la aceleración para obtener

$$a_N = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_T^2} = \sqrt{b^2 - 0^2} = b.$$

Componente normal de la aceleración

Observe que la componente normal de la aceleración es igual a la magnitud de la aceleración. En otras palabras, puesto que la rapidez es constante, la aceleración es perpendicular a la velocidad. Vea la figura 3.26.



La componente normal de la aceleración es igual al radio del cilindro alrededor del cual la hélice gira en espiral.

Figura 3.26

EJEMPLO 7

Movimiento de un proyectil

El vector posición para el proyectil mostrado en la figura 3.27 está dado por

$$\mathbf{r}(t) = (50\sqrt{2}t)\mathbf{i} + (50\sqrt{2}t - 16t^2)\mathbf{j}.$$

Vector posición

Halle la componente tangencial de la aceleración cuando $t = 0, 1$ y $25\sqrt{2}/16$.

Solución

$$\mathbf{v}(t) = 50\sqrt{2}\mathbf{i} + (50\sqrt{2} - 32t)\mathbf{j}$$

Vector velocidad

$$\|\mathbf{v}(t)\| = 2\sqrt{50^2 - 16(50)\sqrt{2}t + 16^2t^2}$$

Rapidez

$$\mathbf{a}(t) = -32\mathbf{j}$$

Vector aceleración

La componente tangencial de la aceleración es

$$a_T(t) = \frac{\mathbf{v}(t) \cdot \mathbf{a}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|} = \frac{-32(50\sqrt{2} - 32t)}{2\sqrt{50^2 - 16(50)\sqrt{2}t + 16^2t^2}}.$$

Componente tangencial de la aceleración

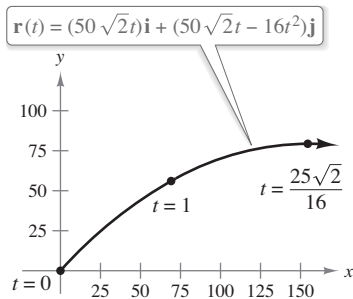
En los instantes especificados, usted tiene

$$a_T(0) = \frac{-32(50\sqrt{2})}{100} = -16\sqrt{2} \approx -22.6$$

$$a_T(1) = \frac{-32(50\sqrt{2} - 32)}{2\sqrt{50^2 - 16(50)\sqrt{2} + 16^2}} \approx -15.4$$

$$a_T\left(\frac{25\sqrt{2}}{16}\right) = \frac{-32(50\sqrt{2} - 50\sqrt{2})}{50\sqrt{2}} = 0.$$

En la figura 3.27 puede ver que, a la altura máxima, cuando $t = 25\sqrt{2}/16$, la componente tangencial es 0. Esto es razonable, porque en ese punto la dirección del movimiento es horizontal y la componente tangencial de la aceleración es igual a la componente horizontal de la aceleración.



Trayectoria de un proyectil.

Figura 3.27

3.4 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Determinar el vector unitario tangente En los ejercicios 1-6, dibuje el vector unitario tangente y los vectores normales a los puntos dados.

1. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$, $t = 1$ 2. $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j}$, $t = 1$
3. $\mathbf{r}(t) = 4 \cos t\mathbf{i} + 4 \sin t\mathbf{j}$, $t = \frac{\pi}{4}$
4. $\mathbf{r}(t) = 6 \cos t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j}$, $t = \frac{\pi}{3}$
5. $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} - \ln t\mathbf{j}$, $t = e$ 6. $\mathbf{r}(t) = e^t \cos t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j}$, $t = 0$

Determinar una recta tangente En los ejercicios 7-12, halle el vector unitario tangente a la curva $\mathbf{T}(t)$ y determine un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva en el espacio en el punto P .

7. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $P(0, 0, 0)$
8. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \frac{4}{3}\mathbf{k}$, $P(1, 1, \frac{4}{3})$
9. $\mathbf{r}(t) = 3 \cos t\mathbf{i} + 3 \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $P(3, 0, 0)$
10. $\mathbf{r}(t) = \langle t, t, \sqrt{4-t^2} \rangle$, $P(1, 1, \sqrt{3})$
11. $\mathbf{r}(t) = \langle 2 \cos t, 2 \sin t, 4 \rangle$, $P(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4)$
12. $\mathbf{r}(t) = \langle 2 \sin t, 2 \cos t, 4 \sin^2 t \rangle$, $P(1, \sqrt{3}, 1)$

Determinar el vector unitario normal principal En los ejercicios 13-20, encuentre el vector unitario normal principal a la curva en el valor especificado del parámetro.

13. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j}$, $t = 2$
14. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{6}{t}\mathbf{j}$, $t = 3$
15. $\mathbf{r}(t) = \ln t\mathbf{i} + (t+1)\mathbf{j}$, $t = 2$
16. $\mathbf{r}(t) = \pi \cos t\mathbf{i} + \pi \sin t\mathbf{j}$, $t = \frac{\pi}{6}$
17. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \ln t\mathbf{k}$, $t = 1$
18. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}t\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$, $t = 0$
19. $\mathbf{r}(t) = 6 \cos t\mathbf{i} + 6 \sin t\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $t = \frac{3\pi}{4}$
20. $\mathbf{r}(t) = \cos 3t\mathbf{i} + 2 \sin 3t\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $t = \pi$

Determinar las componentes tangencial y normal de la aceleración En los ejercicios 21-28, encuentre $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$, a_T y a_N en un instante dado t para la curva plana $\mathbf{r}(t)$.

21. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j}$, $t = 1$ 22. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$, $t = 1$
23. $\mathbf{r}(t) = (t-t^3)\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j}$, $t = 1$
24. $\mathbf{r}(t) = (t^3 - 4t)\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j}$, $t = 0$
25. $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-2t}\mathbf{j}$, $t = 0$
26. $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $t = 0$
27. $\mathbf{r}(t) = e^t \cos t\mathbf{i} + e^t \sin t\mathbf{j}$, $t = \frac{\pi}{2}$
28. $\mathbf{r}(t) = 4 \cos 3t\mathbf{i} + 4 \sin 3t\mathbf{j}$, $t = \pi$

Movimiento circular En los ejercicios 29-32, considere un objeto que se mueve según el vector de posición

$$\mathbf{r}(t) = a \cos \omega t \mathbf{i} + a \sin \omega t \mathbf{j}.$$

29. Halle $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$, a_T y a_N .
30. Determine las direcciones de \mathbf{T} y \mathbf{N} en relación con el vector de posición \mathbf{r} .
31. Determine la rapidez del objeto en cualquier instante t y explique su valor en relación con el valor de a_T .
32. Si la velocidad angular ω se reduce a la mitad, ¿en qué factor cambia a_N ?

Dibujar una gráfica y vectores En los ejercicios 33-36, dibuje la gráfica de la curva plana dada por la función vectorial, y en el punto de la curva determinado por $\mathbf{r}(t_0)$, dibuje los vectores \mathbf{T} y \mathbf{N} . Observe que \mathbf{N} apunta hacia el lado cóncavo de la curva.

Función vectorial	Instante
33. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j}$	$t_0 = 2$
34. $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t\mathbf{j}$	$t_0 = 1$
35. $\mathbf{r}(t) = (2t+1)\mathbf{i} - t^2\mathbf{j}$	$t_0 = 2$
36. $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j}$	$t_0 = \frac{\pi}{4}$

Determinar vectores En los ejercicios 37-42, halle $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$, a_T y a_N en el instante t dado para la curva en el espacio $\mathbf{r}(t)$. [Su-gerencia: Encuentre $\mathbf{a}(t)$, $\mathbf{T}(t)$, a_T y a_N . Despeje \mathbf{N} en la ecuación $\mathbf{a}(t) = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$.]

Función vectorial	Instante
37. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} - 3t\mathbf{k}$	$t = 1$
38. $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$	$t = \frac{\pi}{3}$
39. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{t^2}{2}\mathbf{k}$	$t = 1$
40. $\mathbf{r}(t) = (2t-1)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} - 4t\mathbf{k}$	$t = 2$
41. $\mathbf{r}(t) = e^t \sin t\mathbf{i} + e^t \cos t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$	$t = 0$
42. $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$	$t = 0$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

43. **Definiciones** Defina el vector unitario tangente, el vector unitario normal principal y las componentes tangencial y normal de la aceleración.
44. **Vector unitario tangente** ¿Cuál es la relación entre el vector unitario tangente y la orientación de una curva? Explique.
45. **Aceleración** Describa el movimiento de una partícula si la componente normal de la aceleración es 0.
46. **Aceleración** Describa el movimiento de una partícula si la componente tangencial de la aceleración es 0.

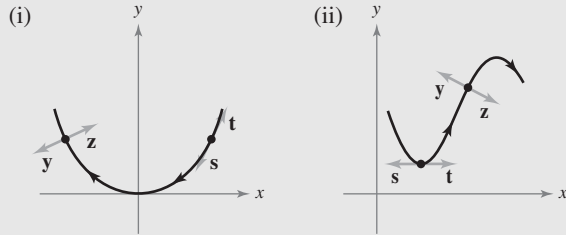
47. **Hallar vectores** Un objeto se mueve a lo largo de la trayectoria dada por

$$\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + 4t\mathbf{j}.$$

Encuentre $\mathbf{v}(t)$, $\mathbf{a}(t)$, $\mathbf{T}(t)$ y $\mathbf{N}(t)$ (si existe). ¿Cuál es la forma de la trayectoria? ¿La velocidad del objeto es constante o variable?



¿CÓMO LO VE? Las figuras muestran las trayectorias de dos partículas



- (a) ¿Cuál vector, \mathbf{s} o \mathbf{t} , representa al vector unitario tangente?
 (b) ¿Cuál vector, \mathbf{y} o \mathbf{z} , representa al vector unitario normal principal? Explique su razonamiento.

49. **Movimiento cicloidal** La figura muestra la trayectoria de una partícula representada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = \langle \pi t - \sin \pi t, 1 - \cos \pi t \rangle.$$

La figura muestra también los vectores $\mathbf{v}(t)/\|\mathbf{v}(t)\|$ y $\mathbf{a}(t)/\|\mathbf{a}(t)\|$ en los valores indicados de t .

- (a) Encuentre a_T y a_N en $t = \frac{1}{2}$, $t = 1$ y $t = \frac{3}{2}$.
 (b) En cada uno de los valores indicados de t , determine si la rapidez de la partícula aumenta o disminuye. Dé razones para sus respuestas.

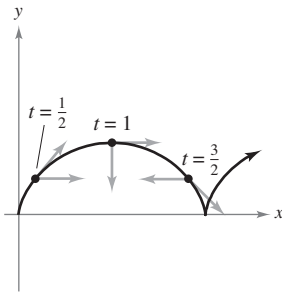


Figura para 49

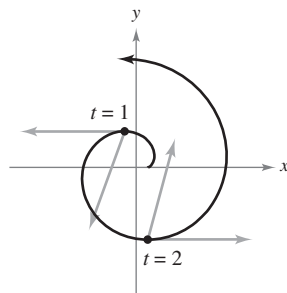


Figura para 50

50. **Movimiento a lo largo de una involuta de un círculo** La figura muestra una partícula que sigue la trayectoria dada por

$$\mathbf{r}(t) = \langle \cos \pi t + \pi t \sin \pi t, \sin \pi t - \pi t \cos \pi t \rangle.$$

La figura muestra también los vectores $\mathbf{v}(t)$ y $\mathbf{a}(t)$ para $t = 1$ y $t = 2$.

- (a) Encuentre a_T y a_N en $t = 1$ y $t = 2$.
 (b) Determine si la rapidez de la partícula aumenta o disminuye en cada uno de los valores indicados de t . Dé razones para sus respuestas.

Hallar un vector binormal En los ejercicios 51-56, halle los vectores \mathbf{T} y \mathbf{N} , y el vector unitario binormal $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$, de la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ en el valor dado de t .

51. $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j} + \frac{t}{2}\mathbf{k}, \quad t_0 = \frac{\pi}{2}$

52. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{t^3}{3}\mathbf{k}, \quad t_0 = 1$

53. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k}, \quad t_0 = \frac{\pi}{4}$

54. $\mathbf{r}(t) = 2e^t\mathbf{i} + e^t \cos t\mathbf{j} + e^t \sin t\mathbf{k}, \quad t_0 = 0$

55. $\mathbf{r}(t) = 4 \sin t\mathbf{i} + 4 \cos t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}, \quad t_0 = \frac{\pi}{3}$

56. $\mathbf{r}(t) = 3 \cos 2t\mathbf{i} + 3 \sin 2t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad t_0 = \frac{\pi}{4}$

Fórmula alternativa para el vector unitario normal principal En los ejercicios 57-60, utilice la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ para encontrar al vector unitario normal principal $\mathbf{N}(t)$ usando la fórmula alternativa

$$\mathbf{N} = \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\mathbf{a} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})\mathbf{v}}{\|(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\mathbf{a} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})\mathbf{v}\|}$$

57. $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j}$

58. $\mathbf{r}(t) = 3 \cos 2t\mathbf{i} + 3 \sin 2t\mathbf{j}$

59. $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + 4t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$

60. $\mathbf{r}(t) = 5 \cos t\mathbf{i} + 5 \sin t\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$

61. **Movimiento de un proyectil** Encuentre las componentes tangencial y normal de la aceleración de un proyectil disparado con un ángulo θ con la horizontal y con rapidez inicial v_0 . ¿Cuáles son las componentes cuando el proyectil está en su altura máxima?

62. **Movimiento de un proyectil** Utilice los resultados del ejercicio 61 para hallar las componentes tangencial y normal de la aceleración de un proyectil disparado con un ángulo de 45° con la horizontal con rapidez inicial de 150 pies por segundo. ¿Cuáles son las componentes cuando el proyectil está en su altura máxima?



63. **Movimiento de un proyectil** Un proyectil se lanza con velocidad inicial de 120 pies por segundo desde 5 pies de altura y con un ángulo de 30° con la horizontal.

- (a) Determine la función vectorial de la trayectoria del proyectil.
 (b) Use una herramienta de graficación para representar la trayectoria y aproximar la altura máxima y el alcance del proyectil.
 (c) Encuentre $\mathbf{v}(t)$, $\|\mathbf{v}(t)\|$ y $\mathbf{a}(t)$.
 (d) Use una herramienta de graficación para completar la tabla.

t	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
Rapidez						

- (e) Use una herramienta de graficación para representar las funciones escalares a_T y a_N . ¿Cómo cambia la velocidad del proyectil cuando a_T y a_N tienen signos opuestos?

- 64. Movimiento de un proyectil** Un proyectil se lanza con velocidad inicial de 220 pies por segundo desde una altura de 4 pies y con un ángulo de 45° con la horizontal.
- Determine la función vectorial de la trayectoria del proyectil.
 - Use una herramienta de graficación para representar la trayectoria y aproximar la altura máxima y el alcance del proyectil.
 - Encuentre $\mathbf{v}(t)$, $\|\mathbf{v}(t)\|$ y $\mathbf{a}(t)$.
 - Use una herramienta de graficación para completar la tabla.

t	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
Rapidez						

65. Control del tráfico aéreo

Debido a una tormenta, los controladores aéreos en tierra indican a un piloto que vuela a una altitud de 4 millas que efectúe un giro de 90° y ascienda a una altitud de 4.2 millas. El modelo de la trayectoria del avión durante esta maniobra es



$$\mathbf{r}(t) = \langle 10 \cos 10\pi t, 10 \sin 10\pi t, 4 + 4t \rangle, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{20}$$

donde t es el tiempo en horas y \mathbf{r} es la distancia en millas.

- Determine la rapidez del avión.
 - Calcule a_T y a_N . ¿Por qué una de estas es igual a 0?
- 66. Movimiento de un proyectil** Un avión volando a una altitud de 36,000 pies, con rapidez de 600 millas por hora, deja caer una bomba. Halle las componentes tangencial y normal de la aceleración que actúan sobre la bomba.
- 67. Aceleración centrípeta** Un objeto, atado al extremo de una cuerda, gira con rapidez constante, de acuerdo con la función de posición dada en los ejercicios 29 a 32.
- Si la velocidad angular ω se duplica, ¿cómo se modifica la componente centrípeta de la aceleración?
 - Si la velocidad angular no se modifica, pero la longitud de la cuerda se reduce a la mitad, ¿cómo cambia la componente centrípeta de la aceleración?
- 68. Fuerza centrípeta** Un objeto de masa m se mueve con rapidez constante v siguiendo una trayectoria circular de radio r . La fuerza requerida para producir la componente centrípeta de la aceleración se llama *fuerza centrípeta* y está dada por $F = mv^2/r$. La ley de Newton de la gravitación universal establece que $F = GMm/d^2$, donde d es la distancia entre los centros de los dos cuerpos de masas M y m , y G es una constante gravitatoria. Use esta ley para demostrar que la rapidez requerida para el movimiento circular es $v = \sqrt{GM/r}$.

Velocidad orbital En los ejercicios 69-72, use el resultado del ejercicio 86 para hallar la rapidez necesaria para la órbita circular dada alrededor de la Tierra. Tome $G = 9.56 \times 10^4$ millas cúbicas por segundo al cuadrado, y suponga que el radio de la Tierra es 4000 millas.

- La órbita de un transbordador espacial que viaja a 255 millas sobre la superficie de la Tierra.
- La órbita del telescopio Hubble que viaja a 360 millas sobre la superficie de la Tierra.
- La órbita de un satélite de detección térmica que viaja a 385 millas sobre la superficie de la Tierra.
- La órbita de un satélite de comunicación que está en órbita geosíncrona a r millas sobre la superficie de la Tierra. [El satélite realiza una órbita por día sideral (aproximadamente 23 horas, 56 minutos) y, por consiguiente, parece permanecer estacionario sobre un punto en la Tierra.]

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 73 y 74, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que muestre que es falso.

- Si el indicador de velocidad de un automóvil es constante, entonces el automóvil no puede estar acelerando.
 - Si $a_N = 0$ en un objeto en movimiento, entonces el objeto se mueve en una línea recta.
- 75. Movimiento de una partícula** Una partícula sigue una trayectoria dada por
- $$\mathbf{r}(t) = \cosh(bt)\mathbf{i} + \sinh(bt)\mathbf{j}$$
- donde b es una constante positiva.
- Demuestre que la trayectoria de la partícula es una hipérbola.
 - Demuestre que $\mathbf{a}(t) = b^2 \mathbf{r}(t)$.
- 76. Demostración** Demuestre que el vector unitario normal principal \mathbf{N} apunta hacia el lado cóncavo de una curva plana.
- 77. Demostración** Demuestre que el vector $\mathbf{T}'(t)$ es 0 para un objeto que se mueve en línea recta.
- 78. Demostración** Demuestre que $a_N = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|}$.
- 79. Demostración** Demuestre que $a_N = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_T^2}$.

DESAFÍOS DEL EXAMEN PUTNAM

80. Una partícula de masa unitaria se mueve en línea recta bajo la acción de una fuerza que es función de la velocidad v de la partícula, pero no se conoce la forma de esta función. Se observa el movimiento y se encuentra que la distancia x recorrida en el tiempo t está relacionada con t por medio de la fórmula $x = at + bt^2 + ct^3$, donde a , b y c tienen valores numéricos determinados por la observación del movimiento. Halle la función $f(v)$ para el rango de v cubierto en el experimento.

Este problema fue preparado por el Committee on the Putnam Prize Competition.
© The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

3.5 Longitud de arco y curvatura

- Calcular la longitud de arco de una curva en el espacio.
- Utilizar el parámetro de longitud de arco para describir una curva plana o curva en el espacio.
- Calcular la curvatura de una curva en un punto en la curva.
- Utilizar una función vectorial para calcular la fuerza de fricción.

Longitud de arco

En la sección 3.3 usted vio que la longitud de arco de una curva *plana* suave C dada por las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$ y $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$, es

$$s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

En forma vectorial, donde C está dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, puede expresar esta ecuación de la longitud de arco como

$$s = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt.$$

La fórmula para la longitud de arco de una curva plana tiene una extensión natural a una curva suave en el *espacio*, como se establece en el teorema siguiente.

TEOREMA 3.6 Longitud de arco de una curva en el espacio

Si C es una curva suave dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ en un intervalo $[a, b]$, entonces la longitud de arco de C en el intervalo es

$$s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt.$$

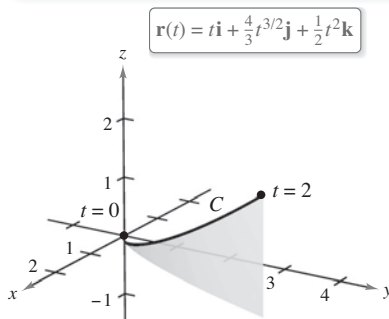
Exploración

Fórmula para la longitud de arco La fórmula para la longitud de arco de una curva en el espacio está dada en términos de las ecuaciones paramétricas que se usan para representar la curva. ¿Significa esto que la longitud de arco de la curva depende del parámetro que se use? ¿Sería deseable que fuera así? Explique su razonamiento.

Esta es una representación paramétrica diferente de la curva del ejemplo 1.

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{4}{3}t^{3/2}\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}$$

Halle la longitud de arco desde $t = 0$ hasta $t = \sqrt{2}$ y compare el resultado con el encontrado en el ejemplo 1.



A medida que t crece de 0 a 2, el vector $\mathbf{r}(t)$ traza una curva.

Figura 3.28

EJEMPLO 1

Hallar la longitud de arco de una curva en el espacio

... ▶ Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Encuentre la longitud de arco de la curva dada por

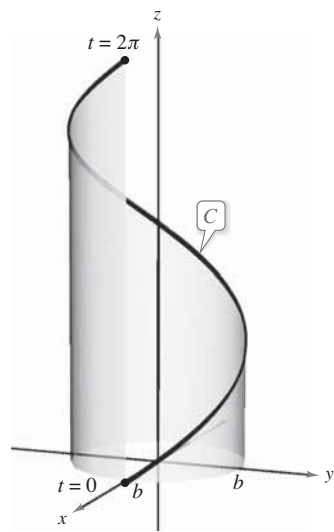
$$\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \frac{4}{3}t^3\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^4\mathbf{k}$$

desde $t = 0$ hasta $t = 2$, como se muestra en la figura 3.28.

Solución Utilizando $x(t) = t$, $y(t) = \frac{4}{3}t^3$ y $z(t) = \frac{1}{2}t^2$, obtiene $x'(t) = 1$, $y' = 2t^1/2$ y $z'(t) = t$. Por tanto, la longitud de arco $t = 0$ hasta $t = 2$ está dada por

$$\begin{aligned} s &= \int_0^2 \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt && \text{Fórmula para longitud de arco} \\ &= \int_0^2 \sqrt{1 + 4t + t^2} dt \\ &= \int_0^2 \sqrt{(t+2)^2 - 3} dt && \text{Tablas de integración (apéndice B), fórmula 26} \\ &= \left[\frac{t+2}{2} \sqrt{(t+2)^2 - 3} - \frac{3}{2} \ln|(t+2) + \sqrt{(t+2)^2 - 3}| \right]_0^2 \\ &= 2\sqrt{13} - \frac{3}{2} \ln(4 + \sqrt{13}) - 1 + \frac{3}{2} \ln 3 \\ &\approx 4.816. \end{aligned}$$

Curva:
 $\mathbf{r}(t) = b \cos t \mathbf{i} + b \sin t \mathbf{j} + \sqrt{1 - b^2} t \mathbf{k}$



Un giro de la hélice.

Figura 3.29

EJEMPLO 2 Hallar la longitud de arco de una hélice

Encuentre la longitud de un giro de la hélice dada por

$$\mathbf{r}(t) = b \cos t \mathbf{i} + b \sin t \mathbf{j} + \sqrt{1 - b^2} t \mathbf{k}$$

como se muestra en la figura 3.29.

Solución Comience hallando la derivada.

$$\mathbf{r}'(t) = -b \sin t \mathbf{i} + b \cos t \mathbf{j} + \sqrt{1 - b^2} \mathbf{k} \quad \text{Derivada}$$

Ahora, usando la fórmula para la longitud de arco, puede encontrar la longitud de un giro de la hélice integrando $\|\mathbf{r}'(t)\|$ desde 0 hasta 2π .

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \|\mathbf{r}'(t)\| dt && \text{Fórmula para la longitud de arco} \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{b^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + (1 - b^2)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt \\ &= t \Big|_0^{2\pi} \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

Por tanto, la longitud es 2π unidades. ■

Parámetro longitud de arco

Usted ha visto que las curvas pueden representarse por medio de funciones vectoriales de maneras diferentes, dependiendo del parámetro que se elija. Para el movimiento a lo largo de una curva, el parámetro adecuado es el tiempo t . Sin embargo, cuando se desean estudiar las propiedades geométricas de una curva, el parámetro adecuado es a menudo la longitud de arco s .

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{[x'(u)]^2 + [y'(u)]^2 + [z'(u)]^2} du$$

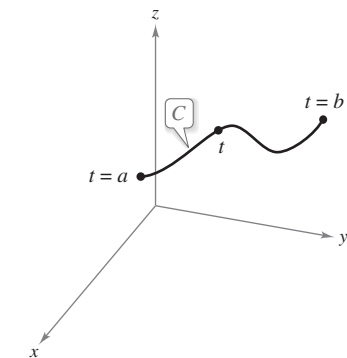


Figura 3.30

Definición de la función longitud de arco

Sea C una curva suave dada por $\mathbf{r}(t)$ definida en el intervalo cerrado $[a, b]$.

Para $a \leq t \leq b$, la **función longitud de arco** es

$$s(t) = \int_a^t \|\mathbf{r}'(u)\| du = \int_a^t \sqrt{[x'(u)]^2 + [y'(u)]^2 + [z'(u)]^2} du.$$

La longitud de arco s se llama el **parámetro longitud de arco**. (Vea la figura 3.30.)

Observe que la función de longitud de arco s es *no negativa*. Mide la distancia sobre C desde el punto inicial $(x(a), y(a), z(a))$, hasta el punto $(x(t), y(t), z(t))$.

Usando la definición de la función longitud de arco y el segundo teorema fundamental de cálculo, puede concluir que

$$\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}'(t)\|.$$

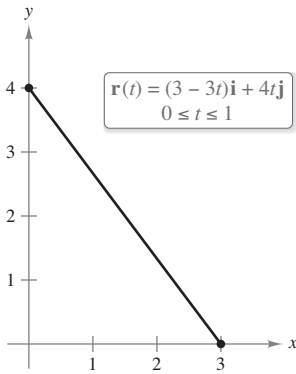
Derivada de la función longitud de arco

En la forma diferencial, puede escribir

$$ds = \|\mathbf{r}'(t)\| dt.$$

EJEMPLO 3

Determinar la función longitud de arco para una recta



El segmento de recta desde $(3, 0)$ hasta $(0, 4)$ puede parametrizarse usando el parámetro longitud de arco s .

Figura 3.31

Encuentre la función longitud de arco $s(t)$ para el segmento de recta dado por

$$\mathbf{r}(t) = (3 - 3t)\mathbf{i} + 4t\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

y exprese \mathbf{r} como función del parámetro s . (Vea la figura 3.31.)

Solución Como $\mathbf{r}'(t) = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ y

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$$

obtiene

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t \|\mathbf{r}'(u)\| \, du \\ &= \int_0^t 5 \, du \\ &= 5t. \end{aligned}$$

Usando $s = 5t$ (o $t = s/5$), puede reescribir \mathbf{r} utilizando el parámetro longitud de arco como sigue.

$$\mathbf{r}(s) = \left(3 - \frac{3}{5}s\right)\mathbf{i} + \frac{4}{5}s\mathbf{j}, \quad 0 \leq s \leq 5$$

Una de las ventajas de escribir una función vectorial en términos del parámetro longitud de arco es que $\|\mathbf{r}'(s)\| = 1$. De este modo, en el ejemplo 3 tiene

$$\|\mathbf{r}'(s)\| = \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = 1.$$

Así, dada una curva suave C representada por $\mathbf{r}(s)$, donde s es el parámetro longitud de arco, la longitud de arco entre a y b es

$$\begin{aligned} \text{Longitud de arco} &= \int_a^b \|\mathbf{r}'(s)\| \, ds \\ &= \int_a^b 1 \, ds \\ &= b - a \\ &= \text{longitud del intervalo.} \end{aligned}$$

Además, si t es cualquier parámetro tal que $\|\mathbf{r}'(t)\| = 1$, entonces t debe ser el parámetro longitud de arco. Estos resultados se resumen en el teorema siguiente, que se presenta sin demostración.

TEOREMA 3.7 Parámetro longitud de arco

Si C es una curva suave dada por

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} \quad \text{Curva plana}$$

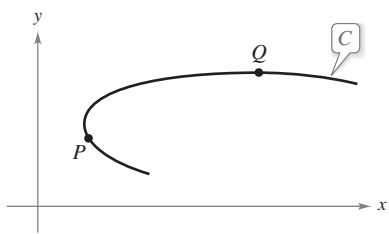
o

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k} \quad \text{Curva espacial}$$

donde s es el parámetro longitud de arco, entonces

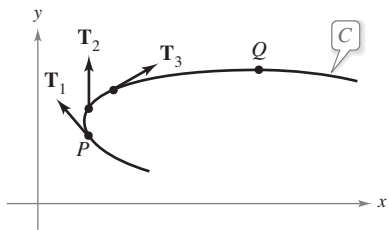
$$\|\mathbf{r}'(t)\| = 1$$

Además, si t es cualquier parámetro para la función vectorial \mathbf{r} , tal que $\|\mathbf{r}'(t)\| = 1$, entonces t debe ser el parámetro longitud de arco.



La curvatura en P es mayor que en Q .

Figura 3.32



La magnitud de la razón de cambio de \mathbf{T} respecto a la longitud de arco es la curvatura de una curva.

Figura 3.33

Curvatura

Un uso importante del parámetro longitud de arco es para hallar la **curvatura**, la medida de qué tan agudamente se dobla una curva. Por ejemplo, en la figura 3.32 la curva se dobla más agudamente en P que en Q , y se dice que la curvatura es mayor en P que en Q . Usted puede hallar la curvatura calculando la magnitud de la razón de cambio del vector unitario tangente \mathbf{T} con respecto a la longitud de arco s , como se muestra en la figura 3.33.

Definición de curvatura

Sea C una curva suave (en el plano o en el espacio) dada por $\mathbf{r}(s)$, donde s es el parámetro longitud de arco. La **curvatura** K en s está dada por

$$K = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\| = \|\mathbf{T}'(s)\|.$$

Un círculo tiene la misma curvatura en todos sus puntos. La curvatura y el radio del círculo están relacionados inversamente. Es decir, un círculo con un radio grande tiene una curvatura pequeña, y un círculo con un radio pequeño tiene una curvatura grande. Esta relación inversa se explica en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4

Hallar la curvatura de un círculo

Demuestre que la curvatura de un círculo de radio r es

$$K = \frac{1}{r}.$$

Solución Sin pérdida de generalidad, puede considerar que el círculo está centrado en el origen. Sea (x, y) cualquier punto en el círculo y sea s la longitud de arco desde $(r, 0)$ hasta (x, y) , como se muestra en la figura 3.34. Denotando por θ el ángulo central del círculo, puede representar el círculo por

$$\mathbf{r}(\theta) = r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j}. \quad \theta \text{ es el parámetro}$$

Usando la fórmula para la longitud de un arco circular $s = r\theta$, puede reescribir $\mathbf{r}(\theta)$ en términos del parámetro longitud de arco como sigue.

$$\mathbf{r}(s) = r \cos \frac{s}{r} \mathbf{i} + r \sin \frac{s}{r} \mathbf{j} \quad \text{La longitud de arco } s \text{ es el parámetro}$$

Así, $\mathbf{r}'(s) = -\sin \frac{s}{r} \mathbf{i} + \cos \frac{s}{r} \mathbf{j}$, de donde se deduce que $\|\mathbf{r}'(s)\| = 1$, lo que implica que el vector unitario tangente es

$$\mathbf{T}(s) = \frac{\mathbf{r}'(s)}{\|\mathbf{r}'(s)\|} = -\sin \frac{s}{r} \mathbf{i} + \cos \frac{s}{r} \mathbf{j}$$

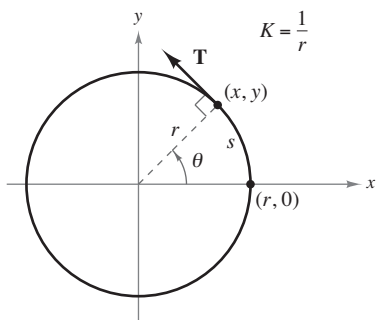
y la curvatura está dada por

$$K = \|\mathbf{T}'(s)\| = \left\| -\frac{1}{r} \cos \frac{s}{r} \mathbf{i} - \frac{1}{r} \sin \frac{s}{r} \mathbf{j} \right\| = \frac{1}{r}$$

en todo punto del círculo. ■

Puesto que una recta no se curva, usted esperaría que su curvatura fuera 0. Trate de comprobar esto hallando la curvatura de la recta dada por

$$\mathbf{r}(s) = \left(3 - \frac{3}{5}s \right) \mathbf{i} + \frac{4}{5}s \mathbf{j}.$$



La curvatura de un círculo es constante.

Figura 3.34

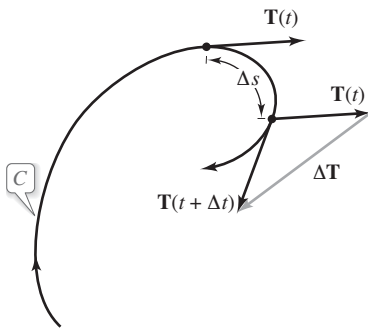
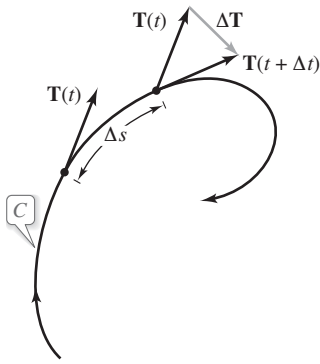


Figura 3.35

En el ejemplo 4, la curvatura se encontró aplicando directamente la definición. Esto requiere que la curva se exprese en términos del parámetro longitud de arco s . El teorema siguiente da otras dos fórmulas para encontrar la curvatura de una curva expresada en términos de un parámetro arbitrario t . La demostración de este teorema se deja como ejercicio [ver ejercicio 84, incisos (a) y (b)].

TEOREMA 3.8 Fórmulas para la curvatura

Si C es una curva suave dada por $\mathbf{r}(t)$, entonces la curvatura K de C en t está dada por

$$K = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}.$$

Como $\|\mathbf{r}'(t)\| = ds/dt$, la primera fórmula implica que la curvatura es el cociente de la razón de cambio del vector tangente \mathbf{T} entre la razón de cambio de la longitud de arco. Para ver que esto es razonable, sea Δt un número “pequeño”. Entonces

$$\frac{\mathbf{T}'(t)}{ds/dt} \approx \frac{[\mathbf{T}(t + \Delta t) - \mathbf{T}(t)]/\Delta t}{[s(t + \Delta t) - s(t)]/\Delta t} = \frac{\mathbf{T}(t + \Delta t) - \mathbf{T}(t)}{s(t + \Delta t) - s(t)} = \frac{\Delta \mathbf{T}}{\Delta s}.$$

En otras palabras, para un Δs dado, cuanto mayor sea la longitud $\Delta \mathbf{T}$ de la curva se dobla más en t , como se muestra en la figura 3.35.

EJEMPLO 5

Hallar la curvatura de una curva en el espacio

Determine la curvatura de la curva definida por

$$\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} - \frac{1}{3}t^3\mathbf{k}.$$

Solución No se sabe a simple vista si este parámetro representa la longitud de arco, así es que debe usar la fórmula $K = \|\mathbf{T}'(t)\|/\|\mathbf{r}'(t)\|$.

$$\mathbf{r}'(t) = 2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} - t^2\mathbf{k}$$

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{4 + 4t^2 + t^4} = t^2 + 2$$

Longitud de $\mathbf{r}'(t)$

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$$

$$= \frac{2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} - t^2\mathbf{k}}{t^2 + 2}$$

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{(t^2 + 2)(2\mathbf{j} - 2t\mathbf{k}) - (2t)(2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} - t^2\mathbf{k})}{(t^2 + 2)^2}$$

$$= \frac{-4t\mathbf{i} + (4 - 2t^2)\mathbf{j} - 4t\mathbf{k}}{(t^2 + 2)^2}$$

$$\|\mathbf{T}'(t)\| = \frac{\sqrt{16t^2 + 16 - 16t^2 + 4t^4 + 16t^2}}{(t^2 + 2)^2}$$

$$= \frac{2(t^2 + 2)}{(t^2 + 2)^2}$$

$$= \frac{2}{t^2 + 2}$$

Longitud de $\mathbf{T}'(t)$

Por tanto,

$$K = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{2}{(t^2 + 2)^2}.$$

Curvatura

El teorema siguiente presenta una fórmula para calcular la curvatura de una curva plana dada por $y = f(x)$.

TEOREMA 3.9 Curvatura en coordenadas rectangulares

Si C es la gráfica de una función dos veces derivable, entonces la curvatura en el punto está dada por $y = f(x)$, y la curvatura K en el punto (x, y) es

$$K = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}}$$

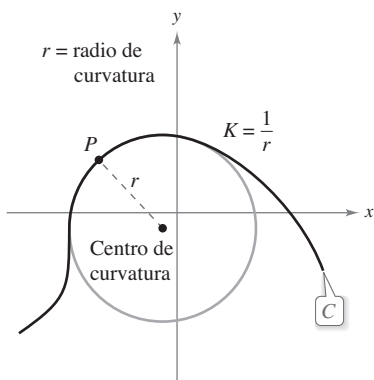
Demostración Si representa la curva C por $\mathbf{r}(x) = x\mathbf{i} + f(x)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ (donde x es el parámetro), obtiene $\mathbf{r}'(x) = \mathbf{i} + f'(x)\mathbf{j}$,

$$\|\mathbf{r}'(x)\| = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

y $\mathbf{r}''(x) = f''(x)\mathbf{j}$. Como $\mathbf{r}'(x) \times \mathbf{r}''(x) = f''(x)\mathbf{k}$, se deduce que la curvatura es

$$\begin{aligned} K &= \frac{\|\mathbf{r}'(x) \times \mathbf{r}''(x)\|}{\|\mathbf{r}'(x)\|^3} \\ &= \frac{|f''(x)|}{\{1 + [f'(x)]^2\}^{3/2}} \\ &= \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}}. \end{aligned}$$

Consulte LarsonCalculus.com para el video de esta demostración de Bruce Edwards. ■



El círculo de curvatura.

Figura 3.36

Sea C una curva con curvatura K en el punto P . El círculo que pasa por el punto P de radio $r = 1/K$ se denomina **círculo de curvatura** si su centro se encuentra en el lado cóncavo de la curva y tiene en común con la curva una recta tangente en el punto P . Al radio se le llama **radio de curvatura** en P , y al centro se le llama **centro de curvatura**.

El círculo de curvatura le permite estimar gráficamente la curvatura K en un punto P de una curva. Usando un compás, puede trazar un círculo contra el lado cóncavo de la curva en el punto P , como se muestra en la figura 3.36. Si el círculo tiene radio r , usted puede estimar que la curvatura es $K = 1/r$.

EJEMPLO 6

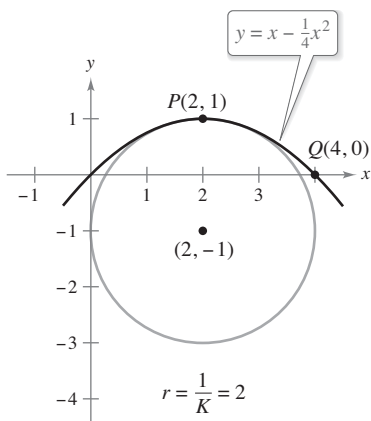
Hallar la curvatura en coordenadas rectangulares

Encuentre la curvatura de la parábola dada por $y = x - \frac{1}{4}x^2$ en $x = 2$. Dibuje el círculo de curvatura en $(2, 1)$.

Solución La curvatura en $x = 2$ se calcula como sigue:

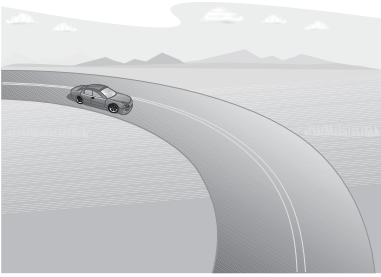
$$\begin{aligned} y' &= 1 - \frac{x}{2} & y' &= 0 \\ y'' &= -\frac{1}{2} & y'' &= -\frac{1}{2} \\ K &= \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}} & K &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La curvatura en $P(2, 1)$ es $\frac{1}{2}$, el radio del círculo de curvatura en ese punto, que es 2. Por tanto, el centro de curvatura es $(2, -1)$, como se muestra en la figura 3.37. [En la figura, observe que la curva tiene la mayor curvatura en P . Trate de demostrar que la curvatura en $Q(4, 0)$ es $1/2^{5/2} \approx 0.177$.] ■



El círculo de curvatura.

Figura 3.37



La fuerza del empuje lateral que perciben los pasajeros en un automóvil que toma una curva depende de dos factores: la rapidez del automóvil y lo brusco de la curva.

Figura 3.38

.....►
 ••• **COMENTARIO** El teorema 3.10 da fórmulas adicionales para a_T y a_N .

La longitud de arco y la curvatura están estrechamente relacionadas con las componentes tangencial y normal de la aceleración. La componente tangencial de la aceleración es la razón de cambio de la rapidez, que a su vez es la razón de cambio de la longitud de arco. Esta componente es negativa cuando un objeto en movimiento reduce su velocidad y positiva cuando la aumenta, independientemente de si el objeto gira o viaja en una recta. En consecuencia, la componente tangencial es solamente función de la longitud de arco y es independiente de la curvatura.

Por otro lado, la componente normal de la aceleración es función *tanto* de la rapidez *como* de la curvatura. Esta componente mide la aceleración que actúa perpendicular a la dirección del movimiento. Para ver por qué afectan la rapidez y la curvatura a la componente normal, imagínese conduciendo un automóvil por una curva, como se muestra en la figura 3.38. Si la velocidad es alta y la curva muy cerrada, se sentirá empujado contra la puerta del automóvil. Al bajar la velocidad o tomar una curva más suave, se disminuye este efecto de empuje lateral.

El teorema siguiente establece explícitamente la relación entre rapidez, curvatura y componentes de la aceleración.

TEOREMA 3.10 Aceleración, rapidez y curvatura

Si $\mathbf{r}(t)$ es el vector posición de una curva suave C , entonces el vector aceleración está dado por

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} + K \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \mathbf{N}$$

donde K es la curvatura de C y ds/dt es la rapidez.

Demostración Para el vector posición $\mathbf{r}(t)$, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= a_T \mathbf{T} + a_N \mathbf{N} \\ &= \frac{d}{dt} [\|\mathbf{v}\|] \mathbf{T} + \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{T}'\| \mathbf{N} \\ &= \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} + \frac{ds}{dt} (\|\mathbf{v}\| K) \mathbf{N} \\ &= \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T} + K \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Consulte *LarsonCalculus.com* para el video de esta demostración de Bruce Edwards. ■

EJEMPLO 7

Componentes tangencial y normal de la aceleración

Encuentre a_T y a_N de la curva dada por

$$\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} - \frac{1}{3}t^3\mathbf{k}.$$

Solución Por el ejemplo 5, usted sabe que

$$\frac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}'(t)\| = t^2 + 2 \quad \text{y} \quad K = \frac{2}{(t^2 + 2)^2}.$$

Por tanto

$$a_T = \frac{d^2s}{dt^2} = 2t \quad \text{Componente tangencial}$$

y

$$a_N = K \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{2}{(t^2 + 2)^2} (t^2 + 2)^2 = 2. \quad \text{Componente normal} \quad \blacksquare$$

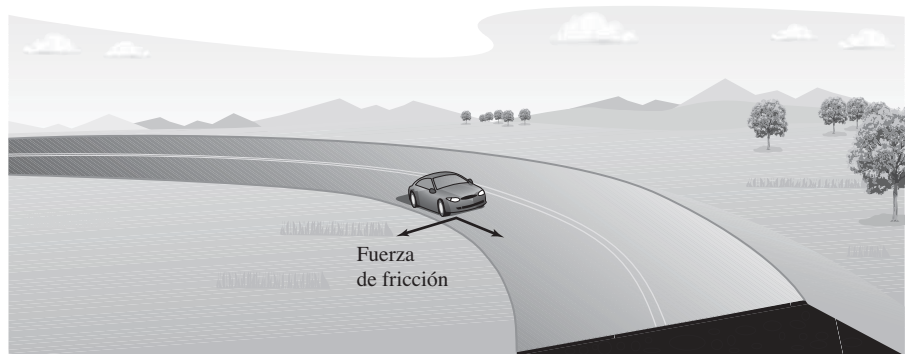
Aplicación

Hay muchas aplicaciones prácticas en física e ingeniería dinámica en las que se emplean las relaciones entre rapidez, longitud de arco, curvatura y aceleración. Una de estas aplicaciones se refiere a la fuerza de fricción.

Un objeto de masa m en movimiento está en contacto con un objeto estacionario. La fuerza requerida para producir una aceleración \mathbf{a} a lo largo de una trayectoria dada es

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= m\mathbf{a} \\ &= m\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)\mathbf{T} + mK\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\mathbf{N} \\ &= ma_T\mathbf{T} + ma_N\mathbf{N}. \end{aligned}$$

La porción de esta fuerza que es proporcionada por el objeto estacionario se llama **fuerza de fricción**. Por ejemplo, si un automóvil se mueve con rapidez constante tomando una curva, la carretera ejerce una fuerza de fricción o rozamiento que impide que el automóvil salga de la carretera. Si el automóvil no se desliza, la fuerza de fricción es perpendicular a la dirección del movimiento y su magnitud es igual a la componente normal de la aceleración, como se muestra en la figura 3.39. La fuerza de fricción potencial de una carretera en una curva puede incrementarse peraltando la carretera.



La fuerza de fricción es perpendicular a la dirección del movimiento.

Figura 3.39

EJEMPLO 8 Fuerza de fricción

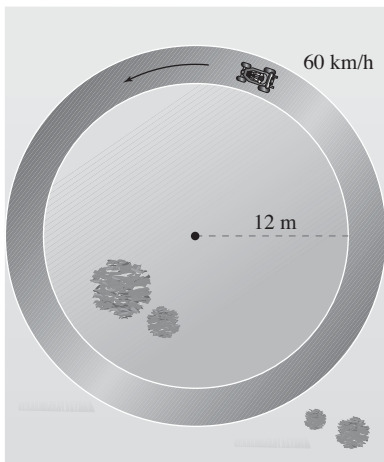


Figura 3.40

Un coche de carreras (go-kart) de 360 kilogramos viaja a una velocidad de 60 kilómetros por hora por una pista circular de 12 metros de radio, como se muestra en la figura 3.40. ¿Qué fuerza de fricción debe ejercer la superficie en los neumáticos para impedir que el coche salga de su curso?

Solución La fuerza de fricción o rozamiento debe ser igual a la masa por la componente normal de aceleración. En el caso de esta pista circular, usted sabe que la curvatura es

$$K = \frac{1}{12}. \quad \text{Curvatura de la pista circular}$$

Por consiguiente, la fuerza de fricción es

$$\begin{aligned} ma_N &= mK\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \\ &= (360 \text{ kg})\left(\frac{1}{12 \text{ m}}\right)\left(\frac{60,000 \text{ m}}{3600 \text{ s}}\right)^2 \\ &\approx 8333 \text{ (kg)(m)/s}^2. \end{aligned}$$

RESUMEN SOBRE VELOCIDAD, ACELERACIÓN Y CURVATURA

A menos que se indique lo contrario, sea C una curva (en el plano o en el espacio) dada por el vector de posición

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \quad \text{Curva en el plano}$$

o

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad \text{Curva en el espacio}$$

donde x , y y z son funciones dos veces derivables de t .

Vector velocidad, rapidez y vector aceleración

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) \quad \text{Vector velocidad}$$

$$\|\mathbf{v}(t)\| = \frac{ds}{dt} = \|\mathbf{r}'(t)\| \quad \text{Rapidez}$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) \quad \text{Vector aceleración}$$

$$= a_T \mathbf{T}(t) + a_N \mathbf{N}(t)$$

$$= \frac{d^2s}{dt^2} \mathbf{T}(t) + K \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \mathbf{N}(t) \quad K \text{ es la curvatura y } \frac{ds}{dt} \text{ es la rapidez.}$$

Vector unitario tangente y vector unitario normal principal

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \quad \text{Vector unitario tangente}$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{\|\mathbf{T}'(t)\|} \quad \text{Vector unitario normal principal}$$

Componentes de la aceleración

$$a_T = \mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{d^2s}{dt^2} \quad \text{Componente tangencial de la aceleración}$$

$$a_N = \mathbf{a} \cdot \mathbf{N} \quad \text{Componente normal de la aceleración}$$

$$= \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|}$$

$$= \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2 - a_T^2}$$

$$= K \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \quad K \text{ es la curvatura y } \frac{ds}{dt} \text{ es la rapidez.}$$

Fórmulas para la curvatura en el plano

$$K = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}} \quad C \text{ dada por } y = f(x)$$

$$K = \frac{|x'y'' - y'x''|}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}} \quad C \text{ dada por } x = x(t), y = y(t)$$

Fórmulas para la curvatura en el plano o en el espacio

$$K = \|\mathbf{T}'(s)\| = \|\mathbf{r}''(s)\| \quad s \text{ es el parámetro longitud de arco.}$$

$$K = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3} \quad t \text{ es el parámetro general.}$$

$$K = \frac{\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{N}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|^2}$$

Las fórmulas con productos vectoriales se aplican solo a curvas en el espacio.

3.5 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Determinar la longitud de arco de una curva plana En los ejercicios 1-6, dibuje la curva plana y determine su longitud en el intervalo dado.


1. $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} - t\mathbf{j}$, $[0, 3]$
2. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, $[0, 4]$
3. $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, $[0, 1]$
4. $\mathbf{r}(t) = (t + 1)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, $[0, 6]$
5. $\mathbf{r}(t) = a \cos^3 t\mathbf{i} + a \sin^3 t\mathbf{j}$, $[0, 2\pi]$
6. $\mathbf{r}(t) = a \cos t\mathbf{i} + a \sin t\mathbf{j}$, $[0, 2\pi]$

7. **Movimiento de un proyectil** Una pelota de béisbol es golpeada desde 3 pies sobre el nivel del suelo a 100 pies por segundo y con un ángulo de 45° con respecto al nivel del suelo.
- (a) Encuentre la función vectorial de la trayectoria de la pelota de béisbol.
 - (b) Determine la altura máxima.
 - (c) Encuentre el alcance.
 - (d) Halle la longitud de arco de la trayectoria.

8. **Movimiento de un proyectil** Repita el ejercicio 7 para una pelota de béisbol que es golpeada desde 4 pies sobre el nivel del suelo a 80 pies por segundo y con un ángulo de 30° con respecto al nivel del suelo.

Determinar la longitud de arco de una curva en el espacio En los ejercicios 9-14, dibuje la curva en el espacio y halle su longitud sobre el intervalo dado.

Función vectorial	Intervalo
9. $\mathbf{r}(t) = -t\mathbf{i} + 4t\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$	$[0, 1]$
10. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$	$[0, 2]$
11. $\mathbf{r}(t) = \langle 4t, -\cos t, \sin t \rangle$	$\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$
12. $\mathbf{r}(t) = \langle 2 \sin t, 5t, 2 \cos t \rangle$	$[0, \pi]$
13. $\mathbf{r}(t) = a \cos t\mathbf{i} + a \sin t\mathbf{j} + bt\mathbf{k}$	$[0, 2\pi]$
14. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t, t^2 \rangle$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

15. **Considere la gráfica de la función vectorial $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (4 - t^2)\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ en el intervalo $[0, 2]$.**
- (a) Aproxime la longitud de la curva hallando la longitud del segmento de recta que une sus extremos.
 - (b) Aproxime la longitud de la curva sumando las longitudes de los segmentos de recta que unen los extremos de los vectores $\mathbf{r}(0)$, $\mathbf{r}(0.5)$, $\mathbf{r}(1)$, $\mathbf{r}(1.5)$ y $\mathbf{r}(2)$.
 - (c) Describa cómo obtener una estimación más exacta mediante los procesos de los incisos (a) y (b).
 -  (d) Use las funciones de integración de una herramienta de graficación para aproximar la longitud de la curva. Compare este resultado con las respuestas de los incisos (a) y (b).
16. **Investigación** Repita el ejercicio 15 con la función vectorial $\mathbf{r}(t) = 6 \cos(\pi t/4)\mathbf{i} + 2 \sin(\pi t/4)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$.

17. **Investigación** Considere la hélice representada por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle 2 \cos t, 2 \sin t, t \rangle$.

- (a) Expresar la longitud de arco s de la hélice como función de t evaluando la integral

$$s = \int_0^t \sqrt{[x'(u)]^2 + [y'(u)]^2 + [z'(u)]^2} du.$$

- (b) Despeje t en la relación deducida en el inciso (a), y sustituya el resultado en el conjunto de ecuaciones paramétricas original. Esto da una parametrización de la curva en términos del parámetro longitud de arco s .
- (c) Halle las coordenadas del punto en la hélice con longitud de arco $s = \sqrt{5}$ y $s = 4$.
- (d) Verifique que $\|\mathbf{r}'(s)\| = 1$.

18. **Investigación** Repita el ejercicio 17 con la curva representada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = \langle 4(\sin t - t \cos t), 4(\cos t + t \sin t), \frac{3}{2}t^2 \rangle.$$

Determinar la curvatura En los ejercicios 19-22, determine la curvatura K de la curva donde s es el parámetro longitud de arco.

19. $\mathbf{r}(s) = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}s\right)\mathbf{i} + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}s\right)\mathbf{j}$
20. $\mathbf{r}(s) = (3 + s)\mathbf{i} + \mathbf{j}$

21. La hélice del ejercicio 17: $\mathbf{r}(t) = \langle 2 \cos t, 2 \sin t, t \rangle$
22. La curva del ejercicio 18:

$$\mathbf{r}(t) = \langle 4(\sin t - t \cos t), 4(\cos t + t \sin t), \frac{3}{2}t^2 \rangle$$

Determinar la curvatura En los ejercicios 23-28, determine la curvatura K de la curva plana en el valor dado del parámetro.

23. $\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} - 2t\mathbf{j}$, $t = 1$
24. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $t = 2$
25. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j}$, $t = 1$
26. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{9}t^3\mathbf{j}$, $t = 2$
27. $\mathbf{r}(t) = \langle t, \sin t \rangle$, $t = \frac{\pi}{2}$
28. $\mathbf{r}(t) = \langle 5 \cos t, 4 \sin t \rangle$, $t = \frac{\pi}{3}$

Determinar la curvatura En los ejercicios 29-36, determine la curvatura K de la curva.

29. $\mathbf{r}(t) = 4 \cos 2\pi t\mathbf{i} + 4 \sin 2\pi t\mathbf{j}$
30. $\mathbf{r}(t) = 2 \cos \pi t\mathbf{i} + \sin \pi t\mathbf{j}$
31. $\mathbf{r}(t) = a \cos \omega t\mathbf{i} + a \sin \omega t\mathbf{j}$
32. $\mathbf{r}(t) = a \cos \omega t\mathbf{i} + b \sin \omega t\mathbf{j}$
33. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{t^2}{2}\mathbf{k}$
34. $\mathbf{r}(t) = 2t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}$
35. $\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} + 3 \cos t\mathbf{j} + 3 \sin t\mathbf{k}$
36. $\mathbf{r}(t) = e^{2t}\mathbf{i} + e^{2t} \cos t\mathbf{j} + e^{2t} \sin t\mathbf{k}$

Determinar la curvatura En los ejercicios 37-40, determine la curvatura K de la curva en el punto P .

37. $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j}$, $P(-3, 2)$

38. $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + 4t\mathbf{j}$, $P(1, 0)$

39. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{t^3}{4}\mathbf{k}$, $P(2, 4, 2)$

40. $\mathbf{r}(t) = e^t \cos t\mathbf{i} + e^t \sin t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$, $P(1, 0, 1)$

Determinar la curvatura En los ejercicios 41-48, determine la curvatura y el radio de curvatura de la curva plana en el valor dado de x .

41. $y = 3x - 2$, $x = a$ 42. $y = 2x + \frac{4}{x}$, $x = 1$

43. $y = 2x^2 + 3$, $x = -1$ 44. $y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$, $x = 0$

45. $y = \cos 2x$, $x = 2\pi$ 46. $y = e^{3x}$, $x = 0$

47. $y = x^3$, $x = 2$ 48. $y = x^n$, $x = 1$, $n \geq 2$

Curvatura máxima En los ejercicios 49-54, (a) encuentre el punto de la curva en el que la curvatura K es máxima, y (b) halle el límite de K cuando $x \rightarrow \infty$.

49. $y = (x - 1)^2 + 3$ 50. $y = x^3$

51. $y = x^{2/3}$ 52. $y = \frac{1}{x}$

53. $y = \ln x$ 54. $y = e^x$

Curvatura En los ejercicios 55-58, determine todos los puntos de la gráfica de una función en los que la curvatura es cero.

55. $y = 1 - x^3$ 56. $y = (x - 1)^3 + 3$

57. $y = \cos x$ 58. $y = \sin x$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

59. **Longitud de arco** Escriba la fórmula para la longitud de arco de una curva suave en el espacio.

60. **Curvatura** Escriba las fórmulas para la curvatura en el plano y en el espacio.

61. **Curvatura** Describa la gráfica de una función vectorial para la que la curvatura sea 0 en todos los valores t de su dominio.

62. **Curvatura** Dada una función $y = f(x)$ dos veces derivable, determine su curvatura en un extremo relativo. ¿La curvatura puede tener valores mayores que los que alcanza en un extremo relativo? ¿Por qué sí o por qué no?

63. Investigación Considere la función $f(x) = x^4 - x^2$.

- (a) Use un sistema computacional algebraico y encuentre la curvatura de la curva como función de x .
- (b) Use el resultado del inciso (a) para hallar los círculos de curvatura de la gráfica de f en $x = 0$ y $x = 1$. Use un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente la función y los dos círculos de curvatura.
- (c) Represente gráficamente la función $K(x)$ y compárela con la gráfica de $f(x)$. Por ejemplo, ¿se presentan los extremos de f y K en los mismos números críticos? Explique su razonamiento.

64. Movimiento de una partícula Una partícula se mueve a lo largo de la curva plana C descrita por $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$.

- (a) Encuentre la longitud de C en el intervalo $0 \leq t \leq 2$.
- (b) Encuentre la curvatura K de la curva plana en $t = 0$, $t = 1$ y $t = 2$.
- (c) Describa la curvatura de C cuando t varía desde $t = 0$ hasta $t = 2$.

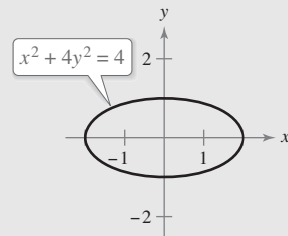
65. Investigación Halle todos los a y b tales que las dos curvas dadas por

$$y_1 = ax(b - x) \quad \text{y} \quad y_2 = \frac{x}{x + 2}$$

se corten en un solo punto y tengan una recta tangente común y curvatura igual en ese punto. Trace una gráfica para cada conjunto de valores de a y b .



¿CÓMO LO VE? Usando la gráfica de la elipse, ¿en qué punto(s) es la menor y la mayor curvatura?



67. Esfera y paraboloid Una esfera de radio 4 se deja caer en el paraboloid dado por $z = x^2 + y^2$.

- (a) ¿Qué tanto se acercará la esfera al vértice del paraboloid?
- (b) ¿Cuál es el radio de la esfera mayor que toca el vértice?

68. Rapidez

Cuanto menor es la curvatura en una curva de una carretera, mayor es la velocidad a la que pueden ir los automóviles. Suponga que la velocidad máxima en una curva es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la curvatura. Un automóvil que recorre la trayectoria $y = \frac{1}{3}x^3$, donde x y y están medidos en millas, puede ir con seguridad a 30 millas por hora en $(1, \frac{1}{3})$. ¿Qué tan rápido puede ir en $(\frac{3}{2}, \frac{9}{8})$?



69. Centro de curvatura Sea C una curva dada por $y = f(x)$. Sea K la curvatura ($K \neq 0$) en el punto $P(x_0, y_0)$ y sea

$$z = \frac{1 + f'(x_0)^2}{f''(x_0)}$$

Demuestre que las coordenadas (α, β) del centro de curvatura en P son $(\alpha, \beta) = (x_0 - f'(x_0)z, y_0 + z)$.

70. Centro de curvatura Use el resultado del ejercicio 69 para hallar el centro de curvatura de la curva en el punto dado.

(a) $y = e^x, (0, 1)$ (b) $y = \frac{x^2}{2}, \left(1, \frac{1}{2}\right)$ (c) $y = x^2, (0, 0)$

71. Curvatura Se da una curva C por medio de la ecuación polar $r = f(\theta)$. Demuestre que la curvatura K en el punto (r, θ) es,

$$K = \frac{|2(r')^2 - rr'' + r^2|}{[(r')^2 + r^2]^{3/2}}$$

[Sugerencia: Represente la curva por $\mathbf{r}(\theta) = r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j}$.]

72. Curvatura Use el resultado del ejercicio 71 para hallar la curvatura de cada una de las curvas polares.

(a) $r = 1 + \sin \theta$ (b) $r = \theta$
 (c) $r = a \sin \theta$ (d) $r = e^\theta$

73. Curvatura Dada la curva polar $r = e^{a\theta}$, $a > 0$, encuentre la curvatura K y determine el límite de K cuando (a) $\theta \rightarrow \infty$ y (b) $a \rightarrow \infty$.


74. Curvatura en el polo Demuestre que la fórmula para la curvatura de una curva $r = f(\theta)$, dada en el ejercicio 71, se reduce a $K = 2/|r'|$ para la curvatura *en el polo*.

Curvatura en el polo En los ejercicios 75 y 76, use el resultado del ejercicio 74 para hallar la curvatura de la curva rosa en el polo.

75. $r = 4 \sin 2\theta$ 76. $r = 6 \cos 3\theta$

77. Demostración Para una curva suave dada por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$, demuestre que la curvatura está dada por

$$K = \frac{|f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)|}{\{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2\}^{3/2}}$$

 **78. Asíntotas horizontales** Use el resultado del ejercicio 77 para encontrar la curvatura K de la curva representada por ecuaciones paramétricas $x(t) = t^3$ y $y(t) = \frac{1}{2}t^2$. Use una herramienta de graficación para representar K y determinar toda asíntota horizontal. Interprete las asíntotas en el contexto del problema.

79. Curvatura de una cicloide Use el resultado del ejercicio 77 para encontrar la curvatura K de la cicloide representada por las ecuaciones paramétricas

$x(\theta) = a(\theta - \sin \theta)$ y $y(\theta) = a(1 - \cos \theta)$.

¿Cuáles son los valores mínimo y máximo de K ?

80. Componentes tangencial y normal Use el teorema 3.10 para encontrar a_T y a_N de cada una de las curvas dadas por las funciones vectoriales.

(a) $\mathbf{r}(t) = 3t^2 \mathbf{i} + (3t - t^3) \mathbf{j}$
 (b) $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2 \mathbf{k}$

81. Fuerza de fricción Un vehículo de 5500 libras va a una velocidad de 30 millas por hora por una glorieta de 100 pies de radio. ¿Cuál es la fuerza de fricción que debe ejercer la superficie de la carretera en los neumáticos para impedir que el vehículo salga de curso?

82. Fuerza de fricción Un vehículo de 6400 libras viaja a 35 millas por hora en una glorieta de 250 pies de radio. ¿Cuál es la fuerza de fricción o de rozamiento que debe

ejercer la superficie de la carretera en los neumáticos para impedir que el vehículo salga de curso?

83. Curvatura Verifique que la curvatura en cualquier punto (x, y) de la gráfica de $y = \cosh x$ es $1/y^2$.

84. Fórmulas de curvatura Use la definición de curvatura en el espacio $K = \|\mathbf{T}'(s)\| = \|\mathbf{r}''(s)\|$, para verificar cada una de las fórmulas siguientes.

(a) $K = \frac{\|\mathbf{T}'(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|}$
 (b) $K = \frac{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|}{\|\mathbf{r}'(t)\|^3}$
 (c) $K = \frac{\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{N}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|^2}$

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 85-88, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que demuestre que es falso.

- 85. La longitud de arco de una curva en el espacio depende de la parametrización.
- 86. La curvatura de un círculo es igual a su radio.
- 87. La curvatura de una recta es 0.
- 88. La componente normal de la aceleración es función tanto de la velocidad como de la curvatura.

Leyes de Kepler En los ejercicios 89-96, se le pide verificar las leyes de Kepler del movimiento planetario. En estos ejercicios, suponga que todo planeta se mueve en una órbita dada por la función vectorial \mathbf{r} . Sean $r = \|\mathbf{r}\|$, G la constante gravitatoria universal, M la masa del Sol y m la masa del planeta.

89. Demuestre que $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = r \frac{dr}{dt}$.

90. Usando la segunda ley del movimiento de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, y la segunda ley de la gravitación de Newton

$$\mathbf{F} = -\frac{GmM}{r^3} \mathbf{r}$$

demuestre que \mathbf{a} y \mathbf{r} son paralelos, y que $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t) = \mathbf{L}$ es un vector constante. Por tanto, $\mathbf{r}(t)$ se mueve en un plano fijo, ortogonal a \mathbf{L} .

91. Demuestre que $\frac{d}{dt} \left[\frac{\mathbf{r}}{r} \right] = \frac{1}{r^3} [\mathbf{r} \times \mathbf{r}'] \times \mathbf{r}$.

92. Demuestre que $\frac{\mathbf{r}'}{GM} \times \mathbf{L} - \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{e}$ es un vector constante.

93. Demuestre la primera ley de Kepler: todo planeta describe una órbita elíptica con el Sol como uno de sus focos.

94. Suponga que la órbita elíptica

$$r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}$$

está en el plano xy , con \mathbf{L} a lo largo del eje z . Demuestre que

$$\|\mathbf{L}\| = r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

95. Demuestre la segunda ley de Kepler: todo rayo del Sol en un planeta barre áreas iguales de la elipse en tiempos iguales.

96. Demuestre la tercera ley de Kepler: el cuadrado del periodo de la órbita de un planeta es proporcional al cubo de la distancia media entre el planeta y el Sol.

Ejercicios de repaso

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Dominio y continuidad En los ejercicios 1-4, (a) halle el dominio de \mathbf{r} y (b) determine los valores de t (si los hay) en los que la función es continua.

- $\mathbf{r}(t) = \tan t \mathbf{i} + \mathbf{j} + t \mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t} \mathbf{i} + \frac{1}{t-4} \mathbf{j} + \mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(t) = \ln t \mathbf{i} + t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(t) = (2t+1) \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t \mathbf{k}$

Evaluar una función En los ejercicios 5 y 6, evalúe (si es posible) la función vectorial en cada uno de los valores dados de t .

- $\mathbf{r}(t) = (2t+1) \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} - \sqrt{t+2} \mathbf{k}$
(a) $\mathbf{r}(0)$ (b) $\mathbf{r}(-2)$ (c) $\mathbf{r}(c-1)$
(d) $\mathbf{r}(1+\Delta t) - \mathbf{r}(1)$
- $\mathbf{r}(t) = 3 \cos t \mathbf{i} + (1 - \sin t) \mathbf{j} - t \mathbf{k}$
(a) $\mathbf{r}(0)$ (b) $\mathbf{r}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ (c) $\mathbf{r}(s - \pi)$
(d) $\mathbf{r}(\pi + \Delta t) - \mathbf{r}(\pi)$

Escribir una función vectorial En los ejercicios 7 y 8, represente el segmento de recta de P a Q mediante una función vectorial y por un conjunto de ecuaciones paramétricas.

- $P(3, 0, 5)$, $Q(2, -2, 3)$
- $P(-2, -3, 8)$, $Q(5, 1, -2)$

Dibujar una curva En los ejercicios 9-12, dibuje la curva representada por la función vectorial y dé la orientación de la curva.

- $\mathbf{r}(t) = \langle \pi \cos t, \pi \sin t \rangle$
- $\mathbf{r}(t) = \langle t+2, t^2-1 \rangle$
- $\mathbf{r}(t) = (t+1) \mathbf{i} + (3t-1) \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t \mathbf{i} + t \mathbf{j} + 2 \sin t \mathbf{k}$

Representar una gráfica mediante una función vectorial En los ejercicios 13 y 14, trace la curva plana representada por la función vectorial. (Hay varias respuestas correctas.)

- $3x + 4y - 12 = 0$
- $y = 9 - x^2$

Representar una gráfica mediante una función vectorial En los ejercicios 15 y 16, trace la curva en el espacio representada por la intersección de las superficies. Utilice el parámetro $x = t$ para encontrar una función vectorial para la curva en el espacio.

- $z = x^2 + y^2$, $x + y = 0$
- $x^2 + z^2 = 4$, $x - y = 0$

Encontrar un límite En los ejercicios 17 y 18, halle el límite.

- $\lim_{t \rightarrow 4^-} (t \mathbf{i} + \sqrt{4-t} \mathbf{j} + \mathbf{k})$
- $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2t}{t} \mathbf{i} + e^{-t} \mathbf{j} + e^t \mathbf{k} \right)$

Derivadas de orden superior En los ejercicios 19 y 20, encuentre (a) $\mathbf{r}'(t)$, (b) $\mathbf{r}''(t)$, y (c) $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)$.

- $\mathbf{r}(t) = (t^2 + 4t) \mathbf{i} - 3t^2 \mathbf{j}$
- $\mathbf{r}(t) = 5 \cos t \mathbf{i} + 2 \sin t \mathbf{j}$

Derivadas de orden superior En los ejercicios 21 y 22, encuentre (a) $\mathbf{r}'(t)$, (b) $\mathbf{r}''(t)$, (c) $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)$, y (d) $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)$.

- $\mathbf{r}(t) = 2t^3 \mathbf{i} + 4t \mathbf{j} - t^2 \mathbf{k}$
- $\mathbf{r}(t) = (4t+3) \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + (2t^2+4) \mathbf{k}$

Usar propiedades de la derivada En los ejercicios 23 y 24, use las propiedades de la derivada para hallar lo siguiente.

- $\mathbf{r}'(t)$
- $\frac{d}{dt} [\mathbf{u}(t) - 2\mathbf{r}(t)]$
- $\frac{d}{dt} (3t)\mathbf{r}(t)$
- $\frac{d}{dt} [\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{u}(t)]$
- $\frac{d}{dt} [\mathbf{r}(t) \times \mathbf{u}(t)]$
- $\frac{d}{dt} \mathbf{u}(2t)$

23. $\mathbf{r}(t) = 3t \mathbf{i} + (t-1) \mathbf{j}$, $\mathbf{u}(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + \frac{2}{3}t^3 \mathbf{k}$

24. $\mathbf{r}(t) = \sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + t \mathbf{k}$, $\mathbf{u}(t) = \sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + \frac{1}{t} \mathbf{k}$

Determinar una integral indefinida En los ejercicios 25-28, encuentre la integral indefinida.

- $\int (\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}) dt$
- $\int (t^2 \mathbf{i} + 5t \mathbf{j} + 8t^3 \mathbf{k}) dt$
- $\int \left(3\sqrt{t} \mathbf{i} + \frac{2}{t} \mathbf{j} + \mathbf{k} \right) dt$
- $\int (\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + e^{2t} \mathbf{k}) dt$

Evaluar una integral definida En los ejercicios 29-32, evalúe la integral definida.

- $\int_{-2}^2 (3t \mathbf{i} + 2t^2 \mathbf{j} - t^3 \mathbf{k}) dt$
- $\int_0^1 (t \mathbf{i} + \sqrt{t} \mathbf{j} + 4t \mathbf{k}) dt$
- $\int_0^2 (e^{t/2} \mathbf{i} - 3t^2 \mathbf{j} - \mathbf{k}) dt$
- $\int_0^{\pi/3} (2 \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + 3\mathbf{k}) dt$

Encontrar una antiderivada En los ejercicios 33 y 34, halle $\mathbf{r}(t)$ para las condiciones iniciales dadas.

- $\mathbf{r}'(t) = 2t \mathbf{i} + e^t \mathbf{j} + e^{-t} \mathbf{k}$, $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$
- $\mathbf{r}'(t) = \sec t \mathbf{i} + \tan t \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k}$, $\mathbf{r}(0) = 3\mathbf{k}$

Determinar los vectores velocidad y aceleración En los ejercicios 35-38, el vector posición \mathbf{r} describe la trayectoria de un objeto que se mueve en el espacio.

- (a) Halle la velocidad, la rapidez y la aceleración del objeto.
- (b) Evalúe el vector velocidad y el vector aceleración del objeto para un valor dado de t .

Vector de posición	Tiempo
35. $\mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} - t\mathbf{k}$	$t = 1$
36. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\mathbf{i} + 5t\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$	$t = 4$
37. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos^3 t, \sin^3 t, 3t \rangle$	$t = \pi$
38. $\mathbf{r}(t) = \langle t, -\tan t, e^t \rangle$	$t = 0$

Movimiento de un proyectil En los ejercicios 39-42, use el modelo para el movimiento de un proyectil, suponiendo que no hay resistencia del aire. [$a(t) = -32$ pies por segundo al cuadrado o $a(t) = -9.8$ metros por segundo al cuadrado.]

- 39. Un proyectil se dispara desde el nivel del suelo a una velocidad inicial de 84 pies por segundo con un ángulo de 30° con la horizontal. Halle el alcance del proyectil.
- 40. Una pelota de béisbol es golpeada desde una altura de 3.5 pies arriba del suelo con una velocidad inicial de 120 pies por segundo y a un ángulo de 30° arriba de la horizontal. Halle la altura máxima que alcanza la pelota de béisbol. Determine si libra una cerca de 8 pies de altura localizada a 375 pies del plato de lanzamiento.
- 41. Un proyectil se dispara desde el nivel del suelo con un ángulo de 20° con la horizontal. El proyectil tiene un alcance de 95 metros. Halle la velocidad inicial mínima.
- 42. Use una herramienta de graficación para representar las trayectorias de un proyectil para $v_0 = 20$ metros por segundo, $h = 0$ y (a) $\theta = 30^\circ$, (b) $\theta = 45^\circ$ y (c) use las gráficas para aproximar en cada caso la altura máxima y el alcance máximo del proyectil.

Encontrar el vector tangente unitario En los ejercicios 43 y 44, encuentre el vector tangente unitario a la curva en el valor dado del parámetro.

- 43. $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + 3t^3\mathbf{j}$, $t = 1$
- 44. $\mathbf{r}(t) = 2 \sin t\mathbf{i} + 4 \cos t\mathbf{j}$, $t = \frac{\pi}{6}$

Encontrar una recta tangente En los ejercicios 45 y 46, halle el vector tangente unitario $\mathbf{T}(t)$ y determine un conjunto de ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva en el espacio en el punto P .

- 45. $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $P\left(1, \sqrt{3}, \frac{\pi}{3}\right)$
- 46. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \frac{2}{3}t^3\mathbf{k}$, $P\left(2, 4, \frac{16}{3}\right)$

Encontrar el vector unitario normal principal En los ejercicios 47-50, encuentre el vector unitario normal principal a la curva en el valor dado del parámetro.

- 47. $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}$, $t = 1$ 48. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \ln t\mathbf{j}$, $t = 2$
- 49. $\mathbf{r}(t) = 3 \cos 2t\mathbf{i} + 3 \sin 2t\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $t = \frac{\pi}{4}$

50. $\mathbf{r}(t) = 4 \cos t\mathbf{i} + 4 \sin t\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $t = \frac{2\pi}{3}$

Encontrar las componentes tangencial y normal de la aceleración En los ejercicios 51 y 52, halle $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$, a_T y a_N en el tiempo t dado para la curva plana $\mathbf{r}(t)$.

- 51. $\mathbf{r}(t) = \frac{3}{t}\mathbf{i} - 6t\mathbf{j}$, $t = 3$
- 52. $\mathbf{r}(t) = 3 \cos 2t\mathbf{i} + 3 \sin 2t\mathbf{j}$, $t = \frac{\pi}{6}$

Determinar la longitud de arco de una curva plana En los ejercicios 53-56, trace la curva en el plano y halle su longitud en el intervalo dado.

Función vectorial	Intervalo
53. $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} - 3t\mathbf{j}$	$[0, 5]$
54. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{k}$	$[0, 3]$
55. $\mathbf{r}(t) = 10 \cos^3 t\mathbf{i} + 10 \sin^3 t\mathbf{j}$	$[0, 2\pi]$
56. $\mathbf{r}(t) = 10 \cos t\mathbf{i} + 10 \sin t\mathbf{j}$	$[0, 2\pi]$

Determinar la longitud de arco de una curva en el espacio En los ejercicios 57-60, trace la curva en el espacio y halle su longitud en el intervalo dado.

Función vectorial	Intervalo
57. $\mathbf{r}(t) = -3t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 4t\mathbf{k}$	$[0, 3]$
58. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$	$[0, 2]$
59. $\mathbf{r}(t) = \langle 8 \cos t, 8 \sin t, t \rangle$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
60. $\mathbf{r}(t) = \langle 2(\sin t - t \cos t), 2(\cos t + t \sin t), t \rangle$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Determinar la curvatura En los ejercicios 61-64, halle la curvatura K de la curva.

- 61. $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$ 62. $\mathbf{r}(t) = 2\sqrt{t}\mathbf{i} + 3t\mathbf{j}$
- 63. $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$
- 64. $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + 5 \cos t\mathbf{j} + 5 \sin t\mathbf{k}$

Determinar la curvatura En los ejercicios 65-66, determine la curvatura K de la curva en el punto P .

- 65. $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{k}$, $P\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}\right)$
- 66. $\mathbf{r}(t) = 4 \cos t\mathbf{i} + 3 \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$, $P(-4, 0, \pi)$

Determinar la curvatura en coordenadas de recta En los ejercicios 67-70, determine la curvatura y el radio de curvatura de la curva plana en el valor dado de x .

- 67. $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$, $x = 4$ 68. $y = e^{-x/2}$, $x = 0$
- 69. $y = \ln x$, $x = 1$ 70. $y = \tan x$, $x = \frac{\pi}{4}$

71. **Fuerza de fricción** Un vehículo de 7200 libras va a una velocidad de 25 millas por hora por una glorieta de 150 pies de radio. ¿Cuál es la fuerza de fricción que debe ejercer la superficie de la carretera en los neumáticos para impedir que el vehículo salga de curso?

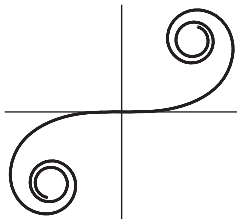
Solución de problemas

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

1. **Espiral de Cornu** La espiral de Cornu está dada por

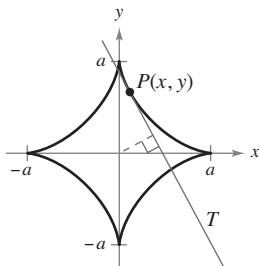
$$x(t) = \int_0^t \cos\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du \quad y \quad y(t) = \int_0^t \sin\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du.$$

La espiral mostrada en la figura fue trazada sobre el intervalo $-\pi \leq t \leq \pi$.

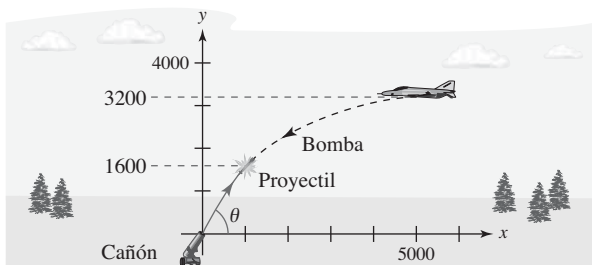


Generada con Mathematica

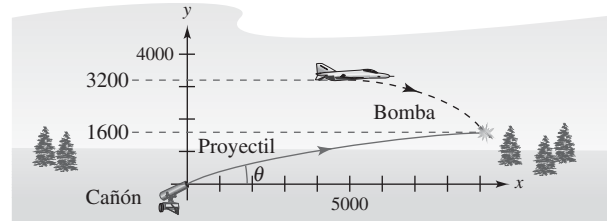
- (a) Encuentre la longitud de arco de esta curva desde $t = 0$ hasta $t = a$.
- (b) Determine la curvatura de la gráfica cuando $t = a$.
- (c) La espiral de Cornu la descubrió James Bernoulli. Bernoulli encontró que la espiral tiene una relación interesante entre curvatura y longitud del arco. ¿Cuál es esta relación?
2. **Radio de curvatura** Sea T la recta tangente en el punto $P(x, y)$ a la gráfica de la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, $a > 0$, como se observa en la figura. Demuestre que el radio de curvatura en P es el triple de la distancia del origen a la recta tangente T .



3. **Movimiento de un proyectil** Un bombardero vuela horizontalmente a una altitud de 3200 pies con una velocidad de 400 pies por segundo cuando suelta una bomba. Un proyectil se lanza 5 segundos después desde un cañón orientado hacia el bombardero y abajo a 5000 pies del punto original del bombardero, como se muestra en la figura. El proyectil va a interceptar la bomba a una altitud de 1600 pies. Determine la velocidad inicial y el ángulo de inclinación del proyectil. (Desprecie la resistencia del aire.)



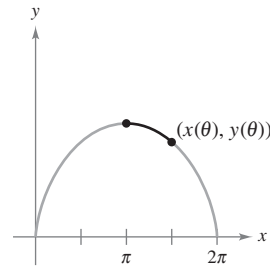
4. **Movimiento de un proyectil** Repita el ejercicio 3 si el bombardero está orientado en dirección opuesta a la del lanzamiento, como se muestra en la figura.



5. **Cicloide** Considere un arco de la cicloide

$$\mathbf{r}(\theta) = (\theta - \sin \theta)\mathbf{i} + (1 - \cos \theta)\mathbf{j}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

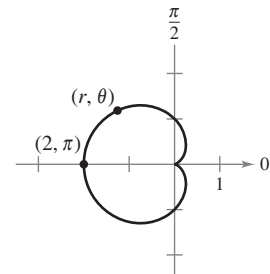
que se muestra en la figura. Sea $s(\theta)$ la longitud de arco desde el punto más alto del arco hasta el punto $(x(\theta), y(\theta))$, y sea $\rho(\theta) = 1/K$ el radio de curvatura en el punto $(x(\theta), y(\theta))$. Demuestre que s y ρ están relacionados por la ecuación $s^2 + \rho^2 = 16$. (Esta ecuación se llama *ecuación natural* de la curva.)



6. **Cardioide** Considere la cardioide

$$r = 1 - \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

que se muestra en la figura. Sea $s(\theta)$ la longitud de arco desde el punto $(2, \pi)$ de la cardioide hasta el punto (r, θ) y sea $\rho(\theta) = 1/K$ el radio de curvatura en el punto (r, θ) . Demuestre que s y ρ están relacionados por la ecuación $s^2 + 9\rho^2 = 16$. (Esta ecuación se llama *ecuación natural* de la curva.)



7. **Demostración** Si $\mathbf{r}(t)$ es una función no nula y derivable en t , demuestre que

$$\frac{d}{dt}(\|\mathbf{r}(t)\|) = \frac{1}{\|\mathbf{r}(t)\|} \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t).$$

8. **Satélite** Un satélite de comunicaciones se mueve en una órbita circular alrededor de la Tierra a una distancia de 42,000 kilómetros del centro de la Tierra. La velocidad angular

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega = \frac{\pi}{12} \text{ radianes por hora}$$

es constante.

- (a) Utilice coordenadas polares para demostrar que el vector aceleración está dado por

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \mathbf{u}_r + \left[r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right] \mathbf{u}_\theta$$

donde $\mathbf{u}_r = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$ es el vector unitario en la dirección radial y $\mathbf{u}_\theta = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$.

- (b) Encuentre las componentes radial y angular de la aceleración para el satélite.

Vector binormal En los ejercicios 9-11, use el vector binormal definido por la ecuación $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$.

9. Encuentre los vectores unitario tangente, unitario normal y binormal a la hélice

$$\mathbf{r}(t) = 4 \cos t \mathbf{i} + 4 \sin t \mathbf{j} + 3t \mathbf{k}$$

en $t = \pi/2$. Dibuje la hélice junto con estos tres vectores unitarios mutuamente ortogonales.

10. Encuentre los vectores unitario tangente, unitario normal y binormal a la curva

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} - \mathbf{k}$$

en $t = \pi/4$. Dibuje la curva junto con estos tres vectores unitarios mutuamente ortogonales.

11. (a) Demuestre que existe un escalar llamado **torsión**, tal que $d\mathbf{B}/ds = -\tau\mathbf{N}$.

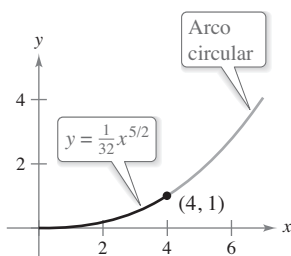
(b) Demuestre que $\frac{d\mathbf{N}}{ds} = -K\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$.

(Las tres ecuaciones $d\mathbf{T}/ds = K\mathbf{N}$, $d\mathbf{N}/ds = -K\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$ y $d\mathbf{B}/ds = -\tau\mathbf{N}$ son llamadas las *fórmulas de Frenet-Serret*.)

12. **Rampa de salida** Una autopista tiene una rampa de salida que empieza en el origen de un sistema coordenado y sigue la curva

$$y = \frac{1}{32}x^{5/2}$$

Hasta el punto (4, 1) (vea la figura). Después sigue una trayectoria circular cuya curvatura es la dada por la curva en (4, 1). ¿Cuál es el radio del arco circular? Explique por qué la curva y el arco circular deben tener en (4, 1) la misma curvatura.



13. **Longitud de arco y curvatura** Considere la función vectorial

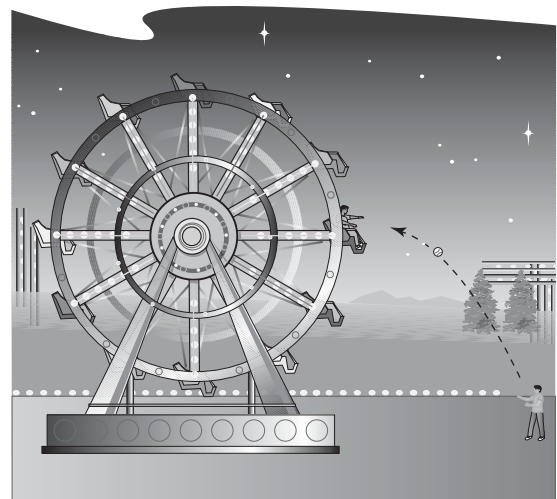
$$\mathbf{r}(t) = \langle t \cos \pi t, t \sin \pi t \rangle, \quad 0 \leq t \leq 2.$$

- (a) Use una herramienta de graficación para representar la función.
 (b) Halle la longitud de arco en el inciso (a).
 (c) Determine la curvatura K como función de t . Halle las curvaturas cuando t es 0, 1 y 2.
 (d) Use una herramienta de graficación para representar la función K .
 (e) Encuentre (si es posible) el $\lim_{t \rightarrow \infty} K$.
 (f) Con el resultado del inciso (e), conjeture acerca de la gráfica de \mathbf{r} cuando $t \rightarrow \infty$.

14. **Rueda de la fortuna** Usted quiere lanzar un objeto a un amigo que está en una rueda de la fortuna (vea la figura). Las ecuaciones paramétricas siguientes dan la trayectoria del amigo $\mathbf{r}_1(t)$ y la trayectoria del objeto $\mathbf{r}_2(t)$. La distancia está dada en metros y el tiempo en segundos.

$$\mathbf{r}_1(t) = 15 \left(\sin \frac{\pi t}{10} \right) \mathbf{i} + \left(16 - 15 \cos \frac{\pi t}{10} \right) \mathbf{j}$$

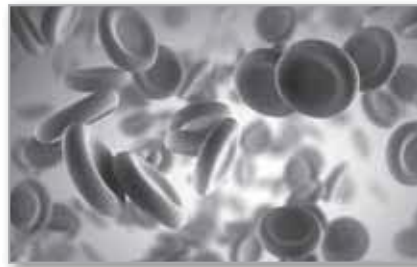
$$\mathbf{r}_2(t) = [22 - 8.03(t - t_0)] \mathbf{i} + [1 + 11.47(t - t_0) - 4.9(t - t_0)^2] \mathbf{j}$$



- (a) Localice la posición del amigo en la rueda en el instante $t = 0$.
 (b) Determine el número de revoluciones por minuto de la rueda de la fortuna.
 (c) ¿Cuál es la rapidez y el ángulo de inclinación (en grados) al que el objeto es lanzado en el instante $t = t_0$?
 (d) Use una herramienta de graficación para representar las funciones vectoriales usando un valor de t_0 que permite al amigo alcanzar el objeto. (Haga esto por ensayo y error.) Explique la importancia de t_0 .
 (e) Halle el instante aproximado en el que el amigo deberá poder atrapar el objeto. Aproxime las velocidades del amigo y del objeto en ese instante.

Funciones de varias variables

- 4.1 Introducción a las funciones de varias variables
- 4.2 Límites y continuidad
- 4.3 Derivadas parciales
- 4.4 Diferenciales
- 4.5 Regla de la cadena para funciones de varias variables
- 4.6 Derivadas direccionales y gradientes
- 4.7 Planos tangentes y rectas normales
- 4.8 Extremos de funciones de dos variables
- 4.9 Multiplicadores de Lagrange



Ley de Hardy-Weinberg



Fondo del océano



Factor del viento



Costos marginales



Silvicultura

4.1 Introducción a las funciones de varias variables

- Entender la notación para una función de varias variables.
- Dibujar la gráfica de una función de dos variables.
- Dibujar las curvas de nivel de una función de dos variables.
- Dibujar las superficies de nivel de una función de tres variables.
- Utilizar gráficos por computadora para representar una función de dos variables.

Exploración

Sin usar una herramienta de graficación, describa la gráfica de cada función de dos variables.

- a. $z = x^2 + y^2$
- b. $z = x + y$
- c. $z = x^2 + y$
- d. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
- e. $z = \sqrt{1 - x^2 + y^2}$

Funciones de varias variables

Hasta ahora en este texto solo ha visto funciones de una sola variable (independiente). Sin embargo, muchos problemas comunes son funciones de dos o más variables. En seguida se dan tres ejemplos.

1. El trabajo realizado por una fuerza, $W = FD$, es una función de dos variables.
2. El volumen de un cilindro circular recto $V = \pi r^2 h$ es función de dos variables.
3. El volumen de un sólido rectangular $V = lwh$ es una función de tres variables.

La notación para una función de dos o más variables es similar a la utilizada para una función de una sola variable. Aquí se presentan dos ejemplos.

$$z = \underbrace{f(x, y)}_{2 \text{ variables}} = x^2 + xy \quad \text{Función de dos variables}$$

y

$$w = \underbrace{f(x, y, z)}_{3 \text{ variables}} = x + 2y - 3z \quad \text{Función de tres variables}$$



**MARY FAIRFAX SOMERVILLE
(1780-1872)**

Somerville se interesó por el problema de crear modelos geométricos de funciones de varias variables. Su libro más conocido, *The Mechanics of the Heavens*, se publicó en 1831. Consulte LarsonCalculus.com para leer más acerca de esta biografía.

Definición de una función de dos variables

Sea D un conjunto de pares ordenados de números reales. Si a cada par ordenado (x, y) de D le corresponde un único número real $f(x, y)$, entonces se dice que f es una **función de x y y** . El conjunto D es el **dominio** de f , y el correspondiente conjunto de valores $f(x, y)$ es el **rango** de f . Para la función

$$z = f(x, y)$$

x y y son las **variables independientes** y z es la **variable dependiente**.

Pueden darse definiciones similares para las funciones de tres, cuatro o n variables, donde los dominios consisten en tríadas (x_1, x_2, x_3) , tétradas (x_1, x_2, x_3, x_4) y n -adas (x_1, x_2, \dots, x_n) . En todos los casos, el rango es un conjunto de números reales. En esta unidad estudiará funciones de dos o tres variables.

Como ocurre con las funciones de una variable, la manera más común para describir una función de varias variables es por medio de una *ecuación*, y a menos que se diga explícitamente lo contrario, puede suponer que el dominio es el conjunto de todos los puntos para los que la ecuación está definida. Por ejemplo, el dominio de la función dada por

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

es todo el plano xy . Similarmente, el dominio de

$$f(x, y) = \ln xy$$

es el conjunto de todos los puntos (x, y) en el plano para los que $xy > 0$. Esto consiste en todos los puntos del primer y tercer cuadrantes.

EJEMPLO 1

Dominios de funciones de varias variables

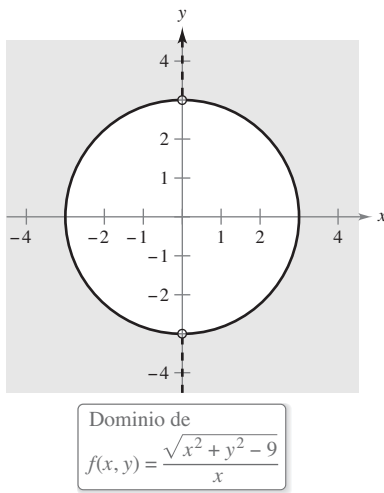


Figura 4.1

Halle el dominio de cada función.

a. $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}{x}$ b. $g(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}}$

Solución

a. La función f está definida para todos los puntos (x, y) tales que $x \neq 0$ y $x^2 + y^2 \geq 9$.

Por tanto, el dominio es el conjunto de todos los puntos que están en el círculo $x^2 + y^2 = 9$, o en su exterior, con *excepción* de los puntos en el eje y , como se muestra en la figura 4.1.

b. La función g está definida para todos los puntos (x, y, z) tales que $x^2 + y^2 + z^2 < 9$.

Por consiguiente, el dominio es el conjunto de todos los puntos (x, y, z) que se encuentran en el interior de la esfera de radio 3 centrada en el origen. ■

Las funciones de varias variables pueden combinarse de la misma manera que las funciones de una sola variable. Por ejemplo, se puede formar la suma, la diferencia, el producto y el cociente de funciones de dos variables como sigue.

$(f \pm g)(x, y) = f(x, y) \pm g(x, y)$	Suma o diferencia
$(fg)(x, y) = f(x, y)g(x, y)$	Producto
$\frac{f}{g}(x, y) = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}, \quad g(x, y) \neq 0$	Cociente

No se puede formar la composición de dos funciones de varias variables. Sin embargo, si h es una función de varias variables y g es una función de una sola variable, puede formarse la función **compuesta** $(g \circ h)(x, y)$ como sigue

$$(g \circ h)(x, y) = g(h(x, y)) \quad \text{Composición}$$

El dominio de esta función compuesta consta de todo (x, y) en el dominio de h tal que $h(x, y)$ está en el dominio de g . Por ejemplo, la función dada por

$$f(x, y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$$

se puede ver como la función compuesta de dos variables dada por

$$h(x, y) = 16 - 4x^2 - y^2$$

y la función de una sola variable dada por

$$g(u) = \sqrt{u}.$$

El dominio de esta función es el conjunto de todos los puntos que se encuentran en la elipse dada por $4x^2 + y^2 = 16$ o en su interior.

Una función que puede expresarse como suma de funciones de la forma $cx^m y^n$ (donde c es un número real y m y n son enteros no negativos) se llama una **función polinomial** de dos variables. Por ejemplo, las funciones dadas por

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + x + 2 \quad \text{y} \quad g(x, y) = 3xy^2 + x - 2$$

son funciones polinomiales de dos variables. Una **función racional** es el cociente de dos funciones polinomiales. Terminología similar se utiliza para las funciones de más de dos variables.

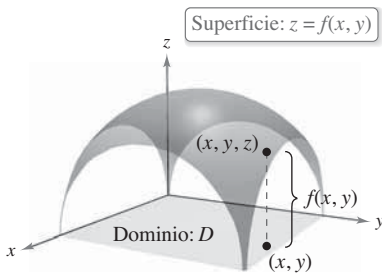


Figura 4.2

Gráfica de una función de dos variables

Como en el caso de las funciones de una sola variable, usted puede saber mucho acerca del comportamiento de una función de dos variables dibujando su gráfica. La **gráfica** de una función f de dos variables es el conjunto de todos los puntos (x, y, z) para los que $z = f(x, y)$ y (x, y) está en el dominio de f . Esta gráfica puede interpretarse geoméricamente como una *superficie en el espacio*, como se explicó en las secciones 1.5 y 1.6. En la figura 4.2 debe observar que la gráfica de $z = f(x, y)$ es una superficie cuya proyección sobre el plano xy es D , el dominio de f . A cada punto (x, y) en D corresponde un punto (x, y, z) de la superficie, y viceversa, a cada punto (x, y, z) de la superficie le corresponde un punto (x, y) en D .

EJEMPLO 2 Describir la gráfica de una función de dos variables

¿Cuál es el rango de

$$f(x, y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}?$$

Describa la gráfica de f .

Solución El dominio D dado por la ecuación de f es el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que

$$16 - 4x^2 - y^2 \geq 0.$$

Por tanto, D es el conjunto de todos los puntos que pertenecen o son interiores a la elipse dada por

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1. \quad \text{Elipse en el plano } xy$$

El rango de f está formado por todos los valores $z = f(x, y)$ tales que $0 \leq z \leq \sqrt{16}$, o sea $0 \leq z \leq 4$. Rango de f

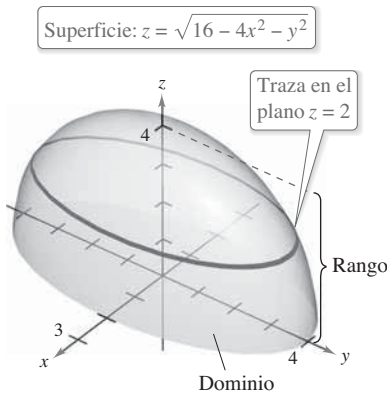
Un punto (x, y, z) está en la gráfica de f si y solo si

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{16 - 4x^2 - y^2} \\ z^2 &= 16 - 4x^2 - y^2 \end{aligned}$$

$$4x^2 + y^2 + z^2 = 16$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{16} = 1, \quad 0 \leq z \leq 4.$$

De acuerdo con la sección 4.6, usted sabe que la gráfica de f es la mitad superior de un elipsoide, como se muestra en la figura 4.3. ■



La gráfica de $f(x, y) = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$ es la parte superior de un elipsoide.

Figura 4.3

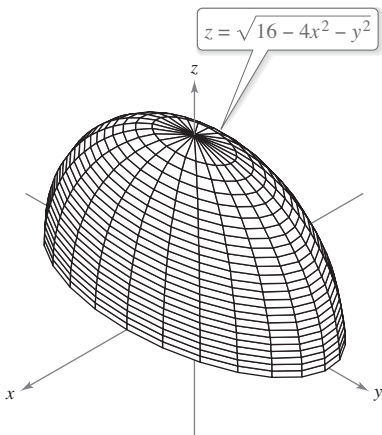


Figura 4.4

Para dibujar *a mano* una superficie en el espacio, es útil usar trazas en planos paralelos a los planos coordenados, como se muestra en la figura 4.3. Por ejemplo, para hallar la traza de la superficie en el plano $z = 2$, sustituya $z = 2$ en la ecuación $z = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2}$ y obtiene

$$2 = \sqrt{16 - 4x^2 - y^2} \Rightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

Por tanto, la traza es una elipse centrada en el punto $(0, 0, 2)$ con ejes mayor y menor de longitudes

$$4\sqrt{3} \text{ y } 2\sqrt{3}.$$

Las trazas también se usan en la mayor parte de las herramientas de graficación tridimensionales. Por ejemplo, la figura 4.4 muestra una versión generada por computadora de la superficie dada en el ejemplo 2. En esta gráfica la herramienta de graficación tomó 25 trazas paralelas al plano xy y 12 trazas en planos verticales.

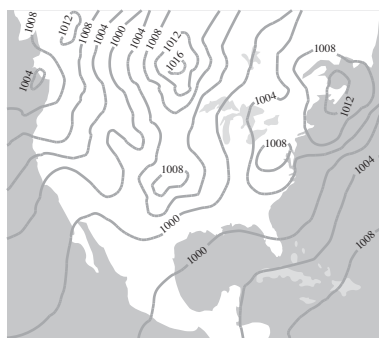
Si usted dispone de una herramienta de graficación tridimensional, utilícela para representar varias superficies.

Curvas de nivel

Una segunda manera de visualizar una función de dos variables es usar un **campo escalar** en el que el escalar

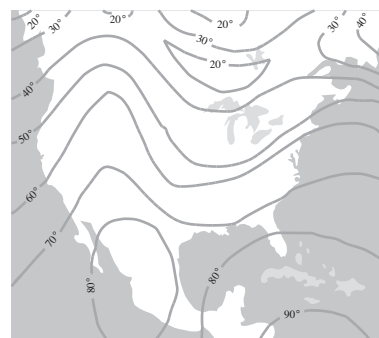
$$z = f(x, y)$$

se asigna al punto (x, y) . Un campo escalar puede caracterizarse por sus **curvas de nivel** (o **líneas de contorno**) a lo largo de las cuales el valor de $f(x, y)$ es constante. Por ejemplo, el mapa climático en la figura 4.5 muestra las curvas de nivel de igual presión, llamadas **isobaras**. Las curvas de nivel que representan puntos de igual temperatura en mapas climáticos se llaman **isotermas**, como se muestra en la figura 4.6. Otro uso común de curvas de nivel es la representación de campos de potencial eléctrico. En este tipo de mapa, las curvas de nivel se llaman **líneas equipotenciales**.



Las curvas de nivel muestran las líneas de igual presión (isobaras) medidas en milibares.

Figura 4.5



Las curvas de nivel muestran las líneas de igual temperatura (isotermas) medidas en grados Fahrenheit.

Figura 4.6

Los mapas de contorno suelen usarse para representar regiones de la superficie de la Tierra, donde las curvas de nivel representan la altura sobre el nivel del mar. Este tipo de mapas se llama **mapa topográfico**. Por ejemplo, la montaña mostrada en la figura 4.7 se representa por el mapa topográfico de la figura 4.8.



Figura 4.7



Figura 4.8

Un mapa de contorno representa la variación de z respecto a x y y mediante espacio entre las curvas de nivel. Una separación grande entre las curvas de nivel indica que z cambia lentamente, mientras que un espacio pequeño indica un cambio rápido en z . Además, en un mapa de contorno, es importante elegir valores de c *uniformemente espaciados*, para dar una mejor ilusión tridimensional.

EJEMPLO 3 Dibujar un mapa de contorno

El hemisferio dado por

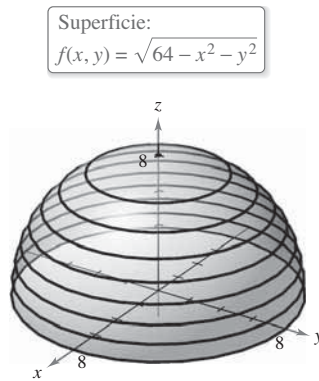
$$f(x, y) = \sqrt{64 - x^2 - y^2}$$

se muestra en la figura 4.9. Dibuje un mapa de contorno de esta superficie utilizando curvas de nivel que correspondan a $c = 0, 1, 2, \dots, 8$.

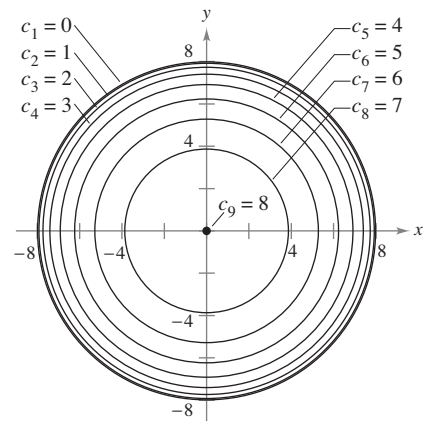
Solución Para cada c , la ecuación dada por $f(x, y) = c$ es un círculo (o un punto) en el plano xy . Por ejemplo, para $c_1 = 0$, la curva de nivel es

$$x^2 + y^2 = 64 \quad \text{Círculo de radio 8}$$

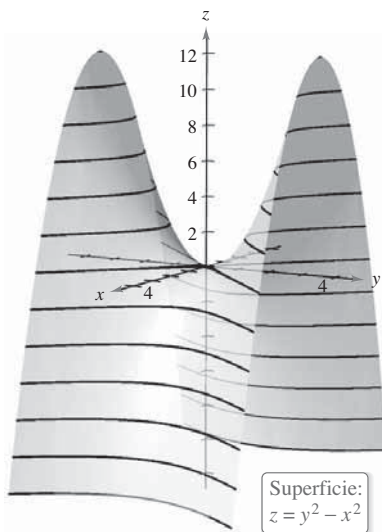
la cual es un círculo de radio 8. La figura 4.10 muestra las nueve curvas de nivel del hemisferio.



Hemisferio.
Figura 4.9



Mapa de contorno.
Figura 4.10



Paraboloide hiperbólico.
Figura 4.11

EJEMPLO 4 Dibujar un mapa de contorno

•••► Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

El paraboloide hiperbólico

$$z = y^2 - x^2$$

se muestra en la figura 4.11. Dibuje un mapa de contorno de esta superficie.

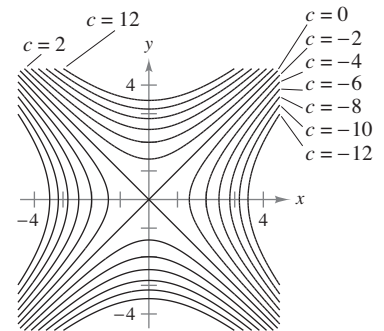
Solución Para cada valor de c , sea $f(x, y) = c$, y dibuje la curva de nivel resultante en el plano xy . Para esta función, cada una de las curvas de nivel ($c \neq 0$) es una hipérbola cuyas asíntotas son las rectas $y = \pm x$. Si $c < 0$, el eje transversal es horizontal. Por ejemplo, la curva de nivel para $c = -4$ está dada por

$$\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1.$$

Si $c > 0$, el eje transversal es vertical. Por ejemplo, la curva de nivel para $c = 4$ está dada por

$$\frac{y^2}{2^2} - \frac{x^2}{2^2} = 1.$$

Si $c = 0$, la curva de nivel es la cónica degenerada representada por las asíntotas que se cortan, como se muestra en la figura 4.12.



Curvas de nivel hiperbólicas (en incrementos de 2).
Figura 4.12

Un ejemplo de una función de dos variables usada en economía es la **función de producción de Cobb-Douglas**. Esta función se utiliza como un modelo para representar el número de unidades producidas al variar las cantidades de trabajo y capital. Si x mide las unidades de trabajo y y mide las unidades de capital, entonces el número de unidades producidas está dado por

$$f(x, y) = Cx^a y^{1-a}$$

donde C y a son constantes, con $0 < a < 1$.

EJEMPLO 5

La función de producción de Cobb-Douglas

Un fabricante de juguetes estima que su función de producción es

$$f(x, y) = 100x^{0.6}y^{0.4}$$

donde x es el número de unidades de trabajo y y es el número de unidades de capital. Compare el nivel de producción cuando $x = 1000$ y $y = 500$ con el nivel de producción cuando $x = 2000$ y $y = 1000$.

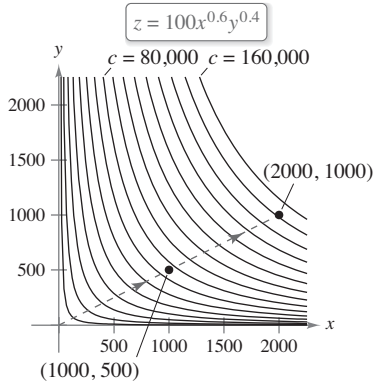
Solución Cuando $x = 1000$ y $y = 500$, el nivel de producción es

$$f(1000, 500) = 100(1000^{0.6})(500^{0.4}) \approx 75,786.$$

Cuando $x = 2000$ y $y = 1000$, el nivel de producción es

$$f(2000, 1000) = 100(2000^{0.6})(1000^{0.4}) = 151,572.$$

Las curvas de nivel de $z = f(x, y)$ se muestran en la figura 4.13. Observe que al doblar ambas x y y , se duplica el nivel de producción (vea el ejercicio 79). ■



Curvas de nivel (con incrementos de 10,000).

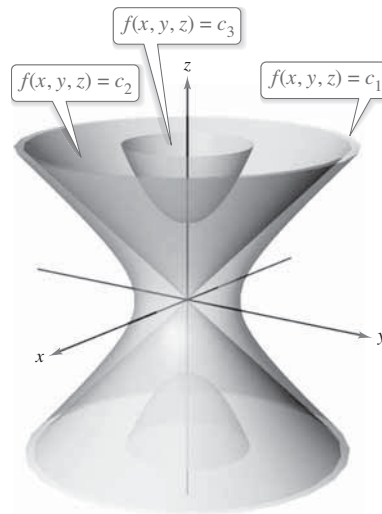
Figura 4.13

Superficies de nivel

El concepto de curva de nivel puede extenderse una dimensión para definir una **superficie de nivel**. Si f es una función de tres variables y c es una constante, la gráfica de la ecuación

$$f(x, y, z) = c$$

es una **superficie de nivel** de la función f , como se muestra en la figura 4.14.



Superficies de nivel de f .

Figura 4.14

EJEMPLO 6 Superficies de nivel

Describa las superficies de nivel de la función

$$f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + z^2.$$

Solución Cada superficie de nivel tiene una ecuación de la forma

$$4x^2 + y^2 + z^2 = c. \quad \text{Ecuación de una superficie de nivel}$$

Por tanto, las superficies de nivel son elipsoides (cuyas secciones transversales paralelas al plano yz son círculos). A medida que c aumenta, los radios de las secciones transversales circulares aumentan según la raíz cuadrada de c . Por ejemplo, las superficies de nivel correspondientes a los valores $c = 0$, $c = 4$ y $c = 16$ son como sigue.

$$4x^2 + y^2 + z^2 = 0 \quad \text{Superficie de nivel para } c = 0 \text{ (un solo punto)}$$

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1 \quad \text{Superficie de nivel para } c = 4 \text{ (elipsoide)}$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{16} = 1 \quad \text{Superficie de nivel para } c = 16 \text{ (elipsoide)}$$

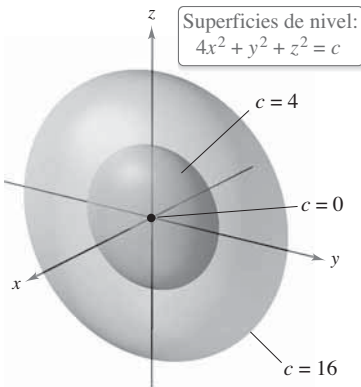


Figura 4.15

Estas superficies de nivel se muestran en la figura 4.15.

Si la función del ejemplo 6 representara la *temperatura* en el punto (x, y, z) , las superficies de nivel mostradas en la figura 4.15 se llamarían **superficies isotermas**.

Gráficas por computadora

El problema de dibujar la gráfica de una superficie en el espacio puede simplificarse usando una computadora. Aunque hay varios tipos de herramientas de graficación tridimensionales, la mayoría utiliza alguna forma de análisis de trazas para dar la impresión de tres dimensiones. Para usar tales herramientas de graficación, por lo general se necesita dar la ecuación de la superficie, la región del plano xy sobre la cual la superficie ha de visualizarse y el número de trazas a considerar. Por ejemplo, para representar gráficamente la superficie dada por

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{1-x^2-y^2}$$

usted podría elegir los límites siguientes para x , y y z .

$$-3 \leq x \leq 3 \quad \text{Límites para } x$$

$$-3 \leq y \leq 3 \quad \text{Límites para } y$$

$$0 \leq z \leq 3 \quad \text{Límites para } z$$

La figura 4.16 muestra una gráfica de esta superficie generada por computadora utilizando 26 trazas paralelas al plano yz . Para realizar el efecto tridimensional, el programa utiliza una rutina de “línea oculta”. Es decir, comienza dibujando las trazas en primer plano (las correspondientes a los valores mayores de x), y después, a medida que se dibuja una nueva traza, el programa determina si mostrará toda o solo parte de la traza siguiente.

Las gráficas en la página siguiente muestran una variedad de superficies que fueron dibujadas por una computadora. Si se dispone de un programa de computadora para dibujo, podrán reproducirse estas superficies. Recuerde también que se pueden visualizar y girar. Estas gráficas rotables están disponibles en *LarsonCalculus.com*.

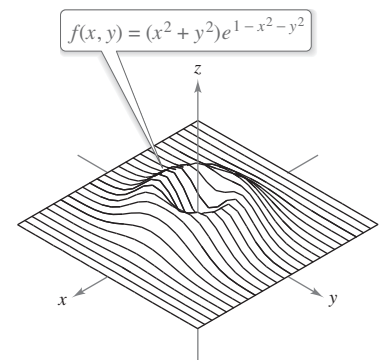
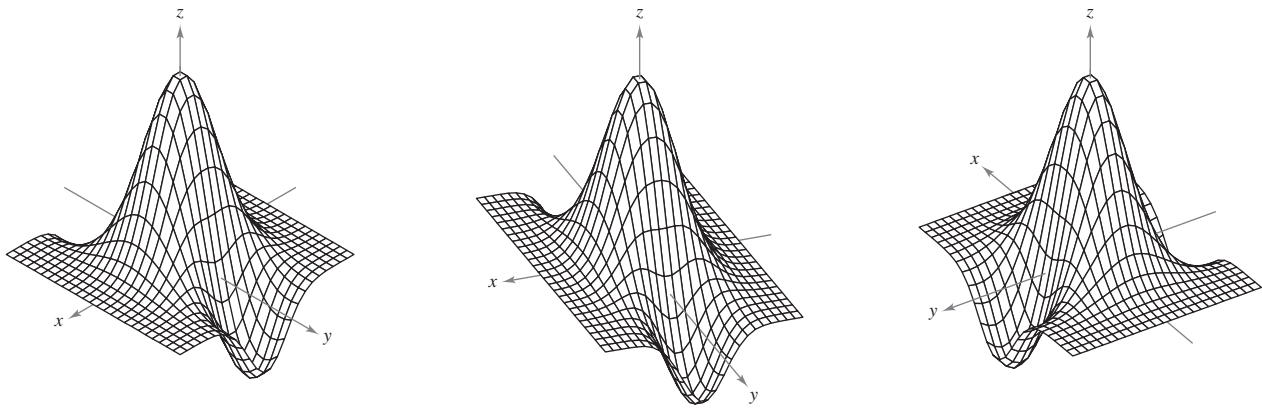
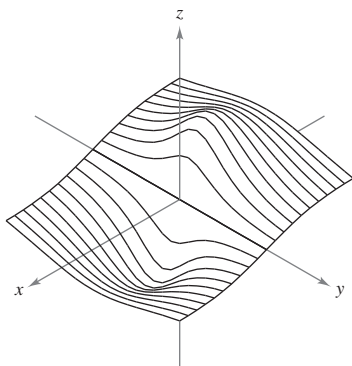


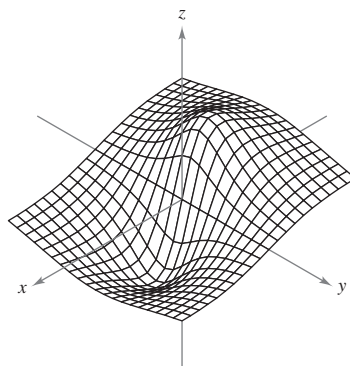
Figura 4.16



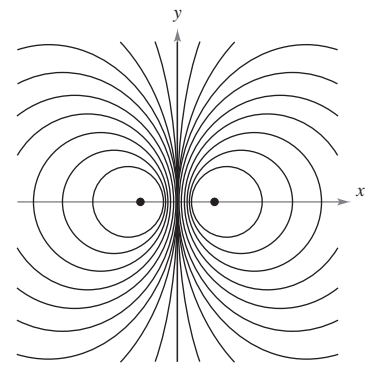
Tres vistas diferentes de la gráfica de $f(x, y) = (2 - y^2 + x^2)e^{1-x^2-(y^2/4)}$



Trazas simples

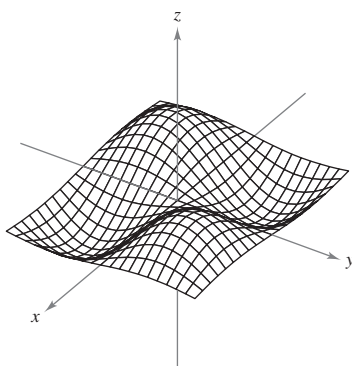


Trazas dobles

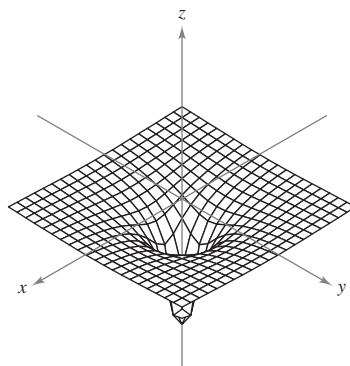


Curvas de nivel

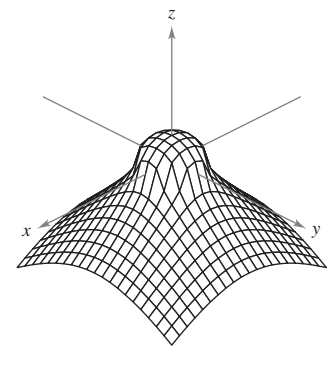
Trazas y curvas de nivel de la gráfica de $f(x, y) = \frac{-4x}{x^2 + y^2 + 1}$



$f(x, y) = \sin x \sin y$



$f(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

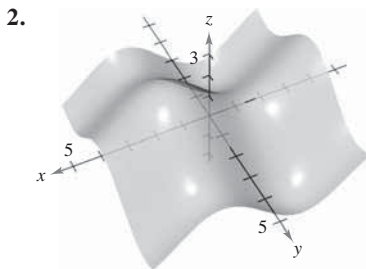
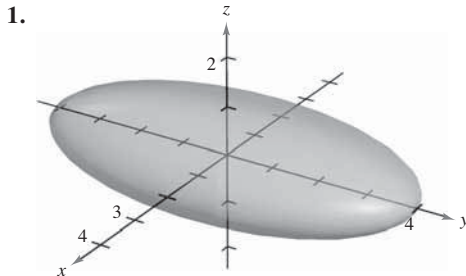


$f(x, y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{\sqrt{|1 - x^2 - y^2|}}$

4.1 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Determinar si una gráfica es una función En los ejercicios 1 y 2, utilice la gráfica para determinar si z es una función de x y de y .



Determinar si una ecuación es una función En los ejercicios 3-6, determine si z es una función de x y de y .

3. $x^2z + 3y^2 - xy = 10$ 4. $xz^2 + 2xy - y^2 = 4$
 5. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$ 6. $z + x \ln y - 8yz = 0$

Evaluar una función En los ejercicios 7-18, encuentre y simplifique los valores de la función.

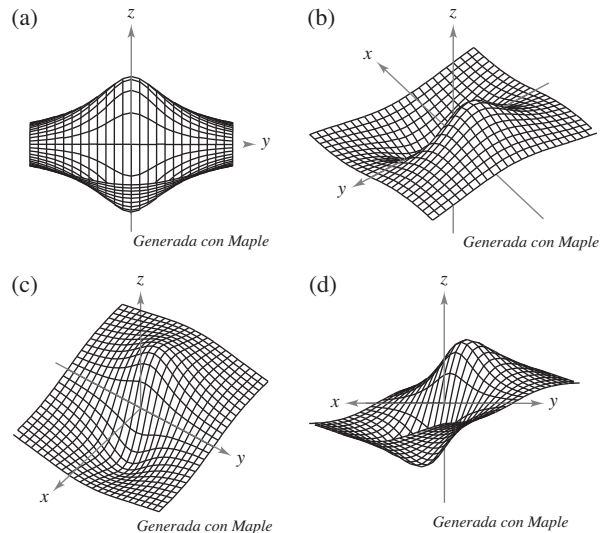
7. $f(x, y) = xy$
 (a) (3, 2) (b) (-1, 4) (c) (30, 5)
 (d) (5, y) (e) (x, 2) (f) (5, t)
8. $f(x, y) = 4 - x^2 - 4y^2$
 (a) (0, 0) (b) (0, 1) (c) (2, 3)
 (d) (1, y) (e) (x, 0) (f) (t, 1)
9. $f(x, y) = xe^y$
 (a) (5, 0) (b) (3, 2) (c) (2, -1)
 (d) (5, y) (e) (x, 2) (f) (t, t)
10. $g(x, y) = \ln|x + y|$
 (a) (1, 0) (b) (0, -1) (c) (0, e)
 (d) (1, 1) (e) (e, e/2) (f) (2, 5)
11. $h(x, y, z) = \frac{xy}{z}$
 (a) (2, 3, 9) (b) (1, 0, 1) (c) (-2, 3, 4) (d) (5, 4, -6)
12. $f(x, y, z) = \sqrt{x + y + z}$
 (a) (0, 5, 4) (b) (6, 8, -3)
 (c) (4, 6, 2) (d) (10, -4, -3)

13. $f(x, y) = x \text{ sen } y$
 (a) (2, $\pi/4$) (b) (3, 1) (c) (-3, $\pi/3$) (d) (4, $\pi/2$)
14. $V(r, h) = \pi r^2 h$
 (a) (3, 10) (b) (5, 2) (c) (4, 8) (d) (6, 4)
15. $g(x, y) = \int_x^y (2t - 3) dt$
 (a) (4, 0) (b) (4, 1) (c) (4, $\frac{3}{2}$) (d) ($\frac{3}{2}$, 0)
16. $g(x, y) = \int_x^y \frac{1}{t} dt$
 (a) (4, 1) (b) (6, 3) (c) (2, 5) (d) ($\frac{1}{2}$, 7)
17. $f(x, y) = 2x + y^2$
 (a) $\frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$ (b) $\frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$
18. $f(x, y) = 3x^2 - 2y$
 (a) $\frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$ (b) $\frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$

Obtener el dominio y rango de una función En los ejercicios 19-30, determine el dominio y el rango de la función.

19. $f(x, y) = x^2 + y^2$ 20. $f(x, y) = e^{xy}$
 21. $g(x, y) = x\sqrt{y}$ 22. $g(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x}}$
 23. $z = \frac{x + y}{xy}$ 24. $z = \frac{-xy}{x - y}$
 25. $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 26. $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$
 27. $f(x, y) = \arccos(x + y)$ 28. $f(x, y) = \arcsen(y/x)$
 29. $f(x, y) = \ln(4 - x - y)$ 30. $f(x, y) = \ln(xy - 6)$


31. **Piénselo** Las gráficas marcadas (a), (b), (c) y (d) son gráficas de la función $f(x, y) = 4x/(x^2 + y^2 + 1)$. Asocie cada gráfica con el punto en el espacio desde el que la superficie es visualizada. Los cuatro puntos son (20, 15, 25), (15, 10, 20), (20, 20, 0) y (20, 0, 0).



- 32. Piénselo** Use la función dada en el ejercicio 31.
- Encuentre el dominio y rango de la función.
 - Identifique los puntos en el plano xy donde el valor de la función es 0.
 - ¿Pasa la superficie por todos los octantes del sistema de coordenadas rectangular? Dé las razones de su respuesta.

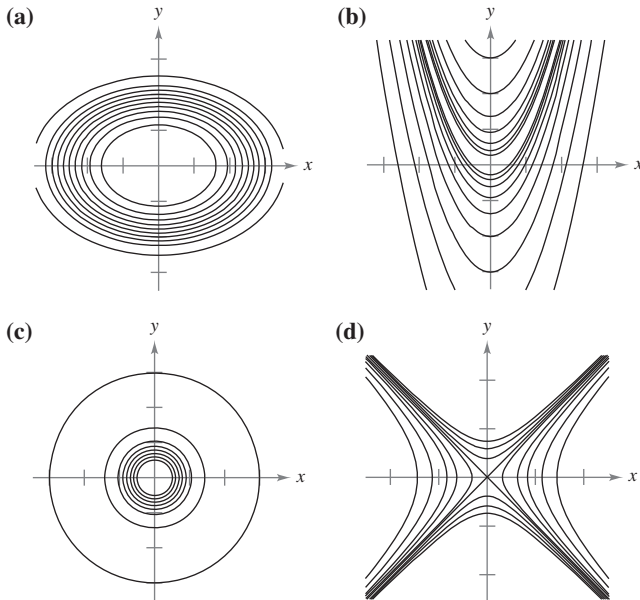
Dibujar una superficie En los ejercicios 33-40, dibuje la superficie dada por la función.

- | | |
|---|---------------------------------------|
| 33. $f(x, y) = 4$ | 34. $f(x, y) = 6 - 2x - 3y$ |
| 35. $f(x, y) = y^2$ | 36. $g(x, y) = \frac{1}{2}y$ |
| 37. $z = -x^2 - y^2$ | 38. $z = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$ |
| 39. $f(x, y) = e^{-x}$ | |
| 40. $f(x, y) = \begin{cases} xy, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & x < 0 \text{ o } y < 0 \end{cases}$ | |

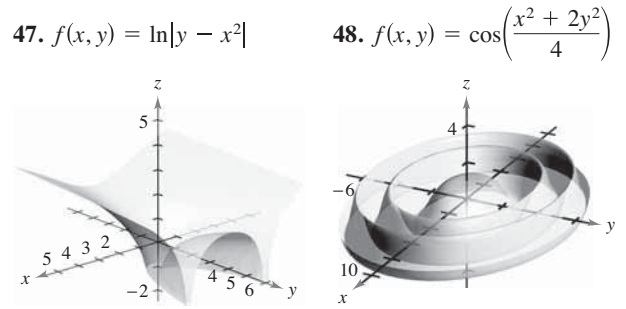
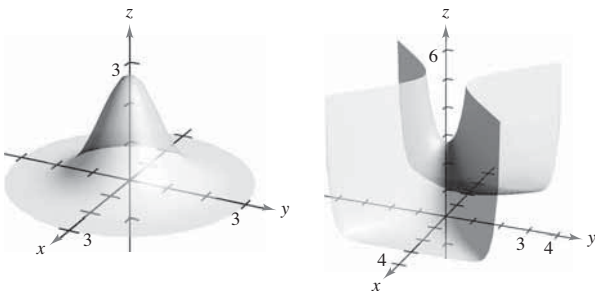
 **Graficar una función usando tecnología** En los ejercicios 41-44, utilice un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente la función.

- | | |
|--------------------------------|---|
| 41. $z = y^2 - x^2 + 1$ | 42. $z = \frac{1}{12}\sqrt{144 - 16x^2 - 9y^2}$ |
| 43. $f(x, y) = x^2e^{(-xy/2)}$ | 44. $f(x, y) = x \text{ sen } y$ |

Relacionar En los ejercicios 45-48, asocie la gráfica de la superficie con uno de los mapas de contorno. [Los mapas de contorno están marcados (a), (b), (c) y (d).]




- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| 45. $f(x, y) = e^{1-x^2-y^2}$ | 46. $f(x, y) = e^{1-x^2+y^2}$ |
|-------------------------------|-------------------------------|



Dibujar un mapa de contorno En los ejercicios 49-56, describa las curvas de nivel de la función. Dibuje las curvas de nivel para los valores dados de c .

- $z = x + y, \quad c = -1, 0, 2, 4$
- $z = 6 - 2x - 3y, \quad c = 0, 2, 4, 6, 8, 10$
- $z = x^2 + 4y^2, \quad c = 0, 1, 2, 3, 4$
- $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \quad c = 0, 1, 2, 3$
- $f(x, y) = xy, \quad c = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 6$
- $f(x, y) = e^{xy/2}, \quad c = 2, 3, 4, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$
- $f(x, y) = x/(x^2 + y^2), \quad c = \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \pm 2$
- $f(x, y) = \ln(x - y), \quad c = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \pm 2$

 **Dibujar curvas de nivel** En los ejercicios 57-60, utilice una herramienta de graficación para representar seis curvas de nivel de la función.

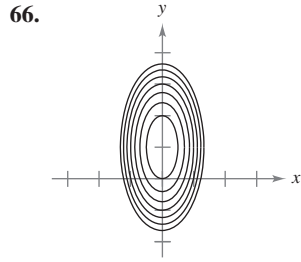
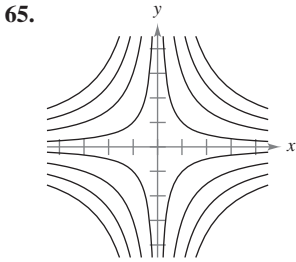
- | | |
|---|--|
| 57. $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$ | 58. $f(x, y) = xy $ |
| 59. $g(x, y) = \frac{8}{1 + x^2 + y^2}$ | 60. $h(x, y) = 3 \text{ sen}(x + y)$ |

DESARROLLO DE CONCEPTOS

- Función de dos variables** ¿Qué es una gráfica de una función de dos variables? ¿Cómo se interpreta geoméricamente? Describa las curvas de nivel.
- Usar curvas de nivel** Todas las curvas de nivel de la superficie dada por $z = f(x, y)$ son círculos concéntricos. ¿Implica esto que la gráfica de f es un hemisferio? Ilustre la respuesta con un ejemplo.
- Crear una función** Construya una función cuyas curvas de nivel sean rectas que pasen por el origen.

- Conjetura** Considere la función $f(x, y) = xy$, para $x \geq 0$ y $y \geq 0$.
 - Trace la gráfica de la superficie dada por f .
 - Conjeture acerca de la relación entre las gráficas de f y $g(x, y) = f(x, y) - 3$. Explique su razonamiento.
 - Conjeture acerca de la relación entre las gráficas de f y $g(x, y) = -f(x, y)$. Explique su razonamiento.
 - Conjeture acerca de la relación entre las gráficas de f y $g(x, y) = \frac{1}{2}f(x, y)$. Explique su razonamiento.
 - Sobre la superficie en el inciso (a), trace la gráfica de $z = f(x, x)$.

Redacción En los ejercicios 65 y 66, utilice las gráficas de las curvas de nivel (valores de c uniformemente espaciados) de la función f para dar una descripción de una posible gráfica de f . ¿Es única la gráfica de f ? Explique su respuesta.



67. **Inversión** En el 2012 se efectuó una inversión de \$1000 al 6% de interés compuesto anual. Suponga que el inversor paga una tasa de impuesto R y que la tasa de inflación anual es I . En el año 2022, el valor V de la inversión en dólares constantes de 2012 es

$$V(I, R) = 1000 \left[\frac{1 + 0.06(1 - R)}{1 + I} \right]^{10}$$

Utilice esta función de dos variables para completar la tabla.

	Tasa de inflación		
Tasa de impuestos	0	0.03	0.05
0			
0.28			
0.35			

68. **Inversión** Se depositan \$5000 en una cuenta de ahorro a una tasa de interés compuesto continuo r (expresado en forma decimal). La cantidad $A(r, t)$ después de t años es

$$A(r, t) = 5000e^{rt}$$

Utilice esta función de dos variables para completar la tabla.

	Número de años			
Tasa	5	10	15	20
0.02				
0.03				
0.04				
0.05				

Dibujar una superficie de nivel En los ejercicios 69-74, dibuje la gráfica de la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ para el valor de c que se especifica.

69. $f(x, y, z) = x - y + z, \quad c = 1$

70. $f(x, y, z) = 4x + y + 2z, \quad c = 4$

71. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad c = 9$

72. $f(x, y, z) = x^2 + \frac{1}{4}y^2 - z, \quad c = 1$

73. $f(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 - z^2, \quad c = 0$

74. $f(x, y, z) = \text{sen } x - z, \quad c = 0$

••• **75. Silvicultura** •••••

La **regla de troncos de Doyle** es uno de los diferentes métodos usados para determinar la producción de madera (en pies tablares) como función de su diámetro d (en pulgadas) y de su altura L (en pies). El número de pies tablares es



$$N(d, L) = \left(\frac{d - 4}{4} \right)^2 L$$

- (a) Determine el número de pies tablares de madera en un tronco de 22 pulgadas de diámetro y 12 pies de altura.
- (b) Encuentre $N(30, 12)$.

76. **Modelo de filas** La cantidad de tiempo promedio que un cliente espera en una fila para recibir un servicio es

$$W(x, y) = \frac{1}{x - y}, \quad x > y$$

donde y es la tasa media de llegadas, expresada como número de clientes por unidad de tiempo, y x es la tasa media de servicio, expresada en las mismas unidades. Evalúe cada una de las siguientes cantidades.

- (a) $W(15, 9)$ (b) $W(15, 13)$
- (c) $W(12, 7)$ (d) $W(5, 2)$

77. **Distribución de temperaturas** La temperatura T (en grados Celsius) en cualquier punto (x, y) de una placa circular de acero de 10 metros de radio es

$$T = 600 - 0.75x^2 - 0.75y^2$$

donde x y y se miden en metros. Dibuje algunas de las curvas isoterma.

78. **Potencial eléctrico** El potencial eléctrico V en cualquier punto (x, y) es

$$V(x, y) = \frac{5}{\sqrt{25 + x^2 + y^2}}$$

Dibuje las curvas equipotenciales de $V = \frac{1}{2}, V = \frac{1}{3}$ y $V = \frac{1}{4}$.

79. **Función de producción de Cobb-Douglas** Utilice la función de producción de Cobb-Douglas (ver ejemplo 5) para demostrar que si el número de unidades de trabajo y el número de unidades de capital se duplican, el nivel de producción también se duplica.

80. **Función de producción de Cobb-Douglas** Demuestre que la función de producción de Cobb-Douglas

$$z = Cx^a y^{1-a}$$

puede reescribirse como

$$\ln \frac{z}{y} = \ln C + a \ln \frac{x}{y}$$

81. **Ley de los gases ideales** De acuerdo con la ley de los gases ideales,

$$PV = kT$$

donde P es la presión, V es el volumen, T es la temperatura (en kelvins) y k es una constante de proporcionalidad. Un tanque contiene 2000 pulgadas cúbicas de nitrógeno a una presión de 26 libras por pulgada cuadrada y una temperatura de 300 K.


- (a) Determine k .
- (b) Expresé P como función de V y T , y describa las curvas de nivel.

82. **Modelar datos** La tabla muestra las ventas netas x (en miles de millones de dólares), los activos totales y (en miles de millones de dólares) y los derechos de los accionistas z (en miles de millones de dólares) para Apple desde 2006 hasta el 2011. (Fuente: Apple Inc.)

Año	2006	2007	2008	2009	2010	2011
x	19.3	24.6	37.5	42.9	65.2	108.2
y	17.2	24.9	36.2	47.5	75.2	116.4
z	10.0	14.5	22.3	31.6	47.8	76.6

Un modelo para estos datos es

$$z = f(x, y) = 0.035x + 0.640y - 1.77.$$

-  (a) Utilizar una herramienta de graficación y el modelo para aproximar z para los valores dados de x y y .
- (b) ¿Cuál de las dos variables en este modelo tiene mayor influencia sobre los derechos de los accionistas? Explique su razonamiento.
- (c) Simplifique la expresión de $f(x, 150)$ e interprete su significado en el contexto del problema.

83. **Meteorología** Los meteorólogos miden la presión atmosférica en milibares. A partir de estas observaciones elaboran mapas climáticos en los que se muestran las curvas de presión atmosférica constante (isobaras) (ver la figura). En el mapa, cuanto más juntas están las isobaras, mayor es la velocidad del viento. Asocie los puntos A , B y C con (a) la mayor presión, (b) la menor presión y (c) la mayor velocidad del viento.

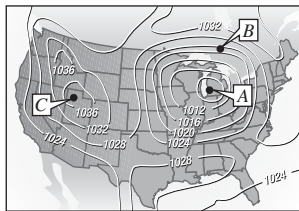


Figura para 83

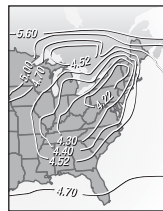


Figura para 84

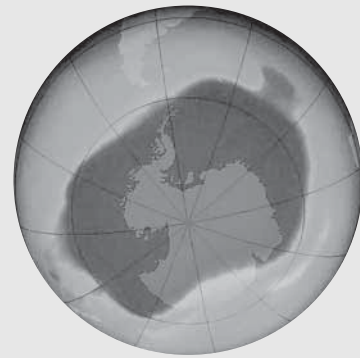
84. **Lluvia ácida** La acidez del agua de lluvia se mide en unidades llamadas pH. Un pH de 7 es neutro, valores menores corresponden a acidez creciente, y valores mayores a alcalinidad creciente. El mapa muestra las curvas de pH constante y da evidencia de que en la dirección en la que sopla el viento de áreas muy industrializadas la acidez ha ido aumentando. Utilice las curvas de nivel en el mapa, para determinar la dirección de los vientos dominantes en el noreste de Estados Unidos.

85. **Costo de construcción** Una caja rectangular abierta por arriba tiene x pies de longitud, y pies de ancho y z pies de alto. Construir la base cuesta \$1.20 por pie cuadrado y construir los lados \$0.75 por pie cuadrado. Expresé el costo C de construcción de la caja en función de x , y y z .



86.

¿CÓMO LO VE? El mapa de contorno mostrado en la figura fue generado por computadora usando una colección de datos mediante instrumentación del satélite. El color se usa para mostrar el “agujero de ozono” en la atmósfera de la Tierra. Las áreas púrpura y azul representan los más bajos niveles de ozono y las áreas verdes representan los niveles más altos. (Fuente: National Aeronautics and Space Administration)



- (a) ¿Corresponden las curvas de nivel a los mismos niveles de ozono espaciados? Explique.
- (b) Describa cómo obtener un mapa de contorno más detallado.

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 87-90, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que demuestre que es falso.

- 87. Si $f(x_0, y_0) = f(x_1, y_1)$, entonces $x_0 = x_1$ y $y_0 = y_1$.
- 88. Si f es una función, entonces $f(ax, ay) = a^2f(x, y)$.
- 89. Una recta vertical puede cortar la gráfica de $z = f(x, y)$ a lo sumo una vez.
- 90. Dos diferentes curvas de nivel de la gráfica de $z = f(x, y)$ pueden intersectarse.

DESAFÍOS DEL EXAMEN PUTNAM

91. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que
- $$f(x, y) + f(y, z) + f(z, x) = 0$$
- para todos los números reales x, y y z . Demuestre que existe una función $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que
- $$f(x, y) = g(x) - g(y)$$
- para todos los números reales x y y .

Este problema fue preparado por el Committee on the Putnam Prize Competition. © The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

4.2 Límites y continuidad

- Entender la definición de una vecindad en el plano.
- Entender y utilizar la definición de límite de una función de dos variables.
- Extender el concepto de continuidad a una función de dos variables.
- Extender el concepto de continuidad a una función de tres variables.

Vecindad en el plano

En esta sección estudiará límites y continuidad de funciones de dos o tres variables. La sección comienza con funciones de dos variables. Al final de la sección, los conceptos se extienden a funciones de tres variables.

Su estudio del límite de una función de dos variables inicia definiendo el análogo bidimensional de un intervalo en la recta real. Utilizando la fórmula para la distancia entre dos puntos

$$(x, y) \quad \text{y} \quad (x_0, y_0)$$

en el plano, puede definir la **vecindad** δ de (x_0, y_0) como el **disco** con radio $\delta > 0$, centrado en (x_0, y_0)

$$\{(x, y): \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}$$

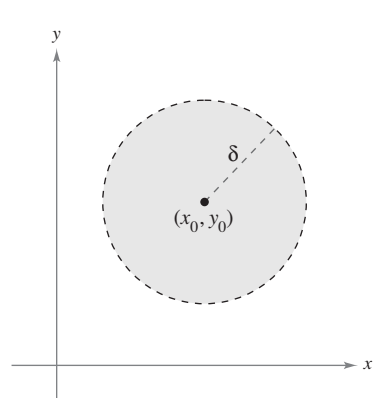
Disco abierto

como se muestra en la figura 4.17. Cuando esta fórmula contiene el signo de desigualdad *menor que*, al disco se le llama **abierto**, y cuando contiene el signo de desigualdad *menor o igual que*, al disco se le llama **cerrado**. Esto corresponde al uso de $<$ y \leq al definir intervalos abiertos y cerrados.

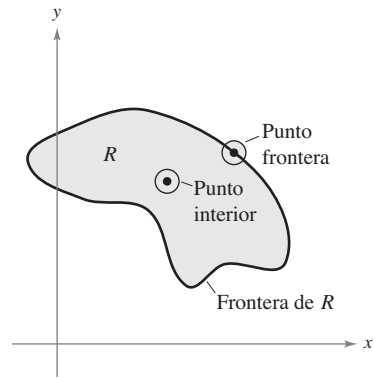


SONYA KOVALEVSKY (1850-1891)

Gran parte de la terminología usada para definir límites y continuidad de una función de dos o tres variables la introdujo el matemático alemán Karl Weierstrass (1815-1897). El enfoque riguroso de Weierstrass a los límites y a otros temas en cálculo le valió la reputación de "padre del análisis moderno". Weierstrass era un maestro excelente. Una de sus alumnas más conocidas fue la matemática rusa Sonya Kovalevsky, quien aplicó muchas de las técnicas de Weierstrass a problemas de la física matemática y se convirtió en una de las primeras mujeres aceptadas como investigadoras matemáticas.



Un disco abierto.
Figura 4.17



Puntos interior y frontera de una región R .
Figura 4.18

Un punto (x_0, y_0) en una región del plano R es un **punto interior** si existe un entorno δ que esté contenido completamente en R , como se muestra en la figura 4.18. Si todo punto de R es un punto interior, entonces R es una **región abierta**. Un punto (x_0, y_0) es un **punto frontera** de R si todo disco abierto centrado en (x_0, y_0) contiene puntos dentro de R y puntos fuera de R . Por definición, una región debe contener sus puntos interiores, pero no necesita contener sus puntos frontera. Si una región contiene todos sus puntos frontera, la región es **cerrada**. Una región que contiene algunos, pero no todos, sus puntos frontera no es ni abierta ni cerrada.

■ **PARA INFORMACIÓN ADICIONAL** Para más información acerca de Sonya Kovalevsky, vea el artículo "S. Kovalevsky: A Mathematical Lesson", de Karen D. Rappaport, en *The American Mathematical Monthly*. Para ver este artículo, visite MathArticles.com.

Límite de una función de dos variables

Definición del límite de una función de dos variables

Sea f una función de dos variables definidas, excepto posiblemente en (x_0, y_0) , en un disco centrado en (x_0, y_0) , y sea L un número real. Entonces

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

Si a cada $\varepsilon > 0$ le corresponde un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta.$$

Gráficamente, la definición del límite de una función implica que para todo punto $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ en el disco de radio δ , el valor $f(x, y)$ está entre $L + \varepsilon$ y $L - \varepsilon$, como se muestra en la figura 4.19.

La definición del límite de una función en dos variables es similar a la definición del límite de una función en una sola variable, pero existe una diferencia importante. Para determinar si una función en una sola variable tiene límite, usted solo necesita ver que se aproxime al límite por ambas direcciones: por la derecha y por la izquierda. Si la función se aproxima al mismo límite por la derecha y por la izquierda, puede concluir que el límite existe. Sin embargo, en el caso de una función de dos variables,

$$(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$$

la expresión significa que el punto puede aproximarse al punto por cualquier dirección. Si el valor de

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$$

no es el mismo al aproximarse por cualquier **trayectoria** a (x_0, y_0) el límite no existe.

EJEMPLO 1

Verificar un límite a partir de la definición

Demuestre que $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x = a$.

Solución Sea $f(x, y) = x$ y $L = a$. Necesita demostrar que para cada $\varepsilon > 0$, existe un entorno δ de (a, b) tal que

$$|f(x, y) - L| = |x - a| < \varepsilon$$

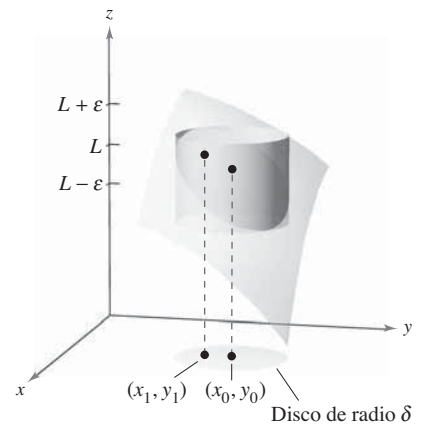
siempre que $(x, y) \neq (a, b)$ se encuentre en el entorno. Primero puede observar que

$$0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} < \delta$$

implica que

$$\begin{aligned} |f(x, y) - a| &= |x - a| \\ &= \sqrt{(x - a)^2} \\ &\leq \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} \\ &< \delta. \end{aligned}$$

Así que puede elegir $\delta = \varepsilon$ y el límite queda verificado. ■



Para todo (x, y) en el círculo de radio δ , el valor de $f(x, y)$ se encuentra entre $L + \varepsilon$ y $L - \varepsilon$.

Figura 4.19

Los límites de funciones de varias variables tienen las mismas propiedades respecto a la suma, diferencia, producto y cociente que los límites de funciones de una sola variable. Algunas de estas propiedades se utilizan en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 Calcular un límite

Calcule

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{5x^2y}{x^2 + y^2}.$$

Solución Usando las propiedades de los límites de productos y de sumas, obtiene

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} 5x^2y = 5(1^2)(2) = 10$$

y

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (x^2 + y^2) = (1^2 + 2^2) = 5.$$

Como el límite de un cociente es igual al cociente de los límites (y el denominador no es 0), tiene

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{5x^2y}{x^2 + y^2} = \frac{10}{5} = 2.$$

EJEMPLO 3 Verificar un límite

Calcule $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5x^2y}{x^2 + y^2}.$

Solución En este caso, los límites del numerador y del denominador son ambos 0, por tanto no puede determinar la existencia (o inexistencia) del límite tomando los límites del numerador y el denominador por separado y dividiendo después. Sin embargo, por la gráfica de f (figura 4.20), parece razonable pensar que el límite pueda ser 0. En consecuencia, puede intentar aplicar la definición de límite a $L = 0$. Primero, debe observar que

$$|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

y

$$\frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq 1.$$

Entonces, en una vecindad δ de $(0, 0)$, tiene que,

$$0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$$

y se tiene que para $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\begin{aligned} |f(x, y) - 0| &= \left| \frac{5x^2y}{x^2 + y^2} \right| \\ &= 5|y| \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} \right) \\ &\leq 5|y| \\ &\leq 5\sqrt{x^2 + y^2} \\ &< 5\delta. \end{aligned}$$

Por tanto, puede elegir $\delta = \varepsilon/5$ y concluir que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{5x^2y}{x^2 + y^2} = 0.$$

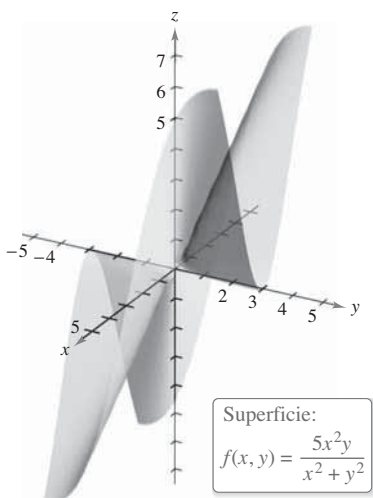
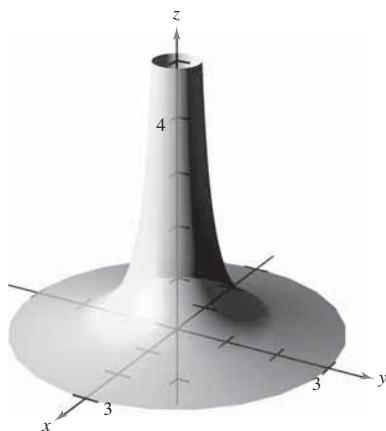


Figura 4.20



$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2}$ no existe.

Figura 4.21

Con algunas funciones es fácil reconocer que el límite no existe. Por ejemplo, está claro que el límite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2}$$

no existe porque el valor de $f(x, y)$ crece sin tope cuando (x, y) tiende a $(0, 0)$ por *cualquier* trayectoria (vea la figura 4.21).

Con otras funciones no es tan fácil reconocer que un límite no existe. Así, el siguiente ejemplo describe un caso en el que el límite no existe, ya que la función se aproxima a valores diferentes a lo largo de trayectorias diferentes.

EJEMPLO 4 Un límite que no existe

•••▶ Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Demuestre que el siguiente límite no existe.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)^2$$

Solución El dominio de la función

$$f(x, y) = \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)^2$$

consta de todos los puntos en el plano xy con excepción del punto $(0, 0)$. Para demostrar que el límite no existe cuando (x, y) se aproxima a $(0, 0)$, considere aproximaciones a $(0, 0)$ a lo largo de dos “trayectorias” diferentes, como se muestra en la figura 4.22. A lo largo del eje x , todo punto es de la forma

$$(x, 0)$$

y el límite a lo largo de esta trayectoria es

$$\lim_{(x,0) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^2 - 0^2}{x^2 + 0^2} \right)^2 = \lim_{(x,0) \rightarrow (0,0)} 1^2 = 1. \quad \text{Límite a lo largo del eje } x$$

Sin embargo, si (x, y) se aproxima a $(0, 0)$ a lo largo de la recta $y = x$, se obtiene

$$\lim_{(x,x) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^2 - x^2}{x^2 + x^2} \right)^2 = \lim_{(x,x) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{0}{2x^2} \right)^2 = 0. \quad \text{Límite a lo largo de } y = x$$

Esto significa que en cualquier disco abierto centrado en $(0, 0)$ existen puntos (x, y) en los que f toma el valor 1 y otros puntos en los que asume el valor 0. Por ejemplo,

$$f(x, y) = 1$$

en los puntos $(1, 0)$, $(0.1, 0)$, $(0.01, 0)$ y $(0.001, 0)$, y

$$f(x, y) = 0$$

en $(1, 1)$, $(0.1, 0.1)$, $(0.01, 0.01)$ y $(0.001, 0.001)$. Por tanto, f no tiene límite cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

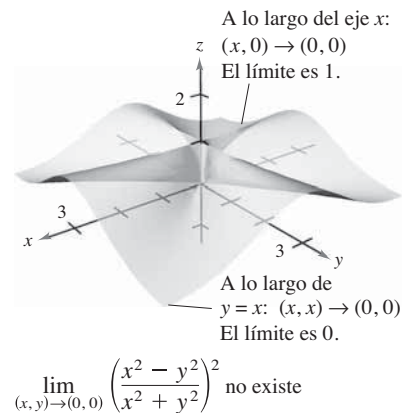


Figura 4.22

En el ejemplo 4 puede concluir que el límite no existe, ya que se encuentran dos trayectorias que dan límites diferentes. Sin embargo, si dos trayectorias hubieran dado el mismo límite, *no podría* concluir que el límite existe. Para llegar a tal conclusión, debe demostrar que el límite es el mismo para *todas* las aproximaciones posibles

Continuidad de una función de dos variables

En el ejemplo 2, observe que límite de $f(x, y) = 5x^2y/(x^2 + y^2)$ cuando $(x, y) \rightarrow (1, 2)$ puede calcularse por sustitución directa. Es decir, el límite es $f(1, 2) = 2$. En tales casos, se dice que la función es **continua** en el punto $(1, 2)$.



COMENTARIO Esta definición de continuidad puede extenderse a *puntos frontera* de la región abierta R , considerando un tipo especial de límite en el que (x, y) solo se permite tender hacia (x_0, y_0) a lo largo de trayectorias que están en la región.

Definición de continuidad de una función de dos variables

Una función f de dos variables es **continua en un punto** (x_0, y_0) de una región abierta R si $f(x_0, y_0)$ es igual al límite de $f(x, y)$, cuando (x, y) tiende a (x_0, y_0) . Es decir,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

La función f es **continua en la región abierta** R si es continua en todo punto de R .

En el ejemplo 3 se demostró que la función

$$f(x, y) = \frac{5x^2y}{x^2 + y^2}$$

no es continua en $(0, 0)$. Sin embargo, como el límite en este punto existe, usted puede eliminar la discontinuidad definiendo el valor de f en $(0, 0)$ igual a su límite. Tales discontinuidades se llaman **removibles**. En el ejemplo 4 se demostró que la función

$$f(x, y) = \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)^2$$

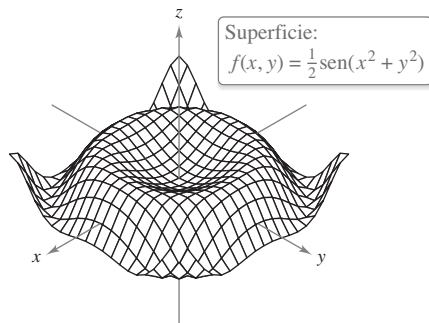
tampoco es continua en $(0, 0)$, pero esta discontinuidad es **no removible**.

TEOREMA 4.1 Funciones continuas de dos variables

Si k es un número real y f y g son funciones continuas en (x_0, y_0) , entonces las funciones siguientes son continuas en (x_0, y_0) .

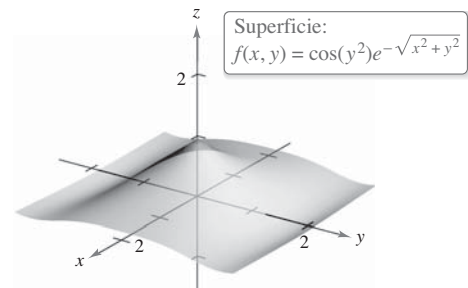
- | | |
|---------------------------|--|
| 1. Múltiplo escalar: kf | 2. Suma y diferencia: $f \pm g$ |
| 3. Producto: fg | 4. Cociente: $f/g, g(x_0, y_0) \neq 0$ |

El teorema 4.1 establece la continuidad de las funciones *polinomiales* y *racionales* en todo punto de su dominio. La continuidad de otros tipos de funciones puede extenderse de manera natural de una a dos variables. Por ejemplo, las funciones cuyas gráficas se muestran en las figuras 4.23 y 4.24 son continuas en todo punto del plano.



La función f es continua en todo punto del plano.

Figura 4.23



La función f es continua en todo punto del plano.

Figura 4.24

El siguiente teorema establece las condiciones bajo las cuales una función compuesta es continua.

TEOREMA 4.2 Continuidad de una función compuesta

Si h es continua en (x_0, y_0) y g es continua en $h(x_0, y_0)$, entonces la función compuesta por $(g \circ h)(x, y) = g(h(x, y))$ es continua en (x_0, y_0) . Es decir,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(h(x,y)) = g(h(x_0,y_0)).$$

En el teorema 4.2 hay que observar que h es una función de dos variables, mientras que g es una función de una variable.

EJEMPLO 5 Analizar la continuidad

Analice la continuidad de cada función

a. $f(x, y) = \frac{x - 2y}{x^2 + y^2}$ b. $g(x, y) = \frac{2}{y - x^2}$

Solución

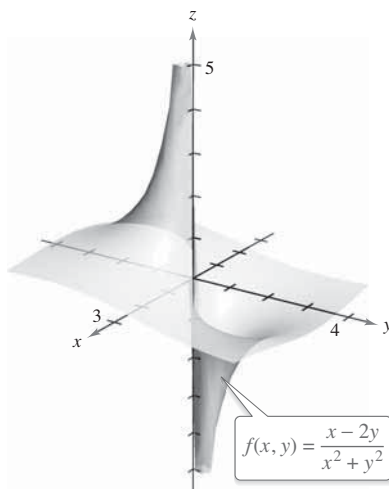
a. Como una función racional es continua en todo punto de su dominio, puede concluir que es continua en todo punto del plano xy , excepto en $(0, 0)$, como se muestra en la figura 4.25.

b. La función dada por

$$g(x, y) = \frac{2}{y - x^2}$$

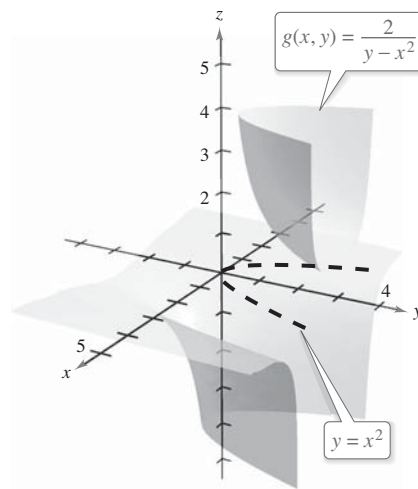
es continua, excepto en los puntos en los cuales el denominador es 0, que está dado por $y - x^2 = 0$.

Por tanto, puede concluir que la función es continua en todos los puntos, excepto en los puntos en que se encuentra la parábola $y = x^2$. En el interior de esta parábola se tiene $y > x^2$, y la superficie representada por la función se encuentra sobre el plano xy , como se muestra en la figura 4.26. En el exterior de la parábola $y < x^2$, y la superficie se encuentra debajo del plano xy .



La función f no es continua en $(0, 0)$.

Figura 4.25



La función g no es continua en la parábola $y = x^2$.

Figura 4.26

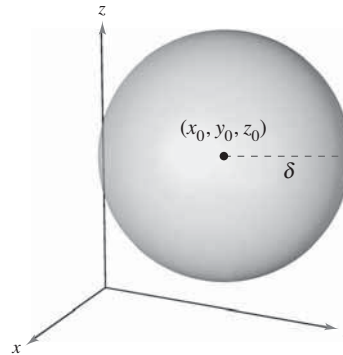
Continuidad de una función de tres variables

Las definiciones anteriores de límites y continuidad pueden extenderse a funciones de tres variables, considerando los puntos (x, y, z) dentro de la *esfera abierta*

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < \delta^2.$$

Esfera abierta

El radio de esta esfera es δ , y la esfera está centrada en (x_0, y_0, z_0) , como se muestra en la figura 4.27.



Esfera abierta en el espacio.

Figura 4.27

Un punto (x_0, y_0, z_0) en una región R en el espacio es un **punto interior** de R si existe una esfera δ centrada en (x_0, y_0, z_0) que está contenida completamente en R . Si todo punto de R es un punto interior, entonces se dice que R es una región **abierta**.

Definición de continuidad de una función de tres variables

Una función de tres variables es **continua en un punto** (x_0, y_0, z_0) de una región abierta R si $f(x_0, y_0, z_0)$ está definido y es igual al límite de $f(x, y, z)$ cuando (x, y, z) se aproxima a (x_0, y_0, z_0) . Es decir,

$$\lim_{(x, y, z) \rightarrow (x_0, y_0, z_0)} f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0).$$

La función f es **continua en una región abierta** R si es continua en todo punto de R .

EJEMPLO 6

Verificar la continuidad de una función de tres variables

Analice la continuidad de

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 - z}.$$

Solución La función f es continua, excepto en los puntos en los que el denominador es igual a 0, que están dados por la ecuación

$$x^2 + y^2 - z = 0.$$

Por lo que f es continua en cualquier punto del espacio, excepto en los puntos del paraboloides

$$z = x^2 + y^2.$$

4.2 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Comprobar un límite a partir de su definición En los ejercicios 1-4, utilice la definición de límite de una función de dos variables para verificar el límite

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} x = 1$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (4,-1)} x = 4$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-3)} y = -3$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} y = b$

Usar las propiedades de límites En los ejercicios 5-8, encuentre el límite indicado utilizando los límites

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = 4 \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) = 3.$$

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x,y) - g(x,y)]$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \left[\frac{5f(x,y)}{g(x,y)} \right]$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x,y)g(x,y)]$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \left[\frac{f(x,y) + g(x,y)}{f(x,y)} \right]$

Límites y continuidad En los ejercicios 9-22, calcule el límite y analice la continuidad de la función.

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} (2x^2 + y)$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x + 4y + 1)$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} e^{xy}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,4)} \frac{x+y}{x^2+1}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{x}{y}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} \frac{x+y}{x-y}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy}{x^2+y^2}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x}{\sqrt{x+y}}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (\pi/4, 2)} y \cos xy$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (2\pi, 4)} \operatorname{sen} \frac{x}{y}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{\operatorname{arcsen} xy}{1-xy}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{\operatorname{arccos}(x/y)}{1+xy}$
- $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,3,4)} \sqrt{x+y+z}$
- $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (-2,1,0)} xe^{yz}$

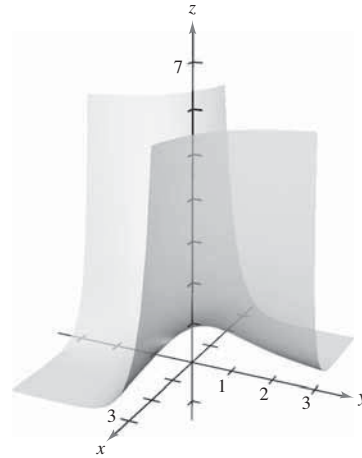
Obtener un límite En los ejercicios 23-34, encuentre el límite (si existe). Si el límite no existe, explique por qué.

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy-1}{1+xy}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-1)} \frac{x^2y}{1+xy^2}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x+y}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^2y^2}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{x-y-1}{\sqrt{x-y}-1}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x^2+y}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x^2-y^2}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{(x^2+1)(y^2+1)}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \ln(x^2+y^2)$
- $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy+yz+xz}{x^2+y^2+z^2}$

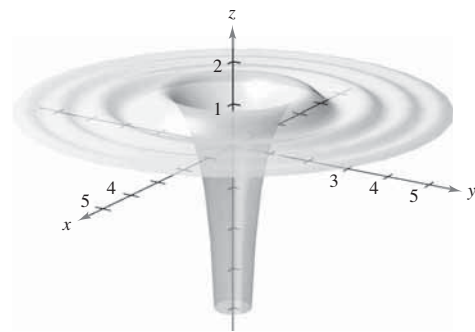
$$34. \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy + yz^2 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Continuidad En los ejercicios 37 y 38, analice la continuidad de la función y evalúe el límite (si existe) cuando $(x,y) \rightarrow (0,0)$.

$$35. f(x,y) = e^{xy}$$



$$36. f(x,y) = 1 - \frac{\cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$



Límite y continuidad En los ejercicios 37-40, utilice una herramienta de graficación para elaborar una tabla que muestre los valores de los puntos que se especifican. Utilice el resultado para formular una conjetura sobre el límite de $f(x,y)$ cuando $(x,y) \rightarrow (0,0)$. Determine analíticamente si el límite existe y analice la continuidad de la función.

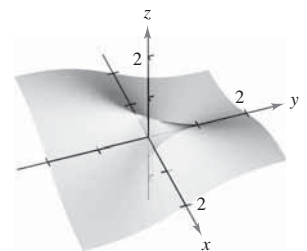
$$37. f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Trayectoria: $y = 0$

Puntos: $(1,0), (0.5,0),$
 $(0.1,0), (0.01,0),$
 $(0.001,0)$

Trayectoria: $y = x$

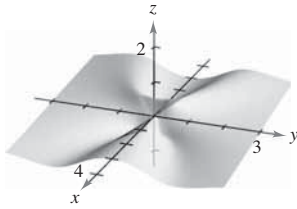
Puntos: $(1,1), (0.5,0.5),$
 $(0.1,0.1), (0.01,0.01),$
 $(0.001,0.001)$



38. $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$

Trayectoria: $x = y^2$

- Puntos: (1, 1), (0.25, 0.5),
(0.01, 0.1),
(0.0001, 0.01),
(0.000001, 0.001)



Trayectoria: $x = -y^2$

- Puntos: (-1, 1), (-0.25, 0.5),
(-0.01, 0.1),
(-0.0001, 0.01),
(-0.000001, 0.001)

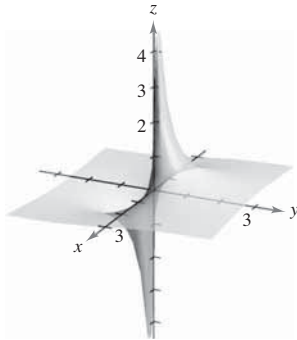
39. $f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$

Trayectoria: $y = 0$

- Puntos: (1, 0), (0.5, 0),
(0.1, 0), (0.01, 0),
(0.001, 0)

Trayectoria: $y = x$

- Puntos: (1, 1), (0.5, 0.5),
(0.1, 0.1),
(0.01, 0.01),
(0.001, 0.001)



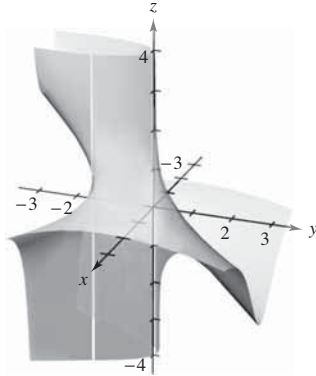
40. $f(x, y) = \frac{2x - y^2}{2x^2 + y}$

Trayectoria: $y = 0$

- Puntos: (1, 0), (0.25, 0),
(0.01, 0),
(0.001, 0),
(0.000001, 0)

Trayectoria: $y = x$

- Puntos: (1, 1), (0.25, 0.25),
(0.01, 0.01),
(0.001, 0.001),
(0.0001, 0.0001)



Comparar la continuidad En los ejercicios 41 y 42, analice la continuidad de las funciones f y g . Explique cualquier diferencia.

41. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

42. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2xy^2 + y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2xy^2 + y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Determinar un límite usando coordenadas polares En los ejercicios 43-48, utilice coordenadas polares para hallar el límite. [Sugerencia: Sea $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$, y observe que $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ implica $r \rightarrow 0$.]

43. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$

44. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

45. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$

46. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

47. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \cos(x^2 + y^2)$

48. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sin \sqrt{x^2 + y^2}$

Determinar un límite usando coordenadas polares En los ejercicios 49-52, use coordenadas polares y la regla de L'Hôpital para encontrar el límite.

49. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

50. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

51. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

52. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$

Continuidad En los ejercicios 53-58, analice la continuidad de la función.

53. $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

54. $f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y^2 - 4}$

55. $f(x, y, z) = \frac{\sin z}{e^x + e^y}$

56. $f(x, y, z) = xy \sin z$

57. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{xy}, & xy \neq 0 \\ 1, & xy = 0 \end{cases}$

58. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 - y^2)}{x^2 - y^2}, & x^2 \neq y^2 \\ 1, & x^2 = y^2 \end{cases}$

Continuidad de una función compuesta En los ejercicios 59-62, analice la continuidad de la función compuesta $f \circ g$.

59. $f(t) = t^2$

60. $f(t) = \frac{1}{t}$

$g(x, y) = 2x - 3y$

$g(x, y) = x^2 + y^2$

61. $f(t) = \frac{1}{t}$

62. $f(t) = \frac{1}{1 - t}$

$g(x, y) = 2x - 3y$

$g(x, y) = x^2 + y^2$

Determinar un límite En los ejercicios 63-68, halle cada límite.

(a) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$

(b) $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$

63. $f(x, y) = x^2 - 4y$

64. $f(x, y) = x^2 + y^2$

65. $f(x, y) = \frac{x}{y}$

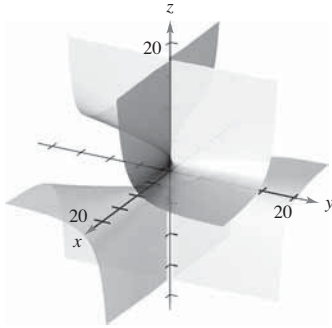
66. $f(x, y) = \frac{1}{x + y}$

67. $f(x, y) = 3x + xy - 2y$

68. $f(x, y) = \sqrt{y}(y + 1)$

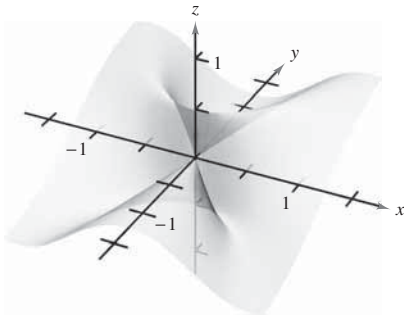
¿Verdadero o falso? En los ejercicios 69-72, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que demuestre que es falso.

69. Si $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow 0} f(x,0) = 0$.
70. Si $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(0,y) = 0$, entonces $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$.
71. Si f es continua para todo x y para todo y distintos de cero, y $f(0,0) = 0$, entonces $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$.
72. Si g y h son funciones continuas de x y y , y $f(x,y) = g(x) + h(y)$, entonces f es continua.
73. **Límite** Considere $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{xy}$ (vea la figura).



- (a) Determine el límite (si es posible) a lo largo de toda recta de la forma $y = ax$.
- (b) Determine el límite (si es posible) a lo largo de la parábola $y = x^2$.
- (c) ¿Existe el límite? Explique su respuesta.

74. **Límite** Considere $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ (vea la figura).



- (a) Determine el límite (si es posible) a lo largo de toda recta de la forma $y = ax$.
- (b) Determine el límite (si es posible) a lo largo de la parábola $y = x^2$.
- (c) ¿Existe el límite? Explique su respuesta.

Determinar un límite usando coordenadas esféricas En los ejercicios 75 y 76, utilice las coordenadas esféricas para encontrar el límite. [Sugerencia: Tome $x = \rho \sin \phi \cos \theta$, $y = \rho \sin \phi \sin \theta$ y $z = \rho \cos \theta$, y observe que $(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)$ es equivalente a $\rho \rightarrow 0^+$.]

75.
$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

76.
$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \tan^{-1} \left[\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \right]$$

77. **Obtener un límite** Halle el límite siguiente.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \tan^{-1} \left[\frac{x^2 + 1}{x^2 + (y-1)^2} \right]$$

78. **Continuidad** Dada la función

$$f(x,y) = xy \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)$$

defina $f(0,0)$ de manera que f sea continua en el origen.

79. **Demostración** Demuestre que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x,y) + g(x,y)] = L_1 + L_2$$

donde $f(x,y)$ tiende a L_1 y $g(x,y)$ se aproxima a L_2 cuando $(x,y) \rightarrow (0,0)$.

80. **Demostración** Demuestre que si f es continua y $f(a,b) < 0$, entonces existe una vecindad δ de (a,b) tal que $f(x,y) < 0$ para todo punto (x,y) en la vecindad.

DESARROLLO DE CONCEPTOS

81. **Límite** Defina el límite de una función de dos variables. Describa un método que demuestre que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$$

no existe.

82. **Continuidad** Establezca la definición de continuidad de una función de dos variables.

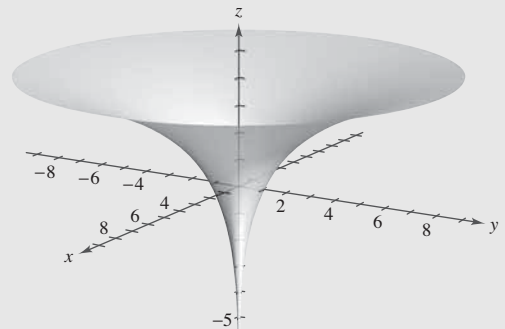
83. **Límites y evaluación de funciones**

(a) Si $f(2,3) = 4$, ¿puede concluir algo acerca de $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} f(x,y)$? Dé razones que justifiquen su respuesta.

(b) Si $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} f(x,y) = 4$, ¿puede concluir algo acerca de $f(2,3)$? Dé razones que justifiquen su respuesta.



84. ¿CÓMO LO VE? En la figura se muestra la gráfica de $f(x,y) = \ln x^2 + y^2$? A partir de la gráfica, ¿puede inferir que existe el límite en cada punto?



- (a) $(-1, -1)$ (b) $(0, 3)$
 (c) $(0, 0)$ (d) $(2, 0)$

4.3 Derivadas parciales

- Hallar y utilizar las derivadas parciales de una función de dos variables.
- Hallar y utilizar las derivadas parciales de una función de tres o más variables.
- Hallar derivadas parciales de orden superior de una función de dos o tres variables.

Derivadas parciales de una función de dos variables

En aplicaciones de funciones de varias variables suele surgir la pregunta: ¿“Cómo afectaría al valor de una función un cambio en una de sus variables independientes”? Usted puede contestar esta pregunta considerando cada una de las variables independientes por separado. Por ejemplo, para determinar el efecto de un catalizador en un experimento, un químico podría repetir el experimento varias veces usando cantidades distintas de catalizador, mientras mantiene constantes las otras variables, como temperatura y presión. Para determinar la velocidad o la razón de cambio de una función f respecto a una de sus variables independientes puede utilizar un procedimiento similar. A este proceso se le llama **derivación parcial**, y el resultado se llama **derivada parcial** de f respecto a la variable independiente elegida.



JEAN LE ROND D'ALEMBERT (1717-1783)

La introducción de las derivadas parciales ocurrió años después del trabajo sobre el cálculo de Newton y Leibniz. Entre 1730 y 1760, Leonhard Euler y Jean Le Rond d'Alembert publicaron por separado varios artículos sobre dinámica, en los cuales establecieron gran parte de la teoría de las derivadas parciales. Estos artículos utilizaban funciones de dos o más variables para estudiar problemas de equilibrio, movimiento de fluidos y cuerdas vibrantes.

Consulte LarsonCalculus.com para leer más acerca de esta biografía.

Definición de las derivadas parciales de una función de dos variables

Si $z = f(x, y)$, las **primeras derivadas parciales** de f con respecto a x y y son las funciones f_x y f_y definidas por

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad \text{Derivada parcial con respecto a } x$$

y

$$f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \quad \text{Derivada parcial con respecto a } y$$

siempre y cuando el límite exista.

Esta definición indica que si $z = f(x, y)$, entonces para hallar f_x , *considere y constante* y derive respecto a x . De manera similar, para calcular f_y , *considere x constante* y derive respecto a y .

EJEMPLO 1

Hallar las derivadas parciales

- a.** Para hallar f_x para $f(x, y) = 3x - x^2y^2 + 2x^3y$, considere y constante y derive respecto a x .

$$f_x(x, y) = 3 - 2xy^2 + 6x^2y \quad \text{Derivada parcial con respecto a } x$$

Para hallar f_y , considere x constante y derive respecto a y .

$$f_y(x, y) = -2x^2y + 2x^3 \quad \text{Derivada parcial con respecto a } y$$

- b.** Para hallar f_x para $f(x, y) = (\ln x)(\sin x^2y)$, considere y constante y derive respecto a x .

$$f_x(x, y) = (\ln x)(\cos x^2y)(2xy) + \frac{\sin x^2y}{x} \quad \text{Derivada parcial respecto a } x$$

Para hallar f_y , considere x constante y derive respecto a y .

$$f_y(x, y) = (\ln x)(\cos x^2y)(x^2) \quad \text{Derivada parcial respecto a } y$$

COMENTARIO La notación $\partial z/\partial x$ se lee como “la derivada parcial de z respecto a x ” y $\partial z/\partial y$ se lee como “la derivada parcial de z respecto a y ”.

Notación para las primeras derivadas parciales

Para $z = f(x, y)$, las derivadas parciales f_x y f_y se denotan por

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = f_x(x, y) = z_x = \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{Derivada parcial respecto a } x$$

y

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = f_y(x, y) = z_y = \frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{Derivada parcial respecto a } y$$

Las primeras derivadas parciales evaluadas en el punto (a, b) se denotan por

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(a, b)} = f_x(a, b)$$

y

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(a, b)} = f_y(a, b).$$

EJEMPLO 2

Hallar y evaluar las derivadas parciales

Dada $f(x, y) = xe^{x^2y}$, halle f_x y f_y , y evalúe cada una en el punto $(1, \ln 2)$.

Solución Como

$$f_x(x, y) = xe^{x^2y}(2xy) + e^{x^2y} \quad \text{Derivada parcial respecto a } x$$

la derivada parcial de f respecto a x en $(1, \ln 2)$ es

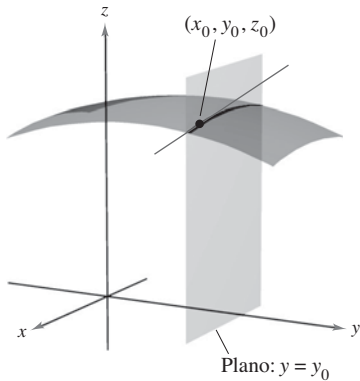
$$\begin{aligned} f_x(1, \ln 2) &= e^{\ln 2}(2 \ln 2) + e^{\ln 2} \\ &= 4 \ln 2 + 2. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= xe^{x^2y}(x^2) \\ &= x^3e^{x^2y} \end{aligned} \quad \text{Derivada parcial respecto a } y$$

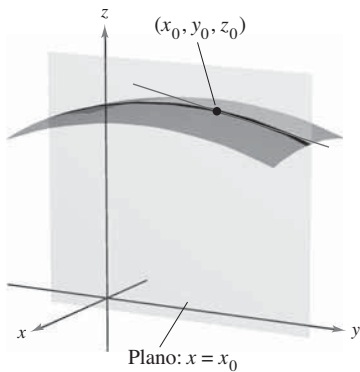
la derivada parcial de f respecto a y en $(1, \ln 2)$ es

$$\begin{aligned} f_y(1, \ln 2) &= e^{\ln 2} \\ &= 2. \end{aligned}$$



$\frac{\partial f}{\partial x}$ = pendiente en la dirección x .

Figura 4.28



$\frac{\partial f}{\partial y}$ = pendiente en la dirección y .

Figura 4.29

Las derivadas parciales de una función de dos variables $z = f(x, y)$, tienen una interpretación geométrica útil. Si $y = y_0$ entonces $z = f(x, y)$ representa la curva intersección de la superficie $z = f(x, y)$ con el plano $y = y_0$, como se muestra en la figura 4.28. Por consiguiente,

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

representa la pendiente de esta curva en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Observe que tanto la curva como la recta tangente se encuentran en el plano $y = y_0$. Análogamente,

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

representa la pendiente de la curva dada por la intersección de $z = f(x, y)$ y el plano $x = x_0$ en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, como se muestra en la figura 4.29.

Informalmente, los valores $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ en (x_0, y_0, z_0) denotan las **pendientes de la superficie en las direcciones de x y y** , respectivamente.

EJEMPLO 3

Hallar las pendientes de una superficie en las direcciones de x y de y

...► Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Halle las pendientes en las direcciones de x y de y de la superficie dada por

$$f(x, y) = -\frac{x^2}{2} - y^2 + \frac{25}{8}$$

en el punto $(\frac{1}{2}, 1, 2)$.

Solución Las derivadas parciales de f respecto a x y a y son

$$f_x(x, y) = -x \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = -2y. \quad \text{Derivadas parciales}$$

Por tanto, en la dirección de x , la pendiente es

$$f_x\left(\frac{1}{2}, 1\right) = -\frac{1}{2} \quad \text{Figura 4.30}$$

y en la dirección y , la pendiente es

$$f_y\left(\frac{1}{2}, 1\right) = -2. \quad \text{Figura 4.31}$$

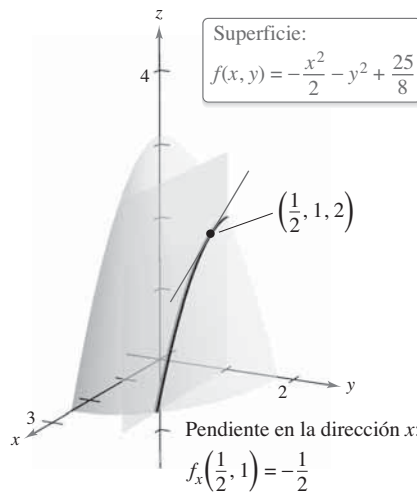


Figura 4.30

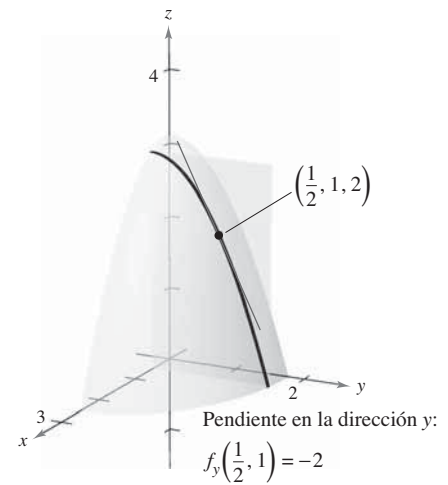


Figura 4.31

EJEMPLO 4

Hallar las pendientes de una superficie en las direcciones de x y de y

Halle las pendientes de la superficie dada por

$$f(x, y) = 1 - (x - 1)^2 - (y - 2)^2$$

en el punto $(1, 2, 1)$, en las direcciones de x y de y .

Solución Las derivadas parciales de f respecto a x y son

$$f_x(x, y) = -2(x - 1) \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = -2(y - 2). \quad \text{Derivadas parciales}$$

Por tanto, en el punto $(1, 2, 1)$, las pendientes en la dirección x es

$$f_x(1, 2) = -2(1 - 1) = 0$$

y la pendiente en la dirección y es

$$f_y(1, 2) = -2(2 - 2) = 0$$

como se muestra en la figura 4.32.

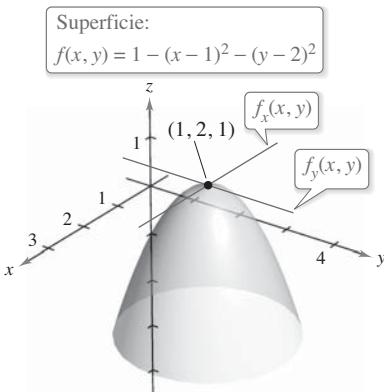
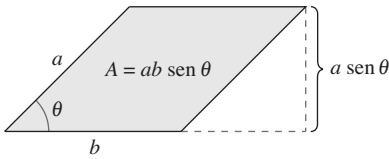


Figura 4.32

Sin importar cuántas variables haya, las derivadas parciales se pueden interpretar como *razones de cambio*.

EJEMPLO 5 Usar derivadas parciales como razones de cambio



El área del paralelogramo es $ab \operatorname{sen} \theta$.

Figura 4.33

El área de un paralelogramo con lados adyacentes a y b entre los que se forma un ángulo θ está dada por $A = ab \operatorname{sen} \theta$, como se muestra en la figura 4.33.

- a. Halle la razón de cambio de A respecto de a si $a = 10$, $b = 20$ y $\theta = \frac{\pi}{6}$.
- b. Calcule la razón de cambio de A respecto de θ si $a = 10$, $b = 20$ y $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Solución

- a. Para hallar la razón de cambio del área respecto de a , se mantienen b y θ constantes, y se deriva respecto de a para obtener

$$\frac{\partial A}{\partial a} = b \operatorname{sen} \theta. \quad \text{Encuentre la derivada parcial con respecto a } a.$$

Para $a = 10$, $b = 20$ y $\theta = \pi/6$, la razón de cambio del área con respecto de a es

$$\frac{\partial A}{\partial a} = 20 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = 10. \quad \text{Sustituya } b \text{ y } \theta.$$

- b. Para hallar la razón de cambio del área respecto de θ , se mantienen a y b constantes y se deriva respecto de θ para obtener

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = ab \cos \theta. \quad \text{Encuentre la derivada parcial con respecto a } \theta.$$

Para $a = 10$, $b = 20$ y $\theta = \pi/6$, la razón de cambio del área con respecto de θ es

$$\frac{\partial A}{\partial \theta} = 200 \cos \frac{\pi}{6} = 100\sqrt{3}. \quad \text{Sustituya } a, b, \text{ y } \theta. \quad \blacksquare$$

Derivadas parciales de una función de tres o más variables

El concepto de derivada parcial puede extenderse de manera natural a funciones de tres o más variables. Por ejemplo, si $w = f(x, y, z)$ existen tres derivadas parciales, cada una de las cuales se forma manteniendo constantes las otras dos variables. Es decir, para definir la derivada parcial de w respecto a x , considere y y z constantes y derive respecto a x . Para hallar las derivadas parciales de w respecto a y y respecto a z se emplea un proceso similar.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = f_y(x, y, z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = f_z(x, y, z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$$

En general, si $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, hay n derivadas parciales denotadas por

$$\frac{\partial w}{\partial x_k} = f_{x_k}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Para hallar la derivada parcial con respecto a una de las variables, se mantienen constantes las otras variables y se deriva con respecto a la variable dada.

EJEMPLO 6 Hallar las derivadas parciales

- a. Para hallar la derivada parcial de $f(x, y, z) = xy + yz^2 + xz$ respecto a z considere x y y constantes y obtiene

$$\frac{\partial}{\partial z}[xy + yz^2 + xz] = 2yz + x.$$

- b. Para hallar la derivada parcial de $f(x, y, z) = z \text{sen}(xy^2 + 2z)$ respecto a z , considere x y y constantes. Entonces, usando la regla del producto, obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}[z \text{sen}(xy^2 + 2z)] &= (z)\frac{\partial}{\partial z}[\text{sen}(xy^2 + 2z)] + \text{sen}(xy^2 + 2z)\frac{\partial}{\partial z}[z] \\ &= (z)[\text{cos}(xy^2 + 2z)](2) + \text{sen}(xy^2 + 2z) \\ &= 2z \text{cos}(xy^2 + 2z) + \text{sen}(xy^2 + 2z). \end{aligned}$$

- c. Para encontrar la derivada parcial de

$$f(x, y, z, w) = \frac{x + y + z}{w}$$

respecto a w , se consideran x, y y z constantes y obtiene

$$\frac{\partial}{\partial w}\left[\frac{x + y + z}{w}\right] = -\frac{x + y + z}{w^2}.$$

Derivadas de orden parcial de orden superior

Como sucede con las derivadas ordinarias, es posible hallar las segundas, terceras, etc., derivadas parciales de una función de varias variables, siempre que tales derivadas existan. Las derivadas de orden superior se denotan por el orden al que se hace la derivación. Por ejemplo, la función $z = f(x, y)$ tiene las siguientes derivadas parciales de segundo orden.

1. Derivando dos veces con respecto a x :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}.$$

2. Derivando dos veces con respecto a y :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}.$$

3. Derivando primero con respecto a x y después con respecto a y :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}.$$

4. Derivando primero con respecto a y , y después con respecto a x :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}.$$

••• **COMENTARIO** Observe que los dos tipos de notación para las derivadas parciales mixtas tienen convenciones diferentes para indicar el orden de derivación.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Orden de derecha a izquierda

$$(f_x)_y = f_{xy}$$

Orden de izquierda a derecha

Puede recordar el orden de ambas notaciones observando que primero se deriva con respecto a la variable más “cercana” a f .

El tercer y cuarto casos se llaman **derivadas parciales mixtas**.

EJEMPLO 7**Hallar derivadas parciales de segundo orden**

Encuentre las derivadas parciales de segundo orden de

$$f(x, y) = 3xy^2 - 2y + 5x^2y^2$$

y determine el valor de $f_{xy}(-1, 2)$.

Solución Empiece por hallar las derivadas parciales de primer orden respecto a x y y .

$$f_x(x, y) = 3y^2 + 10xy^2 \quad y \quad f_y(x, y) = 6xy - 2 + 10x^2y$$

Después, derive cada una de estas respecto a x y respecto a y .

$$f_{xx}(x, y) = 10y^2 \quad y \quad f_{yy}(x, y) = 6x + 10x^2$$

$$f_{xy}(x, y) = 6y + 20xy \quad y \quad f_{yx}(x, y) = 6y + 20xy$$

En $(-1, 2)$, el valor de f_{xy} es

$$f_{xy}(-1, 2) = 12 - 40 = -28. \quad \blacksquare$$

Observe que en el ejemplo 7 las dos derivadas parciales mixtas son iguales. En el teorema 4.3 se dan condiciones suficientes para que esto ocurra.

TEOREMA 4.3 Igualdad de las derivadas parciales mixtas

Si f es una función de x y y tal que f_{xy} y f_{yx} son continuas en un disco abierto R , entonces, para todo (x, y) en R ,

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y).$$

El teorema 4.3 también se aplica a una función de *tres o más variables* siempre y cuando las derivadas parciales de segundo orden sean continuas. Por ejemplo, si

$$w = f(x, y, z) \quad \text{Función de tres variables}$$

y todas sus derivadas parciales de segundo orden son continuas en una región abierta, entonces en todo punto el orden de derivación para obtener las derivadas parciales mixtas de segundo orden es irrelevante. Si las derivadas parciales de tercer orden también son continuas, el orden de derivación para obtener las derivadas parciales mixtas de tercer orden es irrelevante.

EJEMPLO 8**Hallar derivadas parciales de orden superior**

Demuestre que $f_{xz} = f_{zx}$ y $f_{xzz} = f_{zxx}$ para la función dada por

$$f(x, y, z) = ye^x + x \ln z.$$

Solución

Derivadas parciales de primer orden:

$$f_x(x, y, z) = ye^x + \ln z, \quad f_z(x, y, z) = \frac{x}{z}$$

Derivadas parciales de segundo orden (nótese que las dos primeras son iguales):

$$f_{xz}(x, y, z) = \frac{1}{z}, \quad f_{zx}(x, y, z) = \frac{1}{z}, \quad f_{zz}(x, y, z) = -\frac{x}{z^2}$$

Derivadas parciales de tercer orden (nótese que las tres son iguales):

$$f_{xzz}(x, y, z) = -\frac{1}{z^2}, \quad f_{zxx}(x, y, z) = -\frac{1}{z^2}, \quad f_{zzx}(x, y, z) = -\frac{1}{z^2} \quad \blacksquare$$

4.3 Ejercicios

Consulte **CalcChat.com** para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Examinar una derivada parcial En los ejercicios 1-6, explique si se debe usar o no la regla del cociente para encontrar la derivada parcial. No derive.

1. $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^2 y}{y^2 - 3} \right)$
2. $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^2 y}{y^2 - 3} \right)$
3. $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x - y}{x^2 + 1} \right)$
4. $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x - y}{x^2 + 1} \right)$
5. $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{xy}{x^2 + 1} \right)$
6. $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{xy}{x^2 + 1} \right)$

Determinar derivadas parciales En los ejercicios 7-38, halle las dos derivadas parciales de primer orden.

7. $f(x, y) = 2x - 5y + 3$
8. $f(x, y) = x^2 - 2y^2 + 4$
9. $f(x, y) = x^2 y^3$
10. $f(x, y) = 4x^3 y^{-2}$
11. $z = x\sqrt{y}$
12. $z = 2y^2\sqrt{x}$
13. $z = x^2 - 4xy + 3y^2$
14. $z = y^3 - 2xy^2 - 1$
15. $z = e^{xy}$
16. $z = e^{x/y}$
17. $z = x^2 e^{2y}$
18. $z = y e^{y/x}$
19. $z = \ln \frac{x}{y}$
20. $z = \ln \sqrt{xy}$
21. $z = \ln(x^2 + y^2)$
22. $z = \ln \frac{x + y}{x - y}$
23. $z = \frac{x^2}{2y} + \frac{3y^2}{x}$
24. $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$
25. $h(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$
26. $g(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$
27. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
28. $f(x, y) = \sqrt{2x + y^3}$
29. $z = \cos xy$
30. $z = \sin(x + 2y)$
31. $z = \tan(2x - y)$
32. $z = \sin 5x \cos 5y$
33. $z = e^y \sin xy$
34. $z = \cos(x^2 + y^2)$
35. $z = \sinh(2x + 3y)$
36. $z = \cosh xy^2$
37. $f(x, y) = \int_x^y (t^2 - 1) dt$
38. $f(x, y) = \int_x^y (2t + 1) dt + \int_y^x (2t - 1) dt$

Evaluar derivadas parciales En los ejercicios 39-42, utilice la definición de derivadas parciales empleando límites para calcular $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$.

39. $f(x, y) = 3x + 2y$
40. $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$
41. $f(x, y) = \sqrt{x + y}$
42. $f(x, y) = \frac{1}{x + y}$

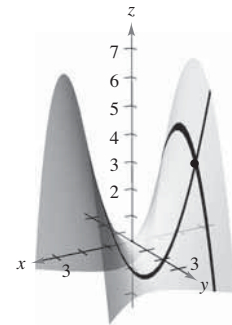
Evaluar derivadas parciales En los ejercicios 43-50, evalúe f_x y f_y en el punto dado.

43. $f(x, y) = e^y \sin x, (\pi, 0)$
44. $f(x, y) = e^{-x} \cos y, (0, 0)$
45. $f(x, y) = \cos(2x - y), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$

46. $f(x, y) = \sin xy, \left(2, \frac{\pi}{4}\right)$
47. $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}, (2, -2)$
48. $f(x, y) = \arccos xy, (1, 1)$
49. $f(x, y) = \frac{xy}{x - y}, (2, -2)$
50. $f(x, y) = \frac{2xy}{\sqrt{4x^2 + 5y^2}}, (1, 1)$

Determinar pendientes de superficies En los ejercicios 51 y 52, calcule las pendientes de la superficie en las direcciones de x y de y en el punto dado.

51. $g(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ (1, 1, 2)
52. $h(x, y) = x^2 - y^2$ (-2, 1, 3)



Determinar derivadas parciales En los ejercicios 53-58, encuentre las derivadas parciales de primer orden con respecto a x, y y z .

53. $H(x, y, z) = \sin(x + 2y + 3z)$
54. $f(x, y, z) = 3x^2 y - 5xyz + 10yz^2$
55. $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
56. $w = \frac{7xz}{x + y}$
57. $F(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
58. $G(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}}$

Evaluar derivadas parciales En los ejercicios 59-64, evalúe f_x, f_y y f_z en el punto dado.

59. $f(x, y, z) = x^3 y z^2, (1, 1, 1)$
60. $f(x, y, z) = x^2 y^3 + 2xyz - 3yz, (-2, 1, 2)$
61. $f(x, y, z) = \frac{x}{yz}, (1, -1, -1)$
62. $f(x, y, z) = \frac{xy}{x + y + z}, (3, 1, -1)$
63. $f(x, y, z) = z \sin(x + y), \left(0, \frac{\pi}{2}, -4\right)$
64. $f(x, y, z) = \sqrt{3x^2 + y^2 - 2z^2}, (1, -2, 1)$

Uso de las primeras derivadas parciales En los ejercicios 65-72, para $f(x, y)$, encuentre todos los valores de x y y , tal que $f_x(x, y) = 0$ y $f_y(x, y) = 0$ simultáneamente.

- 65. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x + 2y$
- 66. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 5x + y$
- 67. $f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2 - 4x + 16y + 3$
- 68. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$
- 69. $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$
- 70. $f(x, y) = 3x^3 - 12xy + y^3$
- 71. $f(x, y) = e^{x^2+xy+y^2}$
- 72. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$

Determinar segundas derivadas parciales En los ejercicios 73-82, calcule las cuatro derivadas parciales de segundo orden. Observe que las derivadas parciales mixtas de segundo orden son iguales.

- 73. $z = 3xy^2$
- 74. $z = x^2 + 3y^2$
- 75. $z = x^2 - 2xy + 3y^2$
- 76. $z = x^4 - 3x^2y^2 + y^4$
- 77. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
- 78. $z = \ln(x - y)$
- 79. $z = e^x \tan y$
- 80. $z = 2xe^y - 3ye^{-x}$
- 81. $z = \cos xy$
- 82. $z = \arctan \frac{y}{x}$

Determinar derivadas parciales usando tecnología En los ejercicios 83-86, utilice un sistema algebraico por computadora, y halle las derivadas parciales de primero y segundo orden de la función. Determine si existen valores de x y y tales que $f_x(x, y) = 0$ y $f_y(x, y) = 0$ simultáneamente.

- 83. $f(x, y) = x \sec y$
- 84. $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$
- 85. $f(x, y) = \ln \frac{x}{x^2 + y^2}$
- 86. $f(x, y) = \frac{xy}{x - y}$

Comparar derivadas parciales mixtas En los ejercicios 87-90, demuestre que las derivadas parciales mixtas f_{xyy} , f_{yxy} y f_{yyx} son iguales.

- 87. $f(x, y, z) = xyz$
- 88. $f(x, y, z) = x^2 - 3xy + 4yz + z^3$
- 89. $f(x, y, z) = e^{-x} \sin yz$
- 90. $f(x, y, z) = \frac{2z}{x + y}$

Ecuación de Laplace En los ejercicios 91-94, demuestre que la función satisface la ecuación de Laplace $\partial^2 z / \partial x^2 + \partial^2 z / \partial y^2 = 0$.

- 91. $z = 5xy$
- 92. $z = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \sin x$
- 93. $z = e^x \sin y$
- 94. $z = \arctan \frac{y}{x}$

Ecuación de ondas En los ejercicios 95-98, demuestre que la función satisface la ecuación de onda $\partial^2 z / \partial t^2 = c^2(\partial^2 z / \partial x^2)$.

- 95. $z = \sin(x - ct)$
- 96. $z = \cos(4x + 4ct)$
- 97. $z = \ln(x + ct)$
- 98. $z = \sin \omega ct \sin \omega x$

Ecuación del calor En los ejercicios 99 y 100, demuestre que la función satisface la ecuación del calor $\partial z / \partial t = c^2(\partial^2 z / \partial x^2)$.

- 99. $z = e^{-t} \cos \frac{x}{c}$
- 100. $z = e^{-t} \sin \frac{x}{c}$

Usar primeras derivadas En los ejercicios 101 y 102, determine si existe o no una función $f(x, y)$ con las derivadas parciales dadas. Explique su razonamiento. Si tal función existe, dé un ejemplo.

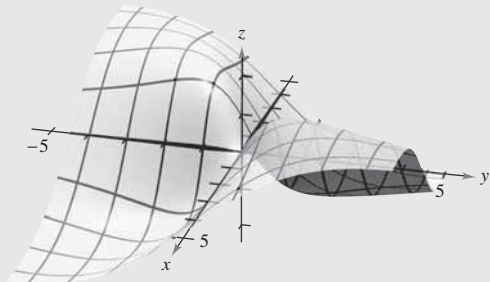
- 101. $f_x(x, y) = -3 \sin(3x - 2y)$, $f_y(x, y) = 2 \sin(3x - 2y)$
- 102. $f_x(x, y) = 2x + y$, $f_y(x, y) = x - 4y$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

- 103. **Primeras derivadas parciales** Sea f una función de dos variables x y y . Describa el procedimiento para hallar las derivadas parciales de primer orden.
- 104. **Primeras derivadas parciales** Dibuje una superficie que represente una función f de dos variables x y y . Utilice la gráfica para dar una interpretación geométrica de $\partial f / \partial x$ y $\partial f / \partial y$.
- 105. **Dibujar una gráfica** Dibuje la gráfica de una función $z = f(x, y)$ cuya derivada f_x sea siempre negativa y cuya derivada f_y sea siempre positiva.
- 106. **Dibujar una gráfica** Dibuje la gráfica de una función $z = f(x, y)$ cuyas derivadas f_x y f_y sean siempre positivas.
- 107. **Derivadas parciales mixtas** Si f es una función de x y de y , tal que f_{xy} y f_{yx} son continuas, ¿qué relación existe entre las derivadas parciales mixtas? Explique.



¿CÓMO LO VE? Utilice la gráfica de la superficie para determinar el signo de cada derivada parcial. Explique su razonamiento.



- (a) $f_x(4, 1)$
- (b) $f_y(4, 1)$
- (c) $f_x(-1, -2)$
- (d) $f_y(-1, -2)$

109. **Ingreso marginal** Una corporación farmacéutica tiene dos plantas que producen la misma medicina. Si x_1 y x_2 son los números de unidades producidas en la planta 1 y en la planta 2, respectivamente, entonces el ingreso total para el producto está dado por $R = 200x_1 + 200x_2 - 4x_1^2 - 8x_1x_2 - 4x_2^2$. Cuando $x_1 = 4$ y $x_2 = 12$, encuentre (a) el ingreso marginal para la planta 1, $\partial R / \partial x_1$, y (b) el ingreso marginal para la planta 2, $\partial R / \partial x_2$.

••• **110. Costos marginales** •••••

Una empresa fabrica dos tipos de estufas de combustión de madera: el modelo autoestable y el modelo para inserción en una chimenea. La función de costo para producir x estufas autoestables y y de inserción en una chimenea es



$$C = 32\sqrt{xy} + 175x + 205y + 1050.$$

- (a) Calcule los costos marginales $(\partial C/\partial x)$ y $(\partial C/\partial y)$ cuando $x = 80$ y $y = 20$.
- (b) Cuando se requiera producción adicional, ¿qué modelo de estufa hará incrementar el costo con una tasa más alta? ¿Cómo puede determinarse esto a partir del modelo del costo?

111. Psicología Recientemente en el siglo XX se desarrolló una prueba de inteligencia llamada la *Prueba de Stanford-Binet* (más conocida como la *prueba IQ*). En esta prueba, una edad mental individual M es dividida entre la edad cronológica individual C y el cociente es multiplicado por 100. El resultado es el *IQ* de la persona

$$IQ(M, C) = \frac{M}{C} \times 100$$

Encuentre las derivadas parciales de IQ respecto a M y respecto a C . Evalúe las derivadas parciales en el punto (12, 10) e interprete el resultado. (Fuente: Adaptado de *Bernstein/Clark/Steward/Roy/Wickens, Psicología, 4a. ed.*)

112. Productividad marginal Considere la función de producción de Cobb-Douglas $f(x, y) = 200x^{0.7}y^{0.3}$. Si $x = 1000$ y $y = 500$, encuentre (a) la productividad marginal del trabajo $\partial f/\partial x$ y (b) la productividad marginal de capital $\partial f/\partial y$.

113. Piénselo Sea N el número de aspirantes a una universidad, p el costo por alimentación y alojamiento en la universidad, y t el costo de la matrícula. Suponga que N es una función de p y t tal que $\partial N/\partial p < 0$ y $\partial N/\partial t < 0$. ¿Qué información obtiene al saber que ambas derivadas parciales son negativas?

114. Inversión El valor de una inversión de \$1000 al 6% de interés compuesto anual es

$$V(I, R) = 1000 \left[\frac{1 + 0.06(1 - R)}{1 + I} \right]^{10}$$

donde I es la tasa anual de inflación y R es la tasa de impuesto para el inversionista. Calcule $V_I(0.03, 0.28)$ y $V_R(0.03, 0.28)$. Determine si la tasa de impuesto o la tasa de inflación es el mayor factor “negativo” sobre el crecimiento de la inversión.

115. Distribución de temperatura La temperatura en cualquier punto (x, y) de una placa de acero $T = 500 - 0.6x^2 - 1.5y^2$, donde x y y son medidos en metros. En el punto (2, 3), halle la razón de cambio de la temperatura respecto a la distancia recorrida en la placa en las direcciones del eje x y del eje y .

116. Temperatura aparente Una medida de la percepción del calor ambiental para una persona promedio es el Índice de temperatura aparente. Un modelo para este índice es

$$A = 0.885t - 22.4h + 1.20th - 0.544$$

donde A es la temperatura aparente en grados Celsius, t es la temperatura del aire y h es la humedad relativa dada en forma decimal. (Fuente: *The UMAP Journal*)


- (a) Halle $\frac{\partial A}{\partial t}$ y $\frac{\partial A}{\partial h}$ si $t = 30^\circ$ y $h = 0.80$.
- (b) ¿Qué influye más sobre A , la temperatura del aire o la humedad? Explique.

117. Ley de los gases ideales La ley de los gases ideales establece que $PV = nRT$, donde P es la presión, V es el volumen, n es el número de moles de gas, R es una constante (la constante de los gases) y T es la temperatura absoluta. Demuestre que

$$\frac{\partial T}{\partial P} \cdot \frac{\partial P}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} = -1.$$

118. Utilidad marginal La función de utilidad $U = f(x, y)$ es una medida de la utilidad (o satisfacción) que obtiene una persona por el consumo de dos productos x y y . La función de utilidad para los dos productos es

$$U = -5x^2 + xy - 3y^2.$$

- (a) Determine la utilidad marginal del producto x .
- (b) Determine la utilidad marginal del producto y .
- (c) Si $x = 2$ y $y = 3$, ¿se debe consumir una unidad más de producto x o una unidad más de producto y ? Explique su razonamiento.
-  (d) Utilice un sistema algebraico por computadora y represente gráficamente la función. Interprete las utilidades marginales de productos x y y con una gráfica.

119. Modelo matemático En la tabla se muestran los consumos per cápita (en miles de millones de dólares) de diferentes tipos de entretenimiento en Estados Unidos desde 2005 hasta 2010. Los gastos en parques de atracciones y lugares para acampar, entretenimiento en vivo (excluyendo deportes), y espectadores de deportes están representados por las variables x , y y z (Fuente: *U.S. Bureau of Economic Analysis*)

Año	2005	2006	2007	2008	2009	2010
x	36.4	39.0	42.4	44.7	43.0	45.2
y	15.3	16.6	17.4	17.5	17.0	17.3
z	16.4	18.1	20.0	20.5	20.1	21.4

Un modelo para los datos está dado por

$$z = 0.461x + 0.301y - 494.$$

- (a) Halle $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$.
- (b) Interprete las derivadas parciales en el contexto del problema.

- 120. Modelado de datos** La tabla muestra el gasto en atención pública médica (en miles de millones de dólares) en compensación a trabajadores x , asistencia pública y , y seguro médico del Estado z , del año 2005 al 2010. (Fuente: *Centers for Medicare and Medicaid Services*)

Año	2005	2006	2007	2008	2009	2010
x	41.2	41.6	41.2	40.1	36.7	37.2
y	309.5	306.8	326.4	343.8	374.4	401.4
z	338.8	403.1	432.3	466.9	499.8	524.6

Un modelo para los datos está dado por

$$z = 11.734x^2 - 0.028y^2 - 888.24x + 23.09y + 12,573.9.$$

(a) Halle $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

(b) Determine la concavidad de las trazas paralelas al plano xz . Interprete el resultado en el contexto del problema.

(c) Determine la concavidad de las trazas paralelas al plano yz . Interprete el resultado en el contexto del problema.

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 121-124, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que demuestre que es falso.

121. Si $z = f(x, y)$ y $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}$, entonces $z = c(x + y)$.

122. Si $z = f(x)g(y)$, entonces $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = f'(x)g(y) + f(x)g'(y)$.

123. Si $z = e^{xy}$, entonces $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (xy + 1)e^{xy}$.

124. Si una superficie cilíndrica $z = f(x, y)$ tiene rectas generatrices paralelas al eje y , entonces $\partial z / \partial y = 0$.

125. Uso de una función Considere la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Halle $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ para $(x, y) \neq (0, 0)$.

(b) Utilice la definición de derivadas parciales para hallar $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$.

$$\left[\text{Sugerencia: } f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} \right]$$

(c) Utilice la definición de derivadas parciales para hallar $f_{xy}(0, 0)$ y $f_{yx}(0, 0)$.

(d) Utilizando el teorema 4.3 y el resultado del inciso (c), indique qué puede decirse acerca de f_{xy} o f_{yx} .

126. Uso de una función Considere la función

$$f(x, y) = (x^3 + y^3)^{1/3}.$$

(a) Halle $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$.

(b) Determine los puntos (si los hay) en los cuales $f_x(x, y)$ o $f_y(x, y)$ no existen.

127. Uso de una función Considere la función

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^{2/3}.$$

Demuestre que

$$f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{4x}{3(x^2 + y^2)^{1/3}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

■ **PARA INFORMACIÓN ADICIONAL** Para más información sobre este problema, consulte el artículo “A Classroom Note on a Naturally Occurring Piecewise Defined Function”, de Don Cohen, en *Mathematics and Computer Education*.

PROYECTO DE TRABAJO

Franjas de Moiré

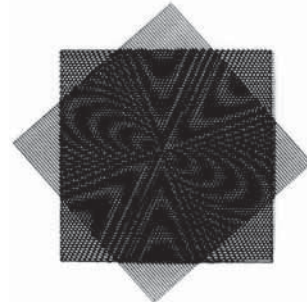
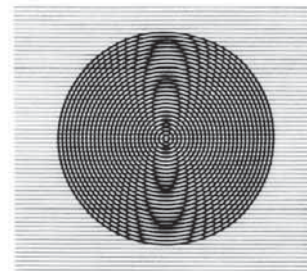
Lea el artículo “Moiré Fringes and the Conic Sections”, de Mike Cullen, en *The College Mathematics Journal*. El artículo describe cómo dos familias de curvas de nivel dadas por

$$f(x, y) = a \quad \text{y} \quad g(x, y) = b$$

pueden formar franjas de Moiré. Después de leer el artículo, escriba un documento que explique cómo se relaciona la expresión

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial y}$$

con las franjas de Moiré formadas por la intersección de las dos familias de curvas de nivel. Utilice como ejemplo uno de los modelos siguientes.



4.4 Diferenciales

- Entender los conceptos de incrementos y diferenciales.
- Extender el concepto de diferenciabilidad a funciones de dos variables.
- Utilizar una diferencial como aproximación.

Incrementos y diferenciales

En esta sección se generalizan los conceptos de incrementos y diferenciales a funciones de dos o más variables. Recuerde que una función dada $y = f(x)$ se definió la diferencial de y como

$$dy = f'(x) dx.$$

Terminología similar se usa para una función de dos variables, $z = f(x, y)$. Es decir, Δx y Δy son los **incrementos en x y en y** , y el **incremento en z** está dado por

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \quad \text{Incremento en } z$$

Definición de diferencial total

Si $z = f(x, y)$, y Δx y Δy son los incrementos en x y en y , entonces las **diferenciales** de las variables independientes x y y son

$$dx = \Delta x \quad y \quad dy = \Delta y$$

y la **diferencial total** de la variable dependiente z es

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy.$$

Esta definición puede extenderse a una función de tres o más variables. Por ejemplo, si $w = f(x, y, z, u)$, entonces $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, $dz = \Delta z$, $du = \Delta u$, y la diferencial total de w es

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz + \frac{\partial w}{\partial u} du.$$

EJEMPLO 1

Hallar la diferencial total

Encuentre la diferencial total de cada función.

a. $z = 2x \operatorname{sen} y - 3x^2y^2$ **b.** $w = x^2 + y^2 + z^2$

Solución

a. La diferencial total dz de $z = 2x \operatorname{sen} y - 3x^2y^2$ es

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy && \text{Diferencial total } dz \\ &= (2 \operatorname{sen} y - 6xy^2) dx + (2x \cos y - 6x^2y) dy. \end{aligned}$$

b. La diferencial total dw de $w = x^2 + y^2 + z^2$ es

$$\begin{aligned} dw &= \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz && \text{Diferencial total } dw \\ &= 2x dx + 2y dy + 2z dz. \end{aligned}$$

Diferenciabilidad

En una función dada por $y = f(x)$ es *diferenciable*, puede utilizar la diferencial $dy = f'(x) dx$ como una aproximación (para Δx pequeños) al valor $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Cuando es válida una aproximación similar para una función de dos variables, se dice que la función es **diferenciable**. Esto se expresa explícitamente en la definición siguiente.

Definición de diferenciabilidad

Una función f dada por $z = f(x, y)$ es **diferenciable** en (x_0, y_0) si Δz puede expresarse en la forma

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

donde ε_1 y $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ cuando

$$(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0).$$

La función f es **diferenciable en una región R** si es diferenciable en todo punto de R .

EJEMPLO 2

Demostrar que una función es diferenciable

Demuestre que la función dada por

$$f(x, y) = x^2 + 3y$$

es diferenciable en todo punto del plano.

Solución Haciendo $z = f(x, y)$, el incremento de z en un punto arbitrario (x, y) en el plano es

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) && \text{Incremento de } z \\ &= (x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) + 3(y + \Delta y) - (x^2 + 3y) \\ &= 2x\Delta x + \Delta x^2 + 3\Delta y \\ &= 2x(\Delta x) + 3(\Delta y) + \Delta x(\Delta x) + 0(\Delta y) \\ &= f_x(x, y) \Delta x + f_y(x, y) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y \end{aligned}$$

donde $\varepsilon_1 = \Delta x$ y $\varepsilon_2 = 0$. Como $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ y $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$, se sigue que f es diferenciable en todo punto en el plano. La gráfica de f se muestra en la figura 4.34.

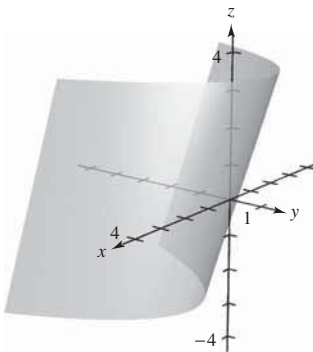


Figura 4.34

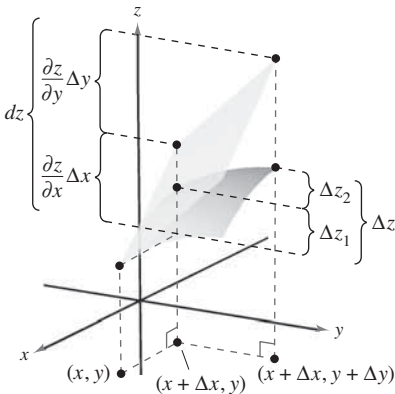
Debe tener en cuenta que el término “diferenciable” se usa de manera diferente para funciones de dos variables y para funciones de una variable. Una función de una variable es diferenciable en un punto si su derivada existe en el punto. Sin embargo, en el caso de una función de dos variables, la existencia de las derivadas parciales f_x y f_y no garantiza que la función sea diferenciable (vea el ejemplo 5). El teorema siguiente proporciona una condición suficiente para la diferenciabilidad de una función de dos variables.

TEOREMA 4.4 Condiciones suficientes para la diferenciabilidad

Si f es una función de x y y , para la que f_x y f_y son continuas en una región abierta R , entonces f es diferenciable en R .

En el apéndice A se da una demostración del teorema 4.4.

Consulte LarsonCalculus.com para el video de Bruce Edwards de esta demostración.



El cambio exacto en z es Δz . Este cambio puede aproximarse mediante la diferencial dz .

Figura 4.35

Aproximación mediante diferenciales

El teorema 4.4 dice que puede elegir $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ suficientemente cerca de (x, y) para hacer que $\epsilon_1 \Delta x$ y $\epsilon_2 \Delta y$ sean insignificantes. En otros términos, para Δx y Δy pequeños, se puede usar la aproximación

$$\Delta z \approx dz.$$

Esta aproximación se ilustra gráficamente en la figura 4.35. Hay que recordar que las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ pueden interpretarse como las pendientes de la superficie en las direcciones de x y de y . Esto significa que

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$$

representa el cambio en altura de un plano tangente a la superficie en el punto $(x, y, f(x, y))$. Como un plano en el espacio se representa mediante una ecuación lineal en las variables x, y y z , la aproximación de Δz mediante dz se llama **aproximación lineal**. Aprenderá más acerca de esta interpretación geométrica en la sección 4.7.

EJEMPLO 3

Usar la diferencial como una aproximación

•••► Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Utilice la diferencial dz para aproximar el cambio en $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ cuando (x, y) se desplaza del punto $(1, 1)$ al punto $(1.01, 0.97)$. Compare esta aproximación con el cambio exacto en z .

Solución Haciendo $(x, y) = (1, 1)$ y $(x + \Delta x, y + \Delta y) = (1.01, 0.97)$, obtiene

$$dx = \Delta x = 0.01 \quad \text{y} \quad dy = \Delta y = -0.03.$$

Por tanto, el cambio en z puede aproximarse mediante

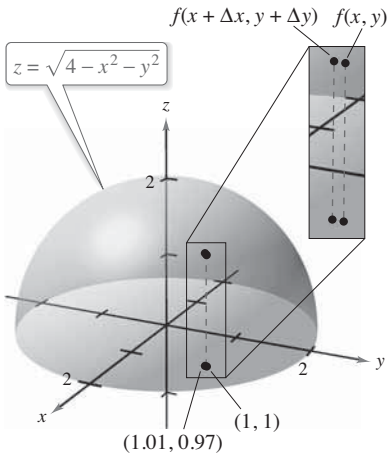
$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \Delta x + \frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \Delta y.$$

Cuando $x = 1$ y $y = 1$, se tiene

$$\Delta z \approx -\frac{1}{\sqrt{2}} (0.01) - \frac{1}{\sqrt{2}} (-0.03) = \frac{0.02}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} (0.01) \approx 0.0141.$$

En la figura 4.36 puede ver que el cambio exacto corresponde a la diferencia entre las alturas de dos puntos sobre la superficie de un hemisferio. Esta diferencia está dada por

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(1.01, 0.97) - f(1, 1) \\ &= \sqrt{4 - (1.01)^2 - (0.97)^2} - \sqrt{4 - 1^2 - 1^2} \\ &\approx 0.0137. \end{aligned}$$



Cuando (x, y) se desplaza de $(1, 1)$ al punto $(1.01, 0.97)$, el valor de $f(x, y)$ cambia aproximadamente en 0.0137.

Figura 4.36

Una función de tres variables $w = f(x, y, z)$ se dice que es **diferenciable** en (x, y, z) si

$$\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z)$$

puede expresarse en la forma

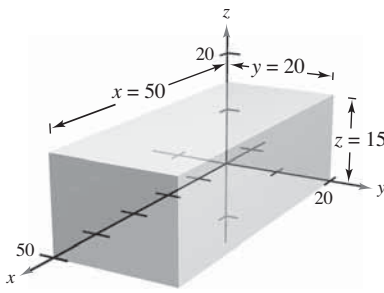
$$\Delta w = f_x \Delta x + f_y \Delta y + f_z \Delta z + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y + \epsilon_3 \Delta z$$

donde ϵ_1, ϵ_2 y $\epsilon_3 \rightarrow 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \rightarrow (0, 0, 0)$. Con esta definición de diferenciability, el teorema 4.4 puede extenderse de la siguiente manera a funciones de tres variables: si f es una función de x, y y z , donde f, f_x, f_y y f_z son continuas en una región abierta R , entonces f es diferenciable en R .

Esta aplicación de las diferenciales se ilustra en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4

Analizar errores



Volumen = xyz .

Figura 4.37

El error producido al medir cada una de las dimensiones de una caja rectangular es ± 0.1 milímetros. Las dimensiones de la caja son $x = 50$ centímetros, $y = 20$ centímetros y $z = 15$ centímetros, como se muestra en la figura 4.37. Utilice dV para estimar el error propagado y el error relativo en el volumen calculado de la caja.

Solución El volumen de la caja está dado por $V = xyz$, y por tanto

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \\ &= yz dx + xz dy + xy dz. \end{aligned}$$

Utilizando 0.1 milímetros = 0.01 centímetros, obtiene

$$dx = dy = dz = \pm 0.01$$

y el error propagado es aproximadamente

$$\begin{aligned} dV &= (20)(15)(\pm 0.01) + (50)(15)(\pm 0.01) + (50)(20)(\pm 0.01) \\ &= 300(\pm 0.01) + 750(\pm 0.01) + 1000(\pm 0.01) \\ &= 2050(\pm 0.01) \\ &= \pm 20.5 \text{ centímetros cúbicos.} \end{aligned}$$

Como el volumen medido es

$$V = (50)(20)(15) = 15,000 \text{ centímetros cúbicos,}$$

el error relativo, $\Delta V/V$, es aproximadamente

$$\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{20.5}{15,000} \approx 0.14\%.$$

Como ocurre con una función de una sola variable, si una función de dos o más variables es diferenciable en un punto, también es continua en él.

TEOREMA 4.5 Diferenciabilidad implica continuidad

Si una función de x y y es diferenciable en (x_0, y_0) , entonces es continua en (x_0, y_0) .

Demostración Sea f diferenciable en (x_0, y_0) , donde $z = f(x, y)$. Entonces

$$\Delta z = [f_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1] \Delta x + [f_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2] \Delta y$$

donde ε_1 y $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$. Sin embargo, por definición, usted sabe que Δz está dada por

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Haciendo $x = x_0 + \Delta x$ y $y = y_0 + \Delta y$ obtiene

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &= [f_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1] \Delta x + [f_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2] \Delta y \\ &= [f_x(x_0, y_0) + \varepsilon_1](x - x_0) + [f_y(x_0, y_0) + \varepsilon_2](y - y_0). \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ obtiene

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

lo cual significa que f es continua en (x_0, y_0) .

Consulte LarsonCalculus.com para el video de Bruce Edwards de esta demostración.

Recuerde que la existencia de f_x y f_y no es suficiente para garantizar la diferenciabilidad, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 5 Una función que no es diferenciable

Para la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{-3xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

demuestre que $f_x(0, 0)$ y $f_y(0, 0)$ existen, pero f no es diferenciable en $(0, 0)$.

Solución Usted puede demostrar que f no es diferenciable en $(0, 0)$ demostrando que no es continua en este punto. Para ver que f no es continua en $(0, 0)$, observe los valores de $f(x, y)$ a lo largo de dos trayectorias diferentes que se aproximan a $(0, 0)$, como se muestra en la figura 4.38. A lo largo de la recta $y = x$, el límite es

$$\lim_{(x, x) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, x) \rightarrow (0, 0)} \frac{-3x^2}{2x^2} = -\frac{3}{2}$$

mientras que a lo largo de $y = -x$ tiene

$$\lim_{(x, -x) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, -x) \rightarrow (0, 0)} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}.$$

Así, el límite de $f(x, y)$ cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ no existe, y puede concluir que f no es continua en $(0, 0)$. Por tanto, de acuerdo con el teorema 4.5, f no es diferenciable en $(0, 0)$. Por otro lado, de acuerdo con la definición de las derivadas parciales f_x y f_y , tiene

$$f_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0$$

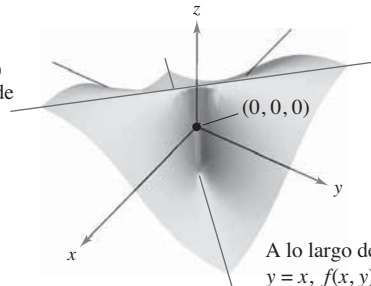
y

$$f_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = 0.$$

Por tanto, las derivadas parciales en $(0, 0)$ existen.

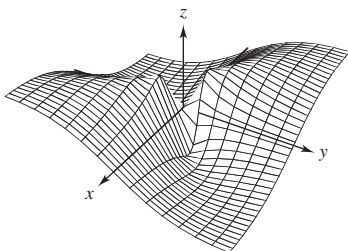
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{-3xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

A lo largo de la recta $y = -x$, $f(x, y)$ se aproxima o tiende a $3/2$.



A lo largo de la recta $y = x$, $f(x, y)$ se aproxima o tiende a $-3/2$.

Figura 4.38



Generada con Mathematica

► **TECNOLOGÍA** Utilice una herramienta de graficación para representar la función del ejemplo 5. Por ejemplo, la gráfica que se muestra a continuación fue generada con *Mathematica*.

4.4 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Determinar una diferencial total En los ejercicios 1-10, encuentre la diferencial total.

1. $z = 2x^2y^3$
2. $z = 2x^4y - 8x^2y^3$
3. $z = \frac{-1}{x^2 + y^2}$
4. $w = \frac{x + y}{z - 3y}$
5. $z = x \cos y - y \cos x$
6. $z = \frac{1}{2}(e^{x^2+y^2} - e^{-x^2-y^2})$
7. $z = e^x \sin y$
8. $w = e^y \cos x + z^2$
9. $w = 2z^3y \sin x$
10. $w = x^2yz^2 + \sin yz$

Usar una diferencial como aproximación En los ejercicios 11-16, (a) evalúe $f(2, 1)$ y $f(2.1, 1.05)$ y calcule Δz , y (b) use la diferencial total dz para aproximar Δz .

11. $f(x, y) = 2x - 3y$
12. $f(x, y) = x^2 + y^2$
13. $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$
14. $f(x, y) = \frac{y}{x}$
15. $f(x, y) = ye^x$
16. $f(x, y) = x \cos y$

Aproximar una expresión En los ejercicios 17-20, encuentre $z = f(x, y)$ y utilice la diferencial total para aproximar la cantidad.

17. $(2.01)^2(9.02) - 2^2 \cdot 9$
18. $\frac{1 - (3.05)^2}{(5.95)^2} - \frac{1 - 3^2}{6^2}$
19. $\sqrt{(5.05)^2 + (3.1)^2} - \sqrt{5^2 + 3^2}$
20. $\sin[(1.05)^2 + (0.95)^2] - \sin(1^2 + 1^2)$

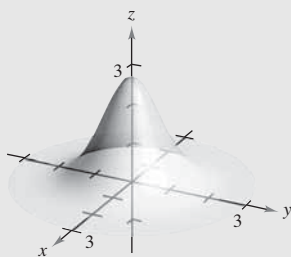
DESARROLLO DE CONCEPTOS

21. **Aproximación** Describa el cambio en la exactitud de dz como aproximación a Δz cuando Δx y Δy aumentan.
22. **Aproximación lineal** ¿Qué se quiere decir con una aproximación lineal de $z = f(x, y)$ en el punto $P(x_0, y_0)$?
23. **Usar diferenciales** Cuando se usan diferenciales, ¿qué significan los términos *error de propagación* y *error relativo*?



24.

¿CÓMO LO VE? ¿Qué punto tiene un diferencial mayor, $(2, 2)$ o $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$? Explique. (Suponga que dx y dy son iguales en ambos puntos.)



25. **Área** El área del rectángulo sombreada en la figura es $A = lh$. Los posibles errores en la longitud y la altura son Δl y Δh , respectivamente. Encuentre dA e identifique las regiones de la figura cuyas áreas están dadas por los términos de dA . ¿Qué región representa la diferencia entre ΔA y dA ?

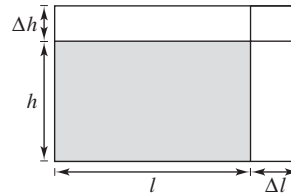


Figura para 25

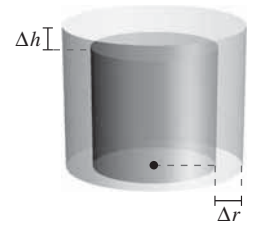


Figura para 26

26. **Volumen** El volumen del cilindro circular recto de color rojo es $V = \pi r^2 h$. Los posibles errores en el radio y en la altura son Δr y Δh , respectivamente. Determine dV e identifique los sólidos en la figura cuyos volúmenes están dados en términos de dV . ¿Qué sólido representa la diferencia entre ΔV y dV ?
27. **Análisis numérico** Se construye un cono circular recto de altura $h = 8$ y radio $r = 4$, y durante la medición se cometieron errores Δr en el radio y Δh en la altura. Complete la tabla para mostrar la relación entre ΔV y dV para los errores indicados.

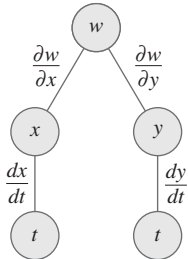
Δr	Δh	$\frac{dV}{dS}$	$\frac{\Delta V}{\Delta S}$	$\frac{\Delta V - dV}{\Delta S - dS}$
0.1	0.1			
0.1	-0.1			
0.001	0.002			
-0.0001	0.0002			

Tabla para 27 y 28

28. **Análisis numérico** La altura y radio de un cono circular recto midieron $h = 16$ metros y $r = 6$ metros. En la medición, se cometieron errores Δr y Δh . S es el área de la superficie lateral de un cono. Complete la tabla anterior para mostrar la relación entre ΔS y dS para los errores indicados.
29. **Volumen** El posible error implicado en la medición de cada dimensión de una caja rectangular es ± 0.02 pulg. Las dimensiones de la caja son 8 pulgadas por 5 pulgadas por 12 pulgadas. Aproxime el error propagado y el error relativo en el volumen calculado de la caja.
30. **Volumen** El posible error implicado en la medición de cada dimensión de un cilindro circular recto es ± 0.05 pulg. El radio es de 3 centímetros y la altura de 10 centímetros. Aproxime el error propagado y el error relativo en el volumen calculado del cilindro.

4.5 Regla de la cadena para funciones de varias variables

- Utilizar la regla de la cadena para funciones de varias variables.
- Hallar las derivadas parciales implícitamente.



Regla de la cadena: una variable dependiente w , es función de x y y , las que a su vez son funciones de t . Este diagrama representa la derivada de w con respecto a t .

Figura 4.39

Regla de la cadena para funciones de varias variables

Su trabajo con diferenciales de la sección anterior proporciona las bases para la extensión de la regla de la cadena a funciones de dos variables. Hay dos casos: el primer caso cuando w es una función de x y y , donde x y y son funciones de una sola variable independiente t , como se muestra en el teorema 4.6.

TEOREMA 4.6 Regla de la cadena: una variable independiente

Sea $w = f(x, y)$ donde f es una función derivable de x y y . Si $x = g(t)$ y $y = h(t)$, donde g y h son funciones derivables de t , entonces w es una función diferenciable de t y

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

La regla de la cadena se muestra esquemáticamente en la figura 4.39.

Una demostración de este teorema se da en el apéndice A.

Consulte LarsonCalculus.com para el video de Bruce Edwards de esta demostración.

EJEMPLO 1

Regla de la cadena con una variable independiente

Sea $w = x^2y - y^2$, donde $x = \sin t$ y $y = e^t$. Halle dw/dt cuando $t = 0$.

Solución De acuerdo con la regla de la cadena para una variable independiente, usted tiene

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= 2xy(\cos t) + (x^2 - 2y)e^t \\ &= 2(\sin t)(e^t)(\cos t) + (\sin^2 t - 2e^t)e^t \\ &= 2e^t \sin t \cos t + e^t \sin^2 t - 2e^{2t}. \end{aligned}$$

Cuando $t = 0$ se deduce que

$$\frac{dw}{dt} = -2. \quad \blacksquare$$

La regla de la cadena presentada en esta sección proporciona técnicas alternativas para resolver muchos problemas del cálculo de una sola variable. Así, en el ejemplo 1 podría haber usado técnicas para una sola variable para encontrar dw/dt expresando primero w como función de t ,

$$\begin{aligned} w &= x^2y - y^2 \\ &= (\sin t)^2(e^t) - (e^t)^2 \\ &= e^t \sin^2 t - e^{2t} \end{aligned}$$

y derivando después como de costumbre.

$$\frac{dw}{dt} = 2e^t \sin t \cos t + e^t \sin^2 t - 2e^{2t}$$

La regla de la cadena en el teorema 4.6 puede extenderse a cualquier número de variables. Por ejemplo, si cada x_i es una función derivable de una sola variable t , entonces para

$$w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

tiene

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial w}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}.$$

EJEMPLO 2 Aplicación de la regla de la cadena a razones de cambio relacionadas

Dos objetos recorren trayectorias elípticas dadas por las ecuaciones paramétricas siguientes.

$$x_1 = 4 \cos t \quad y \quad y_1 = 2 \operatorname{sen} t \quad \text{Primer objeto}$$

$$x_2 = 2 \operatorname{sen} 2t \quad y \quad y_2 = 3 \cos 2t \quad \text{Segundo objeto}$$

¿A qué velocidad cambia la distancia entre los dos objetos cuando $t = \pi$?

Solución En la figura 4.40 puede ver que la distancia s entre los dos objetos está dada por

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

y que cuando $t = \pi$, se tiene $x_1 = -4$, $y_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_2 = 3$, y

$$s = \sqrt{(0 + 4)^2 + (3 - 0)^2} = 5.$$

Cuando $t = \pi$, las derivadas parciales de s son las siguientes

$$\frac{\partial s}{\partial x_1} = \frac{-(x_2 - x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = -\frac{1}{5}(0 + 4) = -\frac{4}{5}$$

$$\frac{\partial s}{\partial y_1} = \frac{-(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = -\frac{1}{5}(3 - 0) = -\frac{3}{5}$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_2} = \frac{(x_2 - x_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = \frac{1}{5}(0 + 4) = \frac{4}{5}$$

$$\frac{\partial s}{\partial y_2} = \frac{(y_2 - y_1)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} = \frac{1}{5}(3 - 0) = \frac{3}{5}$$

Cuando $t = \pi$, las derivadas de x_1 , y_1 , x_2 y y_2 son

$$\frac{dx_1}{dt} = -4 \operatorname{sen} t = 0$$

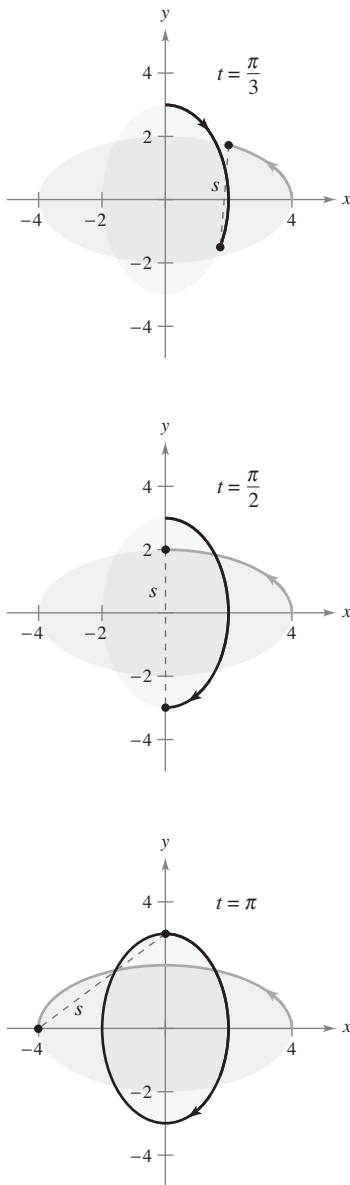
$$\frac{dy_1}{dt} = 2 \cos t = -2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = 4 \cos 2t = 4$$

$$\frac{dy_2}{dt} = -6 \operatorname{sen} 2t = 0.$$

Por tanto, usando la regla de la cadena apropiada, usted sabe que la distancia cambia a una razón de

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \frac{\partial s}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial s}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dt} + \frac{\partial s}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial s}{\partial y_2} \frac{dy_2}{dt} \\ &= \left(-\frac{4}{5}\right)(0) + \left(-\frac{3}{5}\right)(-2) + \left(\frac{4}{5}\right)(4) + \left(\frac{3}{5}\right)(0) \\ &= \frac{22}{5}. \end{aligned}$$



Trayectorias de dos objetos que recorren órbitas elípticas.

Figura 4.40

En el ejemplo 2, observe que s es función de cuatro variables *intermedias*, x_1, y_1, x_2 y y_2 , cada una de las cuales es a su vez función de una sola variable t . Otro tipo de función compuesta es aquella en la que las variables intermedias son, a su vez, funciones de más de una variable. Por ejemplo, si $w = f(x, y)$, donde $x = g(s, t)$ y $y = h(s, t)$, se deduce que w es función de s y de t , y usted puede considerar las derivadas parciales de w respecto a s y t . Una manera de encontrar estas derivadas parciales es expresar w explícitamente como función de s y t sustituyendo las ecuaciones $x = g(s, t)$ y $y = h(s, t)$ en la ecuación $w = f(x, y)$. Así puede encontrar las derivadas parciales de la manera usual, como se muestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3**Hallar derivadas parciales por sustitución**

Encuentre $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$ para $w = 2xy$, donde $x = s^2 + t^2$ y $y = s/t$.

Solución Comience por sustituir $x = s^2 + t^2$ y $y = s/t$ en la ecuación $w = 2xy$ para obtener

$$w = 2xy = 2(s^2 + t^2)\left(\frac{s}{t}\right) = 2\left(\frac{s^3}{t} + st\right).$$

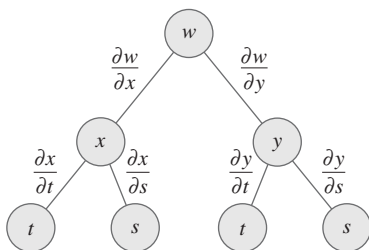
Después, para encontrar $\partial w/\partial s$ mantenga constante t y derive respecto a s .

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial s} &= 2\left(\frac{3s^2}{t} + t\right) \\ &= \frac{6s^2 + 2t^2}{t}\end{aligned}$$

De manera similar, para hallar $\partial w/\partial t$, mantenga constante s y derive respecto a t para obtener

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} &= 2\left(-\frac{s^3}{t^2} + s\right) \\ &= 2\left(\frac{-s^3 + st^2}{t^2}\right) \\ &= \frac{2st^2 - 2s^3}{t^2}.\end{aligned}$$

El teorema 4.7 proporciona un método alternativo para hallar las derivadas parciales del ejemplo 3, sin expresar w explícitamente como función de s y t .



Regla de la cadena: dos variables independientes.

Figura 4.41

TEOREMA 4.7 Regla de la cadena: dos variables independientes

Sea $w = f(x, y)$, donde f es una función diferenciable de x y y . Si $x = g(s, t)$ y $y = h(s, t)$ son tales que las derivadas parciales de primer orden $\partial x/\partial s$, $\partial x/\partial t$, $\partial y/\partial s$ y $\partial y/\partial t$ existen, entonces $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$ existen y están dadas por

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

y

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}.$$

La regla de la cadena en este teorema se muestra esquemáticamente en la figura 4.41.

Demostración Para obtener $\partial w/\partial s$, mantenga constante t y aplique el teorema 4.6 para obtener el resultado deseado. De manera similar, para obtener $\partial w/\partial t$ mantenga constante s y aplique el teorema 4.6.

Consulte LarsonCalculus.com para el video de Bruce Edwards de esta demostración.

EJEMPLO 4

Regla de la cadena con dos variables independientes

•••▶ Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Utilice la regla de la cadena para encontrar $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$, dada

$$w = 2xy$$

donde $x = s^2 + t^2$ y $y = s/t$.

Solución Observe que estas mismas derivadas parciales fueron calculadas en el ejemplo 3. Esta vez, usando el teorema 4.7 puede mantener constante t y derivar con respecto a s para obtener

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \\ &= 2y(2s) + 2x\left(\frac{1}{t}\right) \\ &= 2\left(\frac{s}{t}\right)(2s) + 2(s^2 + t^2)\left(\frac{1}{t}\right) && \text{Sustituya } \frac{s}{t} \text{ por } y \text{ y } s^2 + t^2 \text{ por } x. \\ &= \frac{4s^2}{t} + \frac{2s^2 + 2t^2}{t} \\ &= \frac{6s^2 + 2t^2}{t}. \end{aligned}$$

De manera similar, manteniendo s constante obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \\ &= 2y(2t) + 2x\left(\frac{-s}{t^2}\right) \\ &= 2\left(\frac{s}{t}\right)(2t) + 2(s^2 + t^2)\left(\frac{-s}{t^2}\right) && \text{Sustituya } \frac{s}{t} \text{ por } y \text{ y } s^2 + t^2 \text{ por } x. \\ &= 4s - \frac{2s^3 + 2st^2}{t^2} \\ &= \frac{4st^2 - 2s^3 - 2st^2}{t^2} \\ &= \frac{2st^2 - 2s^3}{t^2}. \end{aligned}$$

La regla de la cadena del teorema 4.7 también puede extenderse a cualquier número de variables. Por ejemplo, si w es una función diferenciable de n variables

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

donde cada x_i es una función diferenciable de m variables t_1, t_2, \dots, t_m , entonces para

$$w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

se obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t_1} &= \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial w}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \frac{\partial w}{\partial t_2} &= \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \dots + \frac{\partial w}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_2} \\ &\vdots \\ \frac{\partial w}{\partial t_m} &= \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_m} + \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_m} + \dots + \frac{\partial w}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_m} \end{aligned}$$

EJEMPLO 5**Regla de la cadena para una función de tres variables**

Determine $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$, cuando $s = 1$ y $t = 2\pi$ para

$$w = xy + yz + xz$$

donde $x = s \cos t$, $y = s \sin t$, $yz = t$.

Solución Por extensión del teorema 4.7, tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \\ &= (y + z)(\cos t) + (x + z)(\sin t) + (y + x)(0) \\ &= (y + z)(\cos t) + (x + z)(\sin t).\end{aligned}$$

Cuando $s = 1$ y $t = 2\pi$, usted tiene que $x = 1$, $y = 0$ y $z = 2\pi$. Así

$$\frac{\partial w}{\partial s} = (0 + 2\pi)(1) + (1 + 2\pi)(0) = 2\pi.$$

Además,

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \\ &= (y + z)(-s \sin t) + (x + z)(s \cos t) + (y + x)(1)\end{aligned}$$

y si $s = 1$ y $t = 2\pi$, tiene que

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} &= (0 + 2\pi)(0) + (1 + 2\pi)(1) + (0 + 1)(1) \\ &= 2 + 2\pi.\end{aligned}$$

Diferenciación parcial implícita

Esta sección concluye con una aplicación de la regla de la cadena para determinar la derivada de una función definida *implícitamente*. Suponga que x y y están relacionadas por la ecuación $F(x, y) = 0$, donde se asume que $y = f(x)$ es función derivable de x . Para hallar dy/dx podría recurrir a las técnicas vistas anteriormente. Sin embargo, verá que la regla de la cadena proporciona una útil alternativa. Si considera la función dada por

$$w = F(x, y) = F(x, f(x)).$$

Puede aplicar el teorema 4.6 para obtener

$$\frac{dw}{dx} = F_x(x, y) \frac{dx}{dx} + F_y(x, y) \frac{dy}{dx}.$$

Como $w = F(x, y) = 0$ para toda x en el dominio de f usted sabe que

$$\frac{dw}{dx} = 0$$

y tiene

$$F_x(x, y) \frac{dx}{dx} + F_y(x, y) \frac{dy}{dx} = 0.$$

Ahora, si $F(x, y) \neq 0$, puede usar el hecho de que $dx/dx = 1$ para concluir que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}.$$

Un procedimiento similar puede usarse para encontrar las derivadas parciales de funciones de varias variables definidas implícitamente.

TEOREMA 4.8 Regla de la cadena: derivación implícita

Si la ecuación $F(x, y) = 0$ define a y implícitamente como función derivable de x , entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}, \quad F_y(x, y) \neq 0.$$

Si la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define a z implícitamente como función diferenciable de x y y , entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \quad F_z(x, y, z) \neq 0.$$

Este teorema puede extenderse a funciones diferenciables definidas implícitamente de cualquier número de variables.

EJEMPLO 6 Hallar una derivada implícitamente

Encuentre dy/dx dada la ecuación

$$y^3 + y^2 - 5y - x^2 + 4 = 0.$$

Solución Comience por definir una función

$$F(x, y) = y^3 + y^2 - 5y - x^2 + 4.$$

Entonces

$$F_x(x, y) = -2x \quad \text{y} \quad F_y(x, y) = 3y^2 + 2y - 5.$$

Usando el teorema 4.8, tiene

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = \frac{-(-2x)}{3y^2 + 2y - 5} = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5}.$$

EJEMPLO 7 Hallar derivadas parciales implícitamente

Encuentre $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ para

$$3x^2z - x^2y^2 + 2z^3 + 3yz - 5 = 0.$$

Solución Comience haciendo

$$F(x, y, z) = 3x^2z - x^2y^2 + 2z^3 + 3yz - 5.$$

Entonces

$$F_x(x, y, z) = 6xz - 2xy^2$$

$$F_y(x, y, z) = -2x^2y + 3z$$

y

$$F_z(x, y, z) = 3x^2 + 6z^2 + 3y.$$

Usando el teorema 4.8, tiene

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = \frac{2xy^2 - 6xz}{3x^2 + 6z^2 + 3y}$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = \frac{2x^2y - 3z}{3x^2 + 6z^2 + 3y}.$$

4.5 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Usar la regla de la cadena En los ejercicios 1-4, encuentre dw/dt utilizando la regla de la cadena apropiada. Evalúe dw/dt para el valor dado de t .

Función	Valor
1. $w = x^2 + y^2$ $x = 2t, y = 3t$	$t = 2$
2. $w = \sqrt{x^2 + y^2}$ $x = \cos t, y = e^t$	$t = 0$
3. $w = x \operatorname{sen} y$ $x = e^t, y = \pi - t$	$t = 0$
4. $w = \ln \frac{y}{x}$ $x = \cos t, y = \operatorname{sen} t$	$t = \frac{\pi}{4}$

Usar métodos diferentes En los ejercicios 5-10, encuentre dw/dt (a) utilizando la regla de la cadena apropiada y (b) convirtiendo w en función de t antes de derivar

- $w = xy, x = e^t, y = e^{-2t}$
- $w = \cos(x - y), x = t^2, y = 1$
- $w = x^2 + y^2 + z^2, x = \cos t, y = \operatorname{sen} t, z = e^t$
- $w = xy \cos z, x = t, y = t^2, z = \arccos t$
- $w = xy + xz + yz, x = t - 1, y = t^2 - 1, z = t$
- $w = xy^2 + x^2z + yz^2, x = t^2, y = 2t, z = 2$

Movimiento de un proyectil En los ejercicios 11 y 12 se dan las ecuaciones paramétricas de las trayectorias de dos proyectiles. ¿A qué velocidad cambia la distancia entre los dos objetos en el valor de t dado?

- $x_1 = 10 \cos 2t, y_1 = 6 \operatorname{sen} 2t$ Primer objeto
 $x_2 = 7 \cos t, y_2 = 4 \operatorname{sen} t$ Segundo objeto
 $t = \pi/2$
- $x_1 = 48\sqrt{2}t, y_1 = 48\sqrt{2}t - 16t^2$ Primer objeto
 $x_2 = 48\sqrt{3}t, y_2 = 48t - 16t^2$ Segundo objeto
 $t = 1$

Hallar derivadas parciales En los ejercicios 13-16, determine $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$ utilizando la regla de la cadena apropiada. Evalúe cada derivada parcial en los valores dados de s y t .

Función	Valores
13. $w = x^2 + y^2$ $x = s + t, y = s - t$	$s = 1, t = 0$
14. $w = y^3 - 3x^2y$ $x = e^s, y = e^t$	$s = -1, t = 2$
15. $w = \operatorname{sen}(2x + 3y)$ $x = s + t, y = s - t$	$s = 0, t = \frac{\pi}{2}$

Función

Valores

- $w = x^2 - y^2$
 $x = s \cos t, y = s \operatorname{sen} t$
 $s = 3, t = \frac{\pi}{4}$

Usar métodos diferentes En los ejercicios 17-20, encuentre $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$ (a) utilizando la regla de la cadena apropiada y (b) convirtiendo w en una función de s y t antes de derivar.

- $w = xyz, x = s + t, y = s - t, z = st^2$
- $w = x^2 + y^2 + z^2, x = t \operatorname{sen} s, y = t \cos s, z = st^2$
- $w = ze^{xy}, x = s - t, y = s + t, z = st$
- $w = x \cos yz, x = s^2, y = t^2, z = s - 2t$

Hallar una derivada implícita En los ejercicios 21-24, encuentre dy/dx por derivación implícita.

- $x^2 - xy + y^2 - x + y = 0$
- $\sec xy + \tan xy + 5 = 0$
- $\ln \sqrt{x^2 + y^2} + x + y = 4$
- $\frac{x}{x^2 + y^2} - y^2 = 6$

Hallar derivadas parciales implícitas En los ejercicios 25-32, determine las primeras derivadas parciales de z por derivación implícita.

- $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
- $xz + yz + xy = 0$
- $x^2 + 2yz + z^2 = 1$
- $x + \operatorname{sen}(y + z) = 0$
- $\tan(x + y) + \tan(y + z) = 1$
- $z = e^x \operatorname{sen}(y + z)$
- $e^{xz} + xy = 0$
- $x \ln y + y^2z + z^2 = 8$

Hallar derivadas parciales implícitas En los ejercicios 33-36, determine las primeras derivadas parciales de w por derivación implícita.

- $xy + yz - wz + wx = 5$
- $x^2 + y^2 + z^2 - 5yw + 10w^2 = 2$
- $\cos xy + \operatorname{sen} yz + wz = 20$
- $w - \sqrt{x - y} - \sqrt{y - z} = 0$

Funciones homogéneas Una función es *homogénea de grado n* si $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$. En los ejercicios 37-40, (a) demuestre que la función es homogénea y determine n , y (b) demuestre que $xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = nf(x, y)$.

- $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
- $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y^3$
- $f(x, y) = e^{x/y}$
- $f(x, y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

41. **Usar una tabla de valores** Sean $w = f(x, y)$, $x = g(t)$ y $y = h(t)$, donde f , g y h son diferenciables. Use la regla de la cadena apropiada para encontrar dw/dt cuando $t = 2$, dada la siguiente tabla de valores.

$g(2)$	$h(2)$	$g'(2)$	$h'(2)$	$f_x(4, 3)$	$f_y(4, 3)$
4	3	-1	6	-5	7

42. **Usar una tabla de valores** Sean $w = f(x, y)$, $x = g(s, t)$ y $y = h(s, t)$, donde f , g y h son diferenciables. Use la regla de la cadena apropiada para encontrar $w_s(1, 2)$ y $w_t(1, 2)$, dada la siguiente tabla de valores.

$g(1, 2)$	$h(1, 2)$	$g_s(1, 2)$	$h_s(1, 2)$
4	3	-3	5

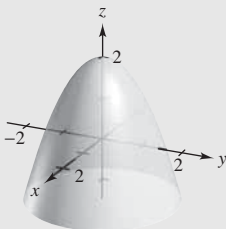
$g_t(1, 2)$	$h_t(1, 2)$	$f_x(4, 3)$	$f_y(4, 3)$
-2	8	-5	7

DESARROLLO DE CONCEPTOS

43. **Regla de la cadena** Sea $w = f(x, y)$ una función donde x y y son funciones de una sola variable t . Dé la regla de la cadena para hallar dw/dt .
44. **Regla de la cadena** Sea $w = f(x, y)$ una función donde x y y son funciones de dos variables s y t . Dé la regla de la cadena para hallar $\partial w/\partial s$ y $\partial w/\partial t$.
45. **Diferenciación implícita** Si $f(x, y) = 0$, dé la regla para hallar dy/dx implícitamente. Si $f(x, y, z) = 0$, dé la regla para hallar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ implícitamente.



¿CÓMO LO VE? A continuación se muestra la gráfica de la función $w = f(x, y)$.



- (a) Suponga que x y y son funciones de una sola variable r . Dé la regla de la cadena para encontrar dw/dr .
- (b) Suponga que x y y son funciones de dos variables r y θ . Dé la regla de la cadena para hallar $\partial w/\partial r$ y $\partial w/\partial \theta$.

47. **Volumen y área superficial** El radio de un cilindro circular recto se incrementa a razón de 6 pulgadas por minuto, y la altura decrece a razón de 4 pulgadas por minuto. ¿Cuál es la razón de cambio del volumen y del área superficial cuando el radio es 12 pulgadas y la altura 36 pulgadas?

48. **Ley de los gases ideales** Según la ley de los gases ideales $pV = nRT$, donde p es la presión, V es el volumen, m es la masa constante, R es una constante, T es la temperatura, y p y V son funciones del tiempo. Encuentre dT/dt , la razón de cambio de la temperatura con respecto al tiempo.

49. **Momento de inercia** Un cilindro anular tiene un radio interior de r_1 y un radio exterior de r_2 (vea la figura). Su momento de inercia es $I = \frac{1}{2}m(r_1^2 + r_2^2)$, donde m es la masa. Los dos radios se incrementan a razón de 2 centímetros por segundo. Encuentre la velocidad a la que varía I en el instante en que los radios son 6 y 8 centímetros. (Suponga que la masa es constante.)

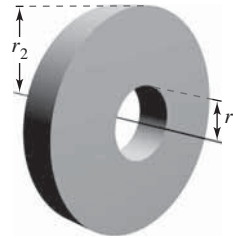


Figura para 49

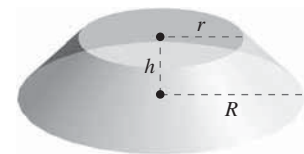


Figura para 50

50. **Volumen y área superficial** Los dos radios del tronco de un cono circular recto se incrementan a razón de 4 centímetros por minuto y la altura se incrementa a razón de 12 centímetros por minuto (vea la figura). Determine a qué velocidad cambian el volumen y el área superficial cuando los radios son 15 y 25 centímetros, respectivamente, y la altura es de 10 centímetros.

51. **Usar la regla de la cadena** Demuestre que

$$\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} = 0$$

para $w = f(x, y)$, $x = u - v$, y $y = v - u$.

52. **Usar la regla de la cadena** Demuestre el resultado del ejercicio 51 para

$$w = (x - y) \sin(y - x)$$

53. **Ecuaciones de Cauchy-Riemann** Dadas las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$, compruebe que las **ecuaciones diferenciales de Cauchy-Riemann**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Se pueden escribir en forma de coordenadas polares como

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

54. **Ecuaciones de Cauchy-Riemann** Demuestre el resultado del ejercicio 53 para las funciones

$$u = \ln \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad v = \arctan \frac{y}{x}$$

55. **Función homogénea** Demuestre que si $f(x, y)$ es homogénea de grado n , entonces

$$xf_x(x, y) + yf_y(x, y) = nf(x, y).$$

[Sugerencia: Sea $g(t) = f(tx, ty) = t^n f(x, y)$. Halle $g'(t)$ y después haga $t = 1$.]

4.6 Derivadas direccionales y gradientes

- Hallar y usar las derivadas direccionales de una función de dos variables.
- Hallar el gradiente de una función de dos variables.
- Utilizar el gradiente de una función de dos variables en aplicaciones.
- Hallar las derivadas direccionales y el gradiente de funciones de tres variables.

Derivada direccional

Suponga que está en la colina de la figura 4.42 y quiere determinar la inclinación de la colina respecto al eje z . Si la colina está representada por $z = f(x, y)$ y sabe cómo determinar la pendiente en dos direcciones diferentes: la pendiente en la dirección de y está dada por la derivada parcial $f_y(x, y)$ y la pendiente en la dirección de x está dada por la derivada parcial $f_x(x, y)$. En esta sección verá que estas dos derivadas parciales pueden usarse para calcular la pendiente en *cualquier* dirección.

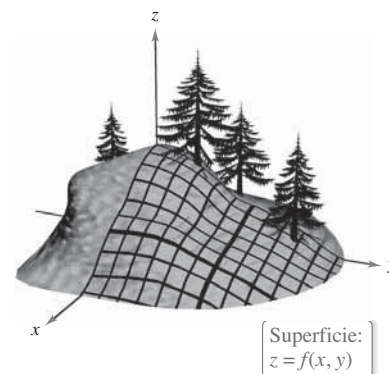


Figura 4.42

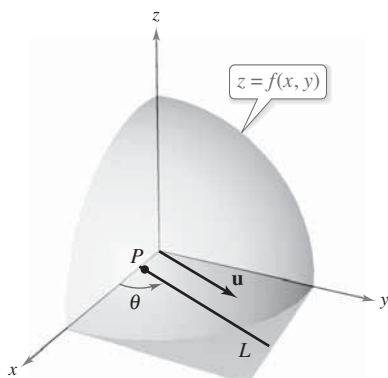


Figura 4.43

Para determinar la pendiente en un punto de una superficie, definirá un nuevo tipo de derivada llamada **derivada direccional**. Sea $z = f(x, y)$ una *superficie* y $P(x_0, y_0)$ un *punto* en el dominio de f como se muestra en la figura 4.43. La “dirección” de la derivada direccional está dada por un vector unitario

$$\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$$

donde θ es el ángulo que forma el vector con el eje x positivo. Para hallar la pendiente deseada, reduzca el problema a dos dimensiones cortando la superficie con un plano vertical que pasa por el punto P y es paralelo a \mathbf{u} , como se muestra en la figura 4.44. Este plano vertical corta la superficie formando una curva C . La pendiente de la superficie en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ en la dirección de \mathbf{u} se define como la pendiente de la curva C en ese punto.

De manera informal, puede expresar la pendiente de la curva C como un límite análogo a los usados en el cálculo de una variable. El plano vertical utilizado para formar C corta el plano xy en una recta L , representada por las ecuaciones paramétricas,

$$x = x_0 + t \cos \theta$$

y

$$y = y_0 + t \sin \theta$$

de manera que para todo valor de t , el punto $Q(x, y)$ se encuentra en la recta L . Para cada uno de los puntos P y Q hay un punto correspondiente en la superficie.

$$(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \quad \text{Punto sobre } P$$

$$(x, y, f(x, y)) \quad \text{Punto sobre } Q$$

Como la distancia entre P y Q es

$$\begin{aligned} \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} &= \sqrt{(t \cos \theta)^2 + (t \sin \theta)^2} \\ &= |t| \end{aligned}$$

puede escribir la pendiente de la recta secante, que pasa por $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ y $(x, y, f(x, y))$ como

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{f(x_0 + t \cos \theta, y_0 + t \sin \theta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Por último, haciendo que t se aproxime a 0, usted llega a la definición siguiente.

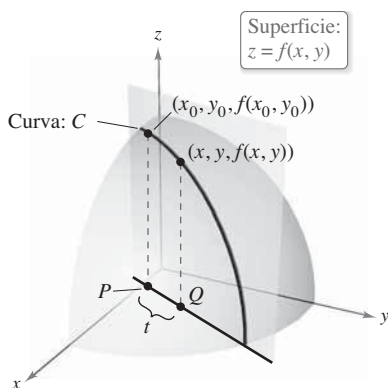


Figura 4.44

Definición de la derivada direccional

Sea f una función de dos variables x y y , y sea $\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$ un vector unitario. Entonces la **derivada direccional de f en la dirección de \mathbf{u}** , que se denota $D_{\mathbf{u}}f$, es

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t \cos \theta, y + t \sin \theta) - f(x, y)}{t}$$

siempre que este límite exista.

Calcular derivadas direccionales empleando esta definición es lo mismo que encontrar la derivada de una función de una variable empleando el proceso del límite. Una fórmula “de trabajo” más simple para hallar derivadas direccionales emplea las derivadas parciales f_x y f_y .

TEOREMA 4.9 Derivada direccional

Si f es una función diferenciable de x y y , entonces la derivada direccional de f en la dirección del vector unitario $\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$ es

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = f_x(x, y) \cos \theta + f_y(x, y) \sin \theta.$$

Demostración Dado un punto fijo (x_0, y_0) , sea

$$x = x_0 + t \cos \theta \quad y = y_0 + t \sin \theta.$$

Ahora, sea $g(t) = f(x, y)$. Como f es diferenciable, puede aplicar la regla de la cadena del teorema 4.6 para obtener

$$g'(t) = f_x(x, y)x'(t) + f_y(x, y)y'(t) = f_x(x, y) \cos \theta + f_y(x, y) \sin \theta.$$

Si $t = 0$, entonces $x = x_0$ y $y = y_0$, por tanto

$$g'(0) = f_x(x_0, y_0) \cos \theta + f_y(x_0, y_0) \sin \theta.$$

De acuerdo con la definición de $g'(t)$ también es verdad que

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cos \theta, y_0 + t \sin \theta) - f(x_0, y_0)}{t}. \end{aligned}$$

Por consiguiente, $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \cos \theta + f_y(x_0, y_0) \sin \theta$.

Consulte LarsonCalculus.com para el video de Bruce Edwards de esta demostración. ■

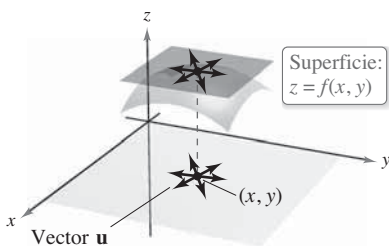


Figura 4.45

Hay una cantidad infinita de derivadas direccionales en un punto dado de una superficie, una para cada dirección especificada por \mathbf{u} , como se muestra en la figura 4.45. Dos de estas son las derivadas parciales f_x y f_y .

1. En la dirección del eje x positivo ($\theta = 0$): $\mathbf{u} = \cos 0 \mathbf{i} + \sin 0 \mathbf{j} = \mathbf{i}$

$$D_{\mathbf{i}}f(x, y) = f_x(x, y) \cos 0 + f_y(x, y) \sin 0 = f_x(x, y)$$

2. En la dirección del eje y positivo ($\theta = \frac{\pi}{2}$): $\mathbf{u} = \cos \frac{\pi}{2} \mathbf{i} + \sin \frac{\pi}{2} \mathbf{j} = \mathbf{j}$

$$D_{\mathbf{j}}f(x, y) = f_x(x, y) \cos \frac{\pi}{2} + f_y(x, y) \sin \frac{\pi}{2} = f_y(x, y)$$

EJEMPLO 1 Hallar una derivada direccional

Encuentre la derivada direccional de

$$f(x, y) = 4 - x^2 - \frac{1}{4}y^2 \quad \text{Superficie}$$

en $(1, 2)$ en la dirección de

$$\mathbf{u} = \left(\cos \frac{\pi}{3}\right)\mathbf{i} + \left(\sin \frac{\pi}{3}\right)\mathbf{j}. \quad \text{Dirección}$$

Solución Como $f_x(x, y) = -2x$ y $f_y(x, y) = -y/2$ son continuas, f es diferenciable, y puede aplicar el teorema 4.9.

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = f_x(x, y) \cos \theta + f_y(x, y) \sin \theta = (-2x) \cos \theta + \left(-\frac{y}{2}\right) \sin \theta$$

Evaluando en $\theta = \pi/3$, $x = 1$ y $y = 2$ obtiene,

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(1, 2) &= (-2)\left(\frac{1}{2}\right) + (-1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\approx -1.866. \end{aligned}$$

Vea figura 4.46.

Observe en la figura 4.46 que la derivada direccional se puede interpretar como la pendiente de la superficie en el punto $(1, 2, 2)$ en la dirección del vector unitario \mathbf{u} .

Usted ha especificado la dirección por medio de un vector unitario \mathbf{u} . Si la dirección está dada por un vector cuya longitud no es 1, debe normalizar el vector antes de aplicar la fórmula del teorema 4.9.

EJEMPLO 2 Hallar una derivada direccional

... ▶ Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Encuentre la derivada direccional de

$$f(x, y) = x^2 \sin 2y \quad \text{Superficie}$$

en $(1, \pi/2)$ en la dirección de

$$\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}. \quad \text{Dirección}$$

Solución Como $f_x(x, y) = 2x \sin 2y$, y $f_y(x, y) = 2x^2 \cos 2y$ son continuas, f es diferenciable y puede aplicar el teorema 4.9. Comience por calcular un vector unitario en la dirección de \mathbf{v} .

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$$

Usando este vector unitario, tiene

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = (2x \sin 2y)(\cos \theta) + (2x^2 \cos 2y)(\sin \theta)$$

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f\left(1, \frac{\pi}{2}\right) &= (2 \sin \pi)\left(\frac{3}{5}\right) + (2 \cos \pi)\left(-\frac{4}{5}\right) \\ &= (0)\left(\frac{3}{5}\right) + (-2)\left(-\frac{4}{5}\right) \\ &= \frac{8}{5}. \end{aligned}$$

Vea figura 4.47.

Superficie:
 $f(x, y) = 4 - x^2 - \frac{1}{4}y^2$

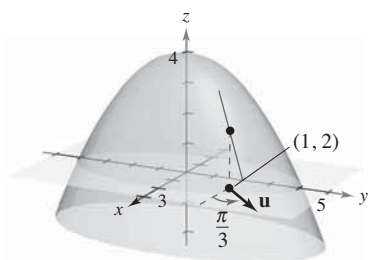


Figura 4.46

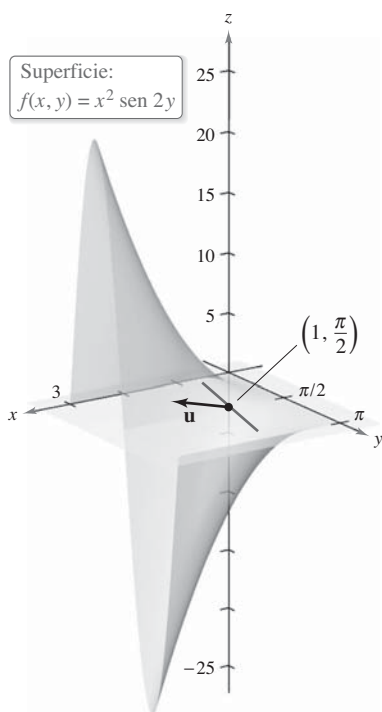
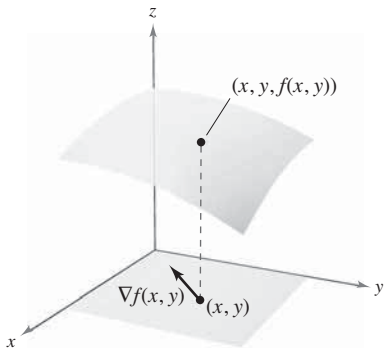


Figura 4.47



El gradiente de f es un vector en el plano xy .

Figura 4.48

El gradiente de una función de dos variables

El **gradiente** de una función de dos variables es una función vectorial de dos variables. Esta función tiene múltiples aplicaciones importantes, algunas de las cuales se describen más adelante en esta misma sección.

Definición de gradiente de una función de dos variables

Sea $z = f(x, y)$ una función de x y y tal que f_x y f_y existen. Entonces el **gradiente de f** , denotado por $\nabla f(x, y)$, es el vector

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}.$$

(El símbolo ∇f se lee como nabla f .) Otra notación para el gradiente es **grad** $f(x, y)$. En la figura 4.48 advierta que para cada (x, y) , el gradiente $\nabla f(x, y)$ es un vector en el plano (no un vector en el espacio).

Observe que el símbolo ∇ no tiene ningún valor. Es un operador, de la misma manera que d/dx es un operador. Cuando ∇ opera sobre $f(x, y)$, produce el vector $\nabla f(x, y)$.

EJEMPLO 3 Hallar el gradiente de una función

Encuentre el gradiente de

$$f(x, y) = y \ln x + xy^2$$

en el punto $(1, 2)$.

Solución Utilizando

$$f_x(x, y) = \frac{y}{x} + y^2 \quad y \quad f_y(x, y) = \ln x + 2xy$$

tiene

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} \\ &= \left(\frac{y}{x} + y^2\right)\mathbf{i} + (\ln x + 2xy)\mathbf{j}. \end{aligned}$$

En el punto $(1, 2)$, el gradiente es

$$\begin{aligned} \nabla f(1, 2) &= \left(\frac{2}{1} + 2^2\right)\mathbf{i} + [\ln 1 + 2(1)(2)]\mathbf{j} \\ &= 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Como el gradiente de f es un vector, puede expresar la derivada direccional de f en la dirección de \mathbf{u} como

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = [f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}] \cdot [\cos \theta\mathbf{i} + \sin \theta\mathbf{j}]$$

En otras palabras, la derivada direccional es el producto escalar del gradiente y el vector de dirección. Este útil resultado se resume en el teorema siguiente.

TEOREMA 4.10 Forma alternativa de la derivada direccional

Si f es una función diferenciable de x y y , entonces la derivada direccional de f en la dirección del vector unitario \mathbf{u} es

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}.$$

EJEMPLO 4

Hallar una derivada direccional usando $\nabla f(x, y)$

Encuentre la derivada direccional de

$$f(x, y) = 3x^2 - 2y^2$$

en $(-\frac{3}{4}, 0)$ en la dirección de $P(-\frac{3}{4}, 0)$ a $Q(0, 1)$.

Solución Como las derivadas de f son continuas, f es diferenciable y puede aplicar el teorema 4.10. Un vector en la dirección dada es

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \left(0 + \frac{3}{4}\right)\mathbf{i} + (1 - 0)\mathbf{j} \\ &= \frac{3}{4}\mathbf{i} + \mathbf{j}\end{aligned}$$

y un vector unitario en esta dirección es

$$\mathbf{u} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}. \quad \text{Vector unitario en la dirección de } \overrightarrow{PQ}$$

Como

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} = 6x\mathbf{i} - 4y\mathbf{j}$$

el gradiente en $(-\frac{3}{4}, 0)$ es

$$\nabla f\left(-\frac{3}{4}, 0\right) = -\frac{9}{2}\mathbf{i} + 0\mathbf{j}. \quad \text{Gradiente en } \left(-\frac{3}{4}, 0\right)$$

Por consiguiente, en $(-\frac{3}{4}, 0)$, la derivada direccional es

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{u}}f\left(-\frac{3}{4}, 0\right) &= \nabla f\left(-\frac{3}{4}, 0\right) \cdot \mathbf{u} \\ &= \left(-\frac{9}{2}\mathbf{i} + 0\mathbf{j}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}\right) \\ &= -\frac{27}{10}. \quad \text{Derivada direccional en } \left(-\frac{3}{4}, 0\right)\end{aligned}$$

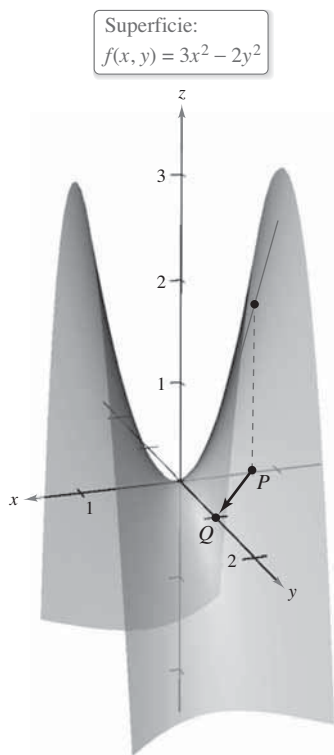


Figura 4.49

Vea la figura 4.49.

Aplicaciones del gradiente

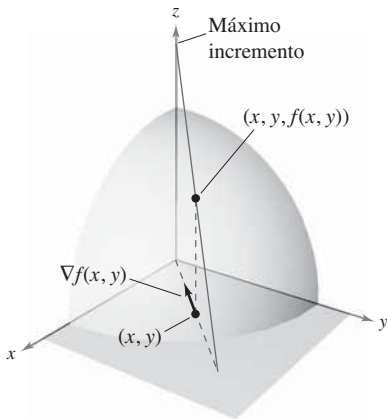
Usted ha visto ya que hay muchas derivadas direccionales en un punto de una superficie. En muchas aplicaciones, desea saber en qué dirección moverse de manera que $f(x, y)$ crezca más rápidamente. Esta dirección se llama dirección de mayor ascenso, y viene dada por el gradiente, como se establece en el teorema siguiente.

TEOREMA 4.11 Propiedades del gradiente

Sea f diferenciable en el punto.

1. Si $\nabla f(x, y) = 0$ entonces $D_{\mathbf{u}}f(x, y) = 0$ para todo \mathbf{u} .
2. La dirección de *máximo* incremento de f está dada por $\nabla f(x, y)$. El valor máximo de $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ es $\|\nabla f(x, y)\|$. Valor máximo de $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$
3. La dirección de *mínimo* incremento de f está dada por $-\nabla f(x, y)$. El valor mínimo de $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ es $-\|\nabla f(x, y)\|$. Valor mínimo de $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$

COMENTARIO La propiedad 2 del teorema 4.11 dice que en el punto (x, y) , f crece más rápidamente en dirección del gradiente, $\nabla f(x, y)$.



El gradiente de f es un vector en el plano xy que apunta en dirección del máximo incremento sobre la superficie dada por $z = f(x, y)$.

Figura 4.50

Demostración Si $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$, entonces en cualquier dirección (con cualquier \mathbf{u}), tiene

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(x, y) &= \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u} \\ &= (0\mathbf{i} + 0\mathbf{j}) \cdot (\cos \theta\mathbf{i} + \sin \theta\mathbf{j}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Si $\nabla f(x, y) \neq \mathbf{0}$, sea ϕ el ángulo entre $\nabla f(x, y)$ y un vector unitario \mathbf{u} . Usando el producto escalar puede aplicar el teorema 1.5 para concluir que

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}f(x, y) &= \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u} \\ &= \|\nabla f(x, y)\| \|\mathbf{u}\| \cos \phi \\ &= \|\nabla f(x, y)\| \cos \phi \end{aligned}$$

y se deduce que el valor máximo de $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ se presentará cuando

$$\cos \phi = 1.$$

Por tanto, $\phi = 0$, y el valor máximo de la derivada direccional se tiene cuando \mathbf{u} tiene la misma dirección que $\nabla f(x, y)$. Este valor máximo de $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ es precisamente

$$\|\nabla f(x, y)\| \cos \phi = \|\nabla f(x, y)\|.$$

De igual forma, el valor mínimo de $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ puede obtenerse haciendo

$$\phi = \pi$$

de manera que \mathbf{u} apunte en dirección opuesta a $\nabla f(x, y)$, como se muestra en la figura 4.50.

Consulte LarsonCalculus.com para el video de Bruce Edwards de esta demostración. ■

Para visualizar una de las propiedades del gradiente, imagine a un esquiador que desciende por una montaña. Si $f(x, y)$ denota la altitud a la que se encuentra el esquiador, entonces $-\nabla f(x, y)$ indica la dirección de acuerdo con la brújula que debe tomar el esquiador para seguir el camino de descenso más rápido. (Recuerde que el gradiente indica una dirección en el plano xy y no apunta hacia arriba ni hacia abajo de la ladera de la montaña.)

Otra ilustración del gradiente es la temperatura $T(x, y)$ en cualquier punto (x, y) de una placa metálica plana. En este caso, $\nabla T(x, y)$ da la dirección de máximo aumento de temperatura en el punto (x, y) , como se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 5 Hallar la dirección de máximo incremento

La temperatura en grados Celsius en la superficie de una placa metálica es

$$T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2$$

donde x y y se miden en centímetros. ¿En qué dirección a partir de $(2, -3)$ aumenta más rápido la temperatura? ¿Cuál es la razón de crecimiento?

Solución El gradiente es

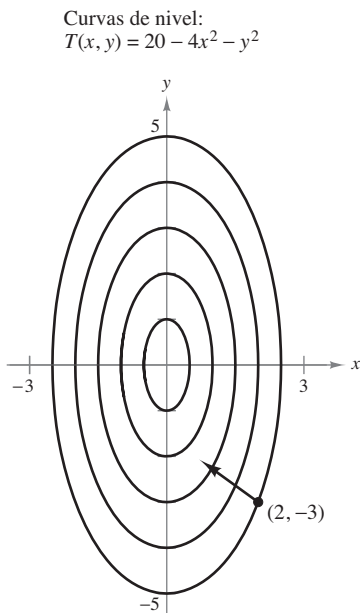
$$\begin{aligned} \nabla T(x, y) &= T_x(x, y)\mathbf{i} + T_y(x, y)\mathbf{j} \\ &= -8x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Se deduce que la dirección de máximo incremento está dada por

$$\nabla T(2, -3) = -16\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$$

como se muestra en la figura 4.51, y la tasa de incremento es

$$\begin{aligned} \|\nabla T(2, -3)\| &= \sqrt{256 + 36} \\ &= \sqrt{292} \\ &\approx 17.09^\circ \text{ por centímetro.} \end{aligned}$$



La dirección del máximo incremento de la temperatura en $(2, -3)$ está dada por $-16\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$.

Figura 4.51

La solución del ejemplo 5 puede entenderse erróneamente. Aunque el gradiente apunta en la dirección de máximo incremento de la temperatura, no necesariamente apunta hacia el punto más caliente de la placa. En otras palabras, el gradiente proporciona una solución local para encontrar un incremento relativo de la temperatura en el punto $(2, -3)$. Una vez que se abandona esa posición, la dirección de máximo incremento puede cambiar.

EJEMPLO 6**Hallar la trayectoria de un rastreador térmico**

Un rastreador térmico se encuentra en el punto $(2, -3)$ sobre una placa metálica cuya temperatura en (x, y) es

$$T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2.$$

Encuentre la trayectoria del rastreador, si este se mueve continuamente en dirección de máximo incremento de temperatura.

Solución Represente la trayectoria por la función de posición

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}.$$

Un vector tangente en cada punto $(x(t), y(t))$ está dado por

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j}.$$

Como el rastreador busca el máximo incremento de temperatura, las direcciones de $\mathbf{r}'(t)$ y $\nabla T(x, y) = -8x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}$ son iguales en todo punto de la trayectoria. Así,

$$-8x = k \frac{dx}{dt} \quad \text{y} \quad -2y = k \frac{dy}{dt}$$

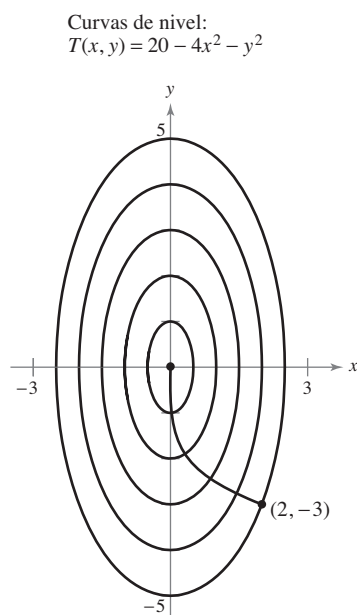
donde k depende de t . Despejando en cada ecuación para dt/k e igualando los resultados, obtiene

$$\frac{dx}{-8x} = \frac{dy}{-2y}.$$

La solución de esta ecuación diferencial es $x = Cy^4$. Como el rastreador comienza en el punto $(2, -3)$ puede determinar que $C = 2/81$. Por tanto, la trayectoria del rastreador del calor es

$$x = \frac{2}{81}y^4.$$

La trayectoria se muestra en la figura 4.52. ■



Trayectoria seguida por un rastreador térmico.

Figura 4.52

En la figura 4.52, la trayectoria del rastreador (determinada por el gradiente en cada punto) parece ser ortogonal a cada una de las curvas de nivel. Esto resulta claro cuando se considera que la temperatura $T(x, y)$ es constante en cada una de las curvas de nivel. Así, en cualquier punto (x, y) sobre la curva, la razón de cambio de T en la dirección de un vector unitario tangente \mathbf{u} es 0, y usted puede escribir

$$\nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u} = D_{\mathbf{u}}T(x, y) = 0. \quad \mathbf{u} \text{ es un vector unitario tangente}$$

Puesto que el producto escalar de $\nabla f(x, y)$ y \mathbf{u} es 0, puede concluir que deben ser ortogonales. Este resultado se establece en el teorema siguiente.

TEOREMA 4.12 El gradiente es normal a las curvas de nivel

Si es f diferenciable en (x_0, y_0) y $\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, entonces $\nabla f(x_0, y_0)$ es normal (ortogonal) a la curva de nivel que pasa por (x_0, y_0) .

EJEMPLO 7 Hallar un vector normal a una curva de nivel

Dibuje la curva de nivel que corresponde a $c = 0$ para la función dada por

$$f(x, y) = y - \text{sen } x$$

y encuentre un vector normal a varios puntos de la curva.

Solución La curva de nivel para $c = 0$ está dada por

$$0 = y - \text{sen } x$$

o

$$y = \text{sen } x$$

como se muestra en la figura 4.53(a). Ya que el vector gradiente de f en (x, y) es

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} \\ &= -\cos x\mathbf{i} + \mathbf{j} \end{aligned}$$

puede utilizar el teorema 4.12 para concluir que $\nabla f(x, y)$ es normal a la curva de nivel en el punto (x, y) . Algunos vectores gradiente son

$$\nabla f(-\pi, 0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$$

$$\nabla f\left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

$$\nabla f\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right) = \mathbf{j}$$

$$\nabla f\left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

$$\nabla f(0, 0) = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

$$\nabla f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

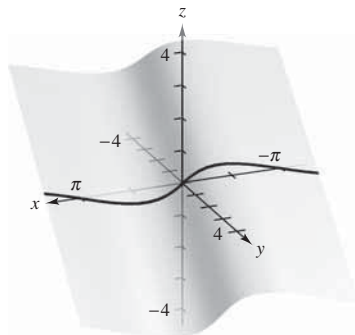
$$\nabla f\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) = \mathbf{j}$$

$$\nabla f\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \mathbf{j}$$

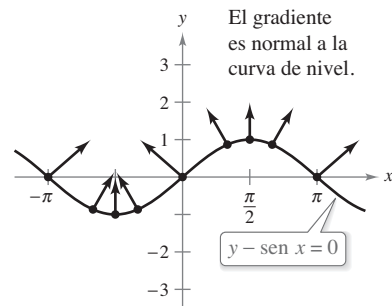
y

$$\nabla f(\pi, 0) = \mathbf{i} + \mathbf{j}.$$

Estos vectores se muestran en la figura 4.53(b).



(a) La superficie está dada por $f(x, y) = y - \text{sen } x$.



(b) La curva de nivel está dada por $f(x, y) = 0$.

Figura 4.53

Funciones de tres variables

Las definiciones de derivada direccional y gradiente se pueden extender de manera natural a funciones de tres o más variables. Como sucede a menudo, algo de la interpretación geométrica se pierde al generalizar funciones de dos variables a funciones de tres variables. Por ejemplo, usted no puede interpretar la derivada direccional de una función de tres variables como una pendiente.

Las definiciones y propiedades de la derivada direccional y del gradiente de una función de tres variables se dan en el resumen siguiente.

Derivada direccional y gradiente para funciones de tres variables

Sea f una función de x , y y z , con derivadas parciales de primer orden continuas. La **derivada direccional de f** en dirección de un vector unitario

$$\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

está dada por

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y, z) = af'_x(x, y, z) + bf'_y(x, y, z) + cf'_z(x, y, z).$$

El **gradiente de f** se define como

$$\nabla f(x, y, z) = f'_x(x, y, z)\mathbf{i} + f'_y(x, y, z)\mathbf{j} + f'_z(x, y, z)\mathbf{k}.$$

Las propiedades del gradiente son las siguientes.

1. $D_{\mathbf{u}}f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{u}$
2. Si $\nabla f(x, y, z) = \mathbf{0}$, entonces $D_{\mathbf{u}}f(x, y, z) = 0$ para toda \mathbf{u} .
3. La dirección de *máximo* crecimiento de f está dada por $\nabla f(x, y, z)$. El valor máximo de $D_{\mathbf{u}}f(x, y, z)$ es

$$\|\nabla f(x, y, z)\|. \quad \text{Valor máximo de } D_{\mathbf{u}}f(x, y, z)$$
4. La dirección de *mínimo* crecimiento de f está dada por $-\nabla f(x, y, z)$. El valor mínimo de $D_{\mathbf{u}}f(x, y, z)$ es

$$-\|\nabla f(x, y, z)\|. \quad \text{Valor mínimo de } D_{\mathbf{u}}f(x, y, z)$$

El teorema 4.12 se puede generalizar a funciones de tres variables. Bajo las hipótesis adecuadas,

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0)$$

es normal a la superficie de nivel a través de (x_0, y_0, z_0) .

EJEMPLO 8 Hallar el gradiente de una función

Encuentre $\nabla f(x, y, z)$ para la función

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z$$

y determine la dirección de máximo crecimiento de f en el punto $(2, -1, 1)$.

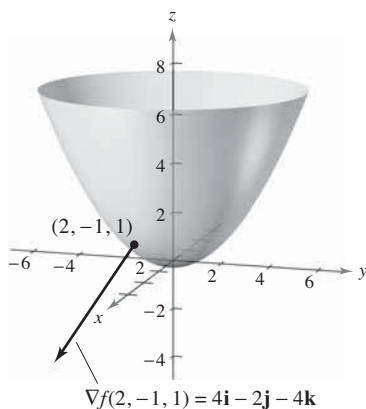
Solución El vector gradiente está dado por

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= f'_x(x, y, z)\mathbf{i} + f'_y(x, y, z)\mathbf{j} + f'_z(x, y, z)\mathbf{k} \\ &= 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 4\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Por tanto, la dirección de máximo crecimiento en $(2, -1, 1)$ es

$$\nabla f(2, -1, 1) = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}.$$

Vea la figura 4.54.



Superficie de nivel y vector gradiente en $(2, -1, 1)$ para $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z$.

Figura 4.54

4.6 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Hallar una derivada direccional En los ejercicios 1-4, utilice el teorema 4.9 para encontrar la derivada direccional de la función en P en la dirección del vector unitario $\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$.

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$, $P(1, -2)$, $\theta = \frac{\pi}{4}$

2. $f(x, y) = \frac{y}{x+y}$, $P(3, 0)$, $\theta = -\frac{\pi}{6}$

3. $f(x, y) = \sin(2x + y)$, $P(0, 0)$, $\theta = \frac{\pi}{3}$

4. $g(x, y) = xe^y$, $P(0, 2)$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$

Hallar una derivada direccional En los ejercicios 5-8, utilice el teorema 4.9 para encontrar la derivada direccional de la función en P en la dirección de \mathbf{v} .

5. $f(x, y) = 3x - 4xy + 9y$, $P(1, 2)$, $\mathbf{v} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$

6. $f(x, y) = x^3 - y^3$, $P(4, 3)$, $\mathbf{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$

7. $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $P(3, 4)$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

8. $h(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$, $P(0, 0)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

Hallar una derivada direccional En los ejercicios 9-12, utilice el teorema 4.9 para encontrar la derivada direccional de la función en P en la dirección de \mathbf{Q} .

9. $f(x, y) = x^2 + 3y^2$, $P(1, 1)$, $Q(4, 5)$

10. $f(x, y) = \cos(x + y)$, $P(0, \pi)$, $Q\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

11. $f(x, y) = e^y \sin x$, $P(0, 0)$, $Q(2, 1)$

12. $f(x, y) = \sin 2x \cos y$, $P(\pi, 0)$, $Q\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

Hallar el gradiente de una función En los ejercicios 13-18, determine el gradiente de la función en el punto dado.

13. $f(x, y) = 3x + 5y^2 + 1$, $(2, 1)$

14. $g(x, y) = 2xe^{y/x}$, $(2, 0)$

15. $z = \ln(x^2 - y)$, $(2, 3)$

16. $z = \cos(x^2 + y^2)$, $(3, -4)$

17. $w = 3x^2 - 5y^2 + 2z^2$, $(1, 1, -2)$

18. $w = x \tan(y + z)$, $(4, 3, -1)$

Hallar una derivada direccional En los ejercicios 19-22, utilice el gradiente para determinar la derivada direccional de la función en P en la dirección de \mathbf{v} .

19. $f(x, y) = xy$, $P(0, -2)$, $\mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j})$

20. $h(x, y) = e^x \sin y$, $P\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$, $\mathbf{v} = -\mathbf{i}$

21. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $P(1, 1, 1)$, $\mathbf{v} = \frac{\sqrt{3}}{3}(\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$

22. $f(x, y, z) = xy + yz + xz$, $P(1, 2, -1)$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

Hallar una derivada direccional usando el gradiente En los ejercicios 23-26, utilice el gradiente para hallar la derivada direccional de la función en P en la dirección \mathbf{Q} .

23. $g(x, y) = x^2 + y^2 + 1$, $P(1, 2)$, $Q(2, 3)$

24. $f(x, y) = 3x^2 - y^2 + 4$, $P(-1, 4)$, $Q(3, 6)$

25. $g(x, y, z) = xye^z$, $P(2, 4, 0)$, $Q(0, 0, 0)$

26. $h(x, y, z) = \ln(x + y + z)$, $P(1, 0, 0)$, $Q(4, 3, 1)$

Usar las propiedades del gradiente En los ejercicios 27-36, encuentre el gradiente de la función y el valor máximo de la derivada direccional en el punto dado.

Función	Punto
27. $f(x, y) = x^2 + 2xy$	$(1, 0)$
28. $f(x, y) = \frac{x+y}{y+1}$	$(0, 1)$
29. $h(x, y) = x \tan y$	$\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$
30. $h(x, y) = y \cos(x - y)$	$\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$
31. $g(x, y) = ye^{-x}$	$(0, 5)$
32. $g(x, y) = \ln \sqrt[3]{x^2 + y^2}$	$(1, 2)$
33. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$(1, 4, 2)$
34. $w = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}$	$(0, 0, 0)$
35. $w = xy^2z^2$	$(2, 1, 1)$
36. $f(x, y, z) = xe^{yz}$	$(2, 0, -4)$

Usar una función En los ejercicios 37-42, considere la función

$$f(x, y) = 3 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2}.$$

37. Dibuje la gráfica de f en el primer octante y marque el punto $(3, 2, 1)$ sobre la superficie.

38. Encuentre $D_{\mathbf{u}}f(3, 2)$, donde $\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$, usando cada valor dado de θ .

(a) $\theta = \frac{\pi}{4}$ (b) $\theta = \frac{2\pi}{3}$ (c) $\theta = \frac{4\pi}{3}$ (d) $\theta = -\frac{\pi}{6}$

39. Determine $D_{\mathbf{u}}f(3, 2)$, donde $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$, usando cada vector \mathbf{v}

(a) $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ (b) $\mathbf{v} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

(c) \mathbf{v} es el vector de $(1, 2)$ a $(-2, 6)$.

(d) \mathbf{v} es el vector de $(3, 2)$ a $(4, 5)$.

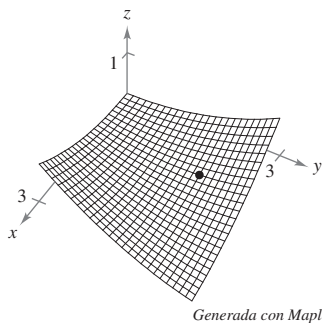
40. Encuentre $\nabla f(x, y)$.

41. Determine el valor máximo de la derivada direccional en $(3, 2)$.

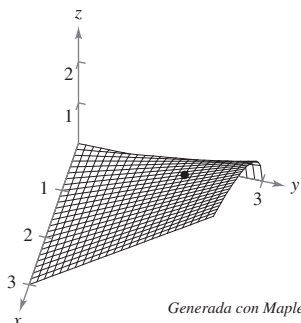
42. Encuentre un vector unitario \mathbf{u} ortogonal a $\nabla f(3, 2)$ y calcule $D_{\mathbf{u}}f(3, 2)$. Analice el significado geométrico del resultado.

Investigación En los ejercicios 43 y 44, (a) utilice la gráfica para estimar las componentes del vector en la dirección de la razón máxima de crecimiento en la función en el punto dado, (b) encuentre el gradiente en el punto y compárelo con el estimado del inciso (a), y (c) explique en qué dirección decrece más rápido la función.

43. $f(x, y) = \frac{1}{10}(x^2 - 3xy + y^2)$
(1, 2)



44. $f(x, y) = \frac{1}{2}y\sqrt{x}$
(1, 2)



 45. **Investigación** Considere la función

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$


en el punto $(4, -3, 7)$.

- Utilice un sistema algebraico por computadora para dibujar la superficie dada por esa función.
- Determine la derivada direccional $D_{\mathbf{u}}f(4, -3)$ como función de θ , donde $\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$. Utilice un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente la función en el intervalo $[0, 2\pi)$.
- Aproxime las raíces de la función del inciso (b) e interprete cada uno en el contexto del problema.
- Aproxime los números críticos de la función del inciso (b) e interprete cada uno en el contexto del problema.
- Encuentre $\|\nabla f(4, -3)\|$ y explique su relación con las respuestas del inciso (d).
- Utilice un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente la curva de nivel de la función f en el nivel $c = 7$. En esta curva, represente gráficamente el vector en la dirección de $\nabla f(4, -3)$ y establezca su relación con la curva de nivel.

46. **Investigación** Considere la función

$$f(x, y) = \frac{8y}{1 + x^2 + y^2}$$

- Verifique analíticamente que la curva de nivel de $f(x, y)$ para el nivel $c = 2$ es un círculo.
- En el punto $(\sqrt{3}, 2)$ sobre la curva de nivel para la cual $c = 2$, dibuje el vector que apunta en dirección de la mayor razón de crecimiento de la función. (Para imprimir una copia ampliada vaya a MathGraphs.com.)
- En el punto $(\sqrt{3}, 2)$ sobre la curva de nivel, dibuje el vector cuya derivada direccional sea 0.

 (d) Utilice un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente la superficie y verifique las respuestas a los incisos (a) al (c).

Hallar un vector normal En los ejercicios 47-50, determine un vector normal a la curva de nivel $f(x, y) = c$ en P .

47. $f(x, y) = 6 - 2x - 3y$ 48. $f(x, y) = x^2 + y^2$
 $c = 6, P(0, 0)$ $c = 25, P(3, 4)$

49. $f(x, y) = xy$ 50. $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$
 $c = -3, P(-1, 3)$ $c = \frac{1}{2}, P(1, 1)$

Utilizar una función En los ejercicios 51-54, (a) encuentre el gradiente de la función en P , (b) encuentre un vector normal unitario para la curva de nivel $f(x, y) = c$ en P , (c) encuentre la recta tangente a la curva de nivel $f(x, y) = c$ en P , y (d) trace la curva de nivel, el vector unitario normal y la recta tangente en el plano xy .

51. $f(x, y) = 4x^2 - y$ 52. $f(x, y) = x - y^2$
 $c = 6, P(2, 10)$ $c = 3, P(4, -1)$

53. $f(x, y) = 3x^2 - 2y^2$ 54. $f(x, y) = 9x^2 + 4y^2$
 $c = 1, P(1, 1)$ $c = 40, P(2, -1)$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

- Derivada direccional** Defina la derivada de la función $z = f(x, y)$ en la dirección de $\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$.
- Derivada direccional** Redacte un párrafo que describa la derivada direccional de la función f en la dirección de $\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$ cuando (a) $\theta = 0^\circ$ y (b) $\theta = 90^\circ$.
- Gradiente** Defina el gradiente de una función de dos variables. Dé las propiedades del gradiente.
- Dibujar una gráfica y un vector** Dibuje la gráfica de una superficie y elija un punto P sobre la superficie. Dibuje un vector en el plano xy que indique la dirección de mayor ascenso sobre la superficie en P .
- Gradiente y curvas de nivel** Describa la relación del gradiente con las curvas de nivel de una superficie dada por $z = f(x, y)$.

60. **Usar una función** Considere la función

$$f(x, y) = 9 - x^2 - y^2.$$

- Trace la gráfica de f en el primer octante y grafique el punto $(1, 2, 4)$ sobre la superficie.
- Encuentre $D_{\mathbf{u}}f(1, 2)$, donde $\mathbf{u} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$, para $\theta = -\pi/4$.
- Repita el inciso (b) para $\theta = \pi/3$.
- Encuentre $\nabla f(1, 2)$ y $\|\nabla f(1, 2)\|$.
- Encuentre un vector unitario \mathbf{u} ortogonal para $\nabla f(1, 2)$ y calcule $D_{\mathbf{u}}f(1, 2)$. Discuta el significado geométrico del resultado.

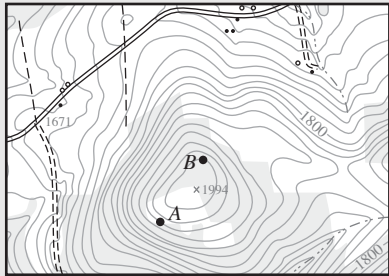
61. **Topografía** La superficie de una montaña se modela mediante la ecuación

$$h(x, y) = 5000 - 0.001x^2 - 0.004y^2.$$

Un montañista se encuentra en el punto $(500, 300, 4390)$. ¿En qué dirección debe moverse para ascender con la mayor rapidez?



¿CÓMO LO VE? La figura muestra un mapa topográfico utilizado por un grupo de excursionistas. Dibuje las trayectorias de descenso más rápidas si los excursionistas parten del punto A y si parten del punto B. (Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, vaya a *MathGraphs.com*.)



63. Distribución de temperatura La temperatura en el punto (x, y) de una placa metálica se modela mediante

$$T = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Encuentre la dirección del mayor incremento de calor desde el punto $(3, 4)$

64. Temperatura La temperatura de una placa de metal en el punto (x, y) está dada por $T(x, y) = 400e^{-(x^2+y)^2/2}$, $x \geq 0, y \geq 0$.

- (a) Utilice un sistema algebraico por computadora para graficar la función distribución de temperaturas.
- (b) Encuentre las direcciones sobre la placa en el punto $(3, 5)$, en las que no hay cambio en el calor.
- (c) Encuentre la dirección de mayor crecimiento de calor en el punto $(3, 5)$.

Hallar la dirección de máximo crecimiento En los ejercicios 65 y 66, la temperatura en grados Celsius en la superficie de una placa de metal está dada por $T(x, y)$, donde x y y se miden en centímetros. Encuentre la dirección del punto P donde la temperatura aumenta más rápido y la razón de crecimiento.

65. $T(x, y) = 80 - 3x^2 - y^2, P(-1, 5)$

66. $T(x, y) = 50 - x^2 - 4y^2, P(2, -1)$

Rastreador térmico En los ejercicios 67 y 68, encuentre la trayectoria de un rastreador térmico situado en el punto P de una placa metálica con un campo de temperatura $T(x, y)$.

67. $T(x, y) = 400 - 2x^2 - y^2, P(10, 10)$

68. $T(x, y) = 100 - x^2 - 2y^2, P(4, 3)$

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 69-72, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que demuestre que es falso.

69. Si $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, entonces $D_{\mathbf{u}}f(0, 0) = 0$ para todo vector unitario \mathbf{u} .

70. Si $f(x, y) = x + y$, entonces $-1 \leq D_{\mathbf{u}}f(x, y) \leq 1$.

71. Si $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ existe, entonces $D_{\mathbf{u}}f(x, y) = -D_{-\mathbf{u}}f(x, y)$

72. Si $D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = c$ para todo vector unitario \mathbf{u} , entonces $c = 0$.

73. Hallar una función Determine una función f tal que $\nabla f = e^x \cos y \mathbf{i} - e^x \sin y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$.

74. Fondo del océano

Un equipo de oceanógrafos está elaborando un mapa del fondo del océano para ayudar a recuperar un barco hundido. Utilizando el sonido, desarrollan el modelo

$$D = 250 + 30x^2 + 50 \operatorname{sen} \frac{\pi y}{2}, \quad 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$$

donde D es la profundidad en metros, y x y y son las distancias en kilómetros.



- (a) Utilice un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente la superficie.
- (b) Como la gráfica del inciso (a) da la profundidad, no es un mapa del fondo del océano. ¿Cómo podría modificarse el modelo para que se pudiera obtener una gráfica del fondo del océano?
- (c) ¿Cuál es la profundidad a la que se encuentra el barco si se localiza en las coordenadas $x = 1$ y $y = 0.5$?
- (d) Determine la pendiente del fondo del océano en la dirección del eje x positivo a partir del punto donde se encuentra el barco.
- (e) Determine la pendiente del fondo del océano en la dirección del eje y positivo en el punto donde se encuentra el barco.
- (f) Determine la dirección de mayor razón de cambio de la profundidad a partir del punto donde se encuentra el barco.

75. Usar una función Considere la función

$$f(x, y) = \sqrt[3]{xy}.$$

- (a) Demuestre que f es continua en el origen.
- (b) Demuestre que f_x y f_y existen en el origen, pero que la derivada direccional en el origen en todas las demás direcciones no existe.

(c) Use un sistema algebraico por computadora para graficar f cerca del origen a fin de verificar las respuestas de los incisos (a) y (b). Explique.

76. Derivada direccional Considere la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

y el vector unitario

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j}).$$

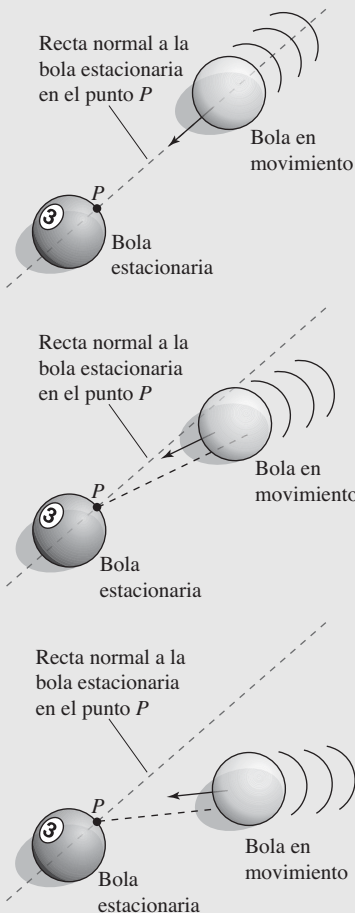
¿La derivada direccional de f en $P(0, 0)$ en la dirección de \mathbf{u} existe? Si $f(0, 0)$ se definiera como 2 en lugar de 0, existiría la derivada direccional?

4.7 Planos tangentes y rectas normales

Exploración

Bolas de billar y rectas normales

normales En cada una de las tres figuras la bola en movimiento está a punto de golpear una bola estacionaria en el punto P . Explique cómo utilizar la recta normal a la bola estacionaria en el punto P para describir el movimiento resultante en cada una de las bolas. Suponiendo que todas las bolas en movimiento tengan la misma velocidad, ¿cuál de las bolas estacionarias adquirirá mayor velocidad? ¿Cuál adquirirá menor velocidad? Explique su razonamiento.



- Hallar ecuaciones de planos tangentes y rectas normales a superficies.
- Hallar el ángulo de inclinación de una recta en el espacio.
- Comparar los gradientes $\nabla f(x, y)$ y $\nabla F(x, y, z)$.

Plano tangente y recta normal a una superficie

Hasta ahora las superficies en el espacio las ha representado principalmente por medio de ecuaciones de la forma

$$z = f(x, y). \quad \text{Ecuación de una superficie } S$$

Sin embargo, en el desarrollo que sigue es conveniente utilizar la representación más general $F(x, y, z) = 0$. Una superficie dada por $z = f(x, y)$ puede convertirla a la forma general definiendo F como

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z.$$

Puesto que $f(x, y) - z = 0$, puede considerar S como la superficie de nivel de F dada por

$$F(x, y, z) = 0. \quad \text{Ecuación alternativa de la superficie } S$$

EJEMPLO 1

Expresar la ecuación de una superficie

Dada la función

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$$

describa la superficie de nivel dada por

$$F(x, y, z) = 0.$$

Solución La superficie de nivel dada por $F(x, y, z) = 0$ puede expresarse como

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

la cual es una esfera de radio 2 centrada en el origen.

Usted ha visto muchos ejemplos acerca de la utilidad de rectas normales en aplicaciones relacionadas con curvas. Las rectas normales son igualmente importantes al analizar superficies y sólidos. Por ejemplo, considere la colisión de dos bolas de billar. Cuando una bola estacionaria es golpeada en un punto de su superficie, se mueve a lo largo de la **línea de impacto** determinada por P y por el centro de la bola. El impacto puede ser de *dos* maneras. Si la bola que golpea se mueve a lo largo de la línea de impacto, se detiene y transfiere todo su momento a la bola estacionaria, como se muestra en la figura 4.55. Si la bola que golpea no se mueve a lo largo de la línea de impacto, se desvía a un lado o al otro y retiene parte de su momento. La transferencia de parte de su momento a la bola estacionaria ocurre a lo largo de la línea de impacto, *sin tener en cuenta* la dirección de la bola que golpea, como se muestra en la figura 4.56. A esta línea de impacto se le llama **recta normal** a la superficie de la bola en el punto P .

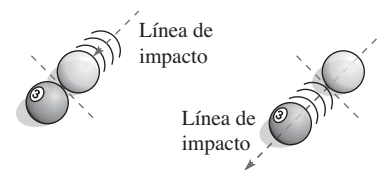


Figura 4.55

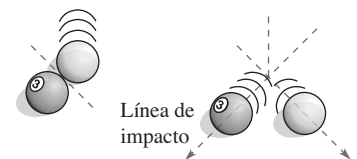


Figura 4.56

En el proceso de hallar una recta normal a una superficie, usted puede también resolver el problema de encontrar un **plano tangente** a la superficie. Sea S una superficie dada por

$$F(x, y, z) = 0$$

y sea un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ en S . Sea C una curva en S que pasa por P definida por la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

Entonces, para todo t ,

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0.$$

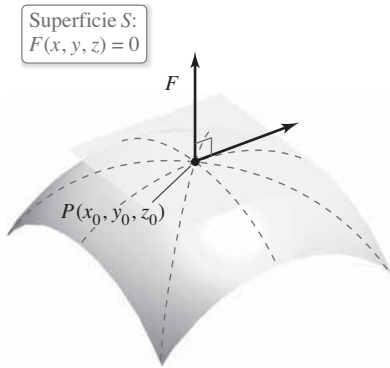
Si F es diferenciable, $x'(t)$, $y'(t)$ y $z'(t)$ existen, y por la regla de la cadena se deduce que

$$\begin{aligned} 0 &= F'(t) \\ &= F_x(x, y, z)x'(t) + F_y(x, y, z)y'(t) + F_z(x, y, z)z'(t). \end{aligned}$$

En (x_0, y_0, z_0) , la forma vectorial equivalente es

$$0 = \underbrace{\nabla F(x_0, y_0, z_0)}_{\text{Gradiente}} \cdot \underbrace{\mathbf{r}'(t_0)}_{\text{Vector tangente}}.$$

Este resultado significa que el gradiente en P es ortogonal al vector tangente de toda curva en S que pase por P . Por tanto, todas las rectas tangentes en S se encuentran en un plano que es normal a $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ y contiene a P , como se muestra en la figura 4.57



Plano tangente a la superficie S en P .

Figura 4.57

.....COMENTARIO En el resto de esta sección, suponga que $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es distinto de cero, a menos que se establezca lo contrario.

Definición de plano tangente y recta normal

Sea F diferenciable en un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de la superficie S dada por $F(x, y, z) = 0$ tal que

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}.$$

1. Al plano que pasa por P y es normal a $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ se le llama **plano tangente a S en P** .
2. A la recta que pasa por P y tiene la dirección de $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ se le llama **recta normal a S en P** .

Para hallar una ecuación para el plano tangente a S en (x_0, y_0, z_0) , sea un punto (x, y, z) arbitrario en el plano tangente. Entonces el vector

$$\mathbf{v} = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$$

se encuentra en el plano tangente. Como $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es normal al plano tangente en (x_0, y_0, z_0) , debe ser ortogonal a todo vector en el plano tangente, y se tiene

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{v} = 0$$

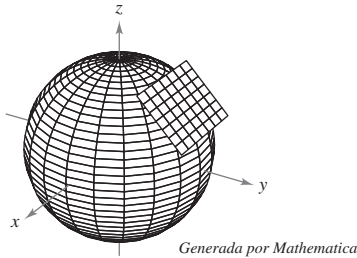
lo que demuestra el resultado enunciado en el teorema siguiente.

TEOREMA 4.13 Ecuación del plano tangente

Si F es diferenciable en (x_0, y_0, z_0) , entonces una ecuación del plano tangente a la superficie dada por $F(x, y, z) = 0$ en (x_0, y_0, z_0) es

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

► **TECNOLOGÍA** Algunas herramientas de graficación tridimensionales pueden representar planos tangentes a superficies. A continuación se muestra un ejemplo.



Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

EJEMPLO 2

Hallar una ecuación de un plano tangente

Determine una ecuación del plano tangente al hiperboloide

$$z^2 - 2x^2 - 2y^2 = 12$$

en el punto $(1, -1, 4)$.

Solución Comience por expresar la ecuación de la superficie como

$$z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 12 = 0.$$

Entonces, considerando

$$F(x, y, z) = z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 12$$

usted tiene

$$F_x(x, y, z) = -4x, \quad F_y(x, y, z) = -4y \quad \text{y} \quad F_z(x, y, z) = 2z.$$

En el punto $(1, -1, 4)$, las derivadas parciales son

$$F_x(1, -1, 4) = -4, \quad F_y(1, -1, 4) = 4 \quad \text{y} \quad F_z(1, -1, 4) = 8.$$

Por tanto, una ecuación del plano tangente en $(1, -1, 4)$ es

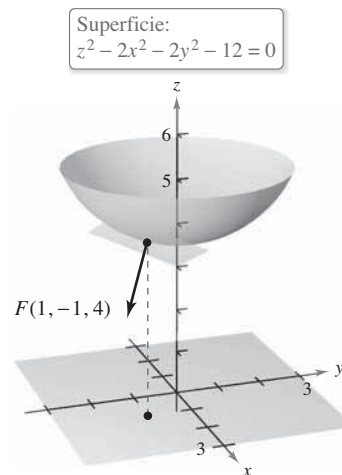
$$-4(x - 1) + 4(y + 1) + 8(z - 4) = 0$$

$$-4x + 4 + 4y + 4 + 8z - 32 = 0$$

$$-4x + 4y + 8z - 24 = 0$$

$$x - y - 2z + 6 = 0.$$

La figura 4.58 muestra una parte del hiperboloide y el plano tangente.



Plano tangente a la superficie.

Figura 4.58

Para hallar la ecuación del plano tangente en un punto a una superficie dada por $z = f(x, y)$, defina la función F mediante

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z.$$

Entonces S está dada por medio de la superficie de nivel $F(x, y, z) = 0$, y por el teorema 4.13, una ecuación del plano tangente a S en el punto (x_0, y_0, z_0) es

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

EJEMPLO 3 Hallar una ecuación del plano tangente

Encuentre la ecuación del plano tangente al paraboloido

$$z = 1 - \frac{1}{10}(x^2 + 4y^2)$$

en el punto $(1, 1, \frac{1}{2})$.

Solución De $z = f(x, y) = 1 - \frac{1}{10}(x^2 + 4y^2)$, se obtiene

$$f_x(x, y) = -\frac{x}{5} \Rightarrow f_x(1, 1) = -\frac{1}{5}$$

y

$$f_y(x, y) = -\frac{4y}{5} \Rightarrow f_y(1, 1) = -\frac{4}{5}.$$

Así, una ecuación del plano tangente en $(1, 1, \frac{1}{2})$ es

$$f_x(1, 1)(x - 1) + f_y(1, 1)(y - 1) - \left(z - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$-\frac{1}{5}(x - 1) - \frac{4}{5}(y - 1) - \left(z - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$-\frac{1}{5}x - \frac{4}{5}y - z + \frac{3}{2} = 0.$$

Este plano tangente se muestra en la figura 4.59.

El gradiente $\nabla F(x, y, z)$ proporciona una manera adecuada de obtener ecuaciones de rectas normales, como se muestra en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Hallar una ecuación de una recta normal a una superficie

... > Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Encuentre un conjunto de ecuaciones simétricas para la recta normal a la superficie dada por

$$xyz = 12$$

en el punto $(2, -2, -3)$.

Solución Comience por hacer

$$F(x, y, z) = xyz - 12.$$

Entonces, el gradiente está dado por

$$\begin{aligned} \nabla F(x, y, z) &= F_x(x, y, z)\mathbf{i} + F_y(x, y, z)\mathbf{j} + F_z(x, y, z)\mathbf{k} \\ &= yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k} \end{aligned}$$

y en el punto $(2, -2, -3)$ tiene

$$\begin{aligned} \nabla F(2, -2, -3) &= (-2)(-3)\mathbf{i} + (2)(-3)\mathbf{j} + (2)(-2)\mathbf{k} \\ &= 6\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}. \end{aligned}$$

La recta normal en $(2, -2, -3)$ tiene números de dirección o directores 6, -6 y -4, y el conjunto correspondiente de ecuaciones simétricas es

$$\frac{x - 2}{6} = \frac{y + 2}{-6} = \frac{z + 3}{-4}.$$

Vea la figura 4.60.

Superficie:
 $z = 1 - \frac{1}{10}(x^2 + 4y^2)$

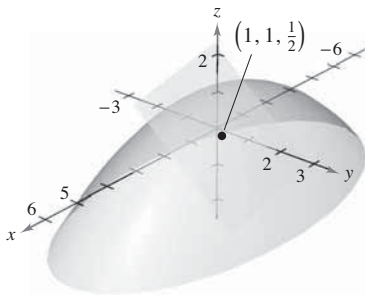


Figura 4.59

Superficie: $xyz = 12$

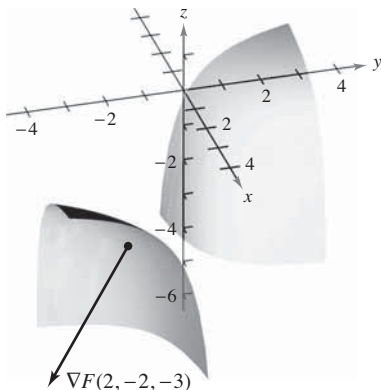


Figura 4.60

Saber que el gradiente $\nabla F(x, y, z)$ es normal a la superficie dada por $F(x, y, z) = 0$ le permite resolver diversos problemas relacionados con superficies y curvas en el espacio.

EJEMPLO 5 Hallar la ecuación de una recta tangente a una curva

Describa la recta tangente a la curva de intersección de las superficies

$x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 20$ Elipsoide

y el paraboloido

$x^2 + y^2 + z = 4$ Paraboloido

en el punto $(0, 1, 3)$, como se muestra en la figura 4.61.

Solución Comience la búsqueda de los gradientes a ambas superficies en el punto $(0, 1, 3)$.

Elipsoide

$F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 20$
 $\nabla F(x, y, z) = 2xi + 4yj + 4zk$
 $\nabla F(0, 1, 3) = 4j + 12k$

Paraboloido

$G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z - 4$
 $\nabla G(x, y, z) = 2xi + 2yj + k$
 $\nabla G(0, 1, 3) = 2j + k$

El producto vectorial de estos dos gradientes es un vector tangente a ambas superficies en el punto $(0, 1, 3)$.

$$\nabla F(0, 1, 3) \times \nabla G(0, 1, 3) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -20\mathbf{i}$$

Por tanto, la recta tangente a la curva de intersección de las dos superficies en el punto $(0, 1, 3)$ es una recta paralela al eje x y que pasa por el punto $(0, 1, 3)$.

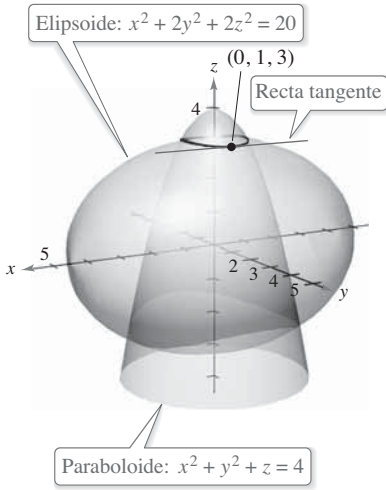


Figura 4.61

El ángulo de inclinación de un plano

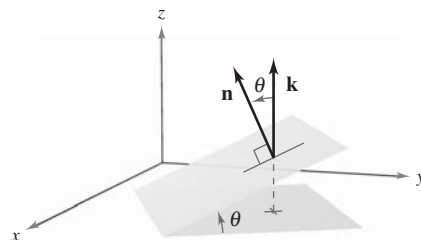
Otro uso del gradiente

$\nabla F(x, y, z)$

es determinar el ángulo de inclinación del plano tangente a una superficie. El ángulo de inclinación de un plano se define como el ángulo θ ($0 \leq \theta \leq \pi/2$) entre el plano dado y el plano xy , como se muestra en la figura 4.62. (El ángulo de inclinación de un plano horizontal es por definición cero.) Como el vector \mathbf{k} es normal al plano xy , usted puede utilizar la fórmula del coseno del ángulo entre dos planos (dado en la sección 1.5) para concluir que el ángulo de inclinación de un plano con vector normal \mathbf{n} está dado por

$$\cos \theta = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}|}{\|\mathbf{n}\| \|\mathbf{k}\|} = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}|}{\|\mathbf{n}\|}$$

Ángulo de inclinación de un plano



El ángulo de inclinación.

Figura 4.62

EJEMPLO 6

Hallar el ángulo de inclinación de un plano tangente

Determine el ángulo de inclinación del plano tangente al elipsoide

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{3} = 1$$

en el punto (2, 2, 1).

Solución Comience haciendo

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{3} - 1.$$

Entonces, el gradiente de F en el punto (2, 2, 1) es

$$\nabla F(x, y, z) = \frac{x}{6}\mathbf{i} + \frac{y}{6}\mathbf{j} + \frac{2z}{3}\mathbf{k}$$

$$\nabla F(2, 2, 1) = \frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}.$$

Como $\nabla F(2, 2, 1)$ es normal al plano tangente y \mathbf{k} es normal al plano xy , se deduce que el ángulo de inclinación del plano tangente está dado por

$$\cos \theta = \frac{|\nabla F(2, 2, 1) \cdot \mathbf{k}|}{\|\nabla F(2, 2, 1)\|} = \frac{2/3}{\sqrt{(1/3)^2 + (1/3)^2 + (2/3)^2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

lo que implica que

$$\theta = \arccos \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 35.3^\circ,$$

como se muestra en la figura 4.63.

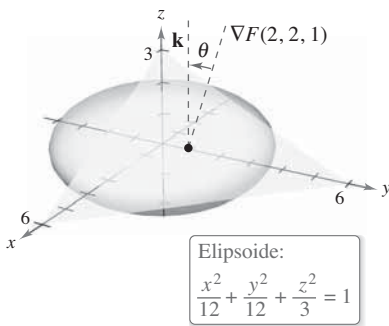


Figura 4.63

Un caso especial del procedimiento mostrado en el ejemplo 6 merece mención especial. El ángulo de inclinación θ del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en (x_0, y_0, z_0) está dado por

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{[f_x(x_0, y_0)]^2 + [f_y(x_0, y_0)]^2 + 1}}. \quad \text{Fórmula alternativa para el ángulo de inclinación (Vea el ejercicio 67).}$$

Comparación de los gradientes $\nabla f(x, y)$ y $\nabla F(x, y, z)$

Esta sección concluye con una comparación de los gradientes $\nabla f(x, y)$ y $\nabla F(x, y, z)$. En la sección anterior usted vio que el gradiente de una función f de dos variables es normal a las curvas de nivel de f . Específicamente, el teorema 4.12 establece que si f es diferenciable en (x_0, y_0) y $\nabla f(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, entonces $\nabla f(x_0, y_0)$ es normal a la curva de nivel que pasa por (x_0, y_0) . Habiendo desarrollado rectas normales a superficies, ahora puede extender este resultado a una función de tres variables. La demostración del teorema 4.14 se deja como ejercicio (vea el ejercicio 68).

TEOREMA 4.14 El gradiente es normal a las superficies de nivel

Si F es diferenciable en (x_0, y_0, z_0) y

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$$

entonces $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es normal a la superficie de nivel que pasa por (x_0, y_0, z_0) .

Al trabajar con los gradientes $\nabla f(x, y)$ y $\nabla F(x, y, z)$ debe recordar que $\nabla f(x, y)$ es un vector en el plano xy y $\nabla F(x, y, z)$ es un vector en el espacio.

4.7 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Describir una superficie En los ejercicios 1-4, describa la superficie de nivel $F(x, y, z) = 0$.

- $F(x, y, z) = 3x - 5y + 3z - 15$
- $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 25$
- $F(x, y, z) = 4x^2 + 9y^2 - 4z^2$
- $F(x, y, z) = 16x^2 - 9y^2 + 36z$

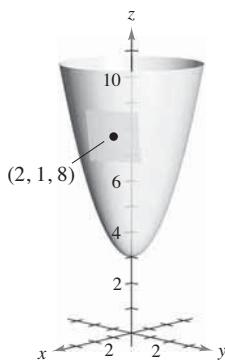
Hallar un vector unitario normal En los ejercicios 5-8, determine un vector unitario normal a la superficie en el punto dado. [Sugerencia: Normalice el vector gradiente $\nabla F(x, y, z)$.]

Superficie	Punto
5. $3x + 4y + 12z = 0$	$(0, 0, 0)$
6. $x^2 + y^2 + z^2 = 6$	$(1, 1, 2)$
7. $x^2 + 3y + z^3 = 9$	$(2, -1, 2)$
8. $x^2y^3 - y^2z + 2xz^3 = 4$	$(-1, 1, -1)$

Hallar la ecuación de un plano tangente En los ejercicios 9-20, determine una ecuación del plano tangente a la superficie en el punto dado.

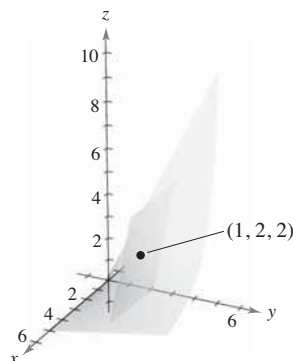
9. $z = x^2 + y^2 + 3$

$(2, 1, 8)$



10. $f(x, y) = \frac{y}{x}$

$(1, 2, 2)$



11. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $(3, 4, 5)$

12. $g(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$, $(1, 0, 0)$

13. $g(x, y) = x^2 + y^2$, $(1, -1, 2)$

14. $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$, $(1, 2, 1)$

15. $h(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, $(3, 4, \ln 5)$

16. $h(x, y) = \cos y$, $\left(5, \frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

17. $x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$, $(2, -2, 4)$

18. $x^2 + 2z^2 = y^2$, $(1, 3, -2)$

19. $xy^2 + 3x - z^2 = 8$, $(1, -3, 2)$

20. $z = e^x(\sin y + 1)$, $\left(0, \frac{\pi}{2}, 2\right)$

Hallar la ecuación de un plano y una recta normal En los ejercicios 21-30, determine una ecuación del plano tangente y encuentre ecuaciones simétricas para la recta normal a la superficie en el punto dado.

21. $x + y + z = 9$, $(3, 3, 3)$

22. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $(1, 2, 2)$

23. $x^2 + y^2 + z = 9$, $(1, 2, 4)$

24. $z = 16 - x^2 - y^2$, $(2, 2, 8)$

25. $z = x^2 - y^2$, $(3, 2, 5)$

26. $xy - z = 0$, $(-2, -3, 6)$

27. $xyz = 10$, $(1, 2, 5)$

28. $z = ye^{2xy}$, $(0, 2, 2)$

29. $z = \arctan \frac{y}{x}$, $\left(1, 1, \frac{\pi}{4}\right)$

30. $y \ln xz^2 = 2$, $(e, 2, 1)$

Hallar la ecuación de una recta tangente a una curva En los ejercicios 31-36, (a) encuentre ecuaciones simétricas de la recta tangente a la curva de intersección de las superficies en el punto dado, y (b) encuentre el coseno del ángulo entre los vectores gradiente en este punto. Establezca si son ortogonales o no las superficies en el punto de intersección.

31. $x^2 + y^2 = 2$, $z = x$, $(1, 1, 1)$

32. $z = x^2 + y^2$, $z = 4 - y$, $(2, -1, 5)$

33. $x^2 + z^2 = 25$, $y^2 + z^2 = 25$, $(3, 3, 4)$

34. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $5x - 2y + 3z = 22$, $(3, 4, 5)$

35. $x^2 + y^2 + z^2 = 14$, $x - y - z = 0$, $(3, 1, 2)$

36. $z = x^2 + y^2$, $x + y + 6z = 33$, $(1, 2, 5)$

Hallar el ángulo de inclinación de un plano tangente En los ejercicios 37-40, encuentre el ángulo de inclinación θ del plano tangente a la superficie en el punto dado.

37. $3x^2 + 2y^2 - z = 15$, $(2, 2, 5)$

38. $2xy - z^3 = 0$, $(2, 2, 2)$

39. $x^2 - y^2 + z = 0$, $(1, 2, 3)$

40. $x^2 + y^2 = 5$, $(2, 1, 3)$

Plano tangente horizontal En los ejercicios 41-46, encuentre el (los) punto(s) sobre la superficie en la cual el plano tangente es horizontal.

41. $z = 3 - x^2 - y^2 + 6y$

42. $z = 3x^2 + 2y^2 - 3x + 4y - 5$

43. $z = x^2 - xy + y^2 - 2x - 2y$

44. $z = 4x^2 + 4xy - 2y^2 + 8x - 5y - 4$

45. $z = 5xy$

46. $z = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

Superficies tangentes En los ejercicios 47 y 48, demuestre que las superficies son tangentes a cada una en el punto dado para demostrar que las superficies tienen el mismo plano tangente en este punto.

47. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 3, x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 10y + 14 = 0,$
 (-1, 1, 0)

48. $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 12y + 4z + 42 = 0,$
 $x^2 + y^2 + 2z = 7, (2, 3, -3)$

Planos tangentes perpendiculares En los ejercicios 49 y 50, (a) demuestre que las superficies intersecan en el punto dado y (b) demuestre que las superficies tienen planos tangentes perpendiculares en este punto.

49. $z = 2xy^2, 8x^2 - 5y^2 - 8z = -13, (1, 1, 2)$

50. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 4z - 12 = 0,$
 $4x^2 + y^2 + 16z^2 = 24, (1, -2, 1)$

51. **Usar un elipsoide** Encuentre un punto sobre el elipsoide $x^2 + 4y^2 + z^2 = 9$, donde el plano tangente es perpendicular a la recta, con ecuaciones paramétricas $x = 2 - 4t, y = 1 + 8t, z = 3 - 2t$.

52. **Usar un hiperboloide** Encuentre un punto sobre el hiperboloide $x^2 + 4y^2 - z^2 = 1$, donde el plano tangente es paralelo al plano $x + 4y - z = 0$.

DESARROLLO DE CONCEPTOS

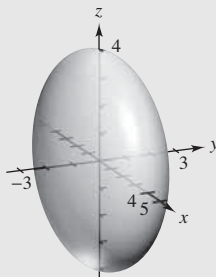
53. **Plano tangente** Dé la forma estándar de la ecuación del plano tangente a una superficie dada por $F(x, y, z) = 0$ en (x_0, y_0, z_0) .

54. **Rectas normales** En algunas superficies, las rectas normales en cualquier punto pasan por el mismo objeto geométrico. ¿Cuál es el objeto geométrico común en una esfera? ¿Cuál es el objeto geométrico común en un cilindro circular recto? Explique.

55. **Plano tangente** Analice la relación entre el plano tangente a una superficie y la aproximación por diferenciales.



56. **¿CÓMO LO VE?** La gráfica muestra el elipsoide $x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$. Utilice la gráfica para determinar la ecuación del plano tangente a cada uno de los puntos dados.



- (a) (4, 0, 0) (b) (0, -2, 0) (c) (0, 0, -4)

57. **Investigación** Considere la función

$$f(x, y) = \frac{4xy}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)}$$

en los intervalos $-2 \leq x \leq 2$ y $0 \leq y \leq 3$.

(a) Determine un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta normal y una ecuación del plano tangente a la superficie en el punto (1, 1, 1).

(b) Repita el inciso (a) con el punto $(-1, 2, -\frac{4}{3})$.



(c) Utilice un sistema algebraico por computadora y represente gráficamente la superficie, las rectas normales y los planos tangentes encontrados en los incisos (a) y (b).

58. **Investigación** Considere la función

$$f(x, y) = \frac{\text{sen } y}{x}$$

en los intervalos $-3 \leq x \leq 3$ y $0 \leq y \leq 2\pi$.

(a) Determine un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta normal y una ecuación del plano tangente a la superficie en el punto

$$\left(2, \frac{\pi}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

(b) Repita el inciso (a) con el punto $\left(-\frac{2}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{3}{2}\right)$.



(c) Utilice un sistema algebraico por computadora y represente gráficamente la superficie, las rectas normales y los planos tangentes calculados en los incisos (a) y (b).

59. **Usar funciones** Considere las funciones

$$f(x, y) = 6 - x^2 - \frac{y^2}{4} \quad \text{y} \quad g(x, y) = 2x + y.$$

(a) Determine un conjunto de ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva de intersección de las superficies en el punto (1, 2, 4), y encuentre el ángulo entre los vectores gradientes.



(b) Utilice un sistema algebraico por computadora y represente gráficamente las superficies. Represente gráficamente la recta tangente obtenida en el inciso (a).

60. **Usar funciones** Considere las funciones

$$f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2} + 2x - 4y$$

y

$$g(x, y) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - 3x^2 + y^2 + 6x + 4y}.$$



(a) Utilice un sistema algebraico por computadora y represente gráficamente la porción del primer octante de las superficies representadas por f y g .

(b) Encuentre un punto en el primer octante sobre la curva intersección y demuestre que las superficies son ortogonales en este punto.

(c) Estas superficies son ortogonales a lo largo de la curva intersección. ¿Demuestra este hecho el inciso (b)? Explique.

Expresar un plano tangente En los ejercicios 61 y 62, demuestre que el plano tangente a la superficie cuádrica en el punto (x_0, y_0, z_0) , puede expresarse en la forma dada.

61. Elipsoide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Plano: $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} = 1$

62. Hiperboloide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

Plano: $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - \frac{z_0z}{c^2} = 1$

63. **Planos tangentes de un cono** Demuestre que todo plano tangente al cono

$$z^2 = a^2x^2 + b^2y^2$$

pasa por el origen.

64. **Planos tangentes** Sea f una función derivable y considere la superficie

$$z = xf\left(\frac{y}{x}\right).$$

Demuestre que el plano tangente a cualquier punto $P(x_0, y_0, z_0)$ de la superficie pasa por el origen.

65. **Aproximación** Considere las aproximaciones siguientes para una función $f(x, y)$ centrada en $(0, 0)$.

Aproximación lineal:

$$P_1(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y$$


Aproximación cuadrática:

$$P_2(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0)x^2 + f_{xy}(0, 0)xy + \frac{1}{2}f_{yy}(0, 0)y^2$$

[Observe que la aproximación lineal es el plano tangente a la superficie en $(0, 0, f(0, 0))$.]

- (a) Encuentre la aproximación lineal a $f(x, y) = e^{(x-y)}$ centrada en $(0, 0)$.
- (b) Encuentre la aproximación cuadrática a $f(x, y) = e^{(x-y)}$ centrada en $(0, 0)$.
- (c) Si $x = 0$ es la aproximación cuadrática, ¿para qué función se obtiene el polinomio de Taylor de segundo orden? Responda la misma pregunta para $y = 0$.
- (d) Complete la tabla.

x	y	$f(x, y)$	$P_1(x, y)$	$P_2(x, y)$
0	0			
0	0.1			
0.2	0.1			
0.2	0.5			
1	0.5			

 (e) Utilice un sistema algebraico por computadora y represente gráficamente las superficies $z = f(x, y)$, $z = P_1(x, y)$ y $z = P_2(x, y)$.

66. **Aproximación** Repita el ejercicio 65 con la función $f(x, y) = \cos(x + y)$.

67. **Demostración** Demuestre que el ángulo de inclinación θ del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0, z_0) está dado por

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{[f_x(x_0, y_0)]^2 + [f_y(x_0, y_0)]^2 + 1}}$$

68. **Demostración** Demuestre el teorema 4.14.

PROYECTO DE TRABAJO

Flora silvestre

La diversidad de la flora silvestre en una pradera se puede medir contando el número de margaritas, linos, amapolas, etc. Si existen n tipos de flores silvestres, cada una en una proporción p_i respecto a la población total, se deduce que

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

La medida de diversidad de la población se define como

$$H = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i.$$

En esta definición, se entiende que $p_i \log_2 p_i = 0$ cuando $p_i = 0$. Las tablas muestran las proporciones de flores silvestres en una pradera en mayo, junio, agosto y septiembre.

Mayo

Tipo de flor	1	2	3	4
Proporción	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{16}$

Junio

Tipo de flor	1	2	3	4
Proporción	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$


Agosto

Tipo de flor	1	2	3	4
Proporción	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Septiembre

Tipo de flor	1	2	3	4
Proporción	0	0	0	1

- (a) Determine la diversidad de flores silvestres durante cada mes. ¿Cómo interpretaría la diversidad en septiembre? ¿Qué mes tiene mayor diversidad?
- (b) Si la pradera contiene 10 tipos de flores silvestres en proporciones aproximadamente iguales, ¿la diversidad de la población es mayor o menor que la diversidad de una distribución similar con 4 tipos de flores? ¿Qué tipo de distribución (de 10 tipos de flores silvestres) produciría la diversidad máxima?
- (c) Sea H_n la diversidad máxima de n tipos de flores silvestres. ¿Tiende H_n a algún límite cuando n tiende a ∞ ?

 **PARA INFORMACIÓN ADICIONAL** Los biólogos utilizan el concepto de diversidad para medir las proporciones de diferentes tipos de organismos dentro de un medio ambiente. Para más información sobre esta técnica, vea el artículo "Information Theory and Biological Diversity", de Steven Kolmes y Kevin Mitchell, en *UMAP Modules*.

4.8 Extremos de funciones de dos variables

- Hallar extremos absolutos y relativos de una función de dos variables.
- Utilizar el criterio de las segundas derivadas parciales para hallar un extremo relativo de una función de dos variables.

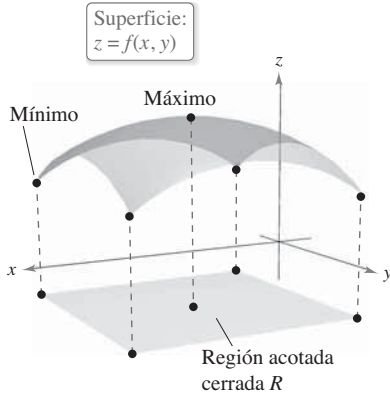
Extremos absolutos y extremos relativos

Anteriormente se han estudiado las técnicas para hallar valores extremos de una función de una (sola) variable. En esta sección extenderá estas técnicas a funciones de dos variables. Por ejemplo, en el teorema 4.15 se extiende el teorema del valor extremo para una función de una sola variable a una función de dos variables.

Considere la función continua f de dos variables, definida en una región acotada cerrada R . Los valores $f(a, b)$ y $f(c, d)$, tales que

$$f(a, b) \leq f(x, y) \leq f(c, d) \quad (a, b) \text{ y } (c, d) \text{ están en } R.$$

para todo (x, y) en R se conocen como el **mínimo** y **máximo** de f en la región R , como se muestra en la figura 4.64. Recuerde de la sección 4.2 que una región en el plano es *cerrada* si contiene todos sus puntos frontera. El teorema del valor extremo se refiere a una región en el plano que es cerrada y *acotada*. A una región en el plano se le llama **acotada** si es una subregión de un disco cerrado en el plano.



R contiene algún(os) punto(s) donde $f(x, y)$ es un mínimo y algún(os) punto(s) donde $f(x, y)$ es un máximo.

Figura 4.64

TEOREMA 4.15 Teorema del valor extremo

Sea f una función continua de dos variables x y y definida en una región acotada cerrada R en el plano xy .

1. Existe por lo menos un punto en R , en el que f toma un valor mínimo.
2. Existe por lo menos un punto en R , en el que f toma un valor máximo.

A un mínimo también se le llama un **mínimo absoluto**, y a un máximo también se le llama un **máximo absoluto**. Como en el cálculo de una variable, se hace una distinción entre extremos absolutos y **extremos relativos**.

Definición de extremos relativos

Sea f una función definida en una región R que contiene (x_0, y_0) .

1. La función f tiene un **mínimo relativo** en (x_0, y_0) si

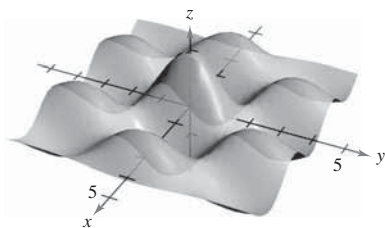
$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$$

para todo (x, y) en un disco *abierto* que contiene (x_0, y_0) .

2. La función f tiene un **máximo relativo** en (x_0, y_0) si

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$$

para todo (x, y) en un disco *abierto* que contiene (x_0, y_0) .



Extremo relativo.

Figura 4.65

Decir que f tiene un máximo relativo en (x_0, y_0) significa que el punto (x_0, y_0, z_0) es por lo menos tan alto como todos los puntos cercanos en la gráfica de

$$z = f(x, y).$$

De manera similar, f tiene un mínimo relativo en (x_0, y_0) si (x_0, y_0, z_0) es por lo menos tan bajo como todos los puntos cercanos en la gráfica. (Vea la figura 4.65.)



KARL WEIERSTRASS
(1815-1897)

Aunque el teorema del valor extremo había sido ya utilizado antes por los matemáticos, el primero en proporcionar una demostración rigurosa fue el matemático alemán Karl Weierstrass, quien también proporcionó justificaciones rigurosas para muchos otros resultados matemáticos ya de uso común. A él se deben muchos de los fundamentos lógicos sobre los cuales se basa el cálculo moderno. Consulte LarsonCalculus.com para leer más acerca de esta biografía.

Para localizar los extremos relativos de f , puede investigar los puntos en los que el gradiente de f es $\mathbf{0}$ o los puntos en los cuales una de las derivadas parciales no exista. Tales puntos se llaman **puntos críticos** de f .

Definición de los puntos críticos

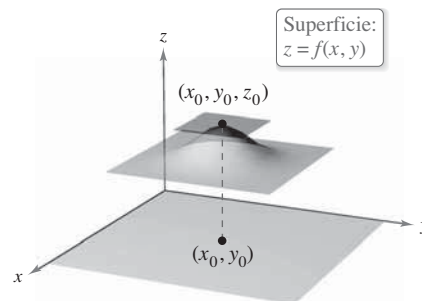
Sea f definida en una región abierta R que contiene (x_0, y_0) . El punto (x_0, y_0) es un **punto crítico** de f si se satisface una de las condiciones siguientes:

1. $f_x(x_0, y_0) = 0$ y $f_y(x_0, y_0) = 0$
2. $f_x(x_0, y_0)$ o $f_y(x_0, y_0)$ no existe.

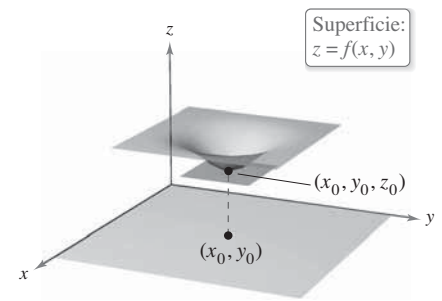
Recuerde del teorema 4.11 que si f es diferenciable y

$$\nabla f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j} = \mathbf{0}\mathbf{i} + \mathbf{0}\mathbf{j}$$

entonces toda derivada direccional en (x_0, y_0) debe ser 0. Esto implica que la función tiene un plano tangente horizontal al punto (x_0, y_0) como se muestra en la figura 4.66. Al parecer, tal punto es una localización probable para un extremo relativo. Esto es ratificado por el teorema 4.16.



Máximo relativo.



Mínimo relativo.

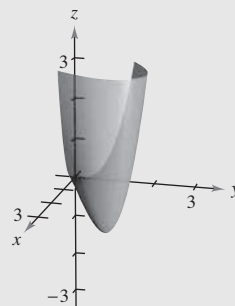
Figura 4.66

TEOREMA 4.16 Los extremos relativos se presentan solo en puntos críticos

Si f tiene un extremo relativo en (x_0, y_0) en una región abierta R , entonces (x_0, y_0) es un punto crítico de f .

Exploración

Utilice una herramienta de graficación para representar $z = x^3 - 3xy + y^3$ usando las cotas $0 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq 3$, y $-3 \leq z \leq 3$. Esta vista parece sugerir que la superficie tuviera un mínimo absoluto. Pero, ¿lo tiene?



EJEMPLO 1 Hallar un extremo relativo

•••► Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Encuentre los extremos relativos de

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20.$$

Solución Para comenzar, encuentre los puntos críticos de f . Como

$$f_x(x, y) = 4x + 8 \quad \text{Derivada parcial respecto a } x$$

y

$$f_y(x, y) = 2y - 6 \quad \text{Derivada parcial respecto a } y$$

están definidas para todo x y y , los únicos puntos críticos son aquellos en los cuales las derivadas parciales de primer orden son 0. Para localizar estos puntos, haga $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ igual a 0, y resuelva las ecuaciones

$$4x + 8 = 0 \quad \text{y} \quad 2y - 6 = 0$$

para obtener el punto crítico $(-2, 3)$. Completando cuadrados en f , puede concluir que para todo $(x, y) \neq (-2, 3)$

$$f(x, y) = 2(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + 3 > 3.$$

Por tanto, un *mínimo* relativo de f se encuentra en $(-2, 3)$. El valor del mínimo relativo es $f(-2, 3) = 3$, como se muestra en la figura 4.67. ■

El ejemplo 1 muestra un mínimo relativo que se presenta en un tipo de punto crítico; el tipo en el cual ambos $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ son 0. En el siguiente ejemplo se presenta un máximo relativo asociado al otro tipo de punto crítico; el tipo en el cual $f_x(x, y)$ o $f_y(x, y)$ no existe.

EJEMPLO 2 Hallar un extremo relativo

Determine los extremos relativos de

$$f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)^{1/3}.$$

Solución Como

$$f_x(x, y) = -\frac{2x}{3(x^2 + y^2)^{2/3}} \quad \text{Derivada parcial con respecto a } x$$

y

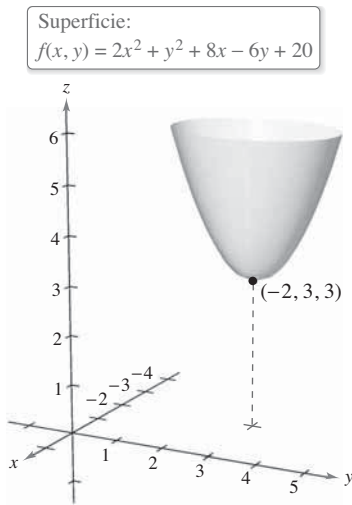
$$f_y(x, y) = -\frac{2y}{3(x^2 + y^2)^{2/3}} \quad \text{Derivada parcial con respecto a } y$$

se deduce que ambas derivadas parciales existen para todo punto en el plano xy , salvo para $(0, 0)$. Como las derivadas parciales no pueden ser ambas 0 a menos que x y y sean 0, usted puede concluir que $(0, 0)$ es el único punto crítico. En la figura 4.68 observe que $f(0, 0)$ es 1. Para cualquier otro (x, y) es claro que

$$f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)^{1/3} < 1.$$

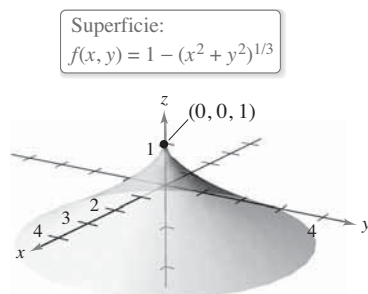
Por tanto, f tiene un *máximo* relativo en $(0, 0)$. ■

En el ejemplo 2, $f_x(x, y) = 0$ para todo punto distinto de $(0, 0)$ en el eje y . Sin embargo, como $f_y(x, y)$ no es cero, estos no son puntos críticos. Recuerde que una de las derivadas parciales debe no existir o las *dos* deben ser 0 para tener un punto crítico.



La función $z = f(x, y)$ tiene un mínimo relativo en $(-2, 3)$.

Figura 4.67



$f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ están indefinidas en $(0, 0)$.

Figura 4.68

El criterio de las segundas derivadas parciales

El teorema 4.16 le dice que para encontrar extremos relativos solo necesita examinar los valores de $f(x, y)$ en los puntos críticos. Sin embargo, como sucede con una función de una variable, los puntos críticos de una función de dos variables no siempre son máximos o mínimos relativos. Algunos puntos críticos dan **puntos silla** que no son ni máximos relativos ni mínimos relativos.

Como ejemplo de un punto crítico que no es un extremo relativo, considere el paraboloides hiperbólico

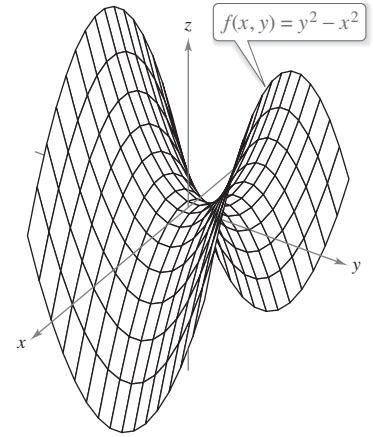
$$f(x, y) = y^2 - x^2$$

que se muestra en la figura 4.69. En el punto $(0, 0)$, ambas derivadas parciales

$$f_x(x, y) = -2x \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = 2y$$

son 0. Sin embargo, la función f no tiene un extremo relativo en este punto, ya que en todo disco abierto centrado en $(0, 0)$ la función asume valores negativos (a lo largo del eje x) y valores positivos (a lo largo del eje y). Por tanto, el punto $(0, 0, 0)$ es un punto silla de la superficie.

(El término “punto silla” viene del hecho de que la superficie mostrada en la figura 4.69 se parece a una silla de montar.)



Punto silla en $(0, 0, 0)$:
 $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$.

Figura 4.69

En las funciones de los ejemplos 1 y 2 fue relativamente fácil determinar los extremos relativos, porque cada una de las funciones estaba dada, o se podía expresar, en forma de cuadrado perfecto. Con funciones más complicadas, los argumentos algebraicos son menos adecuados y es mejor emplear los medios analíticos presentados en el siguiente criterio de las segundas derivadas parciales. Es el análogo, para funciones de dos variables, del criterio de las segundas derivadas para las funciones de una variable. La demostración de este teorema se deja para un curso de cálculo avanzado.

TEOREMA 4.17 Criterio de las segundas derivadas parciales

Sea f una función con segundas derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene un punto (a, b) para el cual

$$f_x(a, b) = 0 \quad \text{y} \quad f_y(a, b) = 0.$$

Para buscar los extremos relativos de f considere la cantidad

$$d = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2.$$

1. Si $d > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$, entonces f tiene un **mínimo relativo** en (a, b) .
2. Si $d > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$, entonces f tiene un **máximo relativo** en (a, b) .
3. Si $d < 0$, entonces $(a, b, f(a, b))$ es un **punto silla**.
4. Si $d = 0$, el criterio no lleva a ninguna conclusión.

••• **COMENTARIO** Si $d > 0$, entonces $f_{xx}(a, b)$ y $f_{yy}(a, b)$ deben tener el mismo signo. Esto significa que $f_{xx}(a, b)$ puede sustituirse por $f_{yy}(a, b)$ en las dos primeras partes del criterio.

Un recurso conveniente para recordar la fórmula de d en el criterio de las segundas derivadas parciales lo da el determinante 2×2

$$d = \begin{vmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{vmatrix}$$

donde $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ de acuerdo al teorema 4.3.

EJEMPLO 3

Aplicar el criterio de las segundas derivadas parciales

Identifique los extremos relativos de $f(x, y) = -x^3 + 4xy - 2y^2 + 1$.

Solución Para comenzar, identifique los puntos críticos de f . Como

$$f_x(x, y) = -3x^2 + 4y \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = 4x - 4y$$

existen para todo x y y , los únicos puntos críticos son aquellos en los que ambas derivadas parciales de primer orden son 0. Para localizar estos puntos, iguale $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ a 0 para obtener

$$-3x^2 + 4y = 0 \quad \text{y} \quad 4x - 4y = 0.$$

De la segunda ecuación usted sabe que $x = y$, y por sustitución en la primera ecuación obtiene dos soluciones: $y = x = 0$ y $y = x = \frac{4}{3}$. Como

$$f_{xx}(x, y) = -6x, \quad f_{yy}(x, y) = -4 \quad \text{y} \quad f_{xy}(x, y) = 4$$

se deduce que para el punto crítico $(0, 0)$,

$$d = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - [f_{xy}(0, 0)]^2 = 0 - 16 < 0$$

y por el criterio de las segundas derivadas parciales, usted puede concluir que $(0, 0, 1)$ es un punto silla de f . Para el punto crítico $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$,

$$\begin{aligned} d &= f_{xx}\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)f_{yy}\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) - \left[f_{xy}\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)\right]^2 \\ &= -8(-4) - 16 \\ &= 16 \\ &> 0 \end{aligned}$$

y como $f_{xx}\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = -8 < 0$, puede concluir que f tiene un máximo relativo en $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$, como se muestra en la figura 4.70.

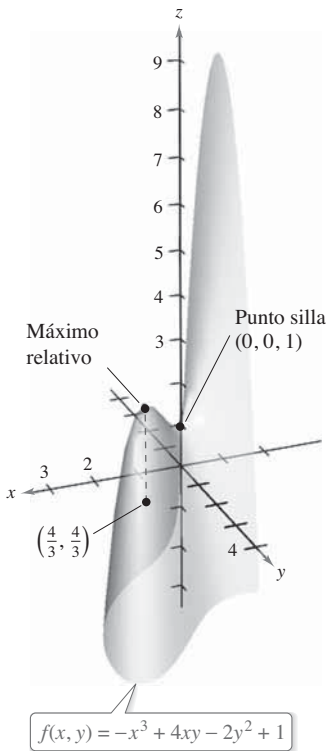


Figura 4.70

Con el criterio de las segundas derivadas parciales pueden no hallarse los extremos relativos por dos razones. Si alguna de las primeras derivadas parciales no existe, usted no puede aplicar el criterio. Si

$$d = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - [f_{xy}(a, b)]^2 = 0$$

el criterio no es concluyente. En tales casos, puede tratar de hallar los extremos mediante la gráfica o mediante algún otro método, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4

Cuando el criterio de las segundas derivadas parciales no es concluyente

Encuentre los extremos relativos de $f(x, y) = x^2y^2$.

Solución Como $f_x(x, y) = 2xy^2$ y $f_y(x, y) = 2x^2y$, usted sabe que ambas derivadas parciales son igual a 0 si $x = 0$ o $y = 0$. Es decir, todo punto del eje x o del eje y es un punto crítico. Como

$$f_{xx}(x, y) = 2y^2, \quad f_{yy}(x, y) = 2x^2 \quad \text{y} \quad f_{xy}(x, y) = 4xy$$

sabe que

$$\begin{aligned} d &= f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2 \\ &= 4x^2y^2 - 16x^2y^2 \\ &= -12x^2y^2 \end{aligned}$$

es 0 si $x = 0$ o $y = 0$. Por tanto, el criterio de las segundas derivadas parciales no es concluyente, no funciona. Sin embargo, como $f(x, y) = 0$ para todo punto en los ejes x o y , y $f(x, y) = x^2y^2 > 0$ en todos los otros puntos, usted puede concluir que cada uno de estos puntos críticos son un mínimo absoluto, como se muestra en la figura 4.71.

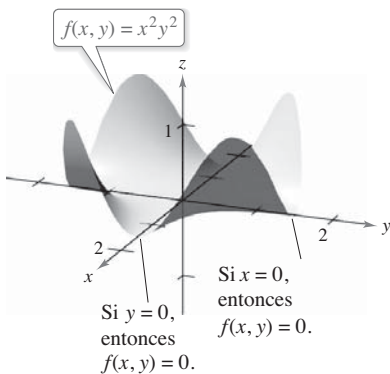


Figura 4.71

Los extremos absolutos de una función se pueden presentar de dos maneras. Primero, algunos extremos relativos también resultan ser extremos absolutos. Así, en el ejemplo 1, $f(-2, 3)$ es un mínimo absoluto de la función. (Por otro lado, el máximo relativo encontrado en el ejemplo 3 no es un máximo absoluto de la función.) Segundo, los extremos absolutos pueden presentarse en un punto frontera del dominio. Esto se ilustra en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5**Encontrar extremos absolutos**

Encuentre los extremos absolutos de la función

$$f(x, y) = \operatorname{sen} xy$$

en la región cerrada dada por

$$0 \leq x \leq \pi \quad \text{y} \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Solución La expresión de las derivadas parciales

$$f_x(x, y) = y \cos xy \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = x \cos xy$$

le permite ver que todo punto en la hipérbola dada por $xy = \pi/2$ es un punto crítico. En todos estos puntos el valor de f es

$$f(x, y) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$$

el cual sabe que es el máximo absoluto, como se muestra en la figura 4.72. El otro punto crítico de f que se encuentra en la región dada es $(0, 0)$. Este punto da un mínimo absoluto de 0, ya que

$$0 \leq xy \leq \pi$$

implica que

$$0 \leq \operatorname{sen} xy \leq 1.$$

Para localizar otros extremos absolutos debe considerar las cuatro fronteras de la región formadas por las trazas de los planos verticales $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$ y $y = 1$. Al hacer esto, encuentra que $\operatorname{sen} xy = 0$ en todos los puntos del eje x , en todos los puntos del eje y y en el punto $(\pi, 1)$. Cada uno de estos puntos es un mínimo absoluto de la superficie, como se muestra en la figura 4.72.

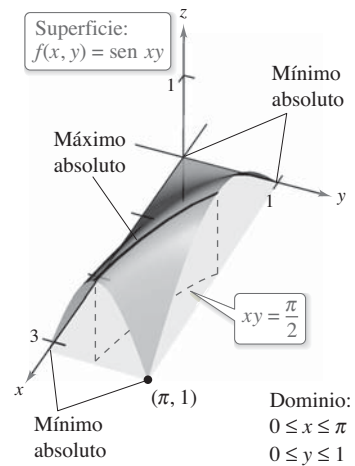


Figura 4.72

Los conceptos de extremos relativos y puntos críticos pueden extenderse a funciones de tres o más variables. Si todas las primeras derivadas parciales de

$$w = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

existen, puede mostrarse que se presenta un máximo o un mínimo relativo en $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ solo si cada una de las primeras derivadas parciales en ese punto es 0. Esto significa que los puntos críticos se obtienen al resolver el sistema de ecuaciones siguiente.

$$f_{x_1}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0$$

$$f_{x_2}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0$$

$$\vdots$$

$$f_{x_n}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0$$

La extensión del teorema 4.17 a tres o más variables también es posible, aunque no se considerará en este texto.

4.8 Ejercicios

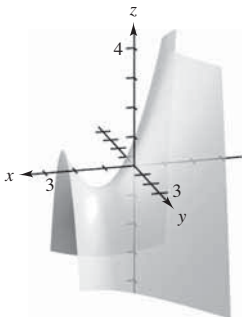
Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Hallar los extremos relativos En los ejercicios 1-6, identifique los extremos de la función reconociendo su forma dada o su forma después de completar cuadrados. Verifique los resultados empleando derivadas parciales para localizar los puntos críticos y probar si son extremos relativos.

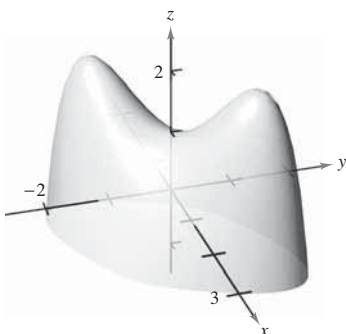
1. $g(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 3)^2$
2. $g(x, y) = 5 - (x - 3)^2 - (y + 2)^2$
3. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$
4. $f(x, y) = \sqrt{25 - (x - 2)^2 - y^2}$
5. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6$
6. $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 10x + 12y - 64$

Usar el criterio de segundas derivadas En los ejercicios 7-20, examine la función para localizar los extremos relativos y los puntos silla.

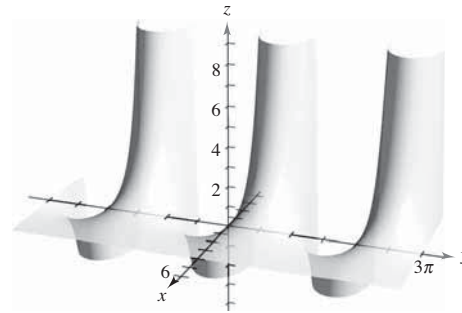
7. $h(x, y) = 80x + 80y - x^2 - y^2$
8. $g(x, y) = x^2 - y^2 - x - y$
9. $g(x, y) = xy$
10. $h(x, y) = x^2 - 3xy - y^2$
11. $f(x, y) = -3x^2 - 2y^2 + 3x - 4y + 5$
12. $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 3$
13. $z = x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 - 2x + y$
14. $z = -5x^2 + 4xy - y^2 + 16x + 10$
15. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
16. $h(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/3} + 2$
17. $f(x, y) = x^2 - xy - y^2 - 3x - y$



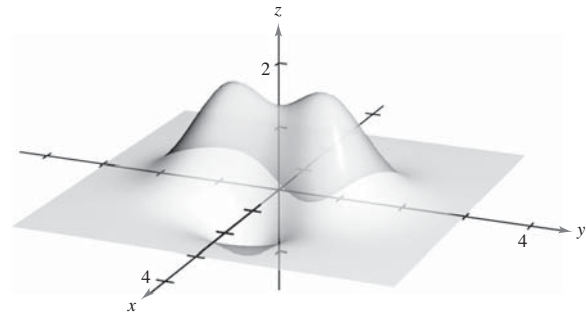
18. $f(x, y) = 2xy - \frac{1}{2}(x^4 + y^4) + 1$




19. $z = e^{-x} \sin y$




20. $z = \left(\frac{1}{2} - x^2 + y^2\right)e^{1-x^2-y^2}$



 **Usar tecnología para hallar extremos relativos y puntos silla** En los ejercicios 21-24, utilice un sistema algebraico por computadora, represente la superficie y localice los extremos relativos y los puntos silla.

21. $z = \frac{-4x}{x^2 + y^2 + 1}$
22. $f(x, y) = y^3 - 3yx^2 - 3y^2 - 3x^2 + 1$
23. $z = (x^2 + 4y^2)e^{1-x^2-y^2}$
24. $z = e^{xy}$

 **Hallar extremos relativos** En los ejercicios 25 y 26, busque los extremos de la función sin utilizar los criterios de la derivada y utilice un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente la superficie. (Sugerencia: Por observación, determine si es posible que z sea negativo. ¿Cuándo z es igual a 0?)

25. $z = \frac{(x - y)^4}{x^2 + y^2}$ 26. $z = \frac{(x^2 - y^2)^2}{x^2 + y^2}$

Piénselo En los ejercicios 27-30, determine si hay un máximo relativo, un mínimo relativo, un punto silla, o si la información es insuficiente para determinar la naturaleza de la función $f(x, y)$ en el punto crítico (x_0, y_0) .

27. $f_{xx}(x_0, y_0) = 9, f_{yy}(x_0, y_0) = 4, f_{xy}(x_0, y_0) = 6$
28. $f_{xx}(x_0, y_0) = -3, f_{yy}(x_0, y_0) = -8, f_{xy}(x_0, y_0) = 2$
29. $f_{xx}(x_0, y_0) = -9, f_{yy}(x_0, y_0) = 6, f_{xy}(x_0, y_0) = 10$
30. $f_{xx}(x_0, y_0) = 25, f_{yy}(x_0, y_0) = 8, f_{xy}(x_0, y_0) = 10$

31. Usar el criterio de segundas derivadas parciales Una función f tiene segundas derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene el punto crítico $(3, 7)$. La función tiene un mínimo en $(3, 7)$ y $d > 0$ para el criterio de las segundas derivadas parciales. Determine el intervalo para $f_{xy}(3, 7)$ si $f_{xx}(3, 7) = 2$ y $f_{yy}(3, 7) = 8$.

32. Usar el criterio de segundas derivadas parciales Una función f tiene segundas derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene el punto crítico (a, b) . Si $f_{xx}(a, b)$ y $f_{yy}(a, b)$ tiene signos opuestos, ¿qué implica esto? Explique.

Hallar los extremos relativos y los puntos silla En los ejercicios 33-38, (a) encuentre los puntos críticos, (b) pruebe los extremos relativos, (c) indique los puntos críticos en los cuales el criterio de las segundas derivadas parciales no es concluyente, y (d) use un sistema algebraico por computadora para trazar la función, clasificando cualesquiera puntos extremo y puntos silla.

- 33. $f(x, y) = x^3 + y^3$
- 34. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6x^2 + 9y^2 + 12x + 27y + 19$
- 35. $f(x, y) = (x - 1)^2(y + 4)^2$
- 36. $f(x, y) = \sqrt{(x - 1)^2 + (y + 2)^2}$
- 37. $f(x, y) = x^{2/3} + y^{2/3}$
- 38. $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{2/3}$

Examinar una función En los ejercicios 39-40, encuentre los puntos críticos de la función y, por la forma de la función, determine si se presenta un máximo o un mínimo relativo en cada punto.

- 39. $f(x, y, z) = x^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2$
- 40. $f(x, y, z) = 9 - [x(y - 1)(z + 2)]^2$

Hallar extremos absolutos En los ejercicios 41 a 48, determine los extremos absolutos de la función en la región R . (En cada caso, R contiene sus puntos frontera.) Utilice un sistema algebraico por computadora y confirme los resultados.

- 41. $f(x, y) = x^2 - 4xy + 5$
 $R = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 2\}$
- 42. $f(x, y) = x^2 + xy, R = \{(x, y) : |x| \leq 2, |y| \leq 1\}$
- 43. $f(x, y) = 12 - 3x - 2y$
 R : La región triangular en el plano xy con vértices $(2, 0), (0, 1)$ y $(1, 2)$.
- 44. $f(x, y) = (2x - y)^2$
 R : La región triangular en el plano xy con vértices $(2, 0), (0, 1)$ y $(1, 2)$.
- 45. $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 4y$
 R : La región en el plano xy acotada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = 4$.
- 46. $f(x, y) = 2x - 2xy + y^2$
 R : La región en el plano xy acotada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = 1$.
- 47. $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2, R = \{(x, y) : |x| \leq 2, |y| \leq 1\}$
- 48. $f(x, y) = \frac{4xy}{(x^2 + 1)(y^2 + 1)}$
 $R = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

49. Definir términos Defina cada uno de los siguientes para una función de dos variables.

- (a) Mínimo relativo (b) Máximo relativo
- (c) Punto crítico (d) Punto silla

Dibujar una gráfica En los ejercicios 50-52, trace la gráfica de una función arbitraria f que satisfaga las condiciones dadas. Diga si la función tiene extremos o puntos silla. (Hay muchas respuestas correctas.)

- 50. Todas las primeras y segundas derivadas parciales de f son 0.
- 51. $f_x(x, y) > 0$ y $f_y(x, y) < 0$ para todo (x, y) .
- 52. $f_x(0, 0) = 0, f_y(0, 0) = 0$

$$f_x(x, y) \begin{cases} < 0, & x < 0 \\ > 0, & x > 0 \end{cases}, \quad f_y(x, y) \begin{cases} > 0, & y < 0 \\ < 0, & y > 0 \end{cases}$$

$$f_{xx}(x, y) > 0, f_{yy}(x, y) < 0 \text{ y } f_{xy}(x, y) = 0 \text{ para todo } (x, y).$$

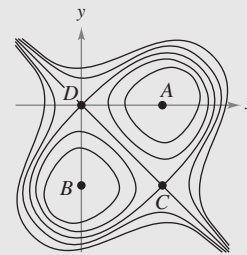
53. Comparar funciones Considere las funciones

$$f(x, y) = x^2 - y^2 \quad \text{y} \quad g(x, y) = x^2 + y^2.$$

- (a) Demuestre que ambas funciones tienen un punto crítico en $(0, 0)$.
- (b) Explique cómo f y g se comportan de manera diferente en este punto crítico.



54. ¿CÓMO LO VE? La figura muestra las curvas de nivel de una función desconocida $f(x, y)$. ¿Qué información, si la hay, se puede dar respecto a f en los puntos A, B, C y D ? Explique su razonamiento.



¿Verdadero o falso? En los ejercicios 55-58, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que demuestre que es falso.

- 55. Si f tiene un máximo relativo en (x_0, y_0, z_0) , entonces $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.
- 56. Si $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$, entonces f tiene un máximo relativo en (x_0, y_0, z_0) .
- 57. Entre cualesquiera dos mínimos relativos de f , aquí debe estar al menos un máximo relativo de f .
- 58. Si f es continua para todo x y y , y tiene dos mínimos relativos, entonces f debe tener por lo menos un máximo relativo.

4.9 Multiplicadores de Lagrange

- Entender el método de los multiplicadores de Lagrange.
- Utilizar los multiplicadores de Lagrange para resolver problemas de optimización con restricciones.
- Utilizar el método de multiplicadores de Lagrange con dos restricciones.

Multiplicadores de Lagrange

Muchos problemas de optimización tienen **restricciones**, o **ligaduras**, para los valores que pueden usarse para dar la solución óptima. Tales restricciones tienden a complicar los problemas de optimización, porque la solución óptima puede presentarse en un punto frontera del dominio. En esta sección estudiará una ingeniosa técnica para resolver tales problemas, es el **método de los multiplicadores de Lagrange**.

Para ver cómo funciona esta técnica, suponga que quiere hallar el rectángulo de área máxima que puede inscribirse en la elipse dada por

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1.$$

Sea (x, y) el vértice del rectángulo que se encuentra en el primer cuadrante, como se muestra en la figura 4.73. Como el rectángulo tiene lados de longitudes $2x$ y $2y$, su área está dada por

$$f(x, y) = 4xy. \quad \text{Función objetivo}$$

Desea hallar x y y tales que $f(x, y)$ es un máximo. La elección de (x, y) está restringida a puntos del primer cuadrante que están en la elipse

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1. \quad \text{Restricción}$$

Ahora, considere la ecuación restrictiva o de ligadura como una curva de nivel fija de

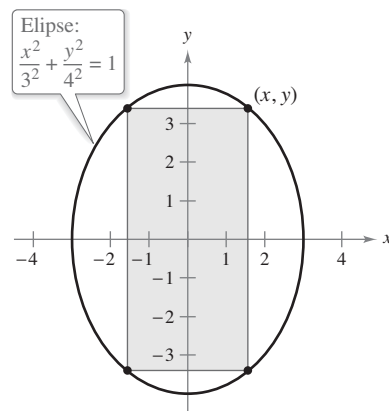
$$g(x, y) = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2}.$$

Las curvas de nivel de f representan una familia de hipérbolas

$$f(x, y) = 4xy = k.$$

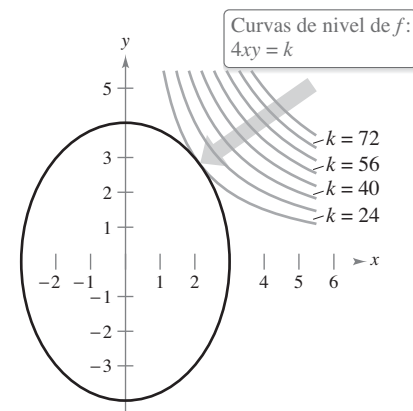
En esta familia, las curvas de nivel que satisfacen la restricción dada corresponden a hipérbolas que cortan a la elipse. Es más, para maximizar $f(x, y)$, usted quiere hallar la hipérbola que justo satisfaga la restricción. La curva de nivel que hace esto es la que es tangente a la elipse, como se muestra en la figura 4.74.

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE
El método de los multiplicadores de Lagrange debe su nombre al matemático francés Joseph Louis Lagrange. Lagrange presentó el método por primera vez en su famoso trabajo sobre mecánica, escrito cuando tenía apenas 19 años.



Función objetivo: $f(x, y) = 4xy$

Figura 4.73



Restricción: $g(x, y) = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$

Figura 4.74

Para encontrar la hipérbola apropiada use el hecho de que dos curvas son tangentes en un punto si y solo si sus vectores gradiente son paralelos. Esto significa que $\nabla f(x, y)$ debe ser un múltiplo escalar de $\nabla g(x, y)$ en el punto de tangencia. En el contexto de los problemas de optimización con restricciones, este escalar se denota con λ (la letra griega *lambda* minúscula del alfabeto griego).

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$$

Al escalar λ se le conoce como un **multiplicador de Lagrange**. El teorema 4.18 da las condiciones necesarias para la existencia de tales multiplicadores.



COMENTARIO Puede demostrar que el teorema de Lagrange también es válido para funciones de tres variables, usando un argumento similar con superficies de nivel y con el teorema 4.14.

TEOREMA 4.18 Teorema de Lagrange

Sean f y g funciones con primeras derivadas parciales continuas, y tales que f tiene un extremo en un punto (x_0, y_0) sobre la curva suave de restricción $g(x, y) = c$. Si $\nabla g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, entonces existe un número real λ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

Demostración Para empezar, represente la curva suave dada por $g(x, y) = c$ mediante la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad \mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$$

donde x' y y' son continuas en un intervalo abierto I . Se define la función h como $h(t) = f(x(t), y(t))$. Entonces, como $f(x_0, y_0)$ es un valor extremo de f usted sabe que

$$h(t_0) = f(x(t_0), y(t_0)) = f(x_0, y_0)$$

es un valor extremo de h . Esto implica que $h'(t_0) = 0$, y por la regla de la cadena,

$$h'(t_0) = f_x(x_0, y_0)x'(t_0) + f_y(x_0, y_0)y'(t_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0.$$

Así, $\nabla f(x_0, y_0)$ es ortogonal a $\mathbf{r}'(t_0)$. Por el teorema 4.12, $\nabla g(x_0, y_0)$ también es ortogonal a $\mathbf{r}'(t_0)$. Por consiguiente, los gradientes $\nabla f(x_0, y_0)$ y $\nabla g(x_0, y_0)$ son paralelos y debe existir un escalar λ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

Consulte LarsonCalculus.com para el video de Bruce Edwards de esta demostración.

El método de los multiplicadores de Lagrange emplea el teorema 4.18 para encontrar los valores extremos de una función f sujeta a una restricción.



COMENTARIO Como verá en los ejemplos 1 y 2, el método de los multiplicadores de Lagrange requiere resolver sistemas de ecuaciones no lineales. Esto a menudo requiere de alguna manipulación algebraica ingeniosa.

Método de los multiplicadores de Lagrange

Sean f y g funciones que satisfacen las hipótesis del teorema de Lagrange, y sea f una función que tiene un mínimo o un máximo sujeto a la restricción $g(x, y) = c$. Para hallar el mínimo o el máximo de f , siga los pasos descritos a continuación.

1. Resolver simultáneamente las ecuaciones $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ y $g(x, y) = c$ resolviendo el sistema de ecuaciones siguiente.

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) &= \lambda g_y(x, y) \\ g(x, y) &= c \end{aligned}$$
2. Evaluar f en cada punto solución obtenido en el primer paso. El valor mayor da el máximo de f sujeto a la restricción $g(x, y) = c$, y el valor menor da el mínimo de f sujeto a la restricción $g(x, y) = c$.

Problemas de optimización con restricciones

En el problema presentado al principio de esta sección, usted quería maximizar el área de un rectángulo inscrito en una elipse. El ejemplo 1 muestra cómo usar los multiplicadores de Lagrange para resolver este problema.

EJEMPLO 1 Multiplicador de Lagrange con una restricción

Encuentre el valor máximo de $f(x, y) = 4xy$, donde $x > 0$ y $y > 0$ sujeto a la restricción $(x^2/3^2) + (y^2/4^2) = 1$.

Solución Para comenzar, sea

$$g(x, y) = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1.$$

Igualando $\nabla f(x, y) = 4y\mathbf{i} + 4x\mathbf{j}$ y $\lambda \nabla g(x, y) = (2\lambda x/9)\mathbf{i} + (\lambda y/8)\mathbf{j}$, puede obtener el sistema de ecuaciones siguiente.

$$4y = \frac{2}{9}\lambda x \quad f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y)$$

$$4x = \frac{1}{8}\lambda y \quad f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y)$$

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \quad \text{Restricción}$$

De la primera ecuación, obtiene $\lambda = 18y/x$, que sustituido en la segunda ecuación da

$$4x = \frac{1}{8}\left(\frac{18y}{x}\right)y \Rightarrow x^2 = \frac{9}{16}y^2.$$

Sustituyendo este valor de x^2 en la tercera ecuación produce

$$\frac{1}{9}\left(\frac{9}{16}y^2\right) + \frac{1}{16}y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 8.$$

Así, $y = \pm 2\sqrt{2}$. Como se requiere que $y > 0$, elija el valor positivo para encontrar que

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{9}{16}y^2 \\ &= \frac{9}{16}(8) \\ &= \frac{9}{2} \\ x &= \frac{3}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Por tanto, el valor máximo de f es

$$f\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2}\right) = 4xy = 4\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)(2\sqrt{2}) = 24.$$

Observe que el expresar la restricción como

$$g(x, y) = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \quad \text{o} \quad g(x, y) = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} - 1 = 0$$

no afecta la solución, la constante se elimina cuando se calcula ∇g .



COMENTARIO El ejemplo 1 también puede resolverse utilizando las técnicas aprendidas en la unidad. Para ver cómo se hace esto, calcule el valor máximo de $A = 4xy$ dado que

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1.$$

Para empezar, despeje y de la segunda ecuación para obtener

$$y = \frac{4}{3}\sqrt{9 - x^2}.$$

Después sustituya este valor en la primera ecuación para obtener

$$A = 4x\left(\frac{4}{3}\sqrt{9 - x^2}\right).$$

Por último, use las técnicas del cálculo diferencial para maximizar A .

EJEMPLO 2

Una aplicación a la economía

La función de producción de Cobb-Douglas para un fabricante de software está dada por

$$f(x, y) = 100x^{3/4}y^{1/4} \quad \text{Función objetivo}$$

donde x representa las unidades de trabajo (a \$150 por unidad) y y representa las unidades de capital (a \$250 por unidad). El costo total de trabajo y capital está limitado a \$50,000. Encuentre el nivel máximo de producción de este fabricante.

■ **PARA INFORMACIÓN ADICIONAL**

Para más información sobre la utilización de los multiplicadores de Lagrange en economía, consulte el artículo "Lagrange Multiplier Problems in Economics", de John V. Baxley y John C. Moorhouse, en *The American Mathematical Monthly*. Para ver este artículo vaya a *MathArticles.com*.

Solución El gradiente de f es

$$\nabla f(x, y) = 75x^{-1/4}y^{1/4} \mathbf{i} + 25x^{3/4}y^{-3/4} \mathbf{j}.$$

El límite para el costo de trabajo y capital se refleja en la restricción

$$g(x, y) = 150x + 250y = 50,000. \quad \text{Restricción}$$

Así, $\lambda \nabla g(x, y) = 150\lambda \mathbf{i} + 250\lambda \mathbf{j}$. Esto da lugar al sistema de ecuaciones siguiente.

$$75x^{-1/4}y^{1/4} = 150\lambda$$

$$f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y)$$

$$25x^{3/4}y^{-3/4} = 250\lambda$$

$$f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y)$$

$$150x + 250y = 50,000$$

$$\text{Restricción}$$

Resolviendo para λ en la primera ecuación

$$\lambda = \frac{75x^{-1/4}y^{1/4}}{150} = \frac{x^{-1/4}y^{1/4}}{2}$$

y sustituyendo en la segunda ecuación, obtiene

$$25x^{3/4}y^{-3/4} = 250 \left(\frac{x^{-1/4}y^{1/4}}{2} \right)$$

$$25x = 125y$$

$$\text{Multiplique por } x^{1/4}y^{3/4}.$$

$$x = 5y.$$

Sustituyendo este valor de x en la tercera ecuación, tiene

$$150(5y) + 250y = 50,000$$

$$1000y = 50,000$$

$$y = 50 \text{ unidades de capital.}$$

Esto significa que el valor de x es

$$x = 5(50)$$

$$= 250 \text{ unidades de trabajo.}$$

Por tanto, el nivel máximo de producción es

$$\begin{aligned} f(250, 50) &= 100(250)^{3/4}(50)^{1/4} \\ &\approx 16,719 \text{ unidades producidas.} \end{aligned}$$

Los economistas llaman al multiplicador de Lagrange obtenido en una función de producción la **productividad marginal del capital**. Por ejemplo, en el ejemplo 2 la productividad marginal de capital en $x = 250$ y $y = 50$ es

$$\lambda = \frac{x^{-1/4}y^{1/4}}{2} = \frac{(250)^{-1/4}(50)^{1/4}}{2} \approx 0.334$$

lo cual significa que por cada dólar adicional gastado en la producción, puede producirse 0.334 unidades adicionales del producto.

EJEMPLO 3 Multiplicadores de Lagrange y tres variables

•••► Consulte *LarsonCalculus.com* para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Encuentre el valor mínimo de

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2 \quad \text{Función objetivo}$$

sujeto a la restricción o ligadura $2x - 3y - 4z = 49$.

Solución Sea $g(x, y, z) = 2x - 3y - 4z = 49$. Entonces, como

$$\nabla f(x, y, z) = 4x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 6z\mathbf{k}$$

y

$$\lambda \nabla g(x, y, z) = 2\lambda\mathbf{i} - 3\lambda\mathbf{j} - 4\lambda\mathbf{k}$$

usted obtiene el sistema de ecuaciones siguiente.

$$\begin{aligned} 4x &= 2\lambda & f_x(x, y, z) &= \lambda g_x(x, y, z) \\ 2y &= -3\lambda & f_y(x, y, z) &= \lambda g_y(x, y, z) \\ 6z &= -4\lambda & f_z(x, y, z) &= \lambda g_z(x, y, z) \\ 2x - 3y - 4z &= 49 & & \text{Restricción} \end{aligned}$$

La solución de este sistema es $x = 3, y = -9$ y $z = -4$. Por tanto, el valor óptimo de f es

$$\begin{aligned} f(3, -9, -4) &= 2(3)^2 + (-9)^2 + 3(-4)^2 \\ &= 147. \end{aligned}$$

De la función original y de la restricción, resulta claro que $f(x, y, z)$ no tiene máximo. Por tanto, el valor óptimo de f determinado arriba es un mínimo.

Una interpretación gráfica del problema de optimización con restricciones para dos variables. Con tres variables la interpretación es similar, solo que se usan superficies de nivel en lugar de curvas de nivel. Así, en el ejemplo 3 las superficies de nivel de f son elipsoides centradas en el origen, y la restricción

$$2x - 3y - 4z = 49$$

es un plano. El valor mínimo de f está representado por la elipsoide tangente al plano de la restricción, como se muestra en la figura 4.75.

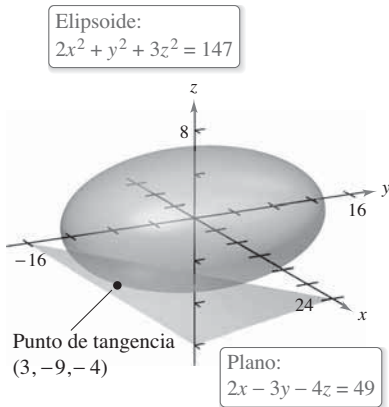


Figura 4.75

EJEMPLO 4 Optimizar el interior de una región

Encuentre los valores extremos de

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2x + 3 \quad \text{Función objetivo}$$

sujeto a la restricción $x^2 + y^2 \leq 10$.

Solución Para resolver este problema, puede dividir la restricción en dos casos.

- a. Para los puntos *en el círculo* $x^2 + y^2 = 10$, puede usar los multiplicadores de Lagrange para hallar que el valor máximo de $f(x, y)$ es 24; este valor se presenta en $(-1, 3)$ y en $(-1, -3)$. De manera similar, puede determinar que el valor mínimo de $f(x, y)$ es aproximadamente 6.675; este valor se presenta en $(\sqrt{10}, 0)$.
- b. Para los puntos *interiores al círculo*, puede usar las técnicas analizadas en la sección anterior para concluir que la función tiene un mínimo relativo de 2 en el punto $(1, 0)$.

Combinando estos dos resultados, puede concluir que f tiene un máximo de 24 en $(-1, \pm 3)$ y un mínimo de 2 en $(1, 0)$, como se muestra en la figura 4.76.

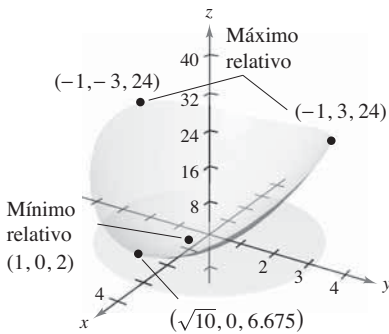


Figura 4.76

El método de multiplicadores de Lagrange con dos restricciones

En problemas de optimización que involucran *dos* funciones de restricción g y h usted puede introducir un segundo multiplicador de Lagrange, μ (letra minúscula *mu* del alfabeto griego), y resolver la ecuación

$$\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$$

donde los vectores gradiente no son paralelos, como se ilustra en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Optimizar con dos restricciones

Sea $T(x, y, z) = 20 + 2x + 2y + z^2$ la temperatura en cada punto en la esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 11.$$

Encuentre las temperaturas extremas en la curva formada por la intersección del plano $x + y + z = 3$ y la esfera.

Solución Las dos restricciones son

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 11 \quad y \quad h(x, y, z) = x + y + z = 3.$$

Usando

$$\begin{aligned} \nabla T(x, y, z) &= 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} \\ \lambda \nabla g(x, y, z) &= 2\lambda x\mathbf{i} + 2\lambda y\mathbf{j} + 2\lambda z\mathbf{k} \end{aligned}$$

y

$$\mu \nabla h(x, y, z) = \mu\mathbf{i} + \mu\mathbf{j} + \mu\mathbf{k}$$

puede escribir el sistema de ecuaciones siguiente

$$\begin{array}{ll} 2 = 2\lambda x + \mu & T_x(x, y, z) = \lambda g_x(x, y, z) + \mu h_x(x, y, z) \\ 2 = 2\lambda y + \mu & T_y(x, y, z) = \lambda g_y(x, y, z) + \mu h_y(x, y, z) \\ 2z = 2\lambda z + \mu & T_z(x, y, z) = \lambda g_z(x, y, z) + \mu h_z(x, y, z) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 11 & \text{Restricción 1} \\ x + y + z = 3 & \text{Restricción 2} \end{array}$$

Restando la segunda ecuación de la primera, obtiene el sistema siguiente.

$$\begin{aligned} \lambda(x - y) &= 0 \\ 2z(1 - \lambda) - \mu &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 11 \\ x + y + z &= 3 \end{aligned}$$

De la primera ecuación, puede concluir que $\lambda = 0$ o $x = y$. Si $\lambda = 0$ puede demostrar que los puntos críticos son $(3, -1, 1)$ y $(-1, 3, 1)$. (Tratar de hacer esto toma un poco de trabajo.) Si $\lambda \neq 0$, entonces $x = y$ y puede demostrar que los puntos críticos se presentan donde $x = y = (3 \pm 2\sqrt{3})/3$ y $z = (3 \mp 4\sqrt{3})/3$. Por último, para encontrar las soluciones óptimas se deben comparar las temperaturas en los cuatro puntos críticos.

$$\begin{aligned} T(3, -1, 1) &= T(-1, 3, 1) = 25 \\ T\left(\frac{3 - 2\sqrt{3}}{3}, \frac{3 - 2\sqrt{3}}{3}, \frac{3 + 4\sqrt{3}}{3}\right) &= \frac{91}{3} \approx 30.33 \\ T\left(\frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}, \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}, \frac{3 - 4\sqrt{3}}{3}\right) &= \frac{91}{3} \approx 30.33 \end{aligned}$$

Así, $T = 25$ es la temperatura mínima y $T = \frac{91}{3}$ es la temperatura máxima en la curva. ■

...COMENTARIO El sistema de ecuaciones que se obtiene en el método de los multiplicadores de Lagrange no es, en general, un sistema lineal, y a menudo hallar la solución requiere de ingenio.

4.9 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Usar multiplicadores de Lagrange En los ejercicios 1-8, utilice multiplicadores de Lagrange para hallar el extremo indicado, suponga que x y y son positivos.

- Maximizar: $f(x, y) = xy$
Restricción: $x + y = 10$
- Minimizar: $f(x, y) = 2x + y$
Restricción: $xy = 32$
- Minimizar: $f(x, y) = x^2 + y^2$
Restricción: $x + 2y - 5 = 0$
- Maximizar: $f(x, y) = x^2 - y^2$
Restricción: $2y - x^2 = 0$
- Maximizar: $f(x, y) = 2x + 2xy + y$
Restricción: $2x + y = 100$
- Minimizar: $f(x, y) = 3x + y + 10$
Restricción: $x^2y = 6$
- Maximizar: $f(x, y) = \sqrt{6 - x^2 - y^2}$
Restricción: $x + y - 2 = 0$
- Minimizar: $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
Restricción: $2x + 4y - 15 = 0$

Usar multiplicadores de Lagrange En los ejercicios 9-12, utilice los multiplicadores de Lagrange para hallar los extremos indicados, suponiendo que x , y y z son positivos

- Minimizar: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
Restricción: $x + y + z - 9 = 0$
- Maximizar: $f(x, y, z) = xyz$
Restricción: $x + y + z - 3 = 0$
- Minimizar: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
Restricción: $x + y + z = 1$
- Maximizar: $f(x, y, z) = x + y + z$
Restricción: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Usar multiplicadores de Lagrange En los ejercicios 13 y 14, utilice los multiplicadores de Lagrange para hallar todos los extremos de la función sujetos a la restricción $x^2 + y^2 \leq 1$.

13. $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$ 14. $f(x, y) = e^{-xy/4}$

Usar multiplicadores de Lagrange En los ejercicios 15 y 16, utilice los multiplicadores de Lagrange para hallar los extremos de f indicados sujetos a dos restricciones. En cada caso, suponga que x , y y z son no negativos.

- Maximizar: $f(x, y, z) = xyz$
Restricción: $x + y + z = 32$, $x - y + z = 0$
- Minimizar: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$
Restricción: $x + 2z = 6$, $x + y = 12$

Hallar la distancia mínima En los ejercicios 17-26, use los multiplicadores de Lagrange para encontrar la distancia mínima desde la curva o superficie al punto indicado. (*Sugerencia:* Para simplificar los cálculos, minimice el cuadrado de la distancia.)

Curva	Punto
17. Recta: $x + y = 1$	(0, 0)
18. Recta: $2x + 3y = -1$	(0, 0)
19. Recta: $x - y = 4$	(0, 2)
20. Recta: $x + 4y = 3$	(1, 0)
21. Parábola: $y = x^2$	(0, 3)
22. Parábola: $y = x^2$	(-3, 0)
23. Circunferencia: $x^2 + (y - 1)^2 = 9$	(4, 4)
24. Circunferencia: $(x - 4)^2 + y^2 = 4$	(0, 10)
Superficie	Punto
25. Plano: $x + y + z = 1$	(2, 1, 1)
26. Cono: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$	(4, 0, 0)

Intersección de superficies En los ejercicios 27 y 28, hallar el punto más alto de la curva de intersección de las superficies.

- Cono: $x^2 + y^2 - z^2 = 0$
Plano: $x + 2z = 4$
- Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 = 36$
Plano: $2x + y - z = 2$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

- Problemas de optimización con restricciones** Explique qué se quiere decir con problemas de optimización con restricciones.
- Método de multiplicadores de Lagrange** Explique el método de los multiplicadores de Lagrange para resolver problemas de optimización con restricciones.

Usar multiplicadores de Lagrange En los ejercicios 31-38, use los multiplicadores de Lagrange para resolver el ejercicio indicado en la sección 13.9.

- | | |
|------------------|------------------|
| 31. Ejercicio 1 | 32. Ejercicio 2 |
| 33. Ejercicio 5 | 34. Ejercicio 6 |
| 35. Ejercicio 9 | 36. Ejercicio 10 |
| 37. Ejercicio 15 | 38. Ejercicio 16 |

39. Volumen máximo Utilice multiplicadores de Lagrange para determinar las dimensiones de la caja rectangular de volumen máximo que puede ser inscrita (con los bordes paralelos a los ejes de coordenadas) en el elipsoide

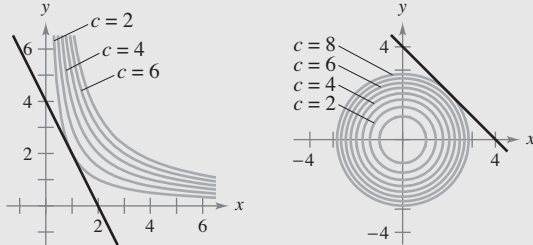
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



40.

¿CÓMO LO VE? Las gráficas muestran la restricción y varias curvas de nivel de la función objetivo. Utilice la gráfica para aproximar los extremos indicados.

- (a) Maximizar $z = xy$ (b) Minimizar $z = x^2 + y^2$
 Restricción: $2x + y = 4$ Restricción: $x + y - 4 = 0$



41. **Costo mínimo** Un contenedor de carga (en forma de un sólido rectangular) debe tener un volumen de 480 pies cúbicos. La parte inferior costará \$5 por pie cuadrado para construir, y los lados y la parte superior costarán \$3 por pie cuadrado para construcción. Use los multiplicadores de Lagrange para encontrar las dimensiones del contenedor de este tamaño que tiene costo mínimo.

42. **Medias geométrica y aritmética**

- (a) Utilice los multiplicadores de Lagrange para demostrar que el producto de tres números positivos x, y y z , cuya suma tiene un valor constante S , es máxima cuando los tres números son iguales. Utilice este resultado para demostrar que

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x + y + z}{3}.$$

- (b) Generalice el resultado del inciso (a) para demostrar que el producto

$$x_1 x_2 x_3 \cdots x_n$$

es máximo cuando

$$x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n, \sum_{i=1}^n x_i = S, \text{ y todo } x_i \geq 0.$$

Después, demuestre que

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}.$$

Esto demuestra que la media geométrica nunca es mayor que la media aritmética.

43. **Superficie mínima** Utilice multiplicadores de Lagrange para encontrar las dimensiones de un cilindro circular recto con volumen de V_0 unidades cúbicas y superficie mínima.

44. **Temperatura** Sea $T(x, y, z) = 100 + x^2 + y^2$ la temperatura en cada punto sobre la esfera

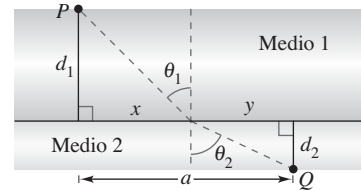
$$x^2 + y^2 + z^2 = 50.$$

Encuentre la temperatura máxima en la curva formada por la intersección de la esfera y el plano $x - z = 0$.

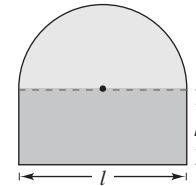
45. **Refracción de la luz** Cuando las ondas de luz que viajan en un medio transparente atraviesan la superficie de un segundo medio transparente, tienden a “desviarse” para seguir la trayectoria de tiempo mínimo. Esta tendencia se llama refracción y está descrita por la ley de refracción de Snell, según la cual

$$\frac{\sin \theta_1}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{v_2}$$

donde θ_1 y θ_2 son las magnitudes de los ángulos mostrados en la figura, y v_1 y v_2 son las velocidades de la luz en los dos medios. Utilice los multiplicadores de Lagrange para deducir esta ley usando $x + y = a$.



46. **Área y perímetro** Un semicírculo está sobre un rectángulo (vea la figura). Si el área es fija y el perímetro es un mínimo, o si el perímetro es fijo y el área es un máximo, utilice multiplicadores de Lagrange para verificar que la longitud del rectángulo es el doble de su altura.



Nivel de producción En los ejercicios 47 y 48, determine el máximo nivel de producción P cuando el costo total de trabajo (a \$72 por unidad) y capital (a \$60 por unidad) está restringido a \$250,000, donde x es el número de unidades de trabajo y y es el número de unidades de capital.

47. $P(x, y) = 100x^{0.25}y^{0.75}$ 48. $P(x, y) = 100x^{0.4}y^{0.6}$

Costo En los ejercicios 49 y 50, determine el costo mínimo para producir 50,000 unidades de un producto, donde x es el número de unidades de trabajo (a \$72 por unidad) y y es el número de unidades de capital (a \$60 por unidad).

49. $P(x, y) = 100x^{0.25}y^{0.75}$ 50. $P(x, y) = 100x^{0.6}y^{0.4}$

DESAFÍOS DEL EXAMEN PUTNAM

51. Una boya está hecha de tres piezas, a saber, un cilindro y dos conos iguales, la altura de cada uno de los conos es igual a la altura del cilindro. Para una superficie dada, ¿con qué forma se tendrá el volumen máximo?

Este problema fue preparado por el Committee on the Putnam Prize Competition. © The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

Ejercicios de repaso

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Evaluar una función En los ejercicios 1 y 2, encuentre y simplifique los valores de la función

- $f(x, y) = 3x^2y$
(a) (1, 3) (b) (-1, 1) (c) (-4, 0) (d) (x, 2)
- $f(x, y) = 6 - 4x - 2y^2$
(a) (0, 2) (b) (5, 0) (c) (-1, -2) (d) (-3, y)

Hallar el dominio y el rango de una función En los ejercicios 3 y 4, determine el dominio y el rango de la función.

- $f(x, y) = \frac{\sqrt{x}}{y}$
- $f(x, y) = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$

Trazar un mapa de contorno En los ejercicios 5 y 6, describa las curvas de nivel de la función. Trace un mapa de contorno de la superficie usando curvas de nivel para los valores de c dados.

- $z = 3 - 2x + y, c = 0, 2, 4, 6, 8$
- $z = 2x^2 + y^2, c = 1, 2, 3, 4, 5$
- Conjetura** Considere la función $f(x, y) = x^2 + y^2$.
(a) Trace la gráfica de la superficie dada por f .
(b) Haga una conjetura sobre la relación entre las gráficas de f y $g(x, y) = f(x, y) + 2$. Explique su razonamiento.
(c) Haga una conjetura sobre la relación entre las gráficas de f y $g(x, y) = f(x, y) - 2$. Explique su razonamiento.
(d) Sobre la superficie en el inciso (a), trace las gráficas $z = f(1, y)$ y $z = f(x, 1)$.

- Inversión** Un capital de \$2000 se deposita en una cuenta de ahorro que gana intereses a una tasa r (escrita con un decimal) compuesto continuamente. La cantidad $A(r, t)$ después de t años es

$$A(r, t) = 2000e^{rt}.$$

Utilice esta función de dos variables para completar la tabla.

	Número de años			
Tasa	5	10	15	20
0.02				
0.04				
0.06				
0.07				

Dibujar una superficie de nivel En los ejercicios 9 y 10, dibuje la gráfica de la superficie de nivel $f(x, y, z) = c$ para un valor dado c .

- $f(x, y, z) = x^2 - y + z^2, c = 2$
- $f(x, y, z) = 4x^2 - y^2 + 4z^2, c = 0$

Límite y continuidad En los ejercicios 11-14, encuentre el límite (si este existe) y analice la continuidad de la función.

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy}{x^2 - y^2}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y + xe^{-y^2}}{1 + x^2}$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$

Hallar derivadas parciales En los ejercicios 15-22, determine todas las primeras derivadas parciales.

- $f(x, y) = 5x^3 + 7y - 3$
- $f(x, y) = 4x^2 - 2xy + y^2$
- $f(x, y) = e^x \cos y$
- $f(x, y) = \frac{xy}{x + y}$
- $f(x, y) = y^3 e^{4x}$
- $z = \ln(x^2 + y^2 + 1)$
- $f(x, y, z) = 2xz^2 + 6xyz - 5xy^3$
- $w = \sqrt{x^2 - y^2 - z^2}$

Hallar segundas derivadas parciales En los ejercicios 23-26, determine las cuatro segundas derivadas parciales. Observe que las derivadas parciales mixtas son iguales.

- $f(x, y) = 3x^2 - xy + 2y^3$
- $h(x, y) = \frac{x}{x + y}$
- $h(x, y) = x \sin y + y \cos x$
- $g(x, y) = \cos(x - 2y)$

- Hallar las pendientes de una superficie** Determine las pendientes de la superficie $z = x^2 \ln(y + 1)$ en las direcciones x y y en el punto $(2, 0, 0)$.

- Ingreso marginal** Una empresa tiene dos plantas que producen la misma podadora de césped. Si x_1 y x_2 son los números de unidades producidas en la planta 1 y en la planta 2, respectivamente, entonces los ingresos totales de la producción están dados por

$$R = 300x_1 + 300x_2 - 5x_1^2 - 10x_1x_2 - 5x_2^2.$$

Si $x_1 = 5$ y $x_2 = 8$, determine (a) el ingreso marginal para la planta 1, $\partial R / \partial x_1$, y (b) el ingreso marginal para la planta 2, $\partial R / \partial x_2$.

Hallar una diferencial total En los ejercicios 29-32, determine la diferencial total.

- $z = x \sin xy$
- $z = 5x^4y^3$
- $w = 3xy^2 - 2x^3yz^2$
- $w = \frac{3x + 4y}{y + 3z}$

Usar una diferencial como una aproximación En los ejercicios 33 y 34, (a) evalúe $f(2, 1)$ y $f(2.1, 1.05)$ y calcule Δz , y (b) utilice la diferencial total dz para aproximar Δz .

- $f(x, y) = 4x + 2y$
- $f(x, y) = 36 - x^2 - y^2$

- Volumen** El posible error implicado en la dimensión de cada dimensión de un cono circular recto es $\pm \frac{1}{8}$ pulg. El radio es de 2 pulgadas y la altura de 5 pulgadas. Aproxime el error propagado y el error relativo en el cálculo del volumen del cono.

36. **Superficie lateral** Aproxime el error propagado y el error relativo en el cálculo de la superficie lateral del cono del ejercicio 35. (La superficie lateral está dada por $A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$.)

Usar diferentes métodos En los ejercicios 37 y 38, encuentre dw/dt , (a) utilizando la regla de la cadena apropiada y (b) convirtiendo w en función de t antes de derivar.

37. $w = \ln(x^2 + y)$, $x = 2t$, $y = 4 - t$

38. $w = y^2 - x$, $x = \cos t$, $y = \sin t$

Usar diferentes métodos En los ejercicios 39 y 40, encuentre $\partial w/\partial r$ y $\partial w/\partial t$, (a) utilizando la regla de la cadena apropiada y (b) convirtiendo w en una función de r y de t antes de derivar.

39. $w = \frac{xy}{z}$, $x = 2r + t$, $y = rt$, $z = 2r - t$

40. $w = x^2 + y^2 + z^2$, $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $z = t$

Hallar derivadas parciales implícitamente En los ejercicios 41 y 42, encuentre las primeras derivadas parciales de z por derivación implícita.

41. $x^2 + xy + y^2 + yz + z^2 = 0$ 42. $xz^2 - y \sin z = 0$

Hallar una derivada direccional En los ejercicios 43 y 44, encuentre la derivada direccional de la función en P en dirección de \mathbf{v} .

43. $f(x, y) = x^2y$, $P(-5, 5)$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

44. $f(x, y) = \frac{1}{4}y^2 - x^2$, $P(1, 4)$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$

Hallar una derivada direccional En los ejercicios 45 y 46, use el gradiente para encontrar la derivada direccional de la función en P en dirección de \mathbf{v} .

45. $w = y^2 + xz$, $P(1, 2, 2)$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

46. $w = 5x^2 + 2xy - 3y^2z$, $P(1, 0, 1)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

Usar propiedades del gradiente En los ejercicios 47-50, encuentre el gradiente de la función y el máximo valor de la derivada direccional en el punto dado.

47. $z = x^2y$, $(2, 1)$

48. $z = e^{-x} \cos y$, $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

49. $z = \frac{y}{x^2 + y^2}$, $(1, 1)$

50. $z = \frac{x^2}{x - y}$, $(2, 1)$

Usar una función En los ejercicios 51 y 52, (a) encuentre el gradiente de la función en P , (b) encuentre un vector normal unitario para la curva de nivel $f(x, y) = c$ en P , (c) encuentre la recta tangente a la curva de nivel $f(x, y) = c$ en P , y (d) trace la curva de nivel, el vector unitario normal y la recta tangente en el plano xy .

51. $f(x, y) = 9x^2 - 4y^2$

$c = 65$, $P(3, 2)$

52. $f(x, y) = 4y \sin x - y$

$c = 3$, $P\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

Hallar una ecuación de un plano tangente En los ejercicios 53-56, encuentre una ecuación del plano tangente a la superficie en el punto dado.

53. $z = x^2 + y^2 + 2$, $(1, 3, 12)$

54. $9x^2 + y^2 + 4z^2 = 25$, $(0, -3, 2)$

55. $z = -9 + 4x - 6y - x^2 - y^2$, $(2, -3, 4)$

56. $f(x, y) = \sqrt{25 - y^2}$, $(2, 3, 4)$

Hallar una ecuación de un plano tangente y una recta normal En los ejercicios 57 y 58, encuentre una ecuación del plano tangente y determine ecuaciones simétricas para la recta normal a la superficie en el punto dado

57. $f(x, y) = x^2y$, $(2, 1, 4)$

58. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $(1, 2, 2)$

59. **Ángulo de inclinación** Encuentre el ángulo de inclinación θ del plano tangente a la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 14$ en el punto $(2, 1, 3)$.

60. **Aproximación** Considere las siguientes aproximaciones para una función $f(x, y)$ centrada en $(0, 0)$.

Aproximación lineal:

$$P_1(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y$$

Aproximación cuadrática:

$$P_2(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{1}{2}f_{xx}(0, 0)x^2 + f_{xy}(0, 0)xy + \frac{1}{2}f_{yy}(0, 0)y^2$$

[Observe que la aproximación lineal es el plano tangente a la superficie en $(0, 0, f(0, 0))$.]

(a) Encuentre la aproximación lineal de

$$f(x, y) = \cos x + \sin y$$

centrada en $(0, 0)$.

(b) Encuentre la aproximación cuadrática de

$$f(x, y) = \cos x + \sin y$$

centrada en $(0, 0)$.

(c) Si $y = 0$ en la aproximación cuadrática, ¿se obtiene el polinomio de segundo grado de Taylor de dicha función?

(d) Complete la tabla.

x	y	$f(x, y)$	$P_1(x, y)$	$P_2(x, y)$
0	0			
0	0.1			
0.2	0.1			
0.5	0.3			
1	0.5			

(e) Use un sistema algebraico computarizado para graficar las superficies $z = f(x, y)$, $z = P_1(x, y)$ y $z = P_2(x, y)$. ¿Cómo cambia la precisión de las aproximaciones cuando la distancia desde $(0, 0)$ aumenta?

Usar el criterio de segundas parciales En los ejercicios 61-66, examine la función para los extremos relativos y los puntos silla.

61. $f(x, y) = -x^2 - 4y^2 + 8x - 8y - 11$

62. $f(x, y) = x^2 - y^2 - 16x - 16y$

63. $f(x, y) = 2x^2 + 6xy + 9y^2 + 8x + 14$

64. $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2 - 5x$

65. $f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

66. $f(x, y) = -8x^2 + 4xy - y^2 + 12x + 7$

67. **Hallar la distancia mínima** Determine la distancia mínima del punto al plano. (*Sugerencia:* Para simplificar los cálculos, minimice el cuadrado de la distancia.)

68. **Hallar los números positivos** Determine tres números positivos x , y y z tales que el producto es 64 y la suma es mínima.

69. **Ingreso máximo** Una compañía fabrica dos tipos de bicicletas, una bicicleta de carreras y una bicicleta de montaña. El ingreso total de x_1 unidades de bicicletas de carrera y x_2 unidades de bicicletas de montaña es

$$R = -6x_1^2 - 10x_2^2 - 2x_1x_2 + 32x_1 + 84x_2$$

donde x_1 y x_2 están en miles de unidades. Encuentre x_1 y x_2 de tal forma que maximicen el ingreso.

70. **Máxima ganancia** Una corporación fabrica, en dos lugares, cámaras digitales. Las funciones de costo para producir x_1 unidades en el lugar 1 es $C_1 = 0.05x_1^2 + 15x_1 + 5400$ y x_2 unidades en el lugar 2 es $C_2 = 0.03x_2^2 + 15x_2 + 6100$. Las cámaras digitales se venden a \$180 por unidad. Determine los niveles de producción en los dos lugares que maximizan la ganancia $P = 180(x_1 + x_2) - C_1 - C_2$.

Hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados En los ejercicios 71 y 72, determine la recta de regresión de mínimos cuadrados para los puntos. Utilice las capacidades de regresión de una herramienta de graficación para comparar sus resultados. Use la herramienta de graficación para trazar los puntos y graficar la recta de regresión.

71. (0, 4), (1, 5), (3, 6), (6, 8), (8, 10)

72. (0, 10), (2, 8), (4, 7), (7, 5), (9, 3), (12, 0)

73. **Modelado de datos** Un agrónomo prueba cuatro fertilizantes en los campos de cultivo para determinar la relación entre la producción de trigo y (en bushels por acre) y la cantidad de fertilizante x (en cientos de libras por acre). Los resultados se muestran en la tabla.

Fertilizante, x	100	150	200	250
Cosecha, y	35	44	50	56

- (a) Utilice el programa de regresión de una herramienta de graficación para hallar la recta de regresión de mínimos cuadrados para los datos.
 (b) Utilice el modelo para estimar la producción para una aplicación de 175 libras de fertilizante por acre.

Modelado de datos La tabla muestra los datos de producto y (en miligramos) de una reacción química después de t minutos.

Minutos, t	1	2	3	4
Producto, y	1.2	7.1	9.9	13.1

Minutos, t	5	6	7	8
Producto, y	15.5	16.0	17.9	18.0

- (a) Use el programa de regresión de una herramienta de graficación para encontrar la recta de regresión de mínimos cuadrados. Después utilice la herramienta de graficación para trazar los datos y graficar el modelo.
 (b) Utilice una herramienta de graficación para los puntos $(\ln t, y)$. Estos puntos parecen seguir un patrón lineal más cerca que la gráfica de los datos dados en el inciso (a)?
 (c) Use el modelo de regresión de una herramienta de graficación para encontrar la recta de regresión de mínimos cuadrados para los puntos $(\ln t, y)$ y obtener el modelo logarítmico $y = a + b \ln t$.
 (d) Utilice una herramienta de graficación para trazar los datos originales y representar los modelos lineal y logarítmico. ¿Cuál es el mejor modelo? Explique.

Usar los multiplicadores de Lagrange En los ejercicios 75-80, utilice los multiplicadores de Lagrange para encontrar los extremos indicados, suponga que x y y son positivos.

75. Minimizar: $f(x, y) = x^2 + y^2$

Restricción: $x + y - 8 = 0$

76. Maximizar: $f(x, y) = xy$

Restricción: $x + 3y - 6 = 0$

77. Maximizar: $f(x, y) = 2x + 3xy + y$

Restricción: $x + 2y = 29$

78. Minimizar: $f(x, y) = x^2 - y^2$

Restricción: $x - 2y + 6 = 0$

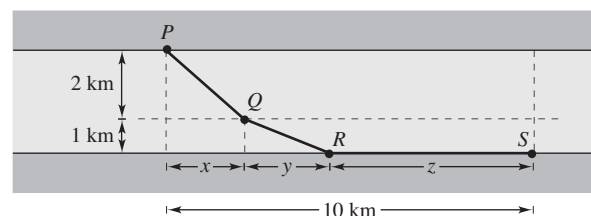
79. Maximizar: $f(x, y) = 2xy$

Restricción: $2x + y = 12$

80. Minimizar: $f(x, y) = 3x^2 - y^2$

Restricción: $2x - 2y + 5 = 0$

81. **Costo mínimo** Hay que construir un conducto para agua desde el punto P al punto S , y debe atravesar regiones donde los costos de construcción difieren (ver la figura). El costo por kilómetro en dólares es $3k$ de P a Q , $2k$ de Q a R y k de R a S . Por simplicidad haga $k = 1$. Use multiplicadores de Lagrange para hallar x , y y z tales que el costo total C se minimice.



Solución de problemas

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

1. **Área** La fórmula de Heron establece que el área de un triángulo con lados de longitudes a , b y c está dada por

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde $s = \frac{a+b+c}{2}$, como se muestra en la figura.

- Utilice la fórmula de Herón para calcular el área del triángulo con vértices $(0, 0)$, $(3, 4)$ y $(6, 0)$.
- Demuestre que de todos los triángulos que tienen un mismo perímetro, el triángulo con el área mayor es un triángulo equilátero.
- Demuestre que de todos los triángulos que tienen una misma área, el triángulo con el perímetro menor es un triángulo equilátero.

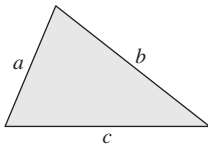


Figura para 1

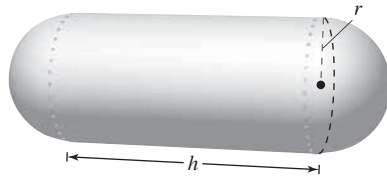
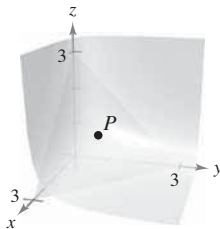


Figura para 2

2. **Minimizar material** Un tanque industrial tiene forma cilíndrica con extremos hemisféricos, como se muestra en la figura. El depósito debe almacenar 1000 litros de fluido. Determine el radio r y la longitud h que minimizan la cantidad de material utilizado para la construcción del tanque.

3. **Plano tangente** Sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto en el primer octante en la superficie $xyz = 1$.

- Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto P .
- Demuestre que el volumen del tetraedro formado en los tres planos de coordenadas y el plano tangente es constante, independiente del punto de tangencia (vea la figura).



4. **Usar funciones** Utilice un sistema algebraico por computadora y represente las funciones

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 1} \quad \text{y} \quad g(x) = x$$

en la misma pantalla.

- (a) Demuestre que

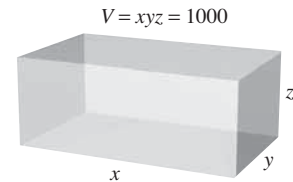
$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - g(x)] = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - g(x)] = 0.$$

- (b) Encuentre el punto en la gráfica de f que está más alejado de la gráfica de g .

5. **Hallar valores máximos y mínimos**

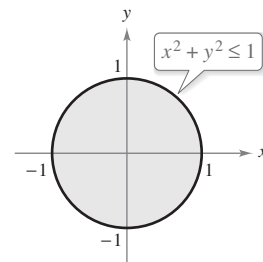
- Sean $f(x, y) = x - y$ y $g(x, y) = x^2 + y^2 = 4$. Grafique varias curvas de nivel de f y la restricción g en el plano xy . Use la gráfica para determinar el valor mayor de f sujeto a la restricción $g = 4$. Después, verifique su resultado mediante los multiplicadores de Lagrange.
- Sean $f(x, y) = x - y$ y $g(x, y) = x^2 + y^2 = 0$. Encuentre los valores máximos y mínimos de f sujetos a la restricción $g = 0$. ¿Funcionará el método de los multiplicadores de Lagrange en este caso? Explique.

6. **Costos de minimización** Un cuarto caliente de almacenamiento tiene la forma de una caja rectangular y un volumen de 1000 pies cúbicos, como se muestra en la figura. Como el aire caliente sube, la pérdida de calor por unidad de área a través del techo es cinco veces mayor que la pérdida de calor a través del suelo. La pérdida de calor a través de las cuatro paredes es tres veces mayor que la pérdida de calor a través del suelo. Determine las dimensiones del cuarto que minimizan la pérdida de calor y que por consiguiente minimizan los costos de calefacción.



7. **Costos de minimización** Repita el ejercicio 6 suponiendo que la pérdida de calor a través de las paredes y el techo sigue siendo la misma, pero el suelo se aísla de manera que no hay ninguna pérdida de calor a través del mismo.

8. **Temperatura** Considere una placa circular de radio 1 dada por $x^2 + y^2 \leq 1$, como se muestra en la figura. La temperatura sobre cualquier punto $P(x, y)$ de la placa es $T(x, y) = 2x^2 + y^2 - y + 10$.



- Dibuje la isoterma $T(x, y) = 10$. Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, vaya a MathGraphs.com.
- Determine el punto más caliente y el punto más frío de la placa.

9. **Función de producción de Cobb-Douglas** Considere la función de producción de Cobb-Douglas

$$f(x, y) = Cx^a y^{1-a}, \quad 0 < a < 1.$$

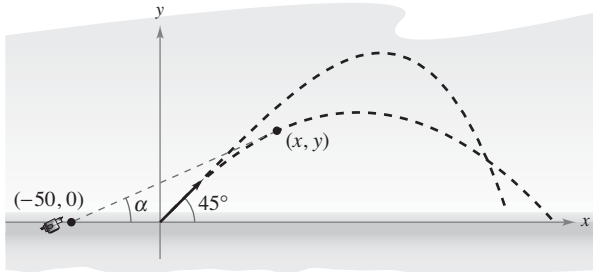
- Demuestre que f satisface la ecuación $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = f$.
- Demuestre que $f(tx, ty) = t f(x, y)$.

10. Minimizar el área Considere la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que encierra el círculo $x^2 + y^2 = 2x$. Halle los valores de a y b que minimizan el área de la elipse.

11. Movimiento de proyectil Un proyectil es lanzado a un ángulo de 45° respecto a la horizontal y con una velocidad inicial de 64 pies por segundo. Una cámara de televisión se localiza en el plano de la trayectoria del proyectil 50 pies detrás del sitio del lanzamiento (vea la figura).



- Encuentre las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del proyectil en términos del parámetro t que representa tiempo.
- Expresé el ángulo α que la cámara forma con la horizontal en términos de x , y y en términos de t .
- Utilice los resultados del inciso (b) para calcular $\frac{d\alpha}{dt}$.
- Utilice una herramienta de graficación para representar α en términos de t . ¿Es simétrica la gráfica respecto al eje del arco parabólico del proyectil? ¿En qué momento es mayor la razón de cambio de α ?
- ¿En qué momento es máximo el ángulo α ? ¿Ocurre esto cuando el proyectil está a su mayor altura?

12. Distancia Considere la distancia d entre el sitio del lanzamiento y el proyectil del ejercicio 11.

- Expresé la distancia d en términos de x , y y en términos del parámetro t .
- Utilice los resultados del inciso (a) para hallar la razón de cambio de d .
- Encuentre la razón de cambio de la distancia cuando $t = 2$.
- Durante el vuelo del proyectil, ¿cuándo es mínima la razón de cambio de d ? ¿Ocurre esto en el momento en que el proyectil alcanza su altura máxima?

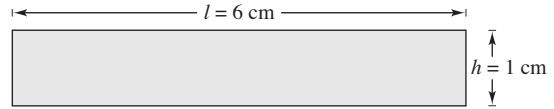
13. Determinar puntos extremos y silla usando tecnología Considere la función

$$f(x, y) = (\alpha x^2 + \beta y^2)e^{-(x^2 + y^2)}, \quad 0 < |\alpha| < \beta.$$

- Utilice un sistema algebraico por computadora y represente gráficamente la función empleando $\alpha = 1$ y $\beta = 2$, e identifique todos los extremos o puntos silla.
- Utilice un sistema algebraico por computadora y represente gráficamente la función empleando $\alpha = -1$ y $\beta = 2$, e identifique todos los extremos o puntos silla.
- Generalice los resultados de los incisos (a) y (b) para la función f .

14. Demostración Demuestre que si f es una función diferenciable tal que $\nabla f(x_0, y_0) = \mathbf{0}$, entonces el plano tangente en (x_0, y_0) es horizontal.

15. Área La figura muestra un rectángulo que tiene aproximadamente $l = 6$ centímetros de largo y $h = 1$ centímetro de altura.



- Dibuje una franja rectangular a lo largo de la región rectangular que muestre un pequeño incremento en la longitud.
- Dibuje una franja rectangular a lo largo de la región rectangular que muestre un pequeño incremento en la altura.
- Utilice los resultados de los incisos (a) y (b) para identificar la medida que tiene mayor efecto en el área A del rectángulo.
- Verifique analíticamente la respuesta dada en el inciso (c) comparando los valores de dA cuando $dl = 0.01$ y cuando $dh = 0.01$.

16. Planos tangentes Sea f una función de una variable derivable. Demuestre que los planos tangentes a la superficie se cortan en un punto común.

17. Ecuación de onda Demuestre que

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\text{sen}(x - t) + \text{sen}(x + t)]$$

es una solución a la ecuación de ondas unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

18. Ecuación de onda Demuestre que

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x - ct) + f(x + ct)]$$

es una solución a la ecuación de ondas unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

(Esta ecuación describe la vibración transversal pequeña de una cuerda elástica, como las de ciertos instrumentos musicales.)

19. Comprobar ecuaciones Considere la función $w = f(x, y)$, donde $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$. Verifique cada una de las ecuaciones siguientes

$$(a) \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r}$$

$$(b) \quad \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2$$

20. Usar una función Demuestre el resultado del ejercicio 19(b) para

$$w = \arctan \frac{y}{x}.$$

21. Ecuación de Laplace Reescriba la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

en coordenadas cilíndricas.

Integrales múltiples

- 5.1 Integrales iteradas y área en el plano
- 5.2 Integrales dobles y volumen
- 5.3 Cambio de variables: coordenadas polares
- 5.4 Centro de masa y momentos de inercia
- 5.5 Área de una superficie
- 5.6 Integrales triples y aplicaciones
- 5.7 Coordenadas cilíndricas y esféricas
- 5.8 Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas



Modelado de datos



Centro de presión sobre una vela



Glaciar



Población



Producción promedio

Modelado de datos (AlexKZ/Shutterstock.com); Centro de presión sobre una vela (Martynova Anna/Shutterstock.com); Población (ValeStock/Shutterstock.com); Producción promedio (Nataliya Hora/Shutterstock.com); Glaciar (Volodymyr Goinyk/Shutterstock.com).

5.1 Integrales iteradas y área en el plano

- **Evaluar una integral iterada.**
- **Utilizar una integral iterada para hallar el área de una región plana.**

Integrales iteradas

En las unidades anteriores se estudiaron varias aplicaciones de integración que implican funciones de varias variables. Esta unidad ilustra el uso de la integración para hallar áreas planas, volúmenes, áreas de superficies, momentos y centros de masa.

En la unidad 4 vio cómo derivar funciones de varias variables con respecto a una variable manteniendo constantes las demás variables. Empleando un procedimiento similar puede *integrar* funciones de varias variables. Por ejemplo, la derivada parcial $f_x(x, y) = 2xy$. Considerando a y constante, puede integrar respecto a x para obtener

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= \int f_x(x, y) \, dx && \text{Integre respecto a } x. \\
 &= \int 2xy \, dx && \text{Mantenga } y \text{ constante.} \\
 &= y \int 2x \, dx && \text{Saque } y \text{ como factor constante.} \\
 &= y(x^2) + C(y) && \text{La antiderivada de } 2x \text{ es } x^2. \\
 &= x^2y + C(y). && C(y) \text{ es una función de } y.
 \end{aligned}$$

La “constante” de integración, $C(y)$, es una función de y . En otras palabras, al integrar con respecto a x , puede recobrar $f(x, y)$ solo parcialmente. Por ahora, lo que interesa es extender las integrales definidas a funciones de varias variables. Por ejemplo, al considerar y constante, puede aplicar el teorema fundamental del cálculo para evaluar

$$\int_1^{2y} 2xy \, dx = x^2y \Big|_1^{2y} = (2y)^2y - (1)^2y = 4y^3 - y.$$

↑

x es la variable de integración y y es constante.

↑

Sustituya x por los límites de integración.

↑

El resultado es una función de y .

De manera similar se puede integrar con respecto a y , manteniendo x fija. Ambos procedimientos se resumen como sigue.

$$\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f_x(x, y) \, dx = f(x, y) \Big|_{h_1(y)}^{h_2(y)} = f(h_2(y), y) - f(h_1(y), y) \quad \text{Con respecto a } x$$

$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f_y(x, y) \, dy = f(x, y) \Big|_{g_1(x)}^{g_2(x)} = f(x, g_2(x)) - f(x, g_1(x)) \quad \text{Con respecto a } y$$

Observe que la variable de integración no puede aparecer en ninguno de los límites de integración. Por ejemplo, no tiene ningún sentido escribir

$$\int_0^x y \, dx.$$

EJEMPLO 1

Integrar con respecto a y

Evalúe $\int_1^x (2x^2y^{-2} + 2y) dy$.

Solución Considere x constante e integre respecto a y , con lo que obtiene

$$\begin{aligned} \int_1^x (2x^2y^{-2} + 2y) dy &= \left[\frac{-2x^2}{y} + y^2 \right]_1^x && \text{Integre respecto a } y. \\ &= \left(\frac{-2x^2}{x} + x^2 \right) - \left(\frac{-2x^2}{1} + 1 \right) \\ &= 3x^2 - 2x - 1. \end{aligned}$$

En el ejemplo 1 observe que la integral define una función de x que puede ser integrada *ella misma*, como se muestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2

La integral de una integral

Evalúe $\int_1^2 \left[\int_1^x (2x^2y^{-2} + 2y) dy \right] dx$.

Solución Utilizando el resultado del ejemplo 1, tiene

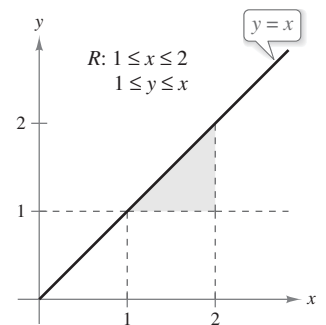
$$\begin{aligned} \int_1^2 \left[\int_1^x (2x^2y^{-2} + 2y) dy \right] dx &= \int_1^2 (3x^2 - 2x - 1) dx \\ &= \left[x^3 - x^2 - x \right]_1^2 && \text{Integre respecto a } x. \\ &= 2 - (-1) \\ &= 3. \end{aligned}$$

La integral del ejemplo 2 es una **integral iterada**. Los corchetes usados en el ejemplo 2 normalmente no se escriben. Las integrales iteradas se escriben normalmente como

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx \quad \text{y} \quad \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy.$$

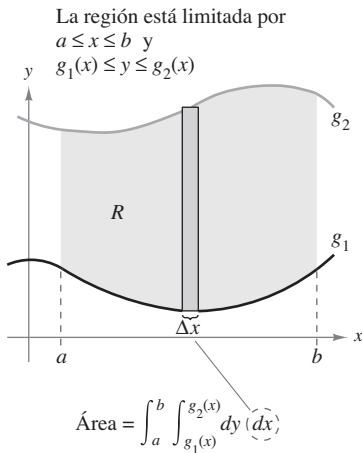
Los **límites interiores de integración** pueden ser variables con respecto a la variable exterior de integración. Sin embargo, los **límites exteriores de integración** deben ser constantes respecto a ambas variables de integración. Después de realizar la integración interior, usted obtiene una integral definida “ordinaria” y la segunda integración produce un número real. Los límites de integración de una integral iterada definen dos intervalos para las variables. Como en el ejemplo 2, los límites exteriores indican que x está en el intervalo $1 \leq x \leq 2$ y los límites interiores indican que y está en el intervalo $1 \leq y \leq x$. Juntos, estos dos intervalos determinan la **región de integración R** de la integral iterada, como se muestra en la figura 5.1.

Como una integral iterada es simplemente un tipo especial de integral definida, en el que el integrando es también una integral, puede utilizar las propiedades de las integrales definidas para evaluar integrales iteradas.



La región de integración para $\int_1^2 \int_1^x f(x, y) dy dx$

Figura 5.1



Región verticalmente simple.

Figura 5.2

Área de una región plana

En el resto de esta sección verá desde una perspectiva nueva un viejo problema, el de hallar el área de una región plana. Considere la región plana R acotada por $a \leq x \leq b$ y $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, como se muestra en la figura 5.2. El área de R está dada por la integral definida

$$\int_a^b [g_2(x) - g_1(x)] dx. \quad \text{Área de } R$$

Usando el teorema fundamental del cálculo, puede reescribir el integrando $g_2(x) - g_1(x)$ como una integral definida. Concretamente, si considera x fija y deja que y varíe desde $g_1(x)$ hasta $g_2(x)$ puede escribir

$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy = y \Big|_{g_1(x)}^{g_2(x)} = g_2(x) - g_1(x).$$

Combinando estas dos integrales, puede expresar el área de la región R mediante una integral iterada

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy dx = \int_a^b y \Big|_{g_1(x)}^{g_2(x)} dx = \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)] dx. \quad \text{Área de } R$$

Colocar un rectángulo representativo en la región R ayuda a determinar el orden y los límites de integración. Un rectángulo vertical implica el orden $dy dx$, donde los límites interiores corresponden a los límites superior e inferior del rectángulo, como se muestra en la figura 5.2. Este tipo de región se llama **verticalmente simple**, porque los límites exteriores de integración representan las rectas verticales

$$x = a$$

y

$$x = b$$

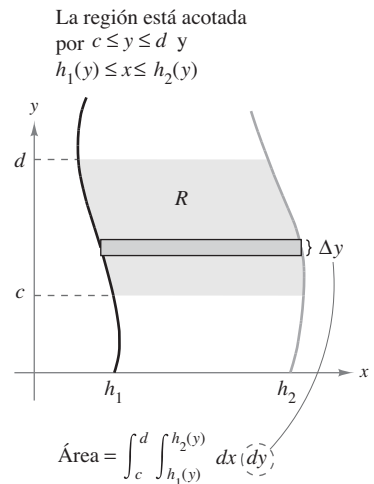
De manera similar, un rectángulo horizontal implica el orden $dx dy$, donde los límites interiores están determinados por los límites izquierdo y derecho del rectángulo, como se muestra en la figura 5.3. Este tipo de región se llama **horizontalmente simple**, porque los límites exteriores representan las rectas horizontales

$$y = c$$

y

$$y = d$$

Las integrales iteradas utilizadas en estos dos tipos de regiones simples se resumen como sigue.



Región horizontalmente simple.

Figura 5.3



COMENTARIO Observe que el orden de integración de estas dos integrales es diferente, el orden $dy dx$ corresponde a una región verticalmente simple, y el orden $dx dy$ corresponde a una región horizontalmente simple.

Área de una región en el plano

1. Si R está definida por $a \leq x \leq b$ y $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, donde g_1 y g_2 son continuas en $[a, b]$, entonces el área de R está dada por

$$A = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy dx. \quad \text{Figura 5.2 (verticalmente simple)}$$

2. Si R está definida por $c \leq y \leq d$ y $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$, donde h_1 y h_2 son continuas en $[c, d]$, entonces el área de R está dada por

$$A = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx dy. \quad \text{Figura 5.3 (horizontalmente simple)}$$

Si los cuatro límites de integración son constantes, la región de integración es rectangular, como ocurre en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Área de una región rectangular

Utilice una integral iterada para representar el área del rectángulo que se muestra en la figura 5.4.

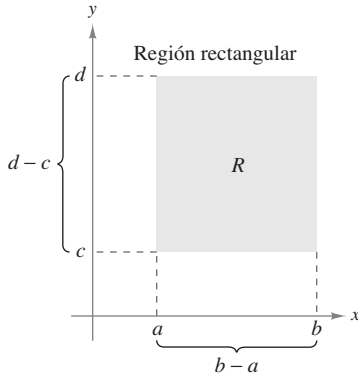


Figura 5.4

Solución La región de la figura 5.4 es verticalmente simple y horizontalmente simple, por tanto puede emplear cualquier orden de integración. Eligiendo el orden $dy dx$, obtiene lo siguiente.

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d dy dx &= \int_a^b y \Big|_c^d dx && \text{Integre respecto a } y. \\ &= \int_a^b (d - c) dx \\ &= \left[(d - c)x \right]_a^b && \text{Integre respecto a } x. \\ &= (d - c)(b - a) \end{aligned}$$

Observe que esta respuesta es consistente con los conocimientos de la geometría.

EJEMPLO 4 Hallar el área por medio de una integral iterada

Utilice una integral iterada para hallar el área de la región acotada por las gráficas de

$f(x) = \text{sen } x$ La curva seno constituye el límite superior.

y

$g(x) = \text{cos } x$ La curva coseno constituye el límite inferior.

entre $x = \pi/4$ y $x = 5\pi/4$.

Solución Como f y g se dan como funciones de x , es conveniente un rectángulo representativo vertical, y puede elegir $dy dx$ como orden de integración, como se muestra en la figura 5.5. Los límites exteriores de integración son

$$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}.$$

Además, dado que el rectángulo está limitado o acotado, superiormente por $f(x) = \text{sen } x$ e inferiormente por $g(x) = \text{cos } x$, tiene

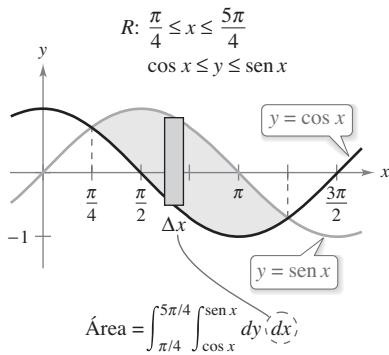


Figura 5.5

$$\begin{aligned} \text{Área de } R &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \int_{\cos x}^{\text{sen } x} dy dx \\ &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} y \Big|_{\cos x}^{\text{sen } x} dx && \text{Integre respecto a } y. \\ &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\text{sen } x - \text{cos } x) dx \\ &= \left[-\text{cos } x - \text{sen } x \right]_{\pi/4}^{5\pi/4} && \text{Integre respecto a } x \\ &= 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

La región de integración en una integral iterada no necesariamente debe estar acotada por rectas. Por ejemplo, la región de integración que se muestra en la figura 5.5 es *verticalmente simple* aun cuando no tiene rectas verticales como fronteras izquierda y derecha. Lo que hace que la región sea verticalmente simple es que está acotada superiormente e inferiormente por gráficas de *funciones de x*.

Con frecuencia, uno de los órdenes de integración hace que un problema de integración sea más sencillo de como resulta con el otro orden de integración. Por ejemplo, haga de nuevo el ejemplo 4 con el orden $dx dy$; le sorprenderá ver que la tarea es formidable. Sin embargo, si llega al resultado, verá que la respuesta es la misma. En otras palabras, el orden de integración afecta la complejidad de la integración, pero no el valor de la integral.

EJEMPLO 5 Comparar diferentes órdenes de integración

•••► Consulte *LarsonCalculus.com* para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Dibuje la región cuya área está representada por la integral

$$\int_0^2 \int_{y^2}^4 dx dy.$$

Después encuentre otra integral iterada que utilice el orden $dy dx$ para representar la misma área y demuestre que ambas integrales dan el mismo valor.

Solución De acuerdo con los límites de integración dados, sabe que

$$y^2 \leq x \leq 4 \quad \text{Límites interiores de integración.}$$

lo cual significa que la región R está acotada a la izquierda por la parábola $x = y^2$ y a la derecha por la recta $x = 4$. Además, como

$$0 \leq y \leq 2 \quad \text{Límites exteriores de integración.}$$

sabe que R está acotada inferiormente por el eje x , como se muestra en la figura 5.6(a). El valor de esta integral es

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_{y^2}^4 dx dy &= \int_0^2 x \Big|_{y^2}^4 dy && \text{Integre respecto a } x. \\ &= \int_0^2 (4 - y^2) dy \\ &= \left[4y - \frac{y^3}{3} \right]_0^2 && \text{Integre respecto a } y. \\ &= \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

Para cambiar el orden de integración a $dy dx$, coloque un rectángulo vertical en la región, como se muestra en la figura 5.6(b). Con esto puede ver que los límites constantes $0 \leq x \leq 4$ sirven como límites exteriores de integración. Despejando y de la ecuación $x = y^2$ puede concluir que los límites interiores son $0 \leq y \leq \sqrt{x}$. Por tanto, el área de la región también se puede representar por

$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} dy dx.$$

Evaluando esta integral, observe que tiene el mismo valor que la integral original.

$$\begin{aligned} \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} dy dx &= \int_0^4 y \Big|_0^{\sqrt{x}} dx && \text{Integre respecto a } y. \\ &= \int_0^4 \sqrt{x} dx \\ &= \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^4 && \text{Integre respecto a } x. \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

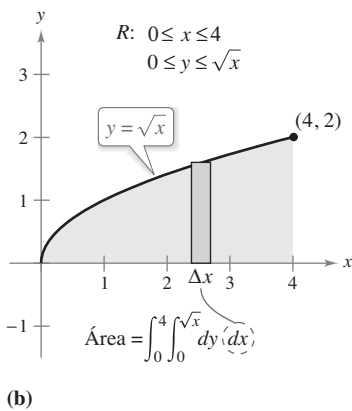
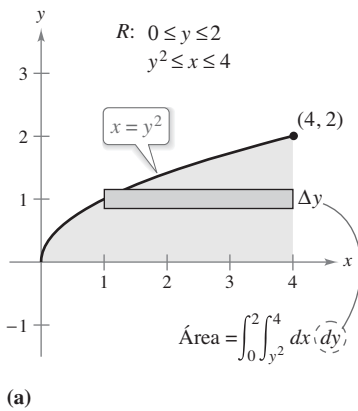


Figura 5.6

Algunas veces no es posible calcular el área de una región con una sola integral iterada. En estos casos se divide la región en subregiones, de manera que el área de cada subregión pueda calcularse por medio de una integral iterada. El área total es entonces la suma de las integrales iteradas.

▷ **TECNOLOGÍA** Algunos paquetes de software pueden efectuar integración simbólica de integrales como las del ejemplo 6. Si cuenta con acceso a alguno de estos paquetes, utilícelo para evaluar las integrales de los ejercicios y ejemplos dados en esta sección.

EJEMPLO 6**Área representada por dos integrales iteradas**

Determine el área de la región R que se encuentra bajo la parábola

$$y = 4x - x^2$$

La parábola forma el límite superior.

sobre el eje x , y sobre la recta

$$y = -3x + 6.$$

La recta y el eje x forman el límite inferior.

Solución Para empezar divida R en dos subregiones, como se muestra en la figura 5.7.

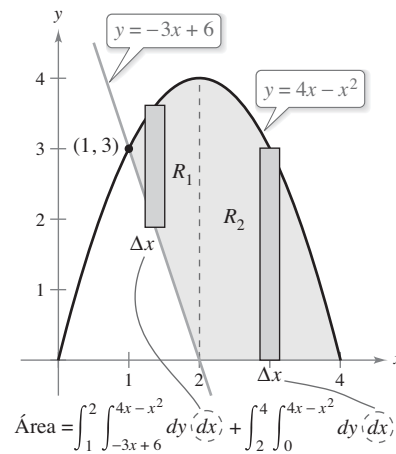


Figura 5.7

•• **COMENTARIO** En los ejemplos 3 a 6, observe la ventaja de dibujar la región de integración. Se recomienda que desarrolle el hábito de hacer dibujos como ayuda para determinar los límites de integración de todas las integrales iteradas de este capítulo.

En ambas regiones es conveniente usar rectángulos verticales y obtiene

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_1^2 \int_{-3x+6}^{4x-x^2} dy dx + \int_2^4 \int_0^{4x-x^2} dy dx \\ &= \int_1^2 (4x - x^2 + 3x - 6) dx + \int_2^4 (4x - x^2) dx \\ &= \left[\frac{7x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - 6x \right]_1^2 + \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_2^4 \\ &= \left(14 - \frac{8}{3} - 12 - \frac{7}{2} + \frac{1}{3} + 6 \right) + \left(32 - \frac{64}{3} - 8 + \frac{8}{3} \right) \\ &= \frac{15}{2}. \end{aligned}$$

El área de la región es $15/2$ unidades cuadradas. Trate de comprobar el resultado usando el procedimiento para hallar el área entre dos curvas. ■

En este punto, usted se puede preguntar para qué se necesitan las integrales iteradas. Después de todo, ya sabe usar la integración convencional para hallar el área de una región en el plano. La necesidad de las integrales iteradas será más clara en la sección siguiente. En esta sección se presta especial atención a los procedimientos para determinar los límites de integración de las integrales iteradas, y el conjunto de ejercicios siguiente está diseñado para adquirir práctica en este procedimiento importante.

5.1 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Evaluar una integral En los ejercicios 1-10, evalúe la integral.

1. $\int_0^x (x + 2y) dy$
2. $\int_x^{x^2} \frac{y}{x} dy$
3. $\int_1^{2y} \frac{y}{x} dx, y > 0$
4. $\int_0^{\cos y} y dx$
5. $\int_0^{\sqrt{4-x^2}} x^2 y dy$
6. $\int_{x^3}^{\sqrt{x}} (x^2 + 3y^2) dy$
7. $\int_{e^y}^y \frac{y \ln x}{x} dx, y > 0$
8. $\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx$
9. $\int_0^{x^3} ye^{-y/x} dy$
10. $\int_y^{\pi/2} \sin^3 x \cos y dx$

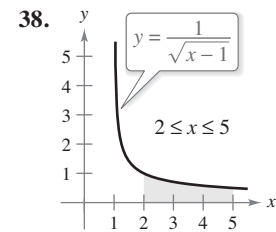
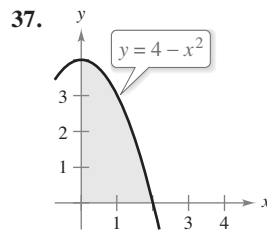
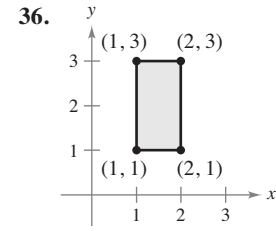
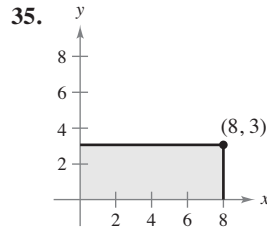
Evaluar una integral iterada En los ejercicios 11-30, evalúe la integral iterada.

11. $\int_0^1 \int_0^2 (x + y) dy dx$
12. $\int_{-1}^1 \int_{-2}^2 (x^2 - y^2) dy dx$
13. $\int_1^2 \int_0^4 (x^2 - 2y^2) dx dy$
14. $\int_{-1}^2 \int_1^3 (x + y^2) dx dy$
15. $\int_0^{\pi/2} \int_0^1 y \cos x dy dx$
16. $\int_0^{\ln 4} \int_0^{\ln 3} e^{x+y} dy dx$
17. $\int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} (1 + \cos x) dy dx$
18. $\int_1^4 \int_1^{\sqrt{x}} 2ye^{-x} dy dx$
19. $\int_0^1 \int_0^x \sqrt{1-x^2} dy dx$
20. $\int_{-4}^4 \int_0^{x^2} \sqrt{64-x^3} dy dx$
21. $\int_{-1}^5 \int_0^{3y} \left(3 + x^2 + \frac{1}{4}y^2\right) dx dy$
22. $\int_0^2 \int_y^{2y} (10 + 2x^2 + 2y^2) dx dy$
23. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x + y) dx dy$
24. $\int_0^2 \int_{3y^2-6y}^{2y-y^2} 3y dx dy$
25. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \frac{2}{\sqrt{4-y^2}} dx dy$
26. $\int_1^3 \int_0^y \frac{4}{x^2 + y^2} dx dy$
27. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} r dr d\theta$
28. $\int_0^{\pi/4} \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{3} \cos \theta} r dr d\theta$
29. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin \theta} \theta r dr d\theta$
30. $\int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos \theta} 3r^2 \sin \theta dr d\theta$

Evaluar una integral iterada impropia En los ejercicios 31-34, evalúe la integral iterada impropia.

31. $\int_1^{\infty} \int_0^{1/x} y dy dx$
32. $\int_0^3 \int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+y^2} dy dx$
33. $\int_1^{\infty} \int_1^{\infty} \frac{1}{xy} dx dy$
34. $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} xye^{-(x^2+y^2)} dx dy$

Determinar el área de una región En los ejercicios 35-38, utilice una integral iterada para hallar el área de la región.



Determinar el área de una región En los ejercicios 39-44, utilice una integral iterada para calcular el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones.

39. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2, x = 0, y = 0$
40. $y = x^{3/2}, y = 2x$
41. $2x - 3y = 0, x + y = 5, y = 0$
42. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
43. $y = 4 - x^2, y = x + 2$
44. $y = x, y = 2x, x = 2$

Cambiar el orden de integración En los ejercicios 45-52, dibuje la región R de integración y cambie el orden de integración.

45. $\int_0^4 \int_0^y f(x, y) dx dy$
46. $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 f(x, y) dx dy$
47. $\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy dx$
48. $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} f(x, y) dy dx$
49. $\int_1^{10} \int_0^{\ln y} f(x, y) dx dy$
50. $\int_{-1}^2 \int_0^{e^{-x}} f(x, y) dy dx$
51. $\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x, y) dy dx$
52. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\cos x} f(x, y) dy dx$

Cambiar el orden de integración En los ejercicios 53-62, dibuje la región R cuya área está dada por la integral iterada. Después, cambie el orden de integración y demuestre que ambos órdenes dan la misma área.

53. $\int_0^1 \int_0^2 dy dx$
54. $\int_1^2 \int_2^4 dx dy$
55. $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx dy$
56. $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy dx$

57. $\int_0^2 \int_0^x dy dx + \int_2^4 \int_0^{4-x} dy dx$

58. $\int_0^4 \int_0^{x/2} dy dx + \int_4^6 \int_0^{6-x} dy dx$

59. $\int_0^2 \int_{x/2}^1 dy dx$

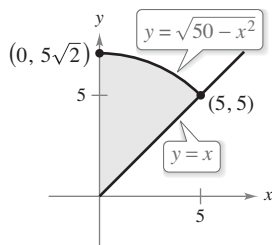
60. $\int_0^9 \int_{\sqrt{x}}^3 dy dx$

61. $\int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} dx dy$

62. $\int_{-2}^2 \int_0^{4-y^2} dx dy$

63. **Piénselo** Dé un argumento geométrico para la igualdad. Compruebe la igualdad analíticamente.

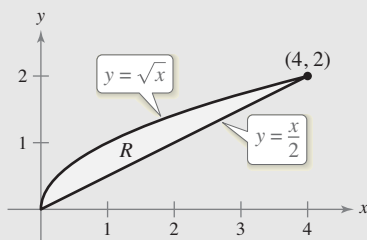
$$\int_0^5 \int_x^{\sqrt{50-x^2}} x^2 y^2 dy dx = \int_0^5 \int_0^y x^2 y^2 dx dy + \int_5^{5\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{50-y^2}} x^2 y^2 dx dy$$



64.

¿CÓMO LO VE? Complete las integrales iteradas en forma tal que cada una represente el área de la región R (vea la figura).

(a) Área = $\iint dx dy$ (b) Área = $\iint dy dx$



Cambiar el orden de integración En los ejercicios 65-70, trace la región de integración. Después, evalúe la integral iterada. (*Sugerencia:* Observe que es necesario cambiar el orden de integración.)

65. $\int_0^2 \int_x^2 x \sqrt{1+y^3} dy dx$

66. $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{3}{2+y^3} dy dx$

67. $\int_0^1 \int_{2x}^2 4e^{y^2} dy dx$

68. $\int_0^2 \int_x^2 e^{-y^2} dy dx$

69. $\int_0^1 \int_{y^2}^1 \sin x^2 dx dy$

70. $\int_0^2 \int_{y^2}^4 \sqrt{x} \sin x dx dy$



Evaluar una integral iterada usando tecnología En los ejercicios 71-78, utilice un sistema algebraico por computadora para evaluar la integral iterada.

71. $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^3 + 3y^2) dy dx$

72. $\int_0^1 \int_y^{2y} \sin(x+y) dx dy$

73. $\int_0^4 \int_0^y \frac{2}{(x+1)(y+1)} dx dy$

74. $\int_0^a \int_0^{a-x} (x^2 + y^2) dy dx$

75. $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} e^{xy} dy dx$

76. $\int_0^2 \int_x^2 \sqrt{16-x^3-y^3} dy dx$

77. $\int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos \theta} 6r^2 \cos \theta dr d\theta$

78. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{1+\sin \theta} 15\theta r dr d\theta$



Comparar diferentes órdenes de integración usando tecnología En los ejercicios 79 y 80, (a) dibuje la región de integración, (b) cambie el orden de integración y (c) use un sistema algebraico por computadora para demostrar que ambos órdenes dan el mismo valor.

79. $\int_0^2 \int_{y^3}^{4\sqrt{2y}} (x^2 y - xy^2) dx dy$

80. $\int_0^2 \int_{\sqrt{4-x^2}}^{4-x^2/4} \frac{xy}{x^2+y^2+1} dy dx$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

81. **Integral iterada** Explique qué se quiere decir con una integral iterada. ¿Cómo se evalúa?

82. **Verticalmente simple y horizontalmente simple** Describa regiones que sean verticalmente simples y regiones que sean horizontalmente simples.

83. **Región de integración** Dé una descripción geométrica de la región de integración si los límites interiores y exteriores de integración son constantes.

84. **Orden de integración** Explique por qué algunas veces es una ventaja cambiar el orden de integración.

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 85 y 86, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que demuestre que es falso.

85. $\int_a^b \int_c^d f(x,y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y) dx dy$

86. $\int_0^1 \int_0^x f(x,y) dy dx = \int_0^1 \int_0^y f(x,y) dx dy$

5.2 Integrales dobles y volumen

- Utilizar una integral doble para representar el volumen de una región sólida y utilizar las propiedades de las integrales dobles.
- Evaluar una integral doble como una integral iterada.
- Hallar el valor promedio de una función sobre una región.

Integrales dobles y volumen de una región sólida

Ya sabe que una integral definida sobre un *intervalo* utiliza un proceso de límite para asignar una medida a cantidades como el área, el volumen, la longitud de arco y la masa. En esta sección, usará un proceso similar para definir la **integral doble** de una función de dos variables sobre una *región en el plano*.

Considere una función continua f tal que $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) en una región R del plano xy . El objetivo es hallar el volumen de la región sólida comprendida entre la superficie dada por

$$z = f(x, y) \quad \text{Superficie sobre el plano } xy$$

y el plano xy , como se muestra en la figura 5.8. Para empezar, superponga una red o cuadrícula rectangular sobre la región, como se muestra en la figura 5.9. Los rectángulos que se encuentran completamente dentro de R forman una **partición interior** Δ , cuya **norma** $\|\Delta\|$ está definida como la longitud de la diagonal más larga de los n rectángulos. Después, elija un punto (x_i, y_i) en cada rectángulo y forme el prisma rectangular cuya altura es

$$f(x_i, y_i) \quad \text{Altura del } i\text{-ésimo prisma}$$

como se muestra en la figura 5.10. Como el área del i -ésimo rectángulo es

$$\Delta A_i \quad \text{Área del rectángulo } i\text{-ésimo}$$

se deduce que el volumen del prisma i -ésimo es

$$f(x_i, y_i) \Delta A_i \quad \text{Volumen del prisma } i\text{-ésimo}$$

y puede aproximar el volumen de la región sólida por la suma de Riemann de los volúmenes de todos los n prismas,

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta A_i \quad \text{Suma de Riemann}$$

como se muestra en la figura 5.11. Esta aproximación se puede mejorar tomando redes o cuadrículas con rectángulos más y más pequeños, como se muestra en el ejemplo 1.

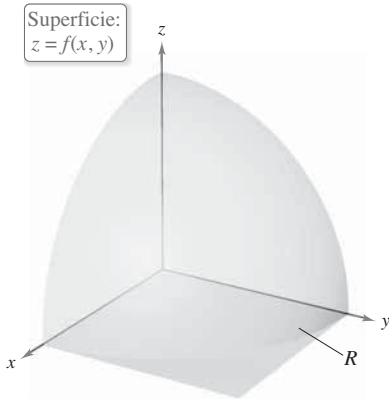
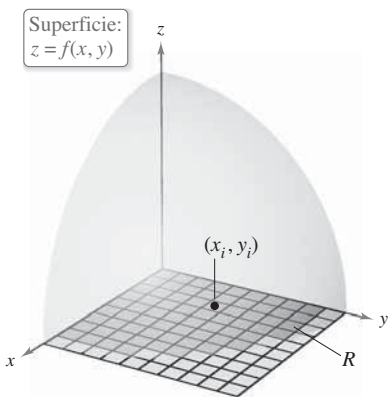
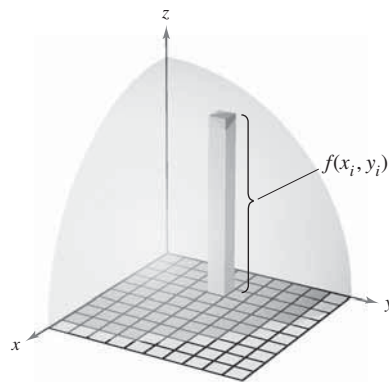


Figura 5.8



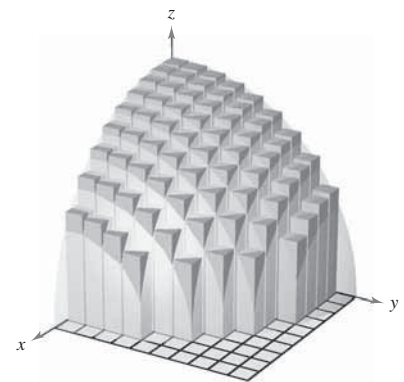
Los rectángulos que se encuentran dentro de R forman una partición interior de R .

Figura 5.9



Prisma rectangular cuya base tiene un área de ΔA_i y cuya altura es $f(x_i, y_i)$.

Figura 5.10



Volumen aproximado por prismas rectangulares.

Figura 5.11

EJEMPLO 1

Aproximar el volumen de un sólido

Aproxime el volumen del sólido comprendido entre el paraboloide

$$f(x, y) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$$

y la región cuadrada R dada por $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Utilice una partición formada por los cuadrados cuyos lados tengan una longitud de $\frac{1}{4}$.

Solución Comience formando la partición especificada de R . En esta partición, es conveniente elegir los centros de las subregiones como los puntos en los que se evalúa $f(x, y)$.

$$\begin{array}{cccc} \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right) & \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right) & \left(\frac{1}{8}, \frac{5}{8}\right) & \left(\frac{1}{8}, \frac{7}{8}\right) \\ \left(\frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right) & \left(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right) & \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right) & \left(\frac{3}{8}, \frac{7}{8}\right) \\ \left(\frac{5}{8}, \frac{1}{8}\right) & \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right) & \left(\frac{5}{8}, \frac{5}{8}\right) & \left(\frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right) \\ \left(\frac{7}{8}, \frac{1}{8}\right) & \left(\frac{7}{8}, \frac{3}{8}\right) & \left(\frac{7}{8}, \frac{5}{8}\right) & \left(\frac{7}{8}, \frac{7}{8}\right) \end{array}$$

Como el área de cada cuadrado $\Delta A_i = \frac{1}{16}$, el volumen se puede aproximar por la suma

$$\sum_{i=1}^{16} f(x_i, y_i) \Delta A_i = \sum_{i=1}^{16} \left(1 - \frac{1}{2}x_i^2 - \frac{1}{2}y_i^2\right) \left(\frac{1}{16}\right) \approx 0.672.$$

Esta aproximación se muestra gráficamente en la figura 5.12. El volumen exacto del sólido es $\frac{2}{3}$ (vea el ejemplo 2). Se obtiene una mejor aproximación si se usa una partición más fina. Por ejemplo, con una partición con cuadrados con lados de longitud la aproximación es 0.668.

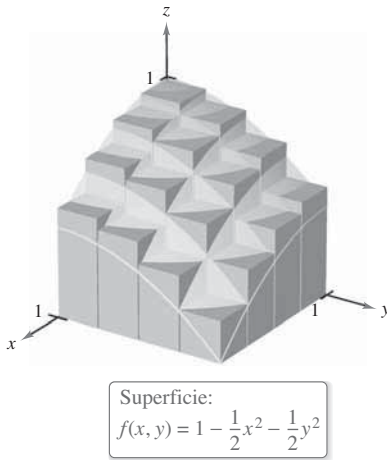
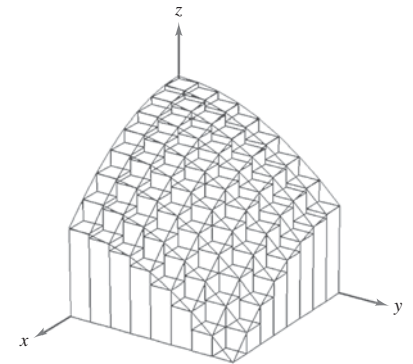


Figura 5.12

▷ **TECNOLOGÍA** Algunas herramientas de graficación tridimensionales pueden representar figuras como la mostrada en la figura 5.12. La gráfica mostrada en la figura 5.12 se dibujó con una herramienta de graficación. En esta gráfica, observe que cada uno de los prismas rectangulares está dentro de la región sólida.



En el ejemplo 1 debe observar que usando particiones más finas obtiene mejores aproximaciones al volumen. Esta observación sugiere que podría obtener el volumen exacto tomando un límite. Es decir

$$\text{Volumen} = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta A_i.$$

El significado exacto de este límite es que el límite es igual a L si para todo $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que

$$\left| L - \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta A_i \right| < \varepsilon$$

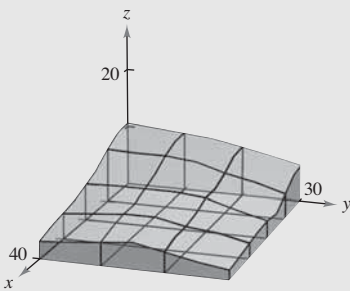
para toda partición Δ de la región plana R (que satisfaga $\|\Delta\| < \delta$) y para toda elección posible de x_i y y_i en la región i -ésima.

El uso del límite de una suma de Riemann para definir un volumen es un caso especial del uso del límite para definir una **integral doble**. Sin embargo, el caso general no requiere que la función sea positiva o continua.

Exploración

Las cantidades en la tabla representan la profundidad (en unidades de 10 yardas) de la tierra en el centro de cada cuadrado de la figura.

$x \backslash y$	1	2	3
1	10	9	7
2	7	7	4
3	5	5	4
4	4	5	3



Aproxime el número de yardas cúbicas de tierra en el primer octante. (Esta exploración la sugirió Robert Vojack, Ridgewood High School, Ridgewood, NJ.)

Definición de integral doble

Si f está definida en una región cerrada y acotada R del plano xy , entonces la **integral doble de f sobre R** está dada por

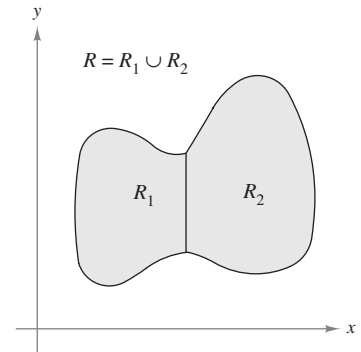
$$\iint_R f(x, y) \, dA = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta A_i$$

siempre que el límite exista. Si existe el límite, entonces f es **integrable** sobre R .

Una vez definidas las integrales dobles, verá que una integral definida ocasionalmente se llama **integral simple**.

Para que la integral doble de f en la región R exista, es suficiente que R pueda expresarse como la unión de un número finito de subregiones que no se superpongan (vea la figura de la derecha) y que sean vertical u horizontalmente simples, y que f sea continua en la región R . Esto significa que la intersección de dos regiones que no se superponen es un conjunto que tiene un área igual a 0. En la figura 5.13, el área del segmento común a R_1 y R_2 es 0.

Puede usar una integral doble para hallar el volumen de una región sólida que se encuentra entre el plano xy y la superficie dada por $z = f(x, y)$.



Las dos regiones R_1 y R_2 no se superponen.

Figura 5.13

Volumen de una región sólida

Si f es integrable sobre una región plana R y $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) en R , entonces el volumen de la región sólida que se encuentra sobre R y bajo la gráfica de f se define como

$$V = \iint_R f(x, y) \, dA.$$

Las integrales dobles tienen muchas de las propiedades de las integrales simples.

TEOREMA 5.1 Propiedades de las integrales dobles

Sean f y g continuas en una región cerrada y acotada R del plano, y sea c una constante

- $\iint_R cf(x, y) \, dA = c \iint_R f(x, y) \, dA$
- $\iint_R [f(x, y) \pm g(x, y)] \, dA = \iint_R f(x, y) \, dA \pm \iint_R g(x, y) \, dA$
- $\iint_R f(x, y) \, dA \geq 0$, si $f(x, y) \geq 0$
- $\iint_R f(x, y) \, dA \geq \iint_R g(x, y) \, dA$, si $f(x, y) \geq g(x, y)$
- $\iint_R f(x, y) \, dA = \iint_{R_1} f(x, y) \, dA + \iint_{R_2} f(x, y) \, dA$, donde R es la unión

donde R es la unión de dos subregiones R_1 y R_2 que no se superponen.

Evaluación de integrales dobles

Normalmente, el primer paso para evaluar una integral doble es reescribirla como una integral iterada. Para mostrar cómo se hace esto, se utiliza el modelo geométrico de una integral doble, el volumen de un sólido.

Considere la región sólida acotada por el plano $z = f(x, y) = 2 - x - 2y$, y por los tres planos coordenados, como se muestra en la figura 5.14. Cada sección transversal vertical paralela al plano yz es una región triangular cuya base tiene longitud $y = (2 - x)/2$ y cuya altura es $z = 2 - x$. Esto implica que para un valor fijo de x , el área de la sección transversal triangular es

$$A(x) = \frac{1}{2}(\text{base})(\text{altura}) = \frac{1}{2}\left(\frac{2-x}{2}\right)(2-x) = \frac{(2-x)^2}{4}.$$

De acuerdo con la fórmula para el volumen de un sólido de secciones transversales conocidas, el volumen del sólido es

$$\begin{aligned} \text{Volumen} &= \int_a^b A(x) dx \\ &= \int_0^2 \frac{(2-x)^2}{4} dx \\ &= -\frac{(2-x)^3}{12} \Big|_0^2 \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Este procedimiento funciona sin importar cómo se obtenga $A(x)$. En particular, puede hallar $A(x)$ por integración, como se muestra en la figura 5.15. Es decir, considere x constante, e integre $z = 2 - x - 2y$ desde 0 hasta $(2 - x)/2$ para obtener

$$\begin{aligned} A(x) &= \int_0^{(2-x)/2} (2-x-2y) dy \\ &= \left[(2-x)y - y^2 \right]_0^{(2-x)/2} \\ &= \frac{(2-x)^2}{4}. \end{aligned}$$

Combinando estos resultados, obtiene la *integral iterada*

$$\text{Volumen} = \iint_R f(x, y) dA = \int_0^2 \int_0^{(2-x)/2} (2-x-2y) dy dx.$$

Para comprender mejor este procedimiento, puede imaginar la integración como dos barridos. En la integración interior, una recta vertical barre el área de una sección transversal. En la integración exterior, la sección transversal triangular barre el volumen, como se muestra en la figura 5.16.

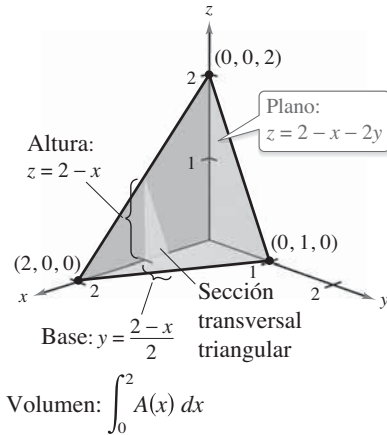
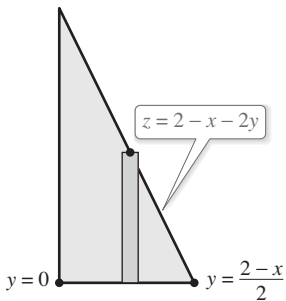
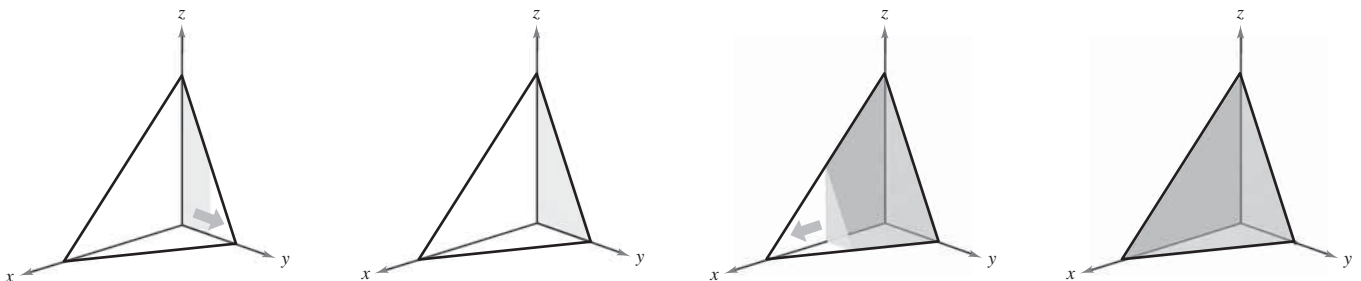


Figura 5.14



Sección transversal triangular.

Figura 5.15



Integre respecto a y para obtener el área de la sección transversal.

Figura 5.16

Integre respecto a x para obtener el volumen del sólido.

El teorema siguiente lo demostró el matemático italiano Guido Fubini (1879-1943). El teorema establece que si R es vertical u horizontalmente simple y f es continua en R , la integral doble de f en R es igual a una integral iterada.

TEOREMA 5.2 Teorema de Fubini

Sea f continua en una región plana R .

1. Si R está definida por $a \leq x \leq b$ y $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, donde g_1 y g_2 son continuas en $[a, b]$, entonces

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \, dy \, dx.$$

2. Si R está definida por $c \leq y \leq d$ y $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$, donde h_1 y h_2 son continuas en $[c, d]$, entonces

$$\iint_R f(x, y) \, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) \, dx \, dy.$$

EJEMPLO 2

Evaluar una integral doble como integral iterada

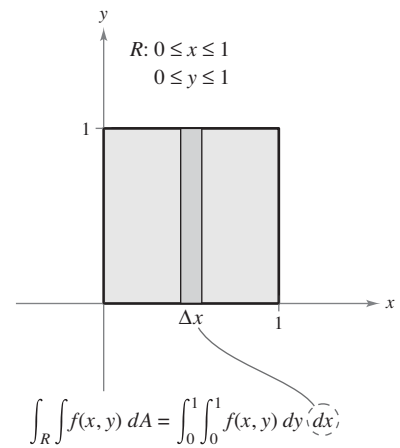
Evalúe

$$\iint_R \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2\right) \, dA$$

donde R es la región dada por

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Solución Como la región R es un cuadrado, es vertical y horizontalmente simple, puede emplear cualquier orden de integración. Elija $dy \, dx$ colocando un rectángulo representativo vertical en la región, como se muestra en la figura a la derecha. Con esto obtiene lo siguiente.

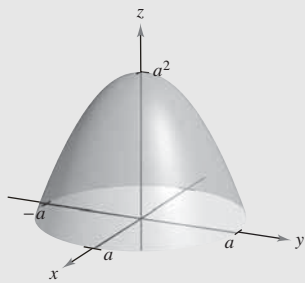


$$\begin{aligned} \iint_R \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2\right) \, dA &= \int_0^1 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2\right) \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \left[\left(1 - \frac{1}{2}x^2\right)y - \frac{y^3}{6} \right]_0^1 \, dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2}x^2\right) \, dx \\ &= \left[\frac{5}{6}x - \frac{x^3}{6} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

La integral doble evaluada en el ejemplo 2 representa el volumen de la región sólida que fue aproximado en el ejemplo 1. Observe que la aproximación obtenida en el ejemplo 1 es buena (0.672 contra $\frac{2}{3}$), aun cuando empleó una partición que constaba solo de 16 cuadrados. El error se debe a que usó los centros de las subregiones cuadradas como los puntos para la aproximación. Esto es comparable a la aproximación de una integral simple con la regla del punto medio.

Exploración

El volumen de un sector de paraboloides El sólido del ejemplo 3 tiene una base elíptica (no circular). Considere la región limitada o acotada por el paraboloides circular $z = a^2 - x^2 - y^2$, $a > 0$ y el plano xy . ¿Cuántas maneras de hallar el volumen de este sólido conoce ahora? Por ejemplo, podría usar el método del disco para encontrar el volumen como un sólido de revolución. ¿Todos los métodos emplean integración?



.....▶
COMENTARIO En el ejemplo 3, observe la utilidad de la fórmula de Wallis para evaluar $\int_0^{\pi/2} \cos^n \theta d\theta$.

La dificultad para evaluar una integral simple $\int_a^b f(x) dx$ depende normalmente de la función f , y no del intervalo $[a, b]$. Esta es una diferencia importante entre las integrales simples y las integrales dobles. En el ejemplo siguiente se integra una función similar a la de los ejemplos 1 y 2. Observe que una variación en la región R lleva a un problema de integración mucho más difícil.

EJEMPLO 3

Hallar el volumen por medio de una integral doble

Determine el volumen de la región sólida acotada por el paraboloides $z = 4 - x^2 - 2y^2$ y el plano xy , como se muestra en la figura 5.17(a).

Solución Haciendo $z = 0$, observe que la base de la región, en el plano xy , es la elipse $x^2 + 2y^2 = 4$, como se muestra en la figura 5.17(b). Esta región plana es vertical y horizontalmente simple, por tanto el orden $dy dx$ es apropiado.

Límites variables para y : $-\sqrt{\frac{(4-x^2)}{2}} \leq y \leq \sqrt{\frac{(4-x^2)}{2}}$

Límites constantes para x : $-2 \leq x \leq 2$

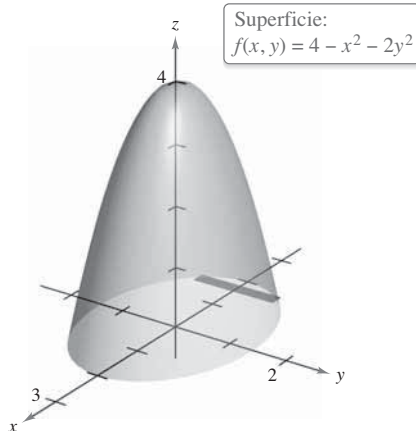
El volumen está dado por

$$\begin{aligned} V &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} (4 - x^2 - 2y^2) dy dx \\ &= \int_{-2}^2 \left[(4 - x^2)y - \frac{2y^3}{3} \right]_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} dx \\ &= \frac{4}{3\sqrt{2}} \int_{-2}^2 (4 - x^2)^{3/2} dx \\ &= \frac{4}{3\sqrt{2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 16 \cos^4 \theta d\theta \\ &= \frac{64}{3\sqrt{2}} (2) \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta \\ &= \frac{128}{3\sqrt{2}} \left(\frac{3\pi}{16} \right) \\ &= 4\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

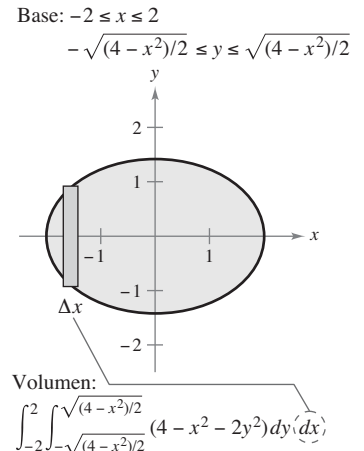
Ver figura 5.17(b).

$x = 2 \sin \theta$

Fórmula de Wallis



(a)
Figura 5.17



(b)

En los ejemplos 2 y 3, los problemas se podrían haber resuelto empleando cualquiera de los órdenes de integración, porque las regiones eran vertical y horizontalmente simples. En caso de haber usado el orden $dx dy$ habría obtenido integrales con dificultad muy parecida. Sin embargo, hay algunas ocasiones en las que uno de los órdenes de integración es mucho más conveniente que otro. El ejemplo 4 muestra uno de estos casos.

EJEMPLO 4 Comparar diferentes órdenes de integración

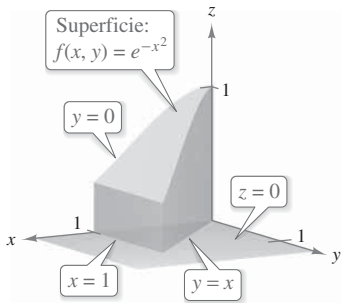
•••► Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Encuentre el volumen de la región sólida R acotada por la superficie

$$f(x, y) = e^{-x^2} \quad \text{Superficie}$$

y los planos $z = 0, y = 0, y = x$ y $x = 1$, como se muestra en la figura 5.18.

Solución La base de R en el plano xy está acotada por las rectas $y = 0, x = 1$ y $y = x$. Los dos posibles órdenes de integración se muestran en la figura 5.19.



La base está acotada por $y = 0, y = x$ y $x = 1$.

Figura 5.18

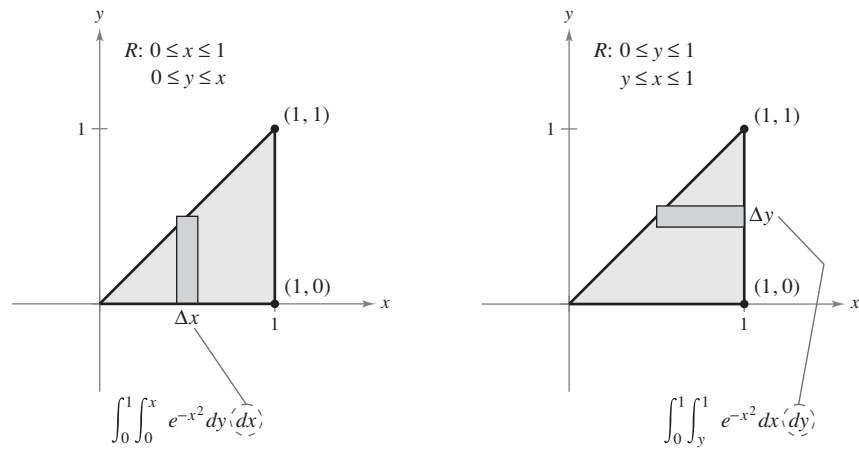


Figura 5.19

Estableciendo las integrales iteradas correspondientes, observe que el orden $dx dy$ requiere la antiderivada

$$\int e^{-x^2} dx$$

la cual no es una función elemental. Por otro lado, con el orden $dy dx$ obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^x e^{-x^2} dy dx &= \int_0^1 e^{-x^2} y \Big|_0^x dx \\ &= \int_0^1 x e^{-x^2} dx \\ &= -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_0^1 \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{e} - 1 \right) \\ &= \frac{e - 1}{2e} \\ &\approx 0.316. \end{aligned}$$

► **TECNOLOGÍA** Trate de utilizar un integrador simbólico para evaluar la integral del ejemplo 4.

EJEMPLO 5**Volumen de una región acotada por dos superficies**

Encuentre el volumen de la región sólida acotada por arriba por el paraboloido

$$z = 1 - x^2 - y^2 \quad \text{Paraboloido}$$

y por debajo por el plano

$$z = 1 - y \quad \text{Plano}$$

como se muestra en la figura 5.20.

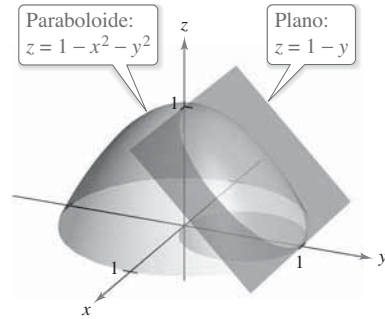


Figura 5.20

Solución Igualando los valores z , puede determinar que la intersección de dos superficies se presenta en el cilindro circular recto dado por

$$1 - y = 1 - x^2 - y^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = y - y^2.$$

Así, la región R en el plano xy es un círculo, como se muestra en la figura 5.21. Ya que el volumen de la región sólida es la diferencia entre el volumen bajo el paraboloido y el volumen bajo el plano, tiene

Volumen = (volumen bajo el paraboloido) - (volumen bajo el plano)

$$= \int_0^1 \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} (1 - x^2 - y^2) \, dx \, dy - \int_0^1 \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} (1 - y) \, dx \, dy$$

$$= \int_0^1 \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} (y - y^2 - x^2) \, dx \, dy$$

$$= \int_0^1 \left[(y - y^2)x - \frac{x^3}{3} \right]_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} \, dy$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^1 (y - y^2)^{3/2} \, dy$$

$$= \left(\frac{4}{3}\right) \left(\frac{1}{8}\right) \int_0^1 [1 - (2y - 1)]^{3/2} \, dy$$

$$= \frac{1}{6} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^4 \theta}{2} \, d\theta \quad 2y - 1 = \text{sen } \theta$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta \, d\theta$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{3\pi}{16}\right) \quad \text{Fórmula de Wallis}$$

$$= \frac{\pi}{32}.$$

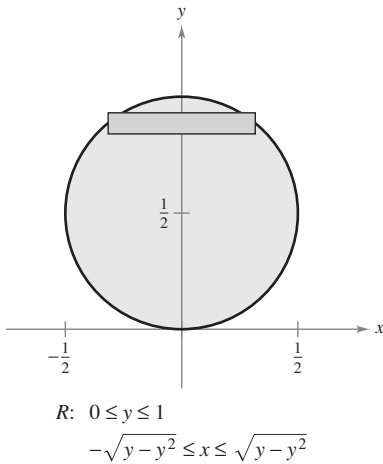


Figura 5.21

Valor promedio de una función

Recuerde de la sección 4.4 que para una función f en una variable, el valor promedio de f sobre $[a, b]$ es

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Dada una función f en dos variables, puede encontrar el valor promedio de f sobre la región del plano R como se muestra en la siguiente definición.

Definición del valor promedio de una función sobre una región

Si f es integrable sobre la región plana R , entonces el **valor promedio** de f sobre R es

$$\text{Valor promedio} = \frac{1}{A} \iint_R f(x, y) dA$$

donde A es el área de R .

EJEMPLO 6

Hallar el valor promedio de una función

Determine el valor promedio de

$$f(x, y) = \frac{1}{2}xy$$

sobre la región del plano R , donde R es un rectángulo con vértices

$$(0, 0), (4, 0), (4, 3) \text{ y } (0, 3).$$

Solución El área de la región rectangular R es

$$A = (4)(3) = 12$$

como se muestra en la figura 5.22. Los límites de x son

$$0 \leq x \leq 4$$

y los límites de y son

$$0 \leq y \leq 3.$$

Entonces, el valor promedio es

$$\begin{aligned} \text{Valor promedio} &= \frac{1}{A} \iint_R f(x, y) dA \\ &= \frac{1}{12} \int_0^4 \int_0^3 \frac{1}{2}xy \, dy \, dx \\ &= \frac{1}{12} \int_0^4 \left[\frac{1}{4}xy^2 \right]_0^3 \, dx \\ &= \left(\frac{1}{12} \right) \left(\frac{9}{4} \right) \int_0^4 x \, dx \\ &= \frac{3}{16} \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^4 \\ &= \left(\frac{3}{16} \right) (8) \\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

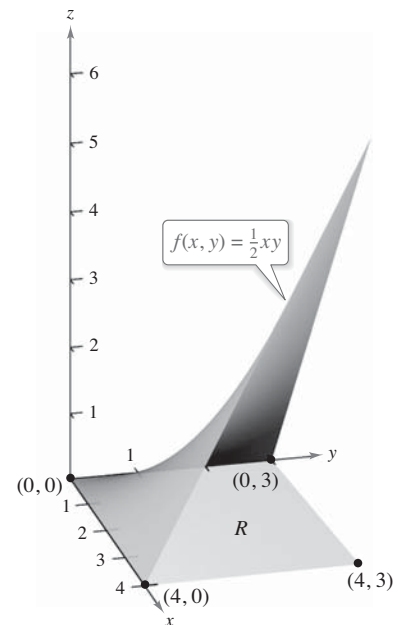


Figura 5.22

5.2 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Aproximar En los ejercicios 1-4, aproxime la integral $\int_R \int f(x, y) dA$ dividiendo el rectángulo R con vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 2)$ y $(0, 2)$ en ocho cuadrados iguales y hallando la suma $\sum_{i=1}^8 f(x_i, y_i) \Delta A_i$, donde (x_i, y_i) es el centro del cuadrado i -ésimo.

Evalúe la integral iterada y compárela con la aproximación.

$$\begin{aligned} 1. & \int_0^4 \int_0^2 (x + y) dy dx & 2. & \frac{1}{2} \int_0^4 \int_0^2 x^2 y dy dx \\ 3. & \int_0^4 \int_0^2 (x^2 + y^2) dy dx & 4. & \int_0^4 \int_0^2 \frac{1}{(x+1)(y+1)} dy dx \end{aligned}$$

Evaluar una doble integral En los ejercicios 5-10, dibuje la región R y evalúe la integral iterada $\int_R \int f(x, y) dA$.

$$\begin{aligned} 5. & \int_0^2 \int_0^1 (1 + 2x + 2y) dy dx & 6. & \int_0^{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^2 y dy dx \\ 7. & \int_0^6 \int_{y/2}^3 (x + y) dx dy & 8. & \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}} x^2 y^2 dx dy \\ 9. & \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} (x + y) dy dx & & \\ 10. & \int_0^1 \int_{y-1}^0 e^{x+y} dx dy + \int_0^1 \int_0^{1-y} e^{x+y} dx dy & & \end{aligned}$$

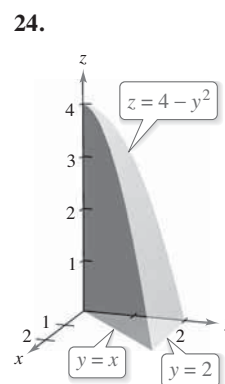
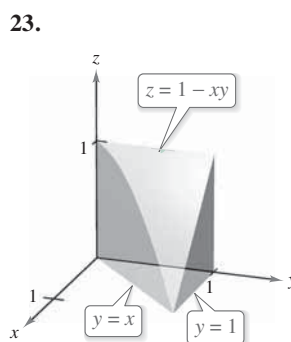
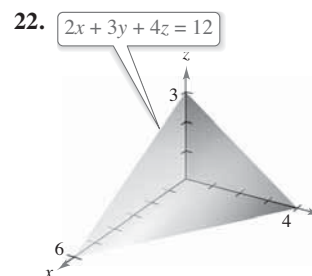
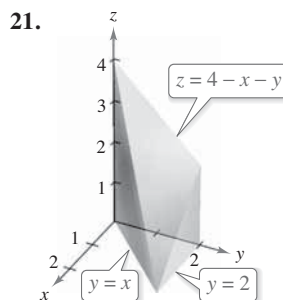
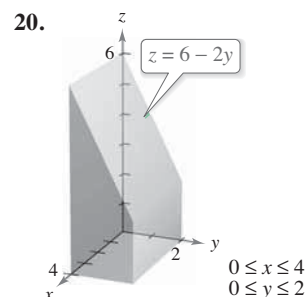
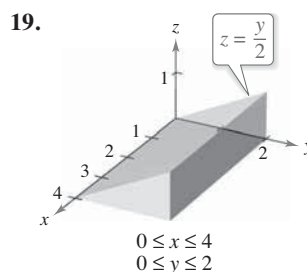
Evaluar una doble integral En los ejercicios 11-18, establezca las integrales para ambos órdenes de integración. Utilice el orden más conveniente para evaluar la integral sobre la región R .

$$\begin{aligned} 11. & \int_R \int xy dA \\ & R: \text{rectángulo con vértices } (0, 0), (0, 5), (3, 5), (3, 0) \\ 12. & \int_R \int \sin x \sin y dA \\ & R: \text{rectángulo con vértices } (-\pi, 0), (\pi, 0), (\pi, \pi/2), (-\pi, \pi/2) \\ 13. & \int_R \int \frac{y}{x^2 + y^2} dA \\ & R: \text{trapezoide acotado por } y = x, y = 2x, x = 1, x = 2 \\ 14. & \int_R \int xe^y dA \\ & R: \text{triángulo acotado por } y = 4 - x, y = 0, x = 0 \\ 15. & \int_R \int -2y dA \\ & R: \text{región acotada por } y = 4 - x^2, y = 4 - x \\ 16. & \int_R \int \frac{y}{1 + x^2} dA \\ & R: \text{región acotada por } y = 0, y = \sqrt{x}, x = 4 \\ 17. & \int_R \int x dA \\ & R: \text{sector de un círculo en el primer cuadrante acotado por } y = \sqrt{25 - x^2}, 3x - 4y = 0, y = 0 \end{aligned}$$

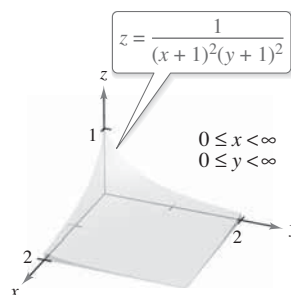
$$18. \int_R \int (x^2 + y^2) dA$$

R : semicírculo acotado por $y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = 0$

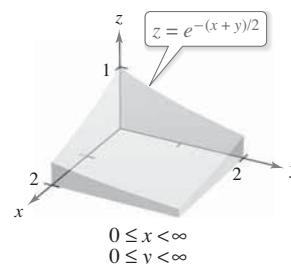
Determinar volumen En los ejercicios 19-26, utilice una integral doble para hallar el volumen del sólido indicado.



25. Integral impropia



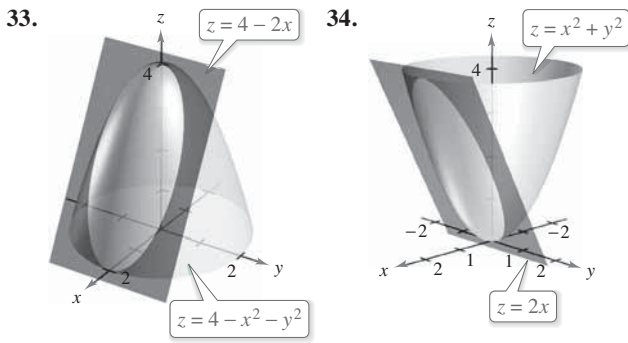
26. Integral impropia



Determinar volumen En los ejercicios 27-32, dé una integral doble para hallar el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones.

- 27. $z = xy, z = 0, y = x, x = 1$, primer octante
- 28. $z = 0, z = x^2, x = 0, x = 2, y = 0, y = 4$
- 29. $x^2 + z^2 = 1, y^2 + z^2 = 1$, primer octante
- 30. $y = 4 - x^2, z = 4 - x^2$, primer octante
- 31. $z = x + y, x^2 + y^2 = 4$, primer octante
- 32. $z = \frac{1}{1 + y^2}, x = 0, x = 2, y \geq 0$

Volumen de una región acotada por dos superficies En los ejercicios 33-38, establezca una integral doble para encontrar el volumen de una región sólida limitada por las gráficas de las ecuaciones. No evalúe la integral.



- 35. $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 4, z = 0$
- 36. $z = \sin^2 x, z = 0, 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 5$
- 37. $z = x^2 + 2y^2, z = 4y$
- 38. $z = x^2 + y^2, z = 18 - x^2 - y^2$

Determinar el volumen usando tecnología En los ejercicios 39-42, utilice un sistema algebraico por computadora para encontrar el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones.

- 39. $z = 9 - x^2 - y^2, z = 0$
- 40. $x^2 = 9 - y, z^2 = 9 - y$, primer octante
- 41. $z = \frac{2}{1 + x^2 + y^2}, z = 0, y = 0, x = 0, y = -0.5x + 1$
- 42. $z = \ln(1 + x + y), z = 0, y = 0, x = 0, x = 4 - \sqrt{y}$

43. Demostración Si f es una función continua tal que $0 \leq f(x, y) \leq 1$ en una región R de área 1. Demuestre que $0 \leq \int_R \int f(x, y) dA \leq 1$.

44. Determinar el volumen Encuentre el volumen del sólido que se encuentra en el primer octante, acotado por los planos coordenados y el plano $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$, donde $a > 0, b > 0$ y $c > 0$.

Evaluar una integral iterada En los ejercicios 45-50, trace la región de integración. Después, evalúe la integral iterada y, si es necesario, cambie el orden de integración.

45. $\int_0^1 \int_{y/2}^{1/2} e^{-x^2} dx dy$ 46. $\int_0^{\ln 10} \int_{e^x}^{10} \frac{1}{\ln y} dy dx$

47. $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-y^2} dy dx$ 48. $\int_0^3 \int_{y/3}^1 \frac{1}{1+x^4} dx dy$
 49. $\int_0^1 \int_0^{\arccos y} \sin x \sqrt{1 + \sin^2 x} dx dy$
 50. $\int_0^2 \int_{(1/2)x^2}^2 \sqrt{y} \cos y dy dx$

Valor promedio En los ejercicios 51-56, encuentre el valor promedio de $f(x, y)$ sobre la región R .

- 51. $f(x, y) = x$
 R : rectángulo con vértices $(0, 0), (4, 0), (4, 2), (0, 2)$
- 52. $f(x, y) = 2xy$
 R : rectángulo con vértices $(0, 0), (5, 0), (5, 3), (0, 3)$
- 53. $f(x, y) = x^2 + y^2$
 R : cuadrado con vértices $(0, 0), (2, 0), (2, 2), (0, 2)$
- 54. $f(x, y) = \frac{1}{x + y}$, R : triángulo con vértices $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$
- 55. $f(x, y) = e^{x+y}$, R : triángulo con vértices $(0, 0), (0, 1), (1, 1)$
- 56. $f(x, y) = \sin(x + y)$
 R : rectángulo con vértices $(0, 0), (\pi, 0), (\pi, \pi), (0, \pi)$

•• **57. Producción promedio** •••••

• La función de producción Cobb-Douglas para un fabricante de automóviles es

• $f(x, y) = 100x^{0.6}y^{0.4}$

• donde x es el número de unidades de trabajo

• y y es el número de unidades de capital.

• Estime el nivel promedio de producción si el número x de unidades de trabajo varía entre 200 y 250, y el número y de unidades de capital varía entre 300 y 325.



58. Temperatura promedio La temperatura en grados Celsius sobre la superficie de una placa metálica es

$T(x, y) = 20 - 4x^2 - y^2$

donde x y y están medidas en centímetros. Estime la temperatura promedio si x varía entre 0 y 2 centímetros y y varía entre 0 y 4 centímetros.

DESARROLLO DE CONCEPTOS

59. Doble integral Enuncie la definición de integral doble. Dé la interpretación geométrica de una integral doble si el integrando es una función no negativa sobre la región de integración.

60. Volumen Sea R una región en el plano xy cuya área es B . Si $f(x, y) = k$ para todo punto (x, y) en R , ¿cuál es el valor de $\int_R \int f(x, y) dA$? Explique.

DESARROLLO DE CONCEPTOS

61. Volumen Sea la región del plano R de un círculo unitario, y el máximo valor de f sobre R sea 6. ¿Es el valor más grande posible de $\int_R \int f(x, y) dy dx$ igual a 6? ¿Por qué sí o por qué no? Si es no, ¿cuál es el valor más grande posible?

62. Comparar integrales iteradas Las siguientes integrales iteradas representan la solución del mismo problema. ¿Cuál integral iterada es más fácil de evaluar? Explique su razonamiento.

$$\int_0^4 \int_{x/2}^2 \sin y^2 dy dx = \int_0^2 \int_0^{2y} \sin y^2 dx dy$$

Probabilidad Una función de densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias continuas x y y es una función $f(x, y)$ que satisface las propiedades siguientes.

(a) $f(x, y) \geq 0$ para todo (x, y) (b) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dA = 1$

(c) $P[(x, y) \in R] = \int_R \int f(x, y) dA$

En los ejercicios 63-66, demuestre que la función es una función de densidad de probabilidad conjunta y encuentre la probabilidad requerida.

63. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & 0 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{demás} \end{cases}$

$P(0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2)$

64. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}xy, & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{demás} \end{cases}$

$P(0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2)$

65. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{27}(9 - x - y), & 0 \leq x \leq 3, 3 \leq y \leq 6 \\ 0, & \text{demás} \end{cases}$

$P(0 \leq x \leq 1, 4 \leq y \leq 6)$

66. $f(x, y) = \begin{cases} e^{-x-y}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{demás} \end{cases}$

$P(0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1)$

67. Aproximación La tabla muestra valores de una función f sobre una región cuadrada R . Divida la región en 16 cuadrados iguales y elija (x_i, y_i) como el punto más cercano al origen en el cuadrado i -ésimo. Compare esta aproximación con la obtenida usando el punto más lejano al origen en el cuadrado i -ésimo.

$$\int_0^4 \int_0^4 f(x, y) dy dx$$

$x \backslash y$	0	1	2	3	4
0	32	31	28	23	16
1	31	30	27	22	15
2	28	27	24	19	12
3	23	22	19	14	7
4	16	15	12	7	0



68.

¿CÓMO LO VE? La figura siguiente muestra el Condado de Erie, Nueva York. Sea $f(x, y)$ la precipitación anual de nieve en el punto (x, y) en el condado, donde R es el condado. Interprete cada una de las siguientes integrales

(a) $\int_R \int f(x, y) dA$

(b) $\frac{\int_R \int f(x, y) dA}{\int_R \int dA}$



¿Verdadero o falso? En los ejercicios 69 y 70, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que demuestre que es falso.

69. El volumen de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ está dado por la integral

$$V = 8 \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2 - y^2} dx dy.$$

70. Si $f(x, y) < g(x, y)$ para todo (x, y) en R , y f y g son continuas sobre R , entonces $\int_R \int f(x, y) dA \leq \int_R \int g(x, y) dA$.

71. Maximizar una integral doble Determine la región R en el plano xy que maximiza el valor de

$$\int_R \int (9 - x^2 - y^2) dA.$$

72. Minimizar una integral doble Determine la región R en el plano xy que minimiza el valor de

$$\int_R \int (x^2 + y^2 - 4) dA.$$

73. Valor promedio Sea

$$f(x) = \int_1^x e^{t^2} dt.$$

Encuentre el valor promedio de f en el intervalo $[0, 1]$.

74. Usar geometría Utilice un argumento geométrico para demostrar que

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \sqrt{9-x^2-y^2} dx dy = \frac{9\pi}{2}.$$

DESAFÍOS DEL EXAMEN PUTNAM

75. Evalúe $\int_0^a \int_0^b e^{\max\{b^2x^2, a^2y^2\}} dy dx$, donde a y b son positivos.

76. Demuestre que si $\lambda > \frac{1}{2}$, no existe una función real u tal que, para todo x en el intervalo cerrado $0 < x < 1$, $u(x) = 1 + \lambda \int_x^1 u(y)u(y-x) dy$.

Estos problemas fueron preparados por el Committee on the Putnam Prize Competition. © The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

5.3 Cambio de variables: coordenadas polares

■ **Expresar y evaluar integrales dobles en coordenadas polares.**

Integrales dobles en coordenadas polares

Algunas integrales dobles son *mucho* más fáciles de evaluar en forma polar que en forma rectangular. Esto es así especialmente cuando se trata de regiones circulares, cardioides y pétalos de una curva rosa, y de integrandos que contienen $x^2 + y^2$.

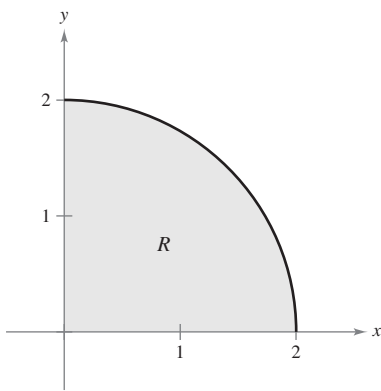
En la sección 2.3 vio que las coordenadas polares de un punto están relacionadas con las coordenadas rectangulares (x, y) del punto, de la manera siguiente.

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

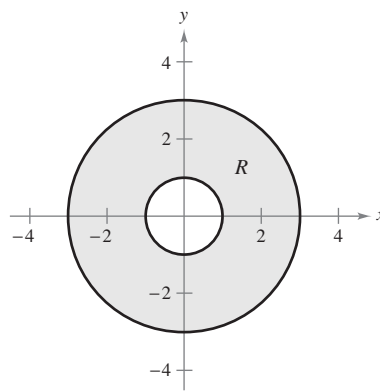
$$r^2 = x^2 + y^2 \quad y \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

EJEMPLO 1 Utilizar coordenadas polares para describir una región

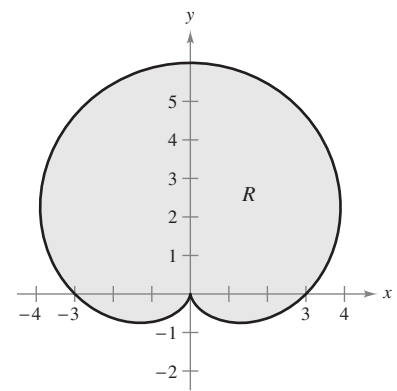
Utilice coordenadas polares para describir cada una de las regiones mostradas en la figura 5.23.



(a) **Figura 5.23**



(b)



(c)

Solución

a. La región R es un cuarto del círculo de radio 2. Esta región se describe en coordenadas polares como

$$R = \{(r, \theta): 0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2\}.$$

b. La región R consta de todos los puntos comprendidos entre los círculos concéntricos de radios 1 y 3. Esta región se describe en coordenadas polares como

$$R = \{(r, \theta): 1 \leq r \leq 3, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

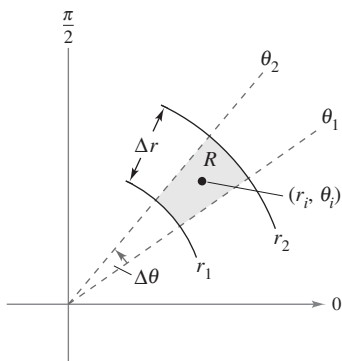
c. La región R es una cardioides con $a = b = 3$. Se puede describir en coordenadas polares como

$$R = \{(r, \theta): 0 \leq r \leq 3 + 3 \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Las regiones del ejemplo 1 son casos especiales de **sectores polares**

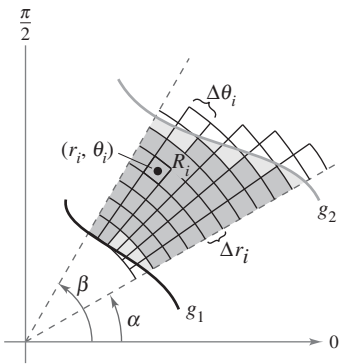
$$R = \{(r, \theta): r_1 \leq r \leq r_2, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$$

Sector polar



Sector polar.
Figura 5.24

como el mostrado en la figura 5.24.



La red o cuadrícula polar se sobrepone sobre la región R .

Figura 5.25

Para definir una integral doble de una función continua $z = f(x, y)$ en coordenadas polares, considere una región R acotada por las gráficas de

$$r = g_1(\theta) \quad \text{y} \quad r = g_2(\theta)$$

y las rectas $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$. En lugar de hacer una partición de R en rectángulos pequeños, utilice una partición en sectores polares pequeños. A R se le superpone una red o cuadrícula polar formada por rayos o semirrectas radiales y arcos circulares, como se muestra en la figura 5.25. Los sectores polares R_i que se encuentran completamente dentro de R forman una **partición polar interna** Δ cuya **norma** $\|\Delta\|$ es la longitud de la diagonal más larga en los n sectores polares.

Considere un sector polar específico R_i , como se muestra en la figura 5.26. Se puede demostrar (vea el ejercicio 70) que el área de R_i es

$$\Delta A_i = r_i \Delta r_i \Delta \theta_i \quad \text{Área de } R_i$$

donde $\Delta r_i = r_2 - r_1$ y $\Delta \theta_i = \theta_2 - \theta_1$. Esto implica que el volumen del sólido de altura $f(r_i \cos \theta_i, r_i \sin \theta_i)$ sobre R_i es aproximadamente

$$f(r_i \cos \theta_i, r_i \sin \theta_i) r_i \Delta r_i \Delta \theta_i$$

y tiene

$$\iint_R f(x, y) dA \approx \sum_{i=1}^n f(r_i \cos \theta_i, r_i \sin \theta_i) r_i \Delta r_i \Delta \theta_i.$$

Puede interpretar la suma de la derecha como una suma de Riemann para

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) r.$$

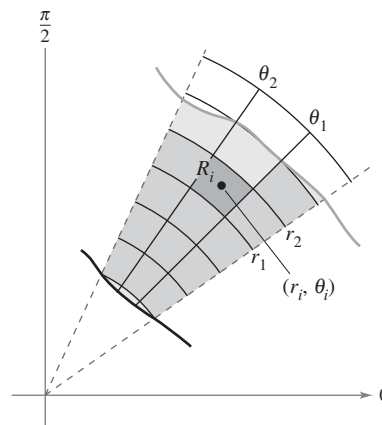
La región R corresponde a una región S *horizontalmente simple* en el plano $r\theta$, como se muestra en la figura 5.27. Los sectores polares R_i corresponden a los rectángulos S_i , y el área ΔA_i de S_i es $\Delta r_i \Delta \theta_i$. Por tanto, el lado derecho de la ecuación corresponde a la integral doble

$$\iint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dA.$$

A partir de esto, puede aplicar el teorema 5.2 para escribir

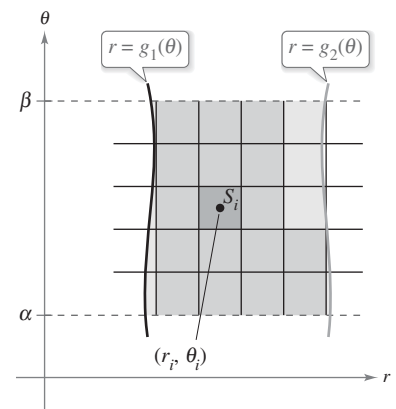
$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dA &= \iint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dA \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta. \end{aligned}$$

Esto sugiere el teorema siguiente.



El sector polar R_i es el conjunto de todos los puntos (r, θ) tal que $r_1 \leq r \leq r_2$ y $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$.

Figura 5.26



Región S horizontalmente simple.

Figura 5.27

Exploración

Volumen de un sector paraboloides En la exploración de la página 263, se le pidió resumir los diferentes métodos hasta ahora estudiados para calcular el volumen del sólido acotado por el paraboloides

$$z = a^2 - x^2 - y^2, a > 0$$

y el plano xy . Ahora conoce un método más. Utilícelo para encontrar el volumen del sólido.

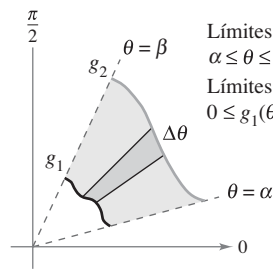
TEOREMA 5.3 Cambio de variables a la forma polar

Sea R una región plana que consta de todos los puntos $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ que satisfacen las condiciones $0 \leq g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, donde $0 \leq (\beta - \alpha) \leq 2\pi$. Si g_1 y g_2 son continuas en $[\alpha, \beta]$ y f es continua en R , entonces

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

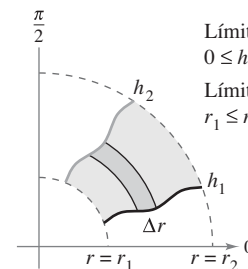
Si $z = f(x, y)$ es no negativa en R , entonces la integral del teorema 5.3 puede interpretarse como el volumen de la región sólida entre la gráfica de f y la región R . Cuando use la integral en el teorema 5.3, asegúrese de no omitir el factor extra de r en el integrando.

La región R puede ser de dos tipos básicos, regiones **r -simples** y regiones **θ -simples**, como se muestra en la figura 5.28.



Región r -simple

Figura 5.28



Región θ -simple

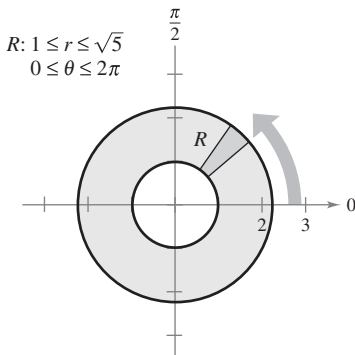
EJEMPLO 2

Evaluar una integral usando coordenadas polares dobles

Sea R la región anular comprendida entre los dos círculos $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 5$. Evalúe la integral

$$\iint_R (x^2 + y) dA.$$

Solución Los límites polares son $1 \leq r \leq \sqrt{5}$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$, como se muestra en la figura 5.29. Además, $x^2 = (r \cos \theta)^2$ y $y = r \sin \theta$. Por tanto, tiene



Región r -simple.

Figura 5.29

$$\begin{aligned} \iint_R (x^2 + y) dA &= \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{5}} (r^2 \cos^2 \theta + r \sin \theta) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{5}} (r^3 \cos^2 \theta + r^2 \sin \theta) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^4}{4} \cos^2 \theta + \frac{r^3}{3} \sin \theta \right) \Big|_1^{\sqrt{5}} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(6 \cos^2 \theta + \frac{5\sqrt{5} - 1}{3} \sin \theta \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(3 + 3 \cos 2\theta + \frac{5\sqrt{5} - 1}{3} \sin \theta \right) d\theta \\ &= \left(3\theta + \frac{3 \sin 2\theta}{2} - \frac{5\sqrt{5} - 1}{3} \cos \theta \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= 6\pi. \end{aligned}$$

En el ejemplo 2, observe el factor extra de r en el integrando. Esto proviene de la fórmula para el área de un sector polar. En notación diferencial, puede escribirlo como

$$dA = r dr d\theta$$

lo que indica que el área de un sector polar aumenta al alejarse del origen.

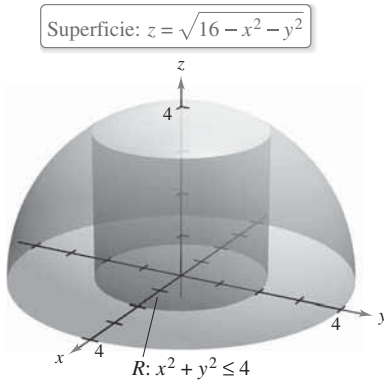


Figura 5.30

EJEMPLO 3 Cambiar variables a coordenadas polares

Utilice las coordenadas polares para hallar el volumen de la región sólida limitada superiormente por el hemisferio

$$z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} \quad \text{Hemisferio que forma la superficie superior}$$

e inferiormente por la región circular R dada por

$$x^2 + y^2 \leq 4 \quad \text{Región circular que forma la superficie inferior}$$

como se muestra en la figura 5.30.

Solución En la figura 5.30 puede ver que R tiene como límites

$$-\sqrt{4 - y^2} \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}, \quad -2 \leq y \leq 2$$

y que $0 \leq z \leq \sqrt{16 - x^2 - y^2}$. En coordenadas polares, los límites son

$$0 \leq r \leq 2 \text{ y } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

con altura $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} = \sqrt{16 - r^2}$. Por consiguiente, el volumen V está dado por

$$\begin{aligned} V &= \iint_R f(x, y) dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{16 - r^2} r dr d\theta \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} (16 - r^2)^{3/2} \Big|_0^2 d\theta \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^{2\pi} (24\sqrt{3} - 64) d\theta \\ &= -\frac{8}{3} (3\sqrt{3} - 8) \theta \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{16\pi}{3} (8 - 3\sqrt{3}) \\ &\approx 46.979. \end{aligned}$$



COMENTARIO Para ver la ventaja de las coordenadas polares en el ejemplo 3, trate de evaluar la integral iterada rectangular correspondiente

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{16 - x^2 - y^2} dx dy.$$

► **TECNOLOGÍA** Todo sistema algebraico por computadora que calcula integrales dobles en coordenadas rectangulares también calcula integrales dobles en coordenadas polares. La razón es que una vez que se ha formado la integral iterada, su valor no cambia al usar variables diferentes. En otras palabras, si usa un sistema algebraico por computadora para evaluar

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{16 - x^2} x dx dy$$

deberá obtener el mismo valor que obtuvo en el ejemplo 3.

Así como ocurre con coordenadas rectangulares, la integral doble

$$\iint_R dA$$

puede usarse para calcular el área de una región en el plano.

EJEMPLO 4 Hallar áreas de regiones polares

•••► Consulte *LarsonCalculus.com* para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

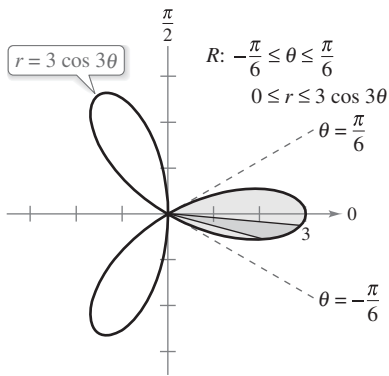


Figura 5.31

Utilice una integral doble para hallar el área encerrada por la gráfica de $r = 3 \cos 3\theta$, sea R un pétalo de la curva mostrada en la figura 5.31. Esta región es r -simple y los límites son los siguientes: $-\pi/6 \leq \theta \leq \pi/6$ y $0 \leq r \leq 3 \cos 3\theta$. Por tanto, el área de un pétalo es

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}A &= \iint_R dA = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \int_0^{3 \cos 3\theta} r \, dr \, d\theta \\ &= \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{3 \cos 3\theta} d\theta \\ &= \frac{9}{2} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos^2 3\theta \, d\theta \\ &= \frac{9}{4} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} (1 + \cos 6\theta) \, d\theta \\ &= \frac{9}{4} \left[\theta + \frac{1}{6} \sin 6\theta \right]_{-\pi/6}^{\pi/6} \\ &= \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

Así, el área total es $A = 9\pi/4$.

Como se ilustra en el ejemplo 4, el área de una región en el plano puede representarse mediante

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} r \, dr \, d\theta.$$

Para $g_1(\theta) = 0$, obtiene

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \int_0^{g_2(\theta)} r \, dr \, d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{g_2(\theta)} d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} (g_2(\theta))^2 \, d\theta$$

lo cual concuerda con el teorema 5.13.

Hasta ahora en esta sección todos los ejemplos de integrales iteradas en forma polar han sido de la forma

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta$$

en donde el orden de integración es primero con respecto a r . Algunas veces se puede simplificar el problema de integración cambiando el orden de integración.

EJEMPLO 5 Cambiar el orden de integración

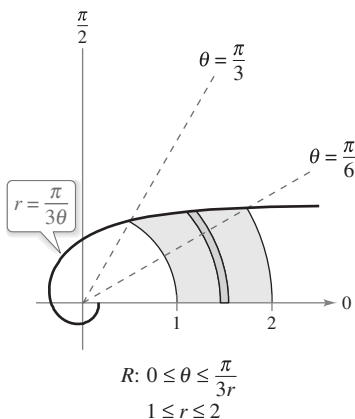
Encuentre el área de la región acotada superiormente por la espiral $r = \pi/(3\theta)$ e inferiormente por el eje polar, entre $r = 1$ y $r = 2$.

Solución La región se muestra en la figura 5.32. Los límites polares de la región son

$$1 \leq r \leq 2 \quad \text{y} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3r}.$$

Por tanto, el área de la región puede evaluarse como sigue.

$$A = \int_1^2 \int_0^{\pi/(3r)} r \, d\theta \, dr = \int_1^2 r\theta \Big|_0^{\pi/(3r)} \, dr = \int_1^2 \frac{\pi}{3} \, dr = \left[\frac{\pi r}{3} \right]_1^2 = \frac{\pi}{3}$$



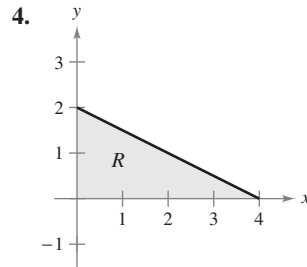
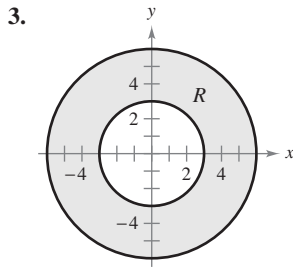
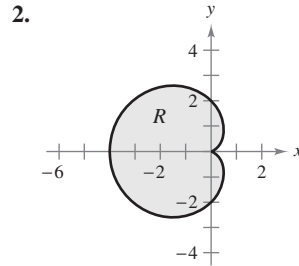
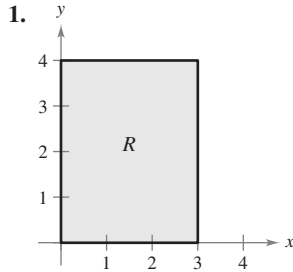
Región θ -simple.

Figura 5.32

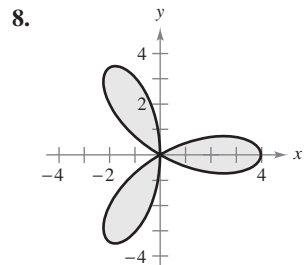
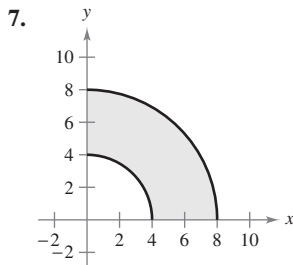
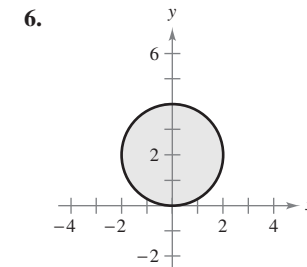
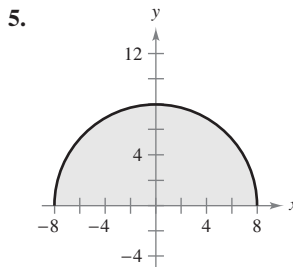
5.3 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Elegir un sistema coordenado En los ejercicios 1-4 se muestra la región R para la integral $\int_R f(x, y) dA$. Diga si serían más convenientes coordenadas rectangulares o polares para evaluar la integral.



Describir una región En los ejercicios 5-8, utilice las coordenadas polares para describir la región mostrada.



Evaluar una integral doble En los ejercicios 9-16, evalúe la integral doble $\int_R f(r, \theta) dA$ y dibuje la región R .

9. $\int_0^\pi \int_0^{\cos \theta} r dr d\theta$

10. $\int_0^\pi \int_0^{\sin \theta} r^2 dr d\theta$

11. $\int_0^{2\pi} \int_0^6 3r^2 \sin \theta dr d\theta$

12. $\int_0^{\pi/4} \int_0^4 r^2 \sin \theta \cos \theta dr d\theta$

13. $\int_0^{\pi/2} \int_2^3 \sqrt{9-r^2} r dr d\theta$

14. $\int_0^{\pi/2} \int_0^3 r e^{-r^2} dr d\theta$

15. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{1+\sin \theta} \theta r dr d\theta$

16. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{1-\cos \theta} (\sin \theta) r dr d\theta$

Convertir a coordenadas polares En los ejercicios 17-26, evalúe la integral iterada convirtiendo a coordenadas polares.

17. $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} y dx dy$

18. $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} x dy dx$

19. $\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx$

20. $\int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx$

21. $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} (x^2 + y^2)^{3/2} dy dx$

22. $\int_0^2 \int_y^{\sqrt{8-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$

23. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} xy dy dx$

24. $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{4y-y^2}} x^2 dx dy$

25. $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \cos(x^2 + y^2) dy dx$

26. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sin \sqrt{x^2 + y^2} dy dx$

Convertir a coordenadas polares En los ejercicios 27 y 28, combine la suma de los integrales iterados en una sola integral iterada convirtiendo a coordenadas polares. Evalúe la integral iterada resultante.

27. $\int_0^2 \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2} dy dx + \int_2^{2\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{8-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy dx$

28. $\int_0^{5\sqrt{2}/2} \int_0^x xy dy dx + \int_{5\sqrt{2}/2}^5 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} xy dy dx$

Convertir a coordenadas polares En los ejercicios 29-32, utilice coordenadas polares para escribir y evaluar la integral doble $\int_R \int f(x, y) dA$.

29. $f(x, y) = x + y$

$R: x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$

30. $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)/2}$

$R: x^2 + y^2 \leq 25, x \geq 0$

31. $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$

$R: x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x$

32. $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$

$R: x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0$

Volumen En los ejercicios 33-38, utilice una integral doble en coordenadas polares para hallar el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones.

33. $z = xy, x^2 + y^2 = 1$, primer octante

34. $z = x^2 + y^2 + 3, z = 0, x^2 + y^2 = 1$

35. $z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 0, x^2 + y^2 = 25$

36. $z = \ln(x^2 + y^2), z = 0, x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 \leq 4$

37. Interior al hemisferio $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ e interior al cilindro $x^2 + y^2 - 4x = 0$.

38. Interior al hemisferio $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ y exterior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

39. **Volumen** Encuentre a tal que el volumen en el interior del hemisferio

$z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$

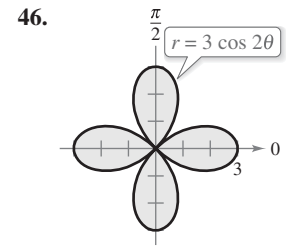
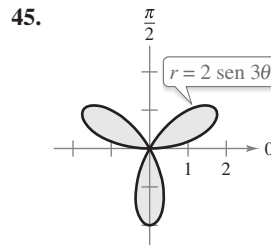
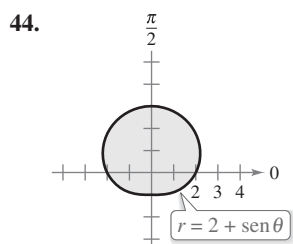
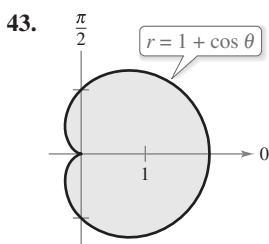
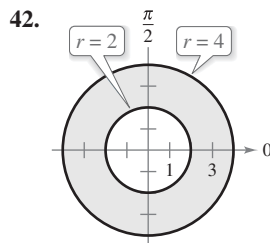
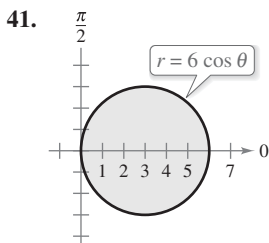
y en el exterior del cilindro

$x^2 + y^2 = a^2$

es la mitad del volumen del hemisferio.

40. **Volumen** Utilice la integral doble en coordenadas polares para encontrar el volumen de una esfera de radio a .

Área En los ejercicios 41-46, utilice una integral doble para calcular el área de la región sombreada.



Área En los ejercicios 47-52, trace una gráfica de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones. Después, use una integral doble para encontrar el área de la región.

47. Dentro del círculo $r = 2 \cos \theta$ y fuera del círculo $r = 1$.

48. Dentro de la cardioide $r = 2 + 2 \cos \theta$ y fuera del círculo $r = 1$.

49. Dentro del círculo $r = 3 \cos \theta$ y fuera de la cardioide $r = 1 + \cos \theta$.

50. Dentro de la cardioide $r = 1 + \cos \theta$ y fuera del círculo $r = 3 \cos \theta$.

51. Dentro de la curva rosa $r = 4 \sin 3\theta$ y fuera del círculo $r = 2$.

52. Dentro del círculo $r = 2$ y fuera de la cardioide $r = 2 - 2 \cos \theta$.

DESARROLLO DE CONCEPTOS

53. **Coordenadas polares** Describa la partición de la región de integración R en el plano xy cuando se utilizan coordenadas polares para evaluar una integral doble.

54. **Convertir coordenadas** Explique cómo pasar de coordenadas rectangulares a coordenadas polares en una integral doble.

55. **Describir regiones** Con sus propias palabras, describa regiones r -simples y regiones θ -simples.

56. **Comparar integrales** Sea R la región acotada por el círculo $x^2 + y^2 = 9$.

(a) Establezca la integral $\int_R \int f(x, y) dA$.

(b) Convierta la integral en el inciso (a) a coordenadas polares.

(c) ¿Qué integral debería elegirse para evaluar? ¿Por qué?

••• 57. **Población** •••

La densidad de población de una ciudad es aproximada por el modelo

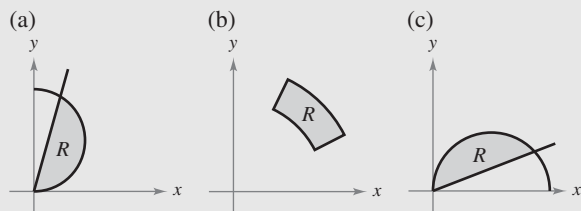
$f(x, y) = 4000e^{-0.01(x^2+y^2)}$

para la región $x^2 + y^2 \leq 9$, donde x y y se miden en millas. Integre la función de densidad sobre la región circular indicada para aproximar la población de la ciudad.





¿CÓMO LO VE? Cada figura muestra una región de integración para la integral doble $\int_R f(x, y) dA$. Para cada región, diga si es más fácil obtener los límites de integración con elementos representativos horizontales, elementos representativos verticales o con sectores polares. Explique su razonamiento.



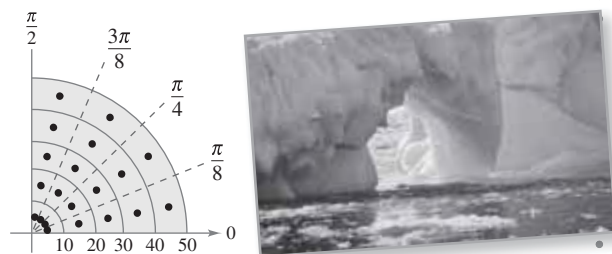
59. Volumen Determine el diámetro de un orificio cavado verticalmente a través del centro del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones $z = 25e^{-(x^2+y^2)/4}$, $z = 0$ y $x^2 + y^2 = 16$ si se elimina la décima parte del volumen del sólido.

60. Glaciar

Las secciones transversales horizontales de un bloque de hielo desprendido de un glaciar tienen forma de un cuarto de círculo con radio aproximado de 50 pies. La base se divide en 20 subregiones, como se muestra en la figura. En el centro de cada subregión se mide la altura del hielo, dando los puntos siguientes en coordenadas cilíndricas.

- $(5, \frac{\pi}{16}, 7), (15, \frac{\pi}{16}, 8), (25, \frac{\pi}{16}, 10), (35, \frac{\pi}{16}, 12), (45, \frac{\pi}{16}, 9),$
- $(5, \frac{3\pi}{16}, 9), (15, \frac{3\pi}{16}, 10), (25, \frac{3\pi}{16}, 14), (35, \frac{3\pi}{16}, 15), (45, \frac{3\pi}{16}, 10),$
- $(5, \frac{5\pi}{16}, 9), (15, \frac{5\pi}{16}, 11), (25, \frac{5\pi}{16}, 15), (35, \frac{5\pi}{16}, 18), (45, \frac{5\pi}{16}, 14),$
- $(5, \frac{7\pi}{16}, 5), (15, \frac{7\pi}{16}, 8), (25, \frac{7\pi}{16}, 11), (35, \frac{7\pi}{16}, 16), (45, \frac{7\pi}{16}, 12)$

- (a) Aproxime el volumen del sólido.
- (b) El hielo pesa aproximadamente 57 libras por pie cúbico. Aproxime el peso del sólido.
- (c) Aproxime el número de galones de agua en el sólido si hay 7.48 galones de agua por pie cúbico.



Aproximación En los ejercicios 61 y 62, utilice un sistema algebraico por computadora y aproxime la integral iterada.

61. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^5 r \sqrt{1+r^3} \sin \sqrt{\theta} dr d\theta$

62. $\int_0^{\pi/4} \int_0^4 5re^{\sqrt{r\theta}} dr d\theta$

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 63 y 64, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que demuestre que es falso.

- 63. Si $\int_R f(r, \theta) dA > 0$, entonces $f(r, \theta) > 0$ para todo (r, θ) en R .
- 64. Si $f(r, \theta)$ es una función constante y el área de la región S es el doble del área de la región R , entonces

$$2 \iint_R f(r, \theta) dA = \iint_S f(r, \theta) dA.$$

65. Probabilidad El valor de la integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx$$

se requiere en el desarrollo de la función de densidad de probabilidad normal.

(a) Utilice coordenadas polares para evaluar la integral impropia

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2} dA$$

(b) Utilice el resultado del inciso (a) para calcular I .

■ PARA INFORMACIÓN ADICIONAL Para más información sobre este problema, vea el artículo “Integrating Without Polar Coordinates”, de William Dunham, en *Mathematics Teacher*. Para consultar este artículo, visite MathArticles.com.

66. Evaluar integrales Utilice el resultado del ejercicio 65 y un cambio de variables para evaluar cada una de las integrales siguientes. No se requiere hacer ninguna integración.

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ (b) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4x^2} dx$

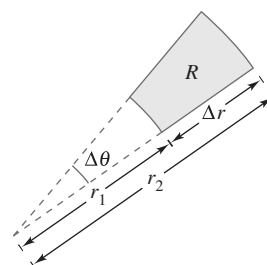
67. Piénselo Considere la región acotada por las gráficas de $y = 2$, $y = 4$, $y = x$ y $y = \sqrt{3}x$, y la integral doble $\int_R f dA$. Determine los límites de integración si la región R está dividida en (a) elementos representativos horizontales, (b) elementos representativos verticales y (c) sectores polares.

68. Piénselo Repita el ejercicio 67 para una región R acotada por la gráfica de la ecuación $(x - 2)^2 + y^2 = 4$.

69. Probabilidad Encuentre k tal que la función

$$f(x, y) = \begin{cases} ke^{-(x^2+y^2)}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{demás} \end{cases}$$

70. Área Demuestre que el área A del sector polar R (vea la figura) es $A = r\Delta r\Delta\theta$, donde $r = (r_1 + r_2)/2$ es el radio promedio de R .



5.4 Centro de masa y momentos de inercia

- Hallar la masa de una lámina plana utilizando una integral doble.
- Hallar el centro de masa de una lámina plana utilizando integrales dobles.
- Hallar los momentos de inercia utilizando integrales dobles.

Masa

Con anterioridad se analizaron varias aplicaciones de la integración en las que se tenía una lámina plana de densidad constante. Por ejemplo, si la lámina que corresponde a la región R , que se muestra en la figura 5.33, tiene una densidad constante ρ , entonces la masa de la lámina está dada por

$$\text{Masa} = \rho A = \rho \iint_R dA = \iint_R \rho dA. \quad \text{Densidad constante}$$

Si no se especifica otra cosa, se supone que una lámina tiene densidad constante. En esta sección se extiende la definición del término *lámina* para abarcar también placas delgadas de densidad *variable*. Las integrales dobles pueden usarse para calcular la masa de una lámina de densidad variable, donde la densidad en (x, y) está dada por la **función de densidad** ρ .

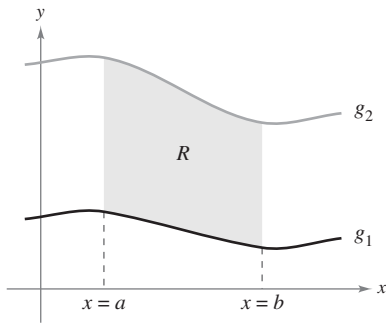


Lámina de densidad constante ρ .
Figura 5.33

Definición de masa de una lámina plana de densidad variable

Si ρ es una función de densidad continua sobre la lámina que corresponde a una región plana R , entonces la masa m de la lámina está dada por

$$m = \iint_R \rho(x, y) dA. \quad \text{Densidad variable}$$

La densidad se expresa normalmente como masa por unidad de volumen. Sin embargo, en una lámina plana la densidad es masa por unidad de área de superficie.

EJEMPLO 1 Determinar la masa de una lámina plana

Encuentre la masa de la lámina triangular con vértices $(0, 0)$, $(0, 3)$ y $(2, 3)$, dado que la densidad en (x, y) es $\rho(x, y) = 2x + y$.

Solución Como se muestra en la figura 5.34, la región R tiene como fronteras $x = 0$, $y = 3$ y $y = 3x/2$ (o $x = 2y/3$). Por consiguiente, la masa de la lámina es

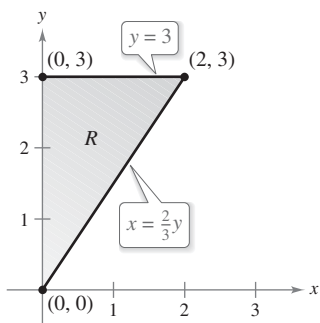


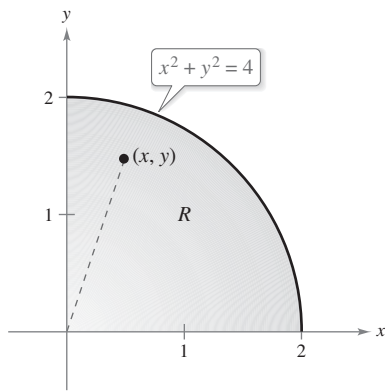
Lámina de densidad variable
 $\rho(x, y) = 2x + y$.
Figura 5.34

$$\begin{aligned} m &= \iint_R (2x + y) dA \\ &= \int_0^3 \int_0^{2y/3} (2x + y) dx dy \\ &= \int_0^3 \left[x^2 + xy \right]_0^{2y/3} dy \\ &= \frac{10}{9} \int_0^3 y^2 dy \\ &= \frac{10}{9} \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^3 \\ &= 10. \end{aligned}$$

En la figura 5.34, observe que la lámina plana está sombreada; el sombreado más oscuro corresponde a la parte más densa. ■

EJEMPLO 2

Determinar la masa usando coordenadas polares



Densidad en (x, y) : $\rho(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$.

Figura 5.35

Encuentre la masa de la lámina correspondiente a la porción en el primer cuadrante del círculo

$$x^2 + y^2 = 4$$

donde la densidad en el punto (x, y) es proporcional a la distancia entre el punto y el origen, como se muestra en la figura 5.35.

Solución En cualquier punto (x, y) , la densidad de la lámina es

$$\begin{aligned}\rho(x, y) &= k\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} \\ &= k\sqrt{x^2 + y^2}.\end{aligned}$$

Como $0 \leq x \leq 2$ y $0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$, la masa está dada por

$$\begin{aligned}m &= \iint_R k\sqrt{x^2 + y^2} \, dA \\ &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} k\sqrt{x^2 + y^2} \, dy \, dx.\end{aligned}$$

Para simplificar la integración, puede convertir a coordenadas polares utilizando los límites

$$0 \leq \theta \leq \pi/2 \quad \text{y} \quad 0 \leq r \leq 2.$$

Por tanto, la masa es

$$\begin{aligned}m &= \iint_R k\sqrt{x^2 + y^2} \, dA \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^2 k\sqrt{r^2} \, r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^2 kr^2 \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left. \frac{kr^3}{3} \right|_0^2 d\theta \\ &= \frac{8k}{3} \int_0^{\pi/2} d\theta \\ &= \frac{8k}{3} \left[\theta \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{4\pi k}{3}.\end{aligned}$$

► **TECNOLOGÍA** En muchas ocasiones, en este libro, se han mencionado las ventajas de utilizar programas de computación que realizan integración simbólica. Aun cuando utilice tales programas con regularidad, recuerde que sus mejores ventajas solo son aprovechables en manos de un usuario conocedor. Por ejemplo, observe la simplificación de la integral del ejemplo 2 cuando se convierte a la forma polar.

Forma rectangular

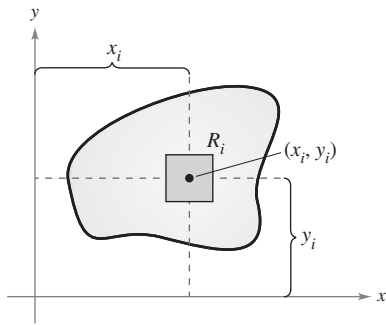
$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} k\sqrt{x^2 + y^2} \, dy \, dx$$

Forma polar

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^2 kr^2 \, dr \, d\theta$$

Si tiene acceso a programas que realicen integración simbólica, utilícelos para evaluar ambas integrales. Algunos programas no pueden manejar la primera integral, pero cualquier programa que calcule integrales dobles puede evaluar la segunda integral.

Momentos y centros de masa



$M_x = (\text{masa})(y_i)$
 $M_y = (\text{masa})(x_i)$

Figura 5.36

En láminas de densidad variable, los momentos de masa se definen de manera similar a la empleada en el caso de densidad uniforme. Dada una partición Δ de una lámina, correspondiente a una región plana R , considere el rectángulo i -ésimo R_i de área ΔA_i , como se muestra en la figura 5.36. Suponga que la masa de R_i se concentra en uno de sus puntos interiores. El momento de masa de R_i respecto al eje x puede aproximarse por medio de

$$(\text{Masa})(y_i) \approx [\rho(x_i, y_i) \Delta A_i](y_i).$$

De manera similar, el momento de masa con respecto al eje y puede aproximarse por medio de

$$(\text{Masa})(x_i) \approx [\rho(x_i, y_i) \Delta A_i](x_i).$$

Formando la suma de Riemann de todos estos productos y tomando límites cuando la norma de Δ se aproxima a 0, se obtiene las definiciones siguientes de momentos de masa con respecto a los ejes x y y .

Momentos y centro de masa de una lámina plana de densidad variable

Sea ρ una función de densidad continua sobre la lámina plana R . Los **momentos de masa** con respecto a los ejes x y y son

$$M_x = \iint_R y\rho(x, y) dA$$

y

$$M_y = \iint_R x\rho(x, y) dA.$$

Si m es la masa de la lámina, entonces el **centro de masa** es

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m} \right).$$

Si R representa una región plana simple en lugar de una lámina, el punto (\bar{x}, \bar{y}) se llama **centroide** de la región.

En algunas láminas planas con densidad constante ρ , puede determinar el centro de masa (o una de sus coordenadas) utilizando la simetría en lugar de usar integración. Por ejemplo, considere las láminas de densidad constante mostradas en la figura 5.37. Utilizando la simetría, puede ver que $\bar{y} = 0$ en la primera lámina y $\bar{x} = 0$ en la segunda lámina.

$$R: 0 \leq x \leq 1$$

$$-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$$

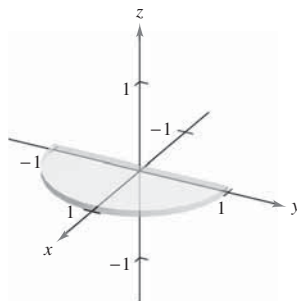


Lámina de densidad constante y simétrica con respecto al eje x .

Figura 5.37

$$R: -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$$

$$0 \leq y \leq 1$$

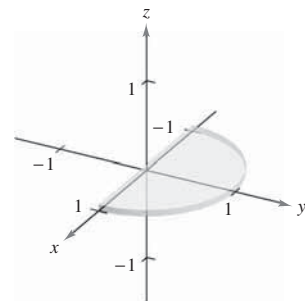
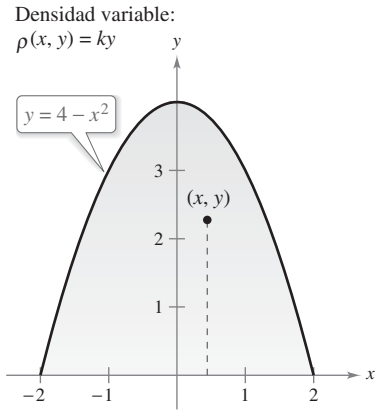


Lámina de densidad constante y simétrica con respecto al eje y .

EJEMPLO 3

Hallar el centro de masa

Consulte *LarsonCalculus.com* para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.



Región parabólica de densidad variable.
Figura 5.38

Encuentre el centro de masa de la lámina que corresponde a la región parabólica

$$0 \leq y \leq 4 - x^2 \quad \text{Región parabólica}$$

donde la densidad en el punto (x, y) es proporcional a la distancia entre (x, y) y el eje x , como se muestra en la figura 5.38.

Solución Como la lámina es simétrica con respecto al eje y y $\rho(x, y) = ky$, así, el centro de masa está en el eje y y $\bar{x} = 0$. Para hallar \bar{y} , primero calcule la masa de la lámina.

$$\begin{aligned} \text{Masa} &= \int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} ky \, dy \, dx \\ &= \frac{k}{2} \int_{-2}^2 y^2 \Big|_0^{4-x^2} \, dx \\ &= \frac{k}{2} \int_{-2}^2 (16 - 8x^2 + x^4) \, dx \\ &= \frac{k}{2} \left[16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_{-2}^2 \\ &= k \left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5} \right) \\ &= \frac{256k}{15} \end{aligned}$$

Después halle el momento con respecto al eje x .

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} (y)(ky) \, dy \, dx \\ &= \frac{k}{3} \int_{-2}^2 y^3 \Big|_0^{4-x^2} \, dx \\ &= \frac{k}{3} \int_{-2}^2 (64 - 48x^2 + 12x^4 - x^6) \, dx \\ &= \frac{k}{3} \left[64x - 16x^3 + \frac{12x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \right]_{-2}^2 \\ &= \frac{4096k}{105} \end{aligned}$$

Así,

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{4096k/105}{256k/15} = \frac{16}{7}$$

y el centro de masa es $(0, \frac{16}{7})$.

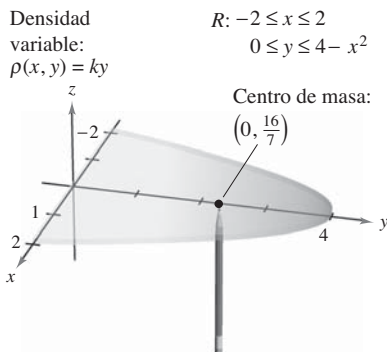


Figura 5.39

Aunque puede interpretar los momentos M_x y M_y como una medida de la tendencia a girar en torno a los ejes x o y , el cálculo de los momentos normalmente es un paso intermedio hacia una meta más tangible. El uso de los momentos M_x y M_y es encontrar el centro de masa. La determinación del centro de masa es útil en muchas aplicaciones, ya que le permite tratar una lámina como si su masa se concentrara en un solo punto. Intuitivamente, puede concebir el centro de masa como el punto de equilibrio de la lámina. Por ejemplo, la lámina del ejemplo 3 se mantendrá en equilibrio sobre la punta de un lápiz colocado en $(0, 16/7)$, como se muestra en la figura 5.39.

Momentos de inercia

Los momentos M_x y M_y utilizados en la determinación del centro de masa de una lámina se suelen llamar **primeros momentos** con respecto a los ejes x y y . En cada uno de los casos, el momento es el producto de una masa por una distancia.

$$M_x = \iint_R (y) \rho(x, y) dA \qquad M_y = \iint_R (x) \rho(x, y) dA$$

↑ Distancia al eje x Masa ↑ Distancia al eje y Masa

Ahora se introducirá otro tipo de momento, el **segundo momento** o **momento de inercia** de una lámina respecto de una recta. Del mismo modo que la masa es una medida de la tendencia de la materia a resistirse a cambios en el movimiento rectilíneo, el momento de inercia respecto de una recta es *una medida de la tendencia de la materia a resistirse a cambios en el movimiento de rotación*. Por ejemplo, si una partícula de masa m está a una distancia d de una recta fija, su momento de inercia respecto de la recta se define como

$$I = md^2 = (\text{masa})(\text{distancia})^2.$$

Igual que con los momentos de masa, puede generalizar este concepto para obtener los momentos de inercia de una lámina de densidad variable respecto de los ejes x y y . Estos segundos momentos se denotan por I_x e I_y , en cada caso el momento es el producto de una masa por el cuadrado de una distancia.

$$I_x = \iint_R (y^2) \rho(x, y) dA \qquad I_y = \iint_R (x^2) \rho(x, y) dA$$

↑ Cuadrado de la distancia al eje x Masa ↑ Cuadrado de la distancia al eje y Masa

A la suma de los momentos I_x e I_y se le llama el **momento polar de inercia** y se denota por I_0 . En el caso de una lámina en el plano xy , I_0 representa el momento de inercia de la lámina con respecto al eje z . El término “momento polar de inercia” se debe a que en el cálculo se utiliza el cuadrado de la distancia polar r .

$$I_0 = \iint_R (x^2 + y^2) \rho(x, y) dA = \iint_R r^2 \rho(x, y) dA$$

EJEMPLO 4 Hallar el momento de inercia

Encuentre el momento de inercia respecto del eje x de la lámina del ejemplo 3.

Solución De acuerdo con la definición de momento de inercia, tiene

$$\begin{aligned}
 I_x &= \int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} y^2(ky) dy dx \\
 &= \frac{k}{4} \int_{-2}^2 y^4 \Big|_0^{4-x^2} dx \\
 &= \frac{k}{4} \int_{-2}^2 (256 - 256x^2 + 96x^4 - 16x^6 + x^8) dx \\
 &= \frac{k}{4} \left[256x - \frac{256x^3}{3} + \frac{96x^5}{5} - \frac{16x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \right]_{-2}^2 \\
 &= \frac{32,768k}{315}.
 \end{aligned}$$

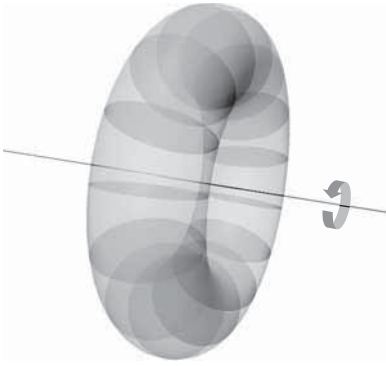


Lámina plana girando a ω radianes por segundo.

Figura 5.40

El momento de inercia I de una lámina en rotación puede utilizarse para medir su energía cinética. Por ejemplo, considere una lámina plana que gira en torno a una recta con una **velocidad angular** de ω radianes por segundo, como se muestra en la figura 5.40. La energía cinética E de la lámina en rotación es

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad \text{Energía cinética para el movimiento rotacional}$$

Por otro lado, la energía cinética E de una masa m que se mueve en línea recta a una velocidad v es

$$E = \frac{1}{2} m v^2. \quad \text{Energía cinética para el movimiento lineal}$$

Por lo tanto, la energía cinética de una masa que se mueve en línea recta es proporcional a su masa, pero la energía cinética de una masa que gira en torno a un eje es proporcional a su momento de inercia.

El **radio de giro** \bar{r} de una masa en rotación m con momento de inercia I se define como

$$\bar{r} = \sqrt{\frac{I}{m}}. \quad \text{Radio de giro}$$

Si toda la masa se localizara a una distancia \bar{r} de su eje de giro o eje de rotación, tendría el mismo momento de inercia y, por consiguiente, la misma energía cinética. Por ejemplo, el radio de giro de la lámina del ejemplo 4 respecto al eje x está dado por

$$\bar{y} = \sqrt{\frac{I_x}{m}} = \sqrt{\frac{32,768k/315}{256k/15}} = \sqrt{\frac{128}{21}} \approx 2.469.$$

EJEMPLO 5 Calcular el radio de giro

Encuentre el radio de giro con respecto al eje y de la lámina que corresponde a la región R : $0 \leq y \leq \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq \pi$, donde la densidad en (x, y) está dada por $\rho(x, y) = x$.

Solución La región R se muestra en la figura 5.41. Integrando $\rho(x, y) = x$ sobre la región R , puede determinar que la masa de la región es π . El momento de inercia respecto al eje y es

$$\begin{aligned} I_y &= \int_0^\pi \int_0^{\operatorname{sen} x} x^3 dy dx \\ &= \int_0^\pi x^3 y \Big|_0^{\operatorname{sen} x} dx \\ &= \int_0^\pi x^3 \operatorname{sen} x dx \\ &= \left[(3x^2 - 6)(\operatorname{sen} x) - (x^3 - 6x)(\cos x) \right]_0^\pi \\ &= \pi^3 - 6\pi. \end{aligned}$$

Por tanto, el radio de giro respecto al eje y es

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \sqrt{\frac{I_y}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{\pi^3 - 6\pi}{\pi}} \\ &= \sqrt{\pi^2 - 6} \\ &\approx 1.967. \end{aligned}$$

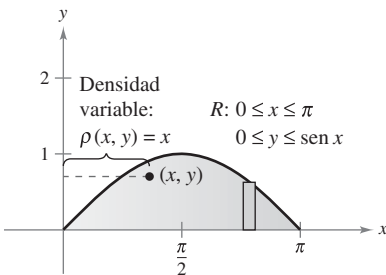


Figura 5.41

5.4 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Determinar la masa de una lámina En los ejercicios 1-4, encuentre la masa de la lámina descrita por las desigualdades, dado que su densidad es $\rho(x, y) = xy$. (Sugerencia: Algunas de las integrales son más simples en coordenadas polares.)


1. $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$
2. $0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 9 - x^2$
3. $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}$
4. $x \geq 0, 3 \leq y \leq 3 + \sqrt{9 - x^2}$

Determinar el centro de masa En los ejercicios 5-8, encuentre la masa y el centro de masa de la lámina con cada densidad.

5. R : cuadrado con vértices $(0, 0), (a, 0), (0, a), (a, a)$
(a) $\rho = k$ (b) $\rho = ky$ (c) $\rho = kx$
6. R : rectángulo con vértices $(0, 0), (a, 0), (0, b), (a, b)$
(a) $\rho = kxy$ (b) $\rho = k(x^2 + y^2)$
7. R : triángulo con vértices $(0, 0), (0, a), (a, a)$
(a) $\rho = k$ (b) $\rho = ky$ (c) $\rho = kx$
8. R : triángulo con vértices $(0, 0), (a/2, a), (a, 0)$
(a) $\rho = k$ (b) $\rho = kxy$
9. **Traslaciones en el plano** Traslade la lámina del ejercicio 5 cinco unidades a la derecha y determine el centro de masa resultante.
10. **Conjetura** Utilice el resultado del ejercicio 9 para formular una conjetura acerca del cambio en el centro de masa cuando una lámina de densidad constante se traslada c unidades horizontalmente o d unidades verticalmente. ¿La conjetura es verdadera si la densidad no es constante? Explique.

Determinar el centro de masa En los ejercicios 11-22, encuentre la masa y el centro de masa de la lámina acotada por las gráficas de las ecuaciones con la densidad o densidades que se especifican. (Sugerencia: Algunas de las integrales son más sencillas en coordenadas polares.)

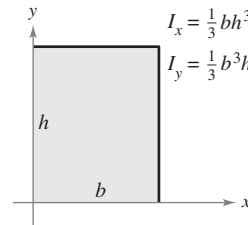
11. $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 1, \rho = ky$
12. $y = x^2, y = 0, x = 2, \rho = kxy$
13. $y = 4/x, y = 0, x = 1, x = 4, \rho = kx^2$
14. $y = \frac{1}{1 + x^2}, y = 0, x = -1, x = 1, \rho = k$
15. $y = e^x, y = 0, x = 0, x = 1, \rho = k$
16. $y = e^{-x}, y = 0, x = 0, x = 1, \rho = ky^2$
17. $y = 4 - x^2, y = 0, \rho = ky$
18. $x = 9 - y^2, x = 0, \rho = kx$
19. $y = \sin \frac{\pi x}{L}, y = 0, x = 0, x = L, \rho = k$
20. $y = \cos \frac{\pi x}{L}, y = 0, x = 0, x = \frac{L}{2}, \rho = ky$
21. $y = \sqrt{a^2 - x^2}, 0 \leq y \leq x, \rho = k$
22. $x^2 + y^2 = a^2, x \geq 0, y \geq 0, \rho = k(x^2 + y^2)$

 **Determinar el centro de masa usando tecnología** En los ejercicios 23-26, utilice un sistema algebraico por computadora para hallar la masa y el centro de masa de la lámina acotada por las gráficas de las ecuaciones con la densidad dada.

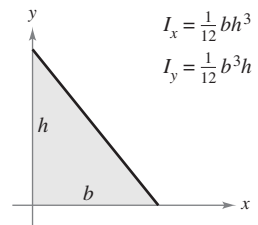
23. $y = e^{-x}, y = 0, x = 0, x = 2, \rho = kxy$
24. $y = \ln x, y = 0, x = 1, x = e, \rho = \frac{k}{x}$
25. $r = 2 \cos 3\theta, -\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}, \rho = k$
26. $r = 1 + \cos \theta, \rho = k$

Determinar el radio de giro con respecto a cada eje En los ejercicios 27-32, compruebe los momentos de inercia dados y encuentre \bar{x} y \bar{y} . Suponga que la densidad de cada lámina es $\rho = 1$ gramo por centímetro cuadrado. (Estas regiones son formas de uso común empleadas en diseño.)

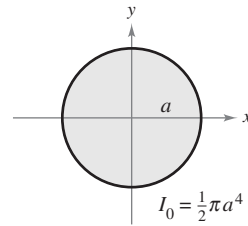
27. Rectángulo



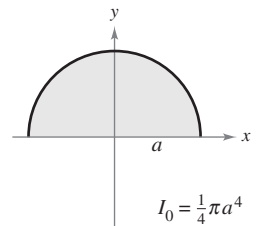
28. Triángulo rectángulo



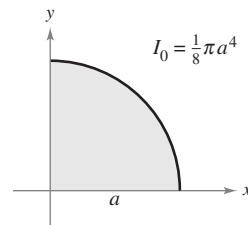
29. Círculo



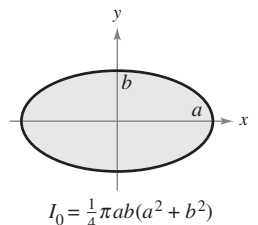
30. Semicírculo



31. Cuarto de círculo



32. Elipse



Determinar momentos de inercia y radios de giro En los ejercicios 33-36, determine I_x, I_y, I_0, \bar{x} y \bar{y} para la lámina limitada por las gráficas de las ecuaciones.

33. $y = 4 - x^2, y = 0, x > 0, \rho = kx$
34. $y = x, y = x^2, \rho = kxy$
35. $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 4, \rho = kxy$
36. $y = x^2, y^2 = x, \rho = kx$

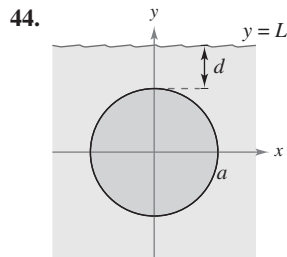
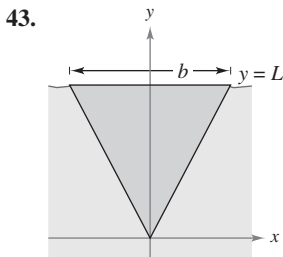
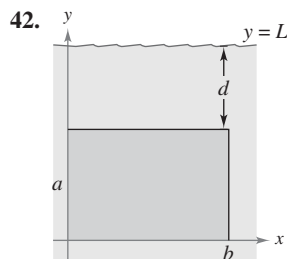
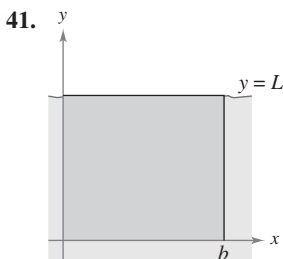
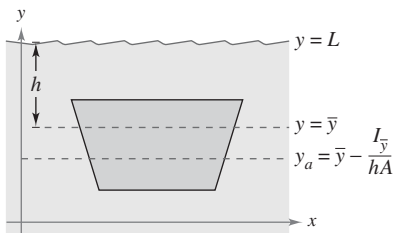
AD **Determinar un momento de inercia usando tecnología** En los ejercicios 37-40, dé la integral doble requerida para hallar el momento de inercia I , respecto a la recta dada, de la lámina limitada o acotada por las gráficas de las ecuaciones. Utilice un sistema algebraico por computadora para evaluar la integral doble.

- 37. $x^2 + y^2 = b^2$, $\rho = k$, recta: $x = a$ ($a > b$)
- 38. $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 4$, $\rho = kx$, recta: $x = 6$
- 39. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, $y = 0$, $\rho = ky$, recta: $y = a$
- 40. $y = 4 - x^2$, $y = 0$, $\rho = k$, recta: $y = 2$

Hidráulica En los ejercicios 41-44, determine la posición del eje horizontal y_a en el que debe situarse una compuerta vertical en una presa para lograr que no haya momento que ocasione la rotación bajo la carga indicada (vea la figura). El modelo para y_a es

$$y_a = \bar{y} - \frac{I_{\bar{y}}}{hA}$$

donde \bar{y} es la coordenada y del centroide de la compuerta, $I_{\bar{y}}$ es el momento de inercia de la compuerta respecto a la recta $y = \bar{y}$, h es la profundidad del centroide bajo la superficie y A es el área de la compuerta.



DESARROLLO DE CONCEPTOS

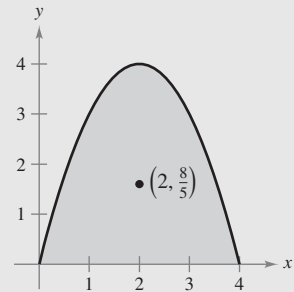
- 45. **Momentos y centro de masa** Dé las fórmulas para hallar los momentos y el centro de masa de una lámina plana de densidad variable.
- 46. **Momento de inercia** Dé las fórmulas para hallar los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y de una lámina plana de densidad variable.

DESARROLLO DE CONCEPTOS (continuación)

47. **Radio de giro** Con sus propias palabras, describa qué mide el radio de giro.



48. **¿CÓMO LO VE?** El centro de masa de la lámina de densidad constante mostrado en la figura es $(2, \frac{8}{5})$. Haga una conjetura acerca de cómo cambiará el centro de masa (\bar{x}, \bar{y}) si la densidad $\rho(x, y)$ no es constante. Explique. (Haga la conjetura *sin* realizar cálculo alguno.)



- (a) $\rho(x, y) = ky$
- (b) $\rho(x, y) = k|2 - x|$
- (c) $\rho(x, y) = kxy$
- (d) $\rho(x, y) = k(4 - x)(4 - y)$

49. **Demostación** Demuestre el teorema de Pappus siguiente: sea R una región plana y L una recta en el mismo plano tal que L no corta el interior de R . Si r es la distancia entre el centroide de R y la recta, entonces el volumen V del sólido de revolución generado por revolución de R en torno a la recta está dado por $V = 2\pi rA$, donde A es el área de R .

PROYECTO DE TRABAJO

Centro de presión sobre una vela

El centro de presión sobre una vela es aquel punto (x_p, y_p) en el cual puede suponerse que actúa la fuerza aerodinámica total. Si la vela se representa mediante una región plana R , el centro de presión es

$$x_p = \frac{\int_R xy \, dA}{\int_R y \, dA} \quad y \quad y_p = \frac{\int_R y^2 \, dA}{\int_R y \, dA}$$

Considere una vela triangular con vértices en $(0, 0)$, $(2, 1)$ y $(0, 5)$. Compruebe los valores de cada integral.

- (a) $\int_R y \, dA = 10$
- (b) $\int_R xy \, dA = \frac{35}{6}$
- (c) $\int_R y^2 \, dA = \frac{155}{6}$



Calcule las coordenadas (x_p, y_p) del centro de presión. Dibuje una gráfica de la vela e indique la localización del centro de presión.

5.5 Área de una superficie

■ Utilizar una integral doble para hallar el área de una superficie.

Área de una superficie

En este punto ya tiene una gran cantidad de conocimientos acerca de la región sólida que se encuentra entre una superficie y una región R en el plano xy cerrada y limitada, como se muestra en la figura 5.42. Por ejemplo, sabe cómo hallar los extremos de f en R (sección 4.8), el área de la base R del sólido (sección 5.1), el volumen del sólido (sección 5.2) y el centroide de la base de R (sección 5.4).

En esta sección verá cómo hallar el **área de la superficie** superior del sólido. Más adelante aprenderá a calcular el centroide del sólido (sección 5.6) y el área de la superficie lateral (sección 5.2).

Para empezar, considere una superficie S dada por

$$z = f(x, y) \quad \text{Superficie definida sobre una región } R$$

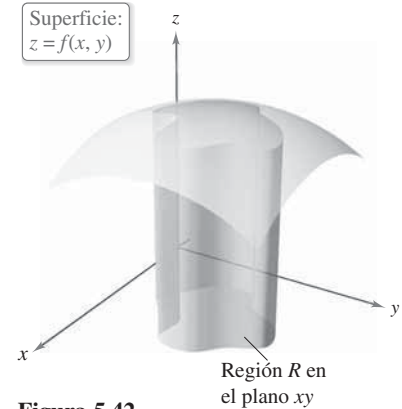


Figura 5.42

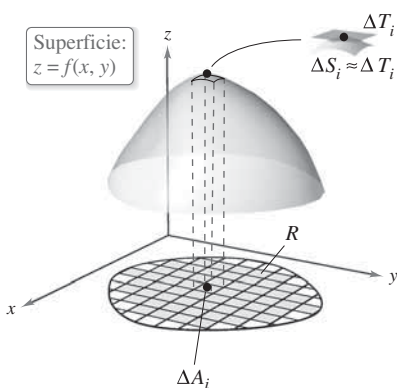


Figura 5.43

definida sobre una región R . Suponga que R es cerrada y acotada, y que f tiene primeras derivadas parciales continuas. Para hallar el área de la superficie, construya una partición interna de R que consiste en n rectángulos, donde el área del rectángulo i -ésimo es como se muestra en la figura 5.43. En cada R_i sea (x_i, y_i) el punto más próximo al origen. En el punto $(x_i, y_i, z_i) = (x_i, y_i, f(x_i, y_i))$ de la superficie S , construya un plano tangente T_i . El área de la porción del plano tangente que se encuentra directamente sobre R_i es aproximadamente igual al área de la superficie que se encuentra directamente sobre R_i . Es decir, $\Delta T_i \approx \Delta S_i$. Por tanto, el área de la superficie de S es aproximada por

$$\sum_{i=1}^n \Delta S_i \approx \sum_{i=1}^n \Delta T_i.$$

Para hallar el área del paralelogramo ΔT_i , observe que sus lados están dados por los vectores

$$\mathbf{u} = \Delta x_i \mathbf{i} + f_x(x_i, y_i) \Delta x_i \mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{v} = \Delta y_i \mathbf{j} + f_y(x_i, y_i) \Delta y_i \mathbf{k}.$$

De acuerdo con el teorema 1.8, el área de ΔT_i está dada por $\|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\|$, donde

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta x_i & 0 & f_x(x_i, y_i) \Delta x_i \\ 0 & \Delta y_i & f_y(x_i, y_i) \Delta y_i \end{vmatrix} \\ &= -f_x(x_i, y_i) \Delta x_i \Delta y_i \mathbf{i} - f_y(x_i, y_i) \Delta x_i \Delta y_i \mathbf{j} + \Delta x_i \Delta y_i \mathbf{k} \\ &= (-f_x(x_i, y_i) \mathbf{i} - f_y(x_i, y_i) \mathbf{j} + \mathbf{k}) \Delta A_i. \end{aligned}$$

Por tanto, el área de ΔT_i es $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \sqrt{[f_x(x_i, y_i)]^2 + [f_y(x_i, y_i)]^2 + 1} \Delta A_i$, y

$$\begin{aligned} \text{Área superficial de } S &\approx \sum_{i=1}^n \Delta S_i \\ &\approx \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f_x(x_i, y_i)]^2 + [f_y(x_i, y_i)]^2} \Delta A_i. \end{aligned}$$

Esto sugiere la definición siguiente de área de una superficie en la página siguiente.

Definición del área de una superficie

Si f y sus primeras derivadas parciales son continuas en la región cerrada R en el plano xy , entonces el **área de la superficie** S dada por $f(x, y)$ sobre R está dada por

$$\begin{aligned}\text{Área de la superficie} &= \iint_R dS \\ &= \iint_R \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} dA.\end{aligned}$$

Para memorizar la integral doble para el área de una superficie, es útil notar su semejanza con la integral de la longitud del arco.

Longitud en el eje x : $\int_a^b dx$

Longitud de arco en el plano xy : $\int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$

Área en el plano xy : $\iint_R dA$

Área de una superficie en el espacio: $\iint_R dS = \iint_R \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} dA$

Al igual que las integrales para la longitud de arco, las integrales para el área de una superficie son a menudo muy difíciles de calcular. Sin embargo, en el ejemplo siguiente se muestra un tipo que se evalúa con facilidad.

EJEMPLO 1**Área de la superficie de una región plana**

Encuentre el área de la superficie de la porción del plano

$$z = 2 - x - y$$

que se localiza sobre el círculo $x^2 + y^2 \leq 1$ en el primer cuadrante, como se muestra en la figura 5.44.

Solución Como $f_x(x, y) = -1$ y $f_y(x, y) = -1$, y el área de la superficie está dada por

$$S = \iint_R \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} dA \quad \text{Fórmula para el área de la superficie}$$

$$= \iint_R \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2} dA \quad \text{Sustituir}$$

$$= \iint_R \sqrt{3} dA$$

$$= \sqrt{3} \iint_R dA.$$

Observe que la última integral es simplemente $\sqrt{3}$ por el área de la región R . R es un cuarto del círculo de radio 1, cuya área es $\frac{1}{4}\pi(1^2)$ o $\pi/4$. Por tanto, el área de S es

$$\begin{aligned}S &= \sqrt{3} (\text{área de } R) \\ &= \sqrt{3} \left(\frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3} \pi}{4}.\end{aligned}$$

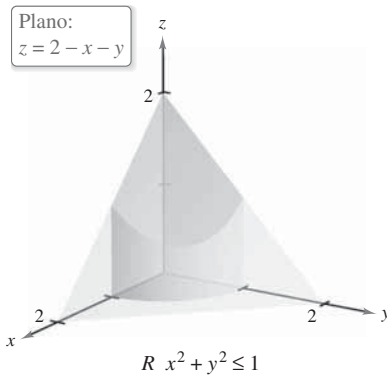


Figura 5.44

EJEMPLO 2 Hallar el área de una superficie

•••► Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

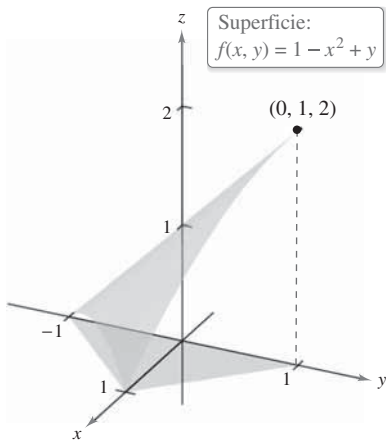


Figura 5.45

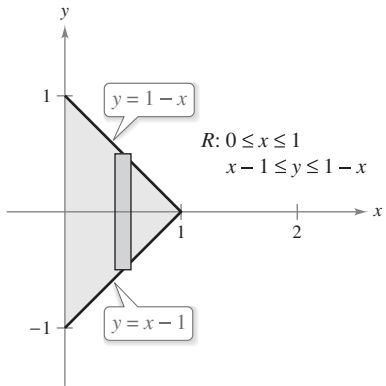


Figura 5.46

Encuentre el área de la porción de la superficie $f(x, y) = 1 - x^2 + y$ que se localiza sobre la región triangular cuyos vértices son $(1, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$ y $(0, 1, 0)$, como se muestra en la figura 5.45.

Solución Como $f_x(x, y) = -2x$ y $f_y(x, y) = 1$, se tiene

$$S = \iint_R \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} dA = \iint_R \sqrt{1 + 4x^2 + 1} dA.$$

En la figura 5.46 puede ver que los límites de R son $0 \leq x \leq 1$ y $x - 1 \leq y \leq 1 - x$. Por lo que la integral será

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} \sqrt{2 + 4x^2} dy dx \\ &= \int_0^1 y \sqrt{2 + 4x^2} \Big|_{x-1}^{1-x} dx \\ &= \int_0^1 \left[(1-x)\sqrt{2 + 4x^2} - (x-1)\sqrt{2 + 4x^2} \right] dx \\ &= \int_0^1 (2\sqrt{2 + 4x^2} - 2x\sqrt{2 + 4x^2}) dx && \text{Tablas de integración (apéndice B).} \\ &= \left[x\sqrt{2 + 4x^2} + \ln(2x + \sqrt{2 + 4x^2}) - \frac{(2 + 4x^2)^{3/2}}{6} \right]_0^1 && \text{Fórmula 26 y regla de la potencia.} \\ &= \sqrt{6} + \ln(2 + \sqrt{6}) - \sqrt{6} - \ln \sqrt{2} + \frac{1}{3} \sqrt{2} \\ &\approx 1.618. \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Cambiar variables a coordenadas polares

Calcule el área de la superficie del paraboloide $z = 1 + x^2 + y^2$ que se encuentra sobre el círculo unidad o unitario, como se muestra en la figura 5.47.

Solución Como $f_x(x, y) = 2x$ y $f_y(x, y) = 2y$, tiene

$$S = \iint_R \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} dA = \iint_R \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dA.$$

Puede convertir a coordenadas polares haciendo $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$. Entonces, como la región R está acotada por $0 \leq r \leq 1$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$, tiene

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{12} (1 + 4r^2)^{3/2} \Big|_0^1 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{5\sqrt{5} - 1}{12} d\theta \\ &= \frac{5\sqrt{5} - 1}{12} \theta \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{\pi(5\sqrt{5} - 1)}{6} \\ &\approx 5.33. \end{aligned}$$

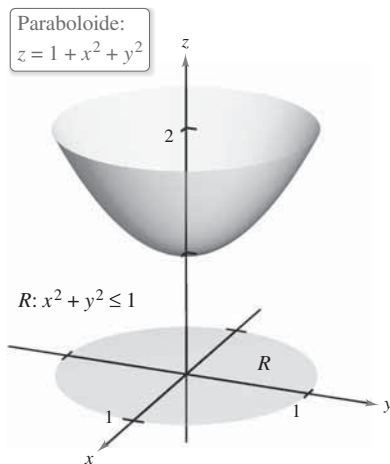


Figura 5.47

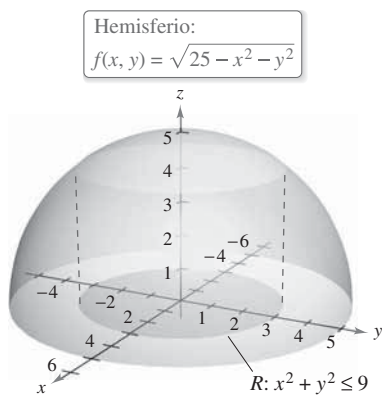


Figura 5.48

EJEMPLO 4 Hallar el área de una superficie

Calcule el área de la superficie S correspondiente a la porción del hemisferio

$$f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2} \quad \text{Hemisferio}$$

que se encuentra sobre la región R acotada por el círculo $x^2 + y^2 \leq 9$, como se muestra en la figura 5.48.

Solución Las primeras derivadas parciales de f son

$$f_x(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$$

y

$$f_y(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$$

y de acuerdo con la fórmula para el área de una superficie, tiene

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} dA \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}\right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}\right)^2} dA \\ &= \frac{5}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}} dA. \end{aligned}$$

Así, el área de la superficie es

$$S = \iint_R \frac{5}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}} dA.$$

Puede convertir a coordenadas polares haciendo $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$. Entonces, como la región R está acotada por $0 \leq r \leq 3$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$, obtiene

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} \int_0^3 \frac{5}{\sqrt{25 - r^2}} r dr d\theta \\ &= 5 \int_0^{2\pi} \left[-\sqrt{25 - r^2} \right]_0^3 d\theta \\ &= 5 \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 10\pi. \end{aligned}$$

El procedimiento utilizado en el ejemplo 4 puede extenderse para hallar el área de la superficie de una esfera utilizando la región R acotada por el círculo $x^2 + y^2 \leq a^2$, donde $0 < a < 5$, como se muestra en la figura 5.49. El área de la superficie de la porción del hemisferio

$$f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

que se encuentra sobre la región circular es

$$\begin{aligned} S &= \iint_R \frac{5}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}} dA \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{5}{\sqrt{25 - r^2}} r dr d\theta \\ &= 10\pi \left(5 - \sqrt{25 - a^2} \right). \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando a tiende a 5 y multiplicando el resultado por 2, obtiene el área total, que es 100π . (El área de la superficie de una esfera de radio r es $S = 4\pi r^2$.)

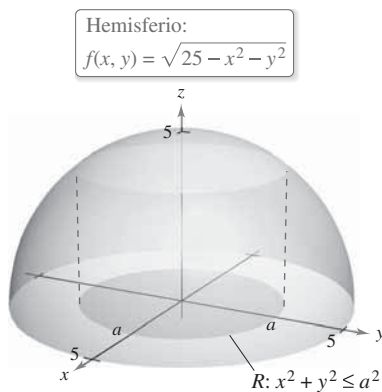


Figura 5.49

Puede utilizar la regla de Simpson o la regla del trapecio para aproximar el valor de una integral doble, *siempre* que pueda obtener la primera integral. Esto se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 5 Aproximar el área de una superficie mediante la regla de Simpson

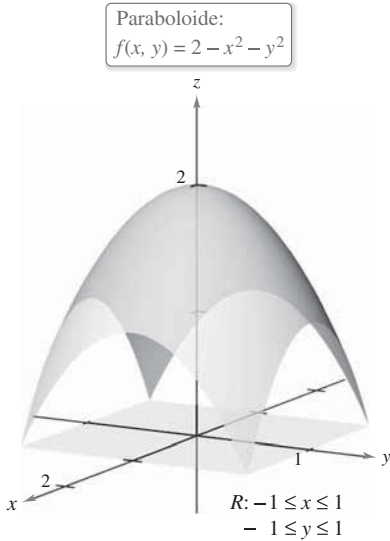


Figura 5.50

Calcule el área de la superficie del paraboloide

$$f(x, y) = 2 - x^2 - y^2 \quad \text{Paraboloide}$$

que se encuentra sobre la región cuadrada acotada por

$$-1 \leq x \leq 1 \quad \text{y} \quad -1 \leq y \leq 1$$

Como se muestra en la figura 5.50.

Solución Utilizando las derivadas parciales

$$f_x(x, y) = -2x \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = -2y$$

tiene que el área de la superficie es

$$\begin{aligned} S &= \iint_R \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2} \, dA \\ &= \iint_R \sqrt{1 + (-2x)^2 + (-2y)^2} \, dA \\ &= \iint_R \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dA. \end{aligned}$$

En coordenadas polares, la recta $x = 1$ está dada por

$$r \cos \theta = 1 \quad \text{o} \quad r = \sec \theta$$

y a partir de la figura 5.51 puede determinar que un cuarto de la región R está acotada por

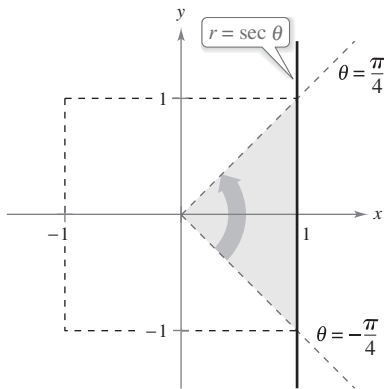
$$0 \leq r \leq \sec \theta \quad \text{y} \quad -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}.$$

Haciendo $x = r \cos \theta$ y $y = r \sin \theta$ se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} S &= \frac{1}{4} \iint_R \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dA \\ &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\sec \theta} \sqrt{1 + 4r^2} \, r \, dr \, d\theta \\ &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{12} (1 + 4r^2)^{3/2} \Big|_0^{\sec \theta} \, d\theta \\ &= \frac{1}{12} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} [(1 + 4 \sec^2 \theta)^{3/2} - 1] \, d\theta. \end{aligned}$$

Por último, usando la regla de Simpson con $n = 10$, aproxime esta integral simple

$$S = \frac{1}{3} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} [(1 + 4 \sec^2 \theta)^{3/2} - 1] \, d\theta \approx 7.450.$$



Un cuarto de la región R está acotada por $0 \leq r \leq \sec \theta$ y $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$.

Figura 5.51

► **TECNOLOGÍA** La mayor parte de los programas de computación que realizan integración simbólica con integrales múltiples también realizan técnicas de aproximación numéricas. Si dispone de uno de estos programas, utilícelo para aproximar el valor de la integral del ejemplo 5.

5.5 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Determinar el área superficial En los ejercicios 1-14, encuentre el área de la superficie dada por $z = f(x, y)$ sobre la región R . (Sugerencia: Algunas de las integrales son más sencillas en coordenadas polares.)

- $f(x, y) = 2x + 2y$
 R : triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(0, 4)$
- $f(x, y) = 15 + 2x - 3y$
 R : cuadrado cuyos vértices son $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 3)$, $(3, 3)$
- $f(x, y) = 7 + 2x + 2y$, $R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 4\}$
- $f(x, y) = 12 + 2x - 3y$, $R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 9\}$
- $f(x, y) = 9 - x^2$
 R : cuadrado cuyos vértices son $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 2)$
- $f(x, y) = y^2$
 R : cuadrado cuyos vértices son $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 3)$, $(3, 3)$
- $f(x, y) = 3 + x^{3/2}$
 R : rectángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(0, 4)$, $(3, 4)$, $(3, 0)$
- $f(x, y) = 2 + \frac{2}{3}y^{3/2}$
 $R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x\}$
- $f(x, y) = \ln|\sec x|$
 $R = \left\{ (x, y): 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq y \leq \tan x \right\}$
- $f(x, y) = 13 + x^2 - y^2$, $R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 4\}$
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $R = \{(x, y): 0 \leq f(x, y) \leq 1\}$
- $f(x, y) = xy$, $R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 16\}$
- $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$
 $R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq b^2, 0 < b < a\}$
- $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$
 $R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq a^2\}$

Determinar el área de una superficie En los ejercicios 15-18, encuentre el área de la superficie.

- Porción del plano $z = 24 - 3x - 2y$ en el primer octante.
- Porción del paraboloides $z = 16 - x^2 - y^2$ en el primer octante.
- Porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 9$.
- Porción del cono $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ en el interior del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

D **Determinar el área de una superficie usando tecnología** En los ejercicios 19-24, dé una integral doble que represente el área de la superficie de $z = f(x, y)$ sobre la región R . Utilizando un sistema algebraico por computadora, evalúe la integral doble.

- $f(x, y) = 2y + x^2$, R : triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$.
- $f(x, y) = 2x + y^2$, R : triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$.
- $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$, $R = \{(x, y): 0 \leq f(x, y)\}$
- $f(x, y) = x^2 + y^2$, $R = \{(x, y): 0 \leq f(x, y) \leq 16\}$

$$23. f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$$

$$R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

$$24. f(x, y) = \frac{2}{3}x^{3/2} + \cos x$$

$$R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

Establecer una doble integral En los ejercicios 25-28, formule una integral doble que proporcione el área de la superficie en la gráfica de f sobre la región R .

$$25. f(x, y) = e^{xy}, R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 10\}$$

$$26. f(x, y) = x^2 - 3xy - y^2$$

$$R = \{(x, y): 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$$

$$27. f(x, y) = e^{-x} \sin y, R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$28. f(x, y) = \cos(x^2 + y^2), R = \left\{ (x, y): x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

29. **Área de una superficie** Escriba la definición, con integral doble, del área de una superficie S dada por $z = f(x, y)$ sobre una región R en el plano xy .

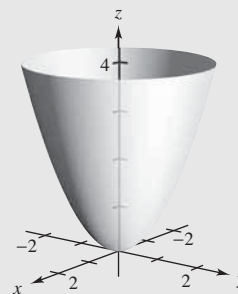
30. Responda las siguientes preguntas acerca del área de superficie S sobre una superficie dada por una función positiva $z = f(x, y)$ sobre una región R en el plano xy . Explique cada respuesta.

- ¿Es posible para S igualar el área de R ?
- ¿Puede S ser mayor que el área de R ?
- ¿Puede S ser menor que el área de R ?

31. **Área superficial** ¿Aumentará el área de superficie de la gráfica de una función $z = f(x, y)$ sobre una región R si la gráfica de f se corre k unidades verticalmente? ¿Por qué sí o por qué no?



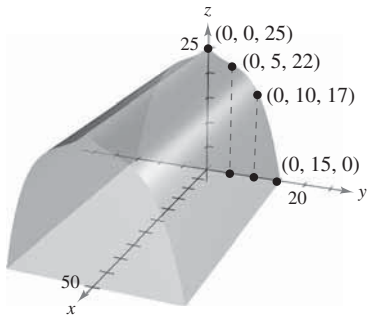
32. **¿CÓMO LO VE?** Considere la superficie $f(x, y) = x^2 + y^2$ y el área de superficie de f sobre cada región R . Sin integrar, ordene las áreas de superficie desde la menor hasta la mayor. Explique su razonamiento.



- R : rectángulo con vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$, $(0, 2)$
- R : triángulo con vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$
- $R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 4 \text{ solo el primer cuadrante}\}$

33. **Diseño industrial** Una empresa produce un objeto esférico de 25 centímetros de radio. Se hace una perforación de 4 centímetros de radio a través del centro del objeto. Calcule
- el volumen del objeto.
 - el área de la superficie exterior del objeto.

34. **Modelado de datos** Una compañía construye un granero de dimensiones 30 por 50 pies. En la figura se muestra la forma simétrica y la altura elegidas para el tejado.



- Utilice las funciones de regresión de una herramienta de graficación para hallar un modelo de la forma

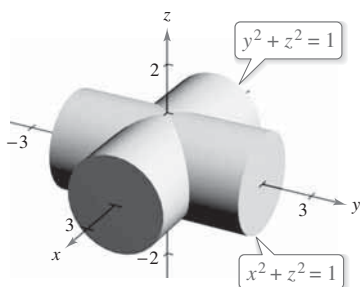
$$z = ay^3 + by^2 + cy + d$$

para el perfil del techo.

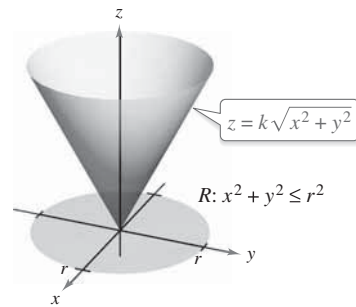


- Utilice las funciones de integración numérica de una herramienta de graficación y el modelo del inciso (a) para aproximar el volumen del espacio de almacenaje en el granero.
- Utilice las funciones de integración numérica de una herramienta de graficación y el modelo del inciso (a) para aproximar el área de la superficie del techo.
- Aproxime la longitud de arco de la recta del techo y calcule el área de la superficie del techo multiplicando la longitud de arco por la longitud del granero. Compare los resultados y las integraciones con los encontrados en el inciso (c).

35. **Área de una superficie** Encuentre el área de la superficie del sólido de intersección de los cilindros $x^2 + z^2 = 1$ y $y^2 + z^2 = 1$ (vea la figura).



36. **Área de una superficie** Demuestre que el área de la superficie del cono $z = k\sqrt{x^2 + y^2}$, $k > 0$, sobre la región circular $x^2 + y^2 \leq r^2$ en el plano xy es $\pi r^2 \sqrt{k^2 + 1}$ (vea la figura).



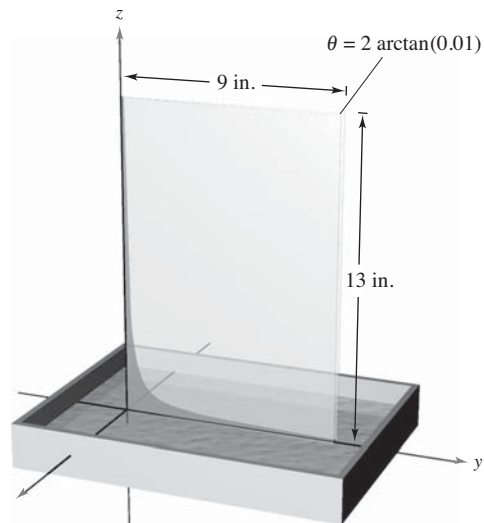
PROYECTO DE TRABAJO

Capilaridad

Una propiedad muy conocida de los líquidos consiste en que ascienden por conductos verticales muy estrechos, recibe el nombre de "capilaridad". La figura muestra dos placas que forman una cuña estrecha dentro de un recipiente con líquido. La superficie superior del líquido toma una forma hiperbólica dada por

$$z = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

donde x , y y z están medidas en pulgadas. La constante k depende del ángulo de la cuña, del tipo de líquido y del material de las placas.



- Encuentre el volumen del líquido que ha ascendido por la cuña. (Tome $k = 1$.)
- Determine el área de la superficie horizontal del líquido que ha ascendido por la cuña.

Adaptación de un problema sobre capilaridad de "Capillary Phenomena", de Thomas B. Greenslade, Jr., *Physics Teacher*, mayo de 1992. Con autorización del autor.

5.6 Integrales triples y aplicaciones

- Utilizar una integral triple para calcular el volumen de una región sólida.
- Hallar el centro de masa y los momentos de inercia de una región sólida.

Integrales triples

El procedimiento utilizado para definir una **integral triple** es análogo al utilizado para integrales dobles. Considere una función f en tres variables que es continua sobre una región sólida acotada Q . Entonces, encierre Q en una red de cubos y forme una **partición interna** que consta de todos los cubos que quedan completamente dentro de Q , como se muestra en la figura 5.52. El volumen del i -ésimo cubo es

$$\Delta V_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i. \quad \text{Volumen del } i\text{-ésimo cubo}$$

La **norma** $\|\Delta\|$ de la partición es la longitud de la diagonal más larga en los n cubos de la partición. Elija un punto (x_i, y_i, z_i) en cada cubo y forme la suma de Riemann

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i.$$

Tomando el límite cuando $\|\Delta\| \rightarrow 0$ llega a la siguiente definición.

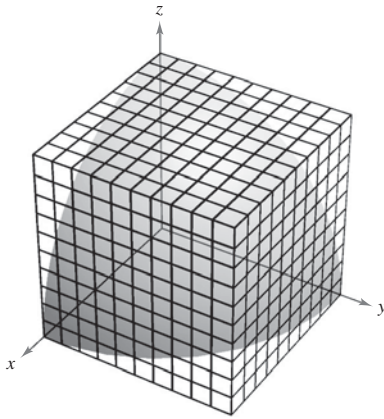
Definición de integral triple

Si f es continua sobre una región sólida acotada Q , entonces la **integral triple de f sobre Q** se define como

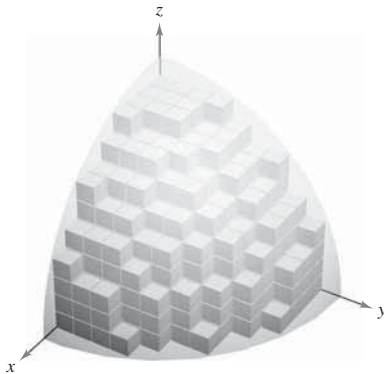
$$\iiint_Q f(x, y, z) dV = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$$

siempre que el límite exista. El **volumen** de la región sólida Q está dado por

$$\text{Volumen de } Q = \iiint_Q dV.$$



Región sólida Q



$$\text{Volumen de } Q \approx \sum_{i=1}^n \Delta V_i$$

Figura 5.52

Algunas de las propiedades de las integrales dobles expuestas en el teorema 5.1 pueden replantearse en términos de integrales triples.

- $\iiint_Q cf(x, y, z) dV = c \iiint_Q f(x, y, z) dV$
- $\iiint_Q [f(x, y, z) \pm g(x, y, z)] dV = \iiint_Q f(x, y, z) dV \pm \iiint_Q g(x, y, z) dV$
- $\iiint_Q f(x, y, z) dV = \iiint_{Q_1} f(x, y, z) dV + \iiint_{Q_2} f(x, y, z) dV$

En las propiedades dadas arriba, Q es la unión de dos subregiones sólidas que no se superponen a Q_1 y Q_2 . Si la región sólida Q es simple, la integral triple $\iiint_Q f(x, y, z) dV$ puede evaluarse con una integral iterada utilizando alguno de los seis posibles órdenes de integración:

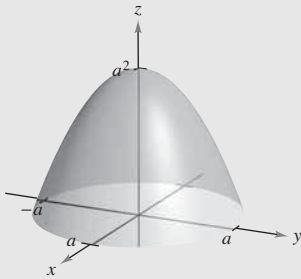
$$\begin{aligned} dx dy dz & \quad dy dx dz & \quad dz dx dy \\ dx dz dy & \quad dy dz dx & \quad dz dy dx. \end{aligned}$$

Exploración**Volumen de un sector**

paraboloide En las páginas 281 y 282, se le pidió resumir las diferentes formas estudiadas hasta ahora para hallar el volumen del sólido acotado por el paraboloide

$$z = a^2 - x^2 - y^2, \quad a > 0$$

y el plano xy . Ahora conoce un método más. Utilícelo para hallar el volumen del sólido.



La versión siguiente del teorema de Fubini describe una región que es considerada simple con respecto al orden $dz dy dx$. Para los otros cinco órdenes pueden formularse descripciones similares.

TEOREMA 5.4 Evaluación mediante integrales iteradas

Sea f continua en una región sólida definida por Q

$$a \leq x \leq b,$$

$$h_1(x) \leq y \leq h_2(x),$$

$$g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)$$

donde h_1, h_2, g_1 y g_2 son funciones continuas. Entonces

$$\iiint_Q f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) dz dy dx.$$

Para evaluar una integral iterada triple en el orden $dz dy dx$, mantenga x y y constantes para la integración más interior. Después, mantenga x constante para la segunda integración.

EJEMPLO 1 Evaluar una integral iterada triple

Evalúe la integral iterada triple

$$\int_0^2 \int_0^x \int_0^{x+y} e^x(y + 2z) dz dy dx.$$

Solución Para la primera integración, mantenga x y y constantes e integre respecto a z .

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^x \int_0^{x+y} e^x(y + 2z) dz dy dx &= \int_0^2 \int_0^x e^x(yz + z^2) \Big|_0^{x+y} dy dx \\ &= \int_0^2 \int_0^x e^x(x^2 + 3xy + 2y^2) dy dx \end{aligned}$$

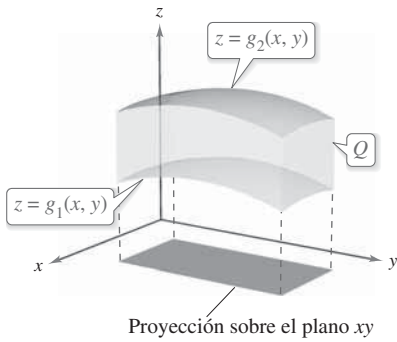
Para la segunda integración, mantenga x constante e integre respecto a y .

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^x e^x(x^2 + 3xy + 2y^2) dy dx &= \int_0^2 \left[e^x \left(x^2y + \frac{3xy^2}{2} + \frac{2y^3}{3} \right) \Big|_0^x \right] dx \\ &= \frac{19}{6} \int_0^2 x^3 e^x dx \end{aligned}$$

Por último, integre respecto a x .

$$\begin{aligned} \frac{19}{6} \int_0^2 x^3 e^x dx &= \frac{19}{6} \left[e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) \Big|_0^2 \right] \\ &= 19 \left(\frac{e^2}{3} + 1 \right) \\ &\approx 65.797 \end{aligned}$$

El ejemplo 1 muestra el orden de integración $dz dy dx$. Con otros órdenes, puede seguir un procedimiento similar. Por ejemplo, para evaluar una integral iterada triple en el orden mantenga y y z constantes para la integración más interior e integre respecto a x . Después, para la segunda integración, mantenga z constante e integre respecto a y . Por último, para la tercera integración, integre respecto a z .



La región sólida Q se encuentra entre dos superficies.

Figura 5.53

Para hallar los límites dado un orden determinado de integración, por lo general se aconseja determinar primero los límites más interiores, que pueden ser funciones de las dos variables exteriores. Después, proyectando el sólido Q sobre el plano coordenado de las dos variables exteriores, se pueden determinar sus límites de integración mediante los métodos usados para las integrales dobles. Por ejemplo, para evaluar

$$\iiint_Q f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$$

primero determine los límites de z , y entonces la integral toma la forma

$$\iint \left[\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right] dy \, dx.$$

Proyectando el sólido Q sobre el plano xy , puede determinar los límites de x y de y de la misma manera que en el caso de las integrales dobles, como se muestra en la figura 5.53.

EJEMPLO 2

Integral triple para hallar un volumen

Encuentre el volumen del elipsoide dado por $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$.

Solución Como en la ecuación x , y y z juegan papeles similares, el orden de integración es probablemente irrelevante, y puede elegir arbitrariamente $dz \, dy \, dx$. Además, puede simplificar los cálculos considerando solo la porción del elipsoide que se encuentra en el primer octante, como se muestra en la figura 5.54. Para el orden primero determine los límites de z .

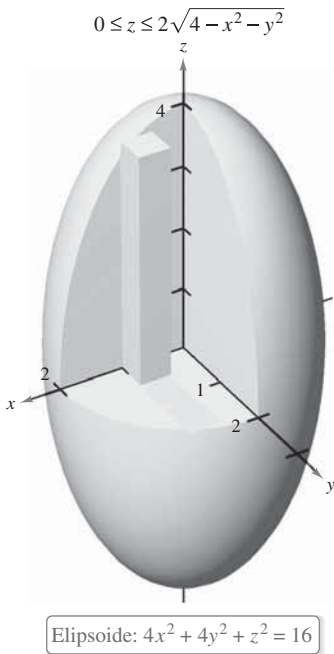
$$0 \leq z \leq 2\sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

Los límites de x y y son, como puede ver en la figura 5.55,

$$0 \leq x \leq 2 \quad \text{y} \quad 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}.$$

Por lo que el volumen del elipsoide es

$$\begin{aligned} V &= \iiint_Q dV \\ &= 8 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{2\sqrt{4-x^2-y^2}} dz \, dy \, dx \\ &= 8 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} z \Big|_0^{2\sqrt{4-x^2-y^2}} dy \, dx \\ &= 16 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{(4-x^2) - y^2} \, dy \, dx && \text{Tablas de integración (apéndice B), fórmula 37} \\ &= 8 \int_0^2 \left[y\sqrt{4-x^2-y^2} + (4-x^2) \arcsen\left(\frac{y}{\sqrt{4-x^2}}\right) \right]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx \\ &= 8 \int_0^2 [0 + (4-x^2) \arcsen(1) - 0 - 0] dx \\ &= 8 \int_0^2 (4-x^2) \left(\frac{\pi}{2}\right) dx \\ &= 4\pi \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 \\ &= \frac{64\pi}{3}. \end{aligned}$$



Elipsoide: $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$

Figura 5.54

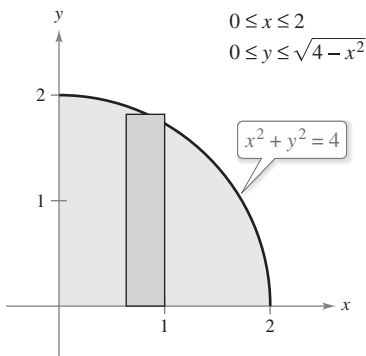


Figura 5.55

El ejemplo 2 es poco usual en el sentido de que con los seis posibles órdenes de integración se obtienen integrales de dificultad comparable. Trate de emplear algún otro de los posibles órdenes de integración para hallar el volumen del elipsoide. Por ejemplo, con el orden $dx \, dy \, dz$ obtiene la integral

$$V = 8 \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-z^2}/2} \int_0^{\sqrt{16-4y^2-z^2}/2} dx \, dy \, dz.$$

Si resuelve esta integral, obtiene el mismo volumen que en el ejemplo 2. Esto es siempre así; el orden de integración no afecta el valor de la integral. Sin embargo, el orden de integración a menudo afecta la complejidad de la integral. En el ejemplo 3, el orden de integración propuesto no es conveniente, por lo que puede cambiar el orden para simplificar el problema.

EJEMPLO 3 Cambiar el orden de integración

Evalúe $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_x^{\sqrt{\pi/2}} \int_1^3 \text{sen}(y^2) \, dz \, dy \, dx$.

Solución Observe que después de una integración en el orden dado, encontraría la integral $2 \int \text{sen}(y^2) \, dy$, que no es una función elemental. Para evitar este problema, cambie el orden de integración a $dz \, dx \, dy$, de manera que y sea la variable exterior. Como se muestra en la figura 5.56, la región sólida Q está dada por

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ x &\leq y \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ 1 &\leq z \leq 3 \end{aligned}$$

y la proyección de Q en el plano xy proporciona los límites

$$0 \leq y \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

y

$$0 \leq x \leq y.$$

Por tanto, la evaluación de la integral triple usando el orden $dz \, dx \, dy$ produce

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_0^y \int_1^3 \text{sen}(y^2) \, dz \, dx \, dy &= \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_0^y z \, \text{sen}(y^2) \Big|_1^3 \, dx \, dy \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \int_0^y \text{sen}(y^2) \, dx \, dy \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{\pi/2}} x \, \text{sen}(y^2) \Big|_0^y \, dy \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{\pi/2}} y \, \text{sen}(y^2) \, dy \\ &= -\cos(y^2) \Big|_0^{\sqrt{\pi/2}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

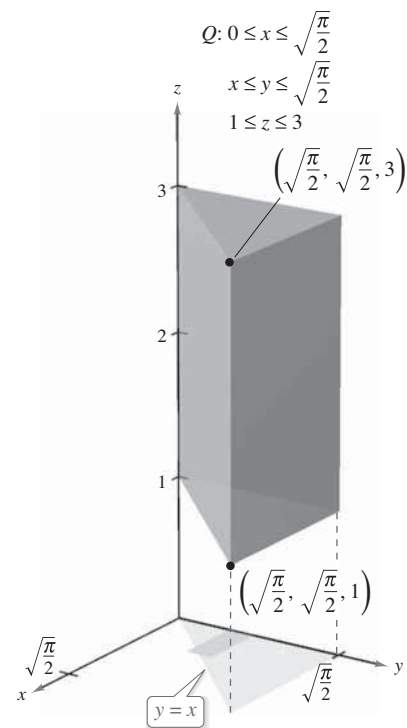


Figura 5.56

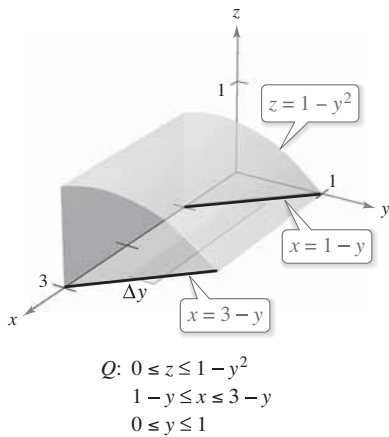


Figura 5.57

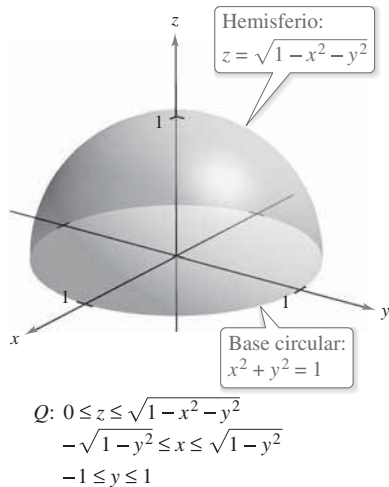


Figura 5.58

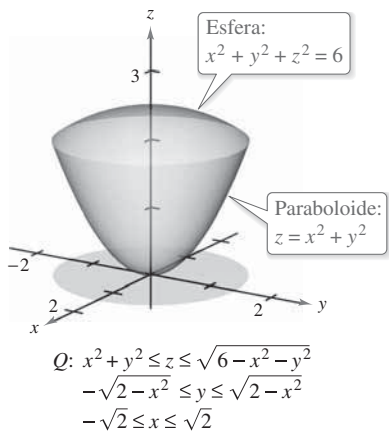


Figura 5.59

EJEMPLO 4 Determinar los límites de integración

Dé una integral triple para el volumen de cada una de las regiones sólidas.

- La región en el primer octante acotada superiormente por el cilindro $z = 1 - y^2$ y comprendida entre los planos verticales $x + y = 1$ y $x + y = 3$.
- El hemisferio superior $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.
- La región acotada inferiormente por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

Solución

- En la figura 5.57, observe que el sólido está acotado inferiormente por el plano $xy(z = 0)$ y superiormente por el cilindro $z = 1 - y^2$. Por tanto,

$$0 \leq z \leq 1 - y^2. \quad \text{Límites para } z$$

Proyectando la región sobre el plano xy obtiene un paralelogramo. Como dos de los lados del paralelogramo son paralelos al eje x , se tienen los límites siguientes:

$$1 - y \leq x \leq 3 - y \quad \text{y} \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Por tanto, el volumen de la región está dado por

$$V = \iiint_Q dV = \int_0^1 \int_{1-y}^{3-y} \int_0^{1-y^2} dz \, dx \, dy.$$

- Para el hemisferio superior dado por $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, tiene

$$0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}. \quad \text{Límites para } z$$

En la figura 5.58, observe que la proyección del hemisferio sobre el plano xy es el círculo dado por

$$x^2 + y^2 = 1$$

y puede usar el orden $dx \, dy$ o el orden $dy \, dx$. Eligiendo el primero se obtiene

$$-\sqrt{1 - y^2} \leq x \leq \sqrt{1 - y^2} \quad \text{y} \quad -1 \leq y \leq 1$$

lo cual implica que el volumen de la región está dado por

$$V = \iiint_Q dV = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz \, dx \, dy.$$

- Para la región acotada inferiormente por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ tiene

$$x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{6 - x^2 - y^2}. \quad \text{Límites para } z$$

La esfera y el paraboloide se cortan en $z = 2$. Además, en la figura 5.59 puede ver que la proyección de la región sólida sobre el plano xy es el círculo dado por

$$x^2 + y^2 = 2.$$

Utilizando el orden $dy \, dx$ obtiene

$$-\sqrt{2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{2 - x^2} \quad \text{y} \quad -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$$

lo cual implica que el volumen de la región está dado por

$$V = \iiint_Q dV = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} dz \, dy \, dx.$$

Centro de masa y momentos de inercia

En el resto de esta sección se analizan dos aplicaciones importantes de las integrales triples a la ingeniería. Considere una región sólida Q cuya densidad está dada por la **función de densidad** ρ . El **centro de masa** de una región sólida Q de masa m está dado por $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, donde

$$\begin{aligned}
 m &= \iiint_Q \rho(x, y, z) \, dV && \text{Masa del sólido} \\
 M_{yz} &= \iiint_Q x\rho(x, y, z) \, dV && \text{Primer momento con respecto al plano } yz \\
 M_{xz} &= \iiint_Q y\rho(x, y, z) \, dV && \text{Primer momento respecto al plano } xz \\
 M_{xy} &= \iiint_Q z\rho(x, y, z) \, dV && \text{Primer momento respecto al plano } xy
 \end{aligned}$$

y

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}.$$

Las cantidades M_{yz} , M_{xz} y M_{xy} se conocen como los **primeros momentos** de la región Q respecto a los planos yz , xz y xy , respectivamente.

Los primeros momentos de las regiones sólidas se toman respecto a un plano, mientras que los segundos momentos de los sólidos se toman respecto a una recta. Los **segundos momentos** (o **momentos de inercia**) respecto a los ejes x , y y z son los siguientes.

$$\begin{aligned}
 I_x &= \iiint_Q (y^2 + z^2)\rho(x, y, z) \, dV && \text{Momento de inercia respecto al eje } x \\
 I_y &= \iiint_Q (x^2 + z^2)\rho(x, y, z) \, dV && \text{Momento de inercia respecto al eje } y \\
 I_z &= \iiint_Q (x^2 + y^2)\rho(x, y, z) \, dV && \text{Momento de inercia respecto al eje } z
 \end{aligned}$$

En problemas que requieren el cálculo de los tres momentos, puede ahorrarse una cantidad considerable de trabajo empleando la propiedad aditiva de las integrales triples y escribiendo

$$I_x = I_{xz} + I_{xy}, \quad I_y = I_{yz} + I_{xy} \quad \text{y} \quad I_z = I_{yz} + I_{xz}$$

donde I_{xy} , I_{xz} e I_{yz} son

$$\begin{aligned}
 I_{xy} &= \iiint_Q z^2\rho(x, y, z) \, dV \\
 I_{xz} &= \iiint_Q y^2\rho(x, y, z) \, dV
 \end{aligned}$$

e

$$I_{yz} = \iiint_Q x^2\rho(x, y, z) \, dV.$$

.....►
COMENTARIO En ingeniería y en física, el momento de inercia de una masa se usa para hallar el tiempo requerido para que una masa alcance una velocidad de rotación dada respecto a un eje, como se muestra en la figura 5.60. Cuanto mayor es el momento de inercia, mayor es la fuerza que hay que aplicar a la masa para que alcance la velocidad deseada.

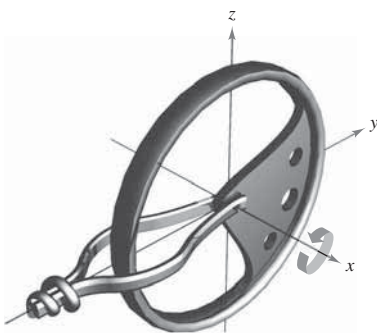
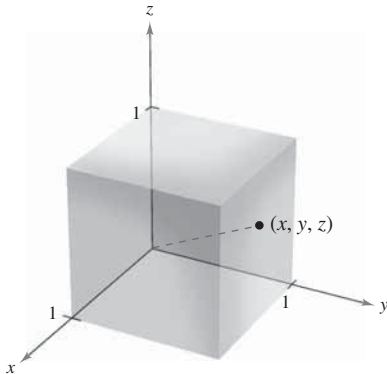


Figura 5.60

EJEMPLO 5

Hallar el centro de masa de una región sólida

•••▶ Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.



Densidad variable:
 $\rho(x, y, z) = k(x^2 + y^2 + z^2)$
Figura 5.61

Encuentre el centro de masa del cubo unidad mostrado en la figura 5.61, dado que la densidad en el punto (x, y, z) es proporcional al cuadrado de su distancia al origen.

Solución Como la densidad en (x, y, z) es proporcional al cuadrado de la distancia entre $(0, 0, 0)$ y (x, y, z) , tiene

$$\rho(x, y, z) = k(x^2 + y^2 + z^2).$$

Esta función de densidad se puede utilizar para hallar la masa del cubo. Debido a la simetría de la región, cualquier orden de integración producirá integrales de dificultad comparable.

$$\begin{aligned} m &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 k(x^2 + y^2 + z^2) \, dz \, dy \, dx \\ &= k \int_0^1 \int_0^1 \left[(x^2 + y^2)z + \frac{z^3}{3} \right]_0^1 \, dy \, dx \\ &= k \int_0^1 \int_0^1 \left(x^2 + y^2 + \frac{1}{3} \right) \, dy \, dx \\ &= k \int_0^1 \left[\left(x^2 + \frac{1}{3} \right)y + \frac{y^3}{3} \right]_0^1 \, dx \\ &= k \int_0^1 \left(x^2 + \frac{2}{3} \right) \, dx \\ &= k \left[\frac{x^3}{3} + \frac{2x}{3} \right]_0^1 \\ &= k \end{aligned}$$

El primer momento con respecto al plano yz es

$$\begin{aligned} M_{yz} &= k \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x(x^2 + y^2 + z^2) \, dz \, dy \, dx \\ &= k \int_0^1 x \left[\int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) \, dz \, dy \right] \, dx. \end{aligned}$$

Observe que x puede sacarse como factor fuera de las dos integrales interiores, ya que es constante con respecto a y y a z . Después de factorizar, las dos integrales interiores son iguales con respecto a la masa m . Por tanto, se tiene

$$\begin{aligned} M_{yz} &= k \int_0^1 x \left(x^2 + \frac{2}{3} \right) \, dx \\ &= k \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{3} \right]_0^1 \\ &= \frac{7k}{12}. \end{aligned}$$

Así,

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{7k/12}{k} = \frac{7}{12}.$$

Por último, por la naturaleza de ρ y la simetría de x , y y z en esta región sólida, tiene $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$, y el centro de masa es $\left(\frac{7}{12}, \frac{7}{12}, \frac{7}{12} \right)$. ■

EJEMPLO 6 Momentos de inercia de una región sólida

Encuentre los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y de la región sólida comprendida entre el hemisferio

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

y el plano xy , dado que la densidad en (x, y, z) es proporcional a la distancia entre (x, y, z) y el plano xy .

Solución La densidad de la región está dada por

$$\rho(x, y, z) = kz.$$

Considerando la simetría de este problema, sabe que $I_x = I_y$, y solo necesita calcular un momento, digamos I_x . De acuerdo con la figura 5.62, elija el orden $dz \, dy \, dx$ y escriba

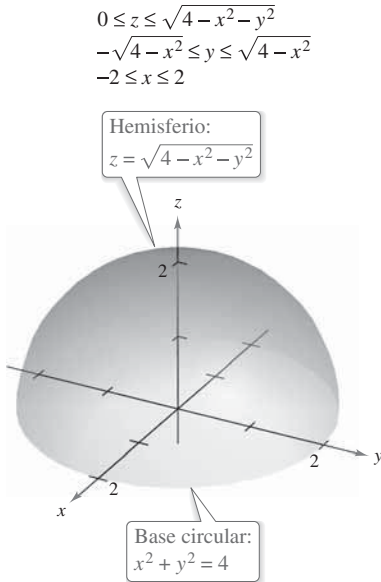
$$\begin{aligned} I_x &= \iiint_Q (y^2 + z^2)\rho(x, y, z) \, dV \\ &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} (y^2 + z^2)(kz) \, dz \, dy \, dx \\ &= k \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left[\frac{y^2 z^2}{2} + \frac{z^4}{4} \right]_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \, dy \, dx \\ &= k \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left[\frac{y^2(4-x^2-y^2)}{2} + \frac{(4-x^2-y^2)^2}{4} \right] \, dy \, dx \\ &= \frac{k}{4} \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} [(4-x^2)^2 - y^4] \, dy \, dx \\ &= \frac{k}{4} \int_{-2}^2 \left[(4-x^2)^2 y - \frac{y^5}{5} \right]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \, dx \\ &= \frac{k}{4} \int_{-2}^2 \frac{8}{5} (4-x^2)^{5/2} \, dx \\ &= \frac{4k}{5} \int_0^2 (4-x^2)^{5/2} \, dx \quad x = 2 \operatorname{sen} \theta \\ &= \frac{4k}{5} \int_0^{\pi/2} 64 \cos^6 \theta \, d\theta \\ &= \left(\frac{256k}{5} \right) \left(\frac{5\pi}{32} \right) \quad \text{Fórmula de Wallis} \\ &= 8k\pi. \end{aligned}$$

Por tanto, $I_x = 8k\pi = I_y$.

En el ejemplo 6, los momentos de inercia respecto a los ejes x y y son iguales. Sin embargo, el momento respecto al eje z es diferente. ¿Parece que el momento de inercia respecto al eje z deba ser menor o mayor que los momentos calculados en el ejemplo 6? Realizando los cálculos, puede determinar que

$$I_z = \frac{16}{3}k\pi.$$

Esto indica que el sólido mostrado en la figura 5.62 presenta resistencia mayor a la rotación en torno a los ejes x o y que en torno al eje z .



Densidad variable: $\rho(x, y, z) = kz$.


Figura 5.62

5.6 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Evaluar una triple integral En los ejercicios 1-8, evalúe la integral iterada.

1. $\int_0^3 \int_0^2 \int_0^1 (x + y + z) \, dx \, dz \, dy$
2. $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^2 y^2 z^2 \, dx \, dy \, dz$
3. $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} x \, dz \, dy \, dx$
4. $\int_0^9 \int_0^{y/3} \int_0^{\sqrt{y^2-9x^2}} z \, dz \, dx \, dy$
5. $\int_1^4 \int_0^1 \int_0^x 2ze^{-x^2} \, dy \, dx \, dz$
6. $\int_1^4 \int_1^e \int_0^{1/xz} \ln z \, dy \, dz \, dx$
7. $\int_0^4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{1-x} x \cos y \, dz \, dy \, dx$
8. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{y/2} \int_0^{1/y} \sin y \, dz \, dx \, dy$

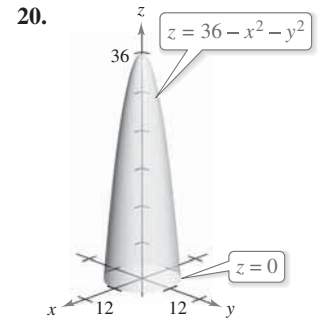
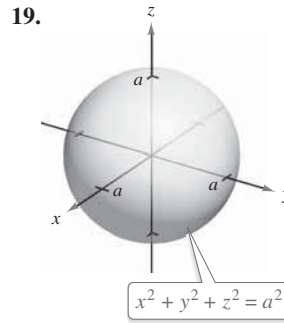
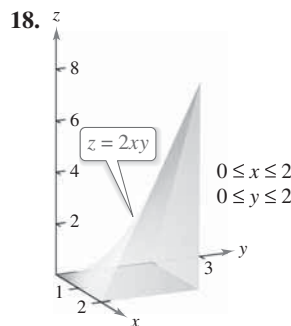
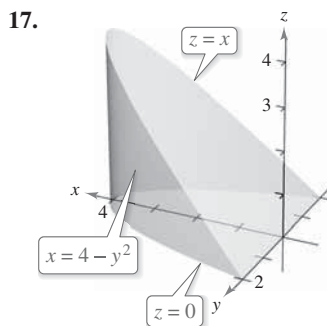
 **Aproximar una triple iterada usando tecnología** En los ejercicios 9 y 10, utilice un sistema algebraico por computadora para evaluar la integral iterada.

9. $\int_0^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} \int_0^{y^2} y \, dz \, dx \, dy$
10. $\int_0^3 \int_0^{2-(2y/3)} \int_0^{6-2y-3z} ze^{-x^2y^2} \, dx \, dz \, dy$

Establecer una triple integral En los ejercicios 11-16, establezca una triple integral para el volumen del sólido.

11. El sólido en el primer octante acotado por los planos coordenados y el plano $z = 5 - x - y$.
12. El sólido acotado por $z = 9 - x^2$, $z = 0$, $y = 0$ y $y = 2x$.
13. El sólido acotado por el paraboloides $z = 6 - x^2 - y^2$ y $z = 0$.
14. El sólido limitado por $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ y $z = 0$.
15. El sólido que es el interior común bajo de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ y sobre el paraboloides $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
16. El sólido limitado arriba por el cilindro $z = 4 - x^2$ y abajo por el paraboloides $z = x^2 + 3y^2$.

Volumen En los ejercicios 17-20, utilice una integral triple para hallar el volumen del sólido mostrado en la figura.



Volumen En los ejercicios 21-24, use una integral triple para encontrar el volumen del sólido limitado por las gráficas de las ecuaciones.

21. $z = 4 - x^2$, $y = 4 - x^2$, primer octante
22. $z = 9 - x^3$, $y = -x^2 + 2$, $y = 0$, $z = 0$, $x \geq 0$
23. $z = 2 - y$, $z = 4 - y^2$, $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$
24. $z = x$, $y = x + 2$, $y = x^2$, primer octante

Cambiar el orden de integración En los ejercicios 25-30, dibuje el sólido cuyo volumen está dado por la integral iterada y reescriba la integral utilizando el orden de integración indicado.

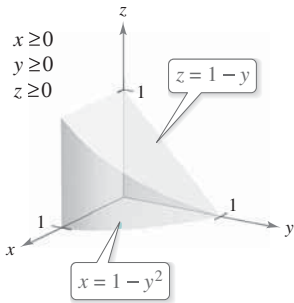
25. $\int_0^1 \int_{-1}^0 \int_0^{y^2} dz \, dy \, dx$
Reescriba usando el orden $dy \, dz \, dx$.
26. $\int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \int_0^{1-x} dz \, dx \, dy$
Reescriba usando el orden $dx \, dz \, dy$.
27. $\int_0^4 \int_0^{(4-x)/2} \int_0^{(12-3x-6y)/4} dz \, dy \, dx$
Reescriba usando el orden $dy \, dx \, dz$.
28. $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{6-x-y} dz \, dy \, dx$
Reescriba usando el orden $dz \, dx \, dy$.
29. $\int_0^1 \int_y^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz \, dx \, dy$
Reescriba usando el orden $dz \, dy \, dx$.
30. $\int_0^2 \int_{2x}^4 \int_0^{\sqrt{y^2-4x^2}} dz \, dy \, dx$
Reescriba usando el orden $dx \, dy \, dz$.

Órdenes de integración En los ejercicios 31-34, dé los seis posibles órdenes de integración de la integral triple sobre la región sólida Q , $\iiint_Q xyz \, dV$.

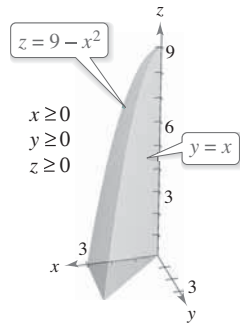
31. $Q = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq 3\}$
32. $Q = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 2 - x\}$
33. $Q = \{(x, y, z): x^2 + y^2 \leq 9, 0 \leq z \leq 4\}$
34. $Q = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq 1, y \leq 1 - x^2, 0 \leq z \leq 6\}$

Órdenes de integración En los ejercicios 35 y 36, la figura muestra la región de integración de la integral dada. Reescriba la integral como una integral iterada equivalente con los otros cinco órdenes.

35. $\int_0^1 \int_0^{1-y^2} \int_0^{1-y} dz dx dy$



36. $\int_0^3 \int_0^x \int_0^{9-x^2} dz dy dx$



Masa y centro de masa En los ejercicios 37-40, encuentre la masa y las coordenadas indicadas del centro de masa de la región del sólido Q de densidad ρ acotada por las gráficas de las ecuaciones.

37. Encontrar \bar{x} usando $\rho(x, y, z) = k$.
 $Q: 2x + 3y + 6z = 12, x = 0, y = 0, z = 0$

38. Encontrar \bar{y} usando $\rho(x, y, z) = ky$.
 $Q: 3x + 3y + 5z = 15, x = 0, y = 0, z = 0$

39. Encontrar \bar{z} usando $\rho(x, y, z) = kz$.
 $Q: z = 4 - x, z = 0, y = 0, y = 4, x = 0$

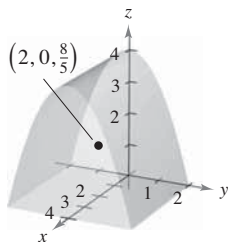
40. Encontrar \bar{y} usando $\rho(x, y, z) = k$.
 $Q: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 (a, b, c > 0), x = 0, y = 0, z = 0$

Masa y centro de masa En los ejercicios 41 y 42, establezca las integrales triples para encontrar la masa y el centro de masa del sólido de densidad ρ acotado por las gráficas de las ecuaciones.

41. $x = 0, x = b, y = 0, y = b, z = 0, z = b$
 $\rho(x, y, z) = kxy$

42. $x = 0, x = a, y = 0, y = b, z = 0, z = c$
 $\rho(x, y, z) = kz$

Piénselo En la figura se muestra el centro de masa de un sólido de densidad constante. En los ejercicios 43-46, haga una conjetura acerca de cómo cambiará el centro de masa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ con la densidad no constante $\rho(x, y, z)$. Explique.



43. $\rho(x, y, z) = kx$

44. $\rho(x, y, z) = kz$

45. $\rho(x, y, z) = k(y + 2)$

46. $\rho(x, y, z) = kxz^2(y + 2)^2$

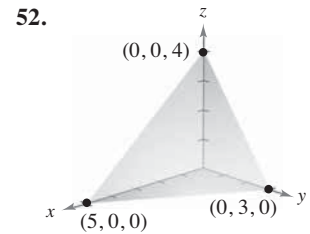
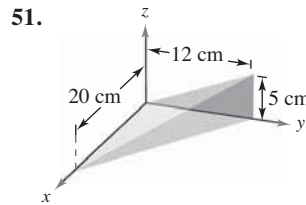
Centroide En los ejercicios 47-52, encuentre el centroide de la región sólida acotada por las gráficas de las ecuaciones o descrita en la figura. Utilice un sistema algebraico por computadora para evaluar las integrales triples. (Suponga densidad uniforme y encuentre el centro de masa.)

47. $z = \frac{h}{r}\sqrt{x^2 + y^2}, z = h$

48. $y = \sqrt{9 - x^2}, z = y, z = 0$

49. $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}, z = 0$

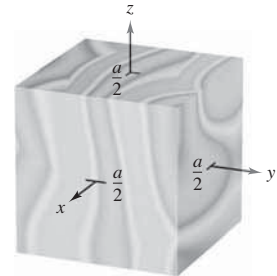
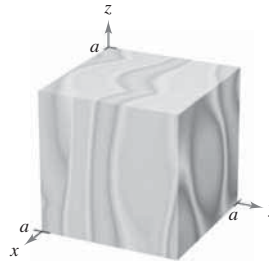
50. $z = \frac{1}{y^2 + 1}, z = 0, x = -2, x = 2, y = 0, y = 1$



Momentos de inercia En los ejercicios 53-56, encuentre I_x, I_y e I_z para el sólido de densidad dada. Utilice un sistema algebraico por computadora para evaluar las integrales triples.

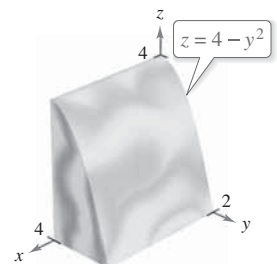
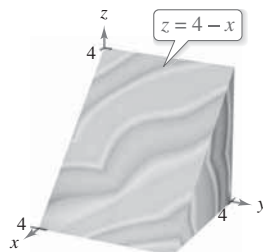
53. (a) $\rho = k$
 (b) $\rho = kxyz$

54. (a) $\rho(x, y, z) = k$
 (b) $\rho(x, y, z) = k(x^2 + y^2)$



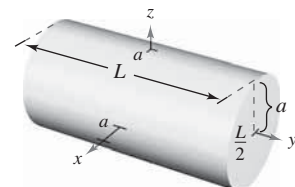
55. (a) $\rho(x, y, z) = k$
 (b) $\rho = ky$

56. (a) $\rho = kz$
 (b) $\rho = k(4 - z)$

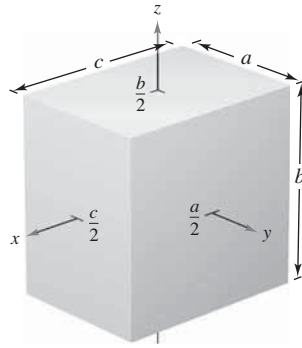


Momentos de inercia En los ejercicios 57 y 58, verifique los momentos de inercia del sólido de densidad uniforme. Utilice un sistema algebraico por computadora para evaluar las integrales triples.

57. $I_x = \frac{1}{12}m(3a^2 + L^2)$
 $I_y = \frac{1}{2}ma^2$
 $I_z = \frac{1}{12}m(3a^2 + L^2)$



58. $I_x = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$
 $I_y = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$
 $I_z = \frac{1}{12}m(a^2 + c^2)$



Momentos de inercia En los ejercicios 59 y 60, dé una integral triple que represente el momento de inercia con respecto al eje z de la región sólida Q de densidad ρ .

59. $Q = \{(x, y, z) : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x\}$
 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

60. $Q = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}$
 $\rho = kx^2$

Establecer integrales triples En los ejercicios 61 y 62, utilizando la descripción de región sólida, dé la integral para (a) la masa, (b) el centro de masa y (c) el momento de inercia respecto al eje z .

61. El sólido acotado por $z = 4 - x^2 - y^2$ y $z = 0$ con la función de densidad $\rho = kz$.
62. El sólido en el primer octante acotado por los planos coordenados y $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ con función de densidad $\rho = kxy$.

Valor promedio En los ejercicios 63-66, encuentre el valor promedio de la función sobre el sólido dado. El valor promedio de una función continua $f(x, y, z)$ sobre una región sólida Q es

$$\frac{1}{V} \iiint_Q f(x, y, z) dV$$

donde V es el volumen de la región sólida Q .

63. $f(x, y, z) = z^2 + 4$ sobre el cubo en el primer octante acotado por los planos coordenados, y los planos $x = 1, y = 1$ y $z = 1$.
64. $f(x, y, z) = xyz$ sobre el cubo en el primer octante acotado por los planos coordenados y los planos $x = 4, y = 4$ y $z = 4$.
65. $f(x, y, z) = x + y + z$ sobre el tetraedro en el primer octante cuyos vértices son $(0, 0, 0), (2, 0, 0), (0, 2, 0)$ y $(0, 0, 2)$.
66. $f(x, y, z) = x + y$ sobre el sólido acotado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

DESARROLLO DE CONCEPTOS

67. **Integral triple** Defina una integral triple y describa un método para evaluar una integral triple.
68. **Momento de inercia** Determine si el momento de inercia con respecto al eje y del cilindro del ejercicio 57 aumentará o disminuirá con la densidad no constante $\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + z^2}$ y $a = 4$.

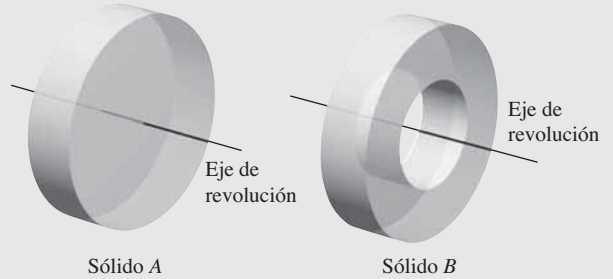
DESARROLLO DE CONCEPTOS (continuación)

69. **Piénselo** ¿Cuál de las siguientes integrales es igual

- a $\int_1^3 \int_0^2 \int_{-1}^1 f(x, y, z) dz dy dx$? Explique.
- (a) $\int_1^3 \int_0^2 \int_{-1}^1 f(x, y, z) dz dx dy$
- (b) $\int_{-1}^1 \int_0^2 \int_1^3 f(x, y, z) dx dy dz$
- (c) $\int_0^2 \int_1^3 \int_{-1}^1 f(x, y, z) dy dx dz$



70. **¿CÓMO LO VE?** Considere el sólido A y el sólido B de pesos iguales que se muestran en la figura.



- (a) Como los sólidos tienen el mismo peso, ¿cuál tiene la densidad mayor? Explique.
- (b) ¿Cuál sólido tiene el momento de inercia mayor?
- (c) Los sólidos se hacen rodar hacia abajo en un plano inclinado. Empiezan al mismo tiempo y a la misma altura. ¿Cuál llegará abajo primero? Explique.



71. **Maximizar una integral triple** Determine la región del sólido Q donde la integral

$$\iiint_Q (1 - 2x^2 - y^2 - 3z^2) dV$$

es un máximo. Utilice un sistema algebraico por computadora para aproximar el valor máximo. ¿Cuál es el valor máximo exacto?

72. **Determinar un valor** Encuentre a en la integral triple.

$$\int_0^1 \int_0^{3-a-y^2} \int_a^{4-x-y^2} dz dx dy = \frac{14}{15}$$

DESAFÍOS DEL EXAMEN PUTNAM

73. Evalúe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 \cos^2 \left\{ \frac{\pi}{2n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \right\} dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

Este problema fue preparado por el Committee on the Putnam Prize Competition.
 © The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

5.7 Coordenadas cilíndricas y esféricas

- Usar coordenadas cilíndricas para representar superficies en el espacio.
- Usar coordenadas esféricas para representar superficies en el espacio.

Coordenadas cilíndricas

Ya ha visto que algunas gráficas bidimensionales son más fáciles de representar en coordenadas polares que en coordenadas rectangulares. Algo semejante ocurre con las superficies en el espacio. En esta sección estudiará dos sistemas alternativos de coordenadas espaciales. El primero, el **sistema de coordenadas cilíndricas**, es una extensión de las coordenadas polares del plano al espacio tridimensional.

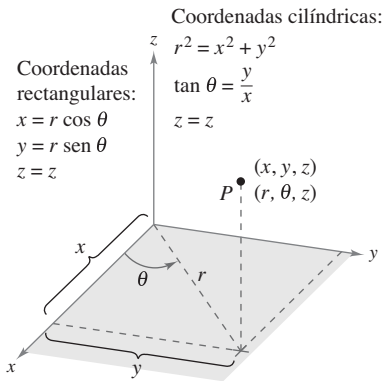


Figura 5.63

El sistema de coordenadas cilíndricas

En un **sistema de coordenadas cilíndricas**, un punto P en el espacio se representa por medio de una terna ordenada (r, θ, z) .

1. (r, θ) es una representación polar de la proyección de P en el plano xy .
2. z es la distancia dirigida de (r, θ) a P .

Para convertir coordenadas rectangulares en coordenadas cilíndricas (o viceversa), debe usar las siguientes fórmulas, basadas en las coordenadas polares, como se ilustra en la figura 5.63.

Cilíndricas a rectangulares:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sen \theta, \quad z = z$$

Rectangulares a cilíndricas:

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}, \quad z = z$$

Al punto $(0, 0, 0)$ se le llama el **polo**. Como la representación de un punto en el sistema de coordenadas polares no es única, la representación en el sistema de las coordenadas cilíndricas tampoco es única.

EJEMPLO 1 Convertir coordenadas cilíndricas a coordenadas rectangulares

Convierta el punto $(r, \theta, z) = (4, 5\pi/6, 3)$ a coordenadas rectangulares.

Solución Usando las ecuaciones de conversión de cilíndricas a rectangulares obtiene

$$\begin{aligned} x &= 4 \cos \frac{5\pi}{6} = 4 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -2\sqrt{3} \\ y &= 4 \sen \frac{5\pi}{6} = 4 \left(\frac{1}{2} \right) = 2 \\ z &= 3. \end{aligned}$$

Por tanto, en coordenadas rectangulares el punto es $(x, y, z) = (-2\sqrt{3}, 2, 3)$, como se muestra en la figura 5.64.

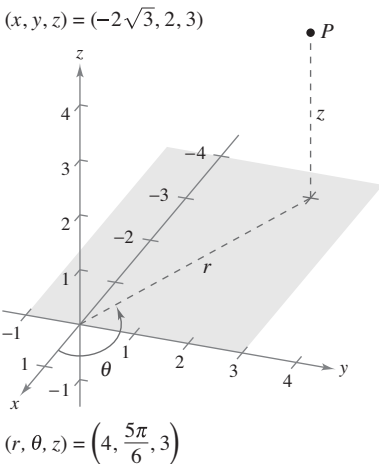


Figura 5.64

EJEMPLO 2

Convertir coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas

Convierta el punto a coordenadas cilíndricas.

$$(x, y, z) = (1, \sqrt{3}, 2)$$

Solución Use las ecuaciones de conversión de rectangulares a cilíndricas.

$$r = \pm \sqrt{1 + 3} = \pm 2$$

$$\tan \theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \arctan(\sqrt{3}) + n\pi = \frac{\pi}{3} + n\pi$$

$$z = 2$$

Tiene dos posibilidades para r y una cantidad infinita de posibilidades para θ . Como se muestra en la figura 5.65, dos representaciones adecuadas del punto son

$$\left(2, \frac{\pi}{3}, 2\right) \quad r > 0 \text{ y } \theta \text{ en el cuadrante I}$$

y

$$\left(-2, \frac{4\pi}{3}, 2\right) \quad r < 0 \text{ y } \theta \text{ en el cuadrante III}$$

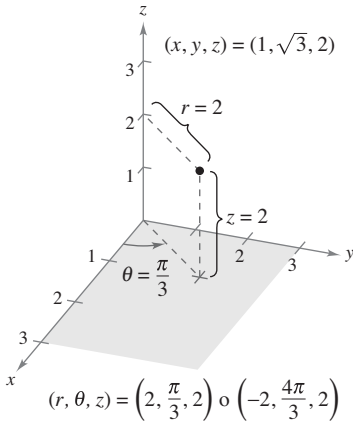


Figura 5.65

Las coordenadas cilíndricas son especialmente adecuadas para representar superficies cilíndricas y superficies de revolución en las que el eje z sea el eje de simetría, como se muestra en la figura 5.66.

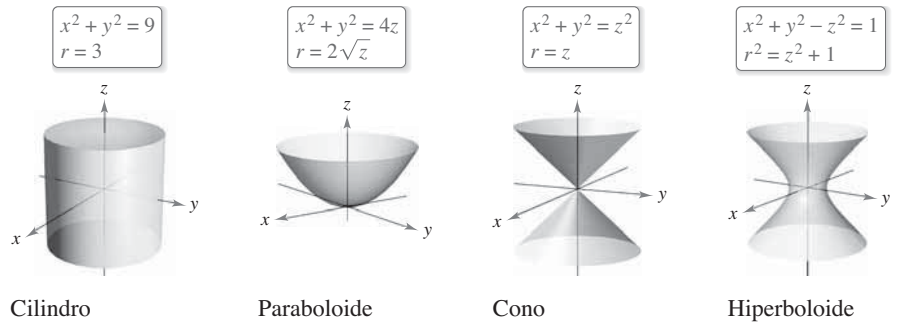


Figura 5.66

Los planos verticales que contienen el eje z y los planos horizontales también tienen ecuaciones simples de coordenadas cilíndricas, como se muestra en la figura 5.67.

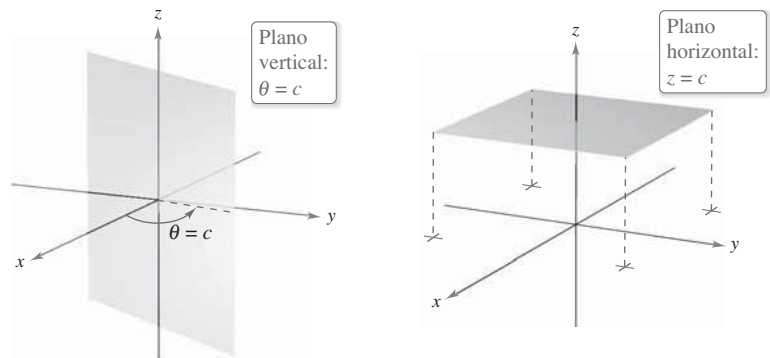


Figura 5.67

EJEMPLO 3

Convertir coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas

Encuentre una ecuación en coordenadas cilíndricas para la superficie representada por cada ecuación rectangular.

- a. $x^2 + y^2 = 4z^2$
- b. $y^2 = x$

Solución

a. Según la sección anterior, sabe que la gráfica de

$$x^2 + y^2 = 4z^2$$

es un cono elíptico de dos hojas con su eje a lo largo del eje z , como se muestra en la figura 5.68. Si sustituye $x^2 + y^2$ por r^2 , la ecuación en coordenadas cilíndricas es

$$r^2 = 4z^2$$

Ecuación rectangular

$$r^2 = 4z^2.$$

Ecuación cilíndrica

b. La gráfica de la superficie

$$y^2 = x$$

es un cilindro parabólico con rectas generatrices paralelas al eje z , como se muestra en la figura 5.69. Sustituyendo y^2 por $r^2 \text{ sen}^2 \theta$ y x por $r \text{ cos } \theta$, obtiene la ecuación siguiente en coordenadas cilíndricas.

$$y^2 = x$$

Ecuación rectangular

$$r^2 \text{ sen}^2 \theta = r \text{ cos } \theta$$

Sustituya y por $r \text{ sen } \theta$ y x por $r \text{ cos } \theta$.

$$r(r \text{ sen}^2 \theta - \text{cos } \theta) = 0$$

Agrupe términos y factorice.

$$r \text{ sen}^2 \theta - \text{cos } \theta = 0$$

Divida cada lado entre r .

$$r = \frac{\text{cos } \theta}{\text{sen}^2 \theta}$$

Despeje r .

$$r = \text{csc } \theta \cot \theta$$

Ecuación cilíndrica

Observe que esta ecuación comprende un punto en el que $r = 0$, por lo cual nada se pierde al dividir cada lado entre el factor r .

La conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas es más sencilla que la conversión de coordenadas cilíndricas a coordenadas rectangulares, como se muestra en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4

Convertir coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas

Encuentre una ecuación en coordenadas rectangulares de la superficie representada por la ecuación cilíndrica

$$r^2 \text{ cos } 2\theta + z^2 + 1 = 0.$$

Solución

$$r^2 \text{ cos } 2\theta + z^2 + 1 = 0$$

Ecuación cilíndrica

$$r^2(\text{cos}^2 \theta - \text{sen}^2 \theta) + z^2 + 1 = 0$$

Identidad trigonométrica

$$r^2 \text{ cos}^2 \theta - r^2 \text{ sen}^2 \theta + z^2 = -1$$

$$x^2 - y^2 + z^2 = -1$$

Sustituir x por $r \text{ cos } \theta$ y y por $r \text{ sen } \theta$.

$$y^2 - x^2 - z^2 = 1$$

Ecuación rectangular

Es un hiperboloide de dos hojas cuyo eje se encuentra a lo largo del eje y , como se muestra en la figura 5.70.

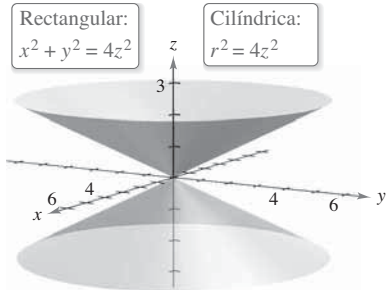


Figura 5.68

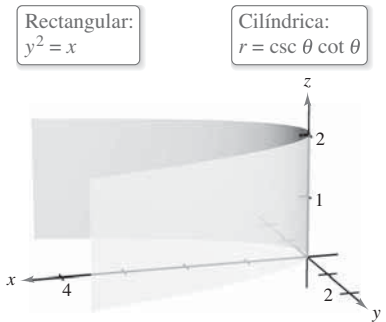


Figura 5.69

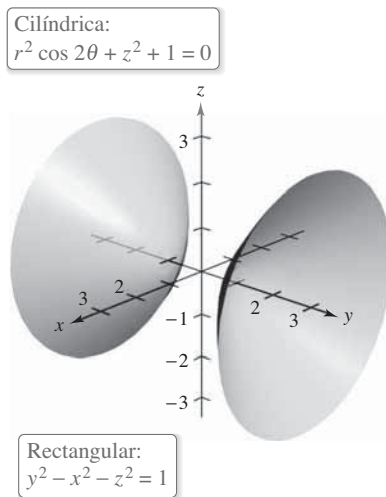


Figura 5.70

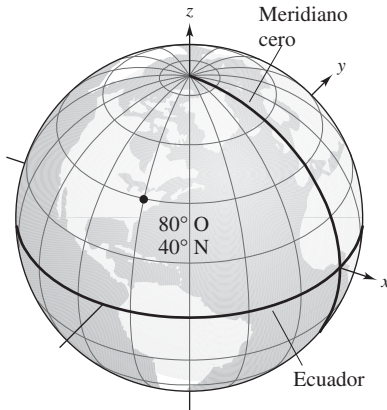


Figura 5.71

Coordenadas esféricas

En el **sistema de coordenadas esféricas**, cada punto se representa por una terna ordenada: la primera coordenada es una distancia, la segunda y la tercera coordenadas son ángulos. Este sistema es similar al sistema de latitud-longitud que se usa para identificar puntos en la superficie de la Tierra. Por ejemplo, en la figura 5.71 se muestra el punto en la superficie de la Tierra cuya latitud es 40° Norte (respecto al Ecuador) y cuya longitud es 80° Oeste (respecto al meridiano cero). Si se supone que la Tierra es esférica y tiene un radio de 4000 millas, este punto sería

$$(4000, -80^\circ, 50^\circ).$$

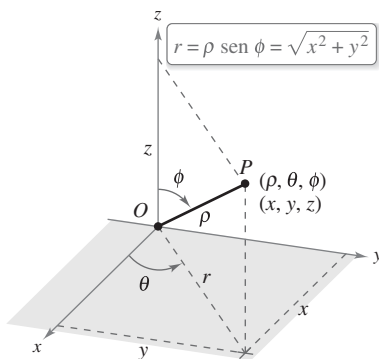
Radio 80° en el sentido de las manecillas del reloj, desde el meridiano cero 50° hacia abajo del Polo Norte

El sistema de coordenadas esféricas

En un **sistema de coordenadas esféricas**, un punto P en el espacio se representa por medio de una terna ordenada (ρ, θ, ϕ) donde ρ es la letra griega minúscula *rho* y ϕ es la letra griega minúscula *fi*.

1. ρ es la distancia entre P y el origen, $\rho \geq 0$.
2. θ es el mismo ángulo utilizado en coordenadas cilíndricas para $r \geq 0$.
3. ϕ es el ángulo *entre* el eje z positivo y el segmento de recta \overline{OP} , $0 \leq \phi \leq \pi$.

Observe que la primera y tercera coordenadas, ρ y ϕ , son no negativas.



Coordenadas esféricas.
Figura 5.72

La relación entre coordenadas rectangulares y esféricas se ilustra en la figura 5.72. Para convertir de un sistema al otro, use lo siguiente.

Esféricas a rectangulares:

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \quad z = \rho \cos \phi$$

Rectangulares a esféricas:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}, \quad \phi = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$

Para cambiar entre los sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas, use lo siguiente.

Esféricas a cilíndricas ($r \geq 0$):

$$r^2 = \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi, \quad \theta = \theta, \quad z = \rho \cos \phi$$

Cilíndricas a esféricas ($r \geq 0$):

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}, \quad \theta = \theta, \quad \phi = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}\right)$$

El sistema de coordenadas esféricas es útil principalmente para superficies en el espacio que tienen un *punto* o *centro* de simetría. Por ejemplo, la figura 5.73 muestra tres superficies con ecuaciones esféricas sencillas.

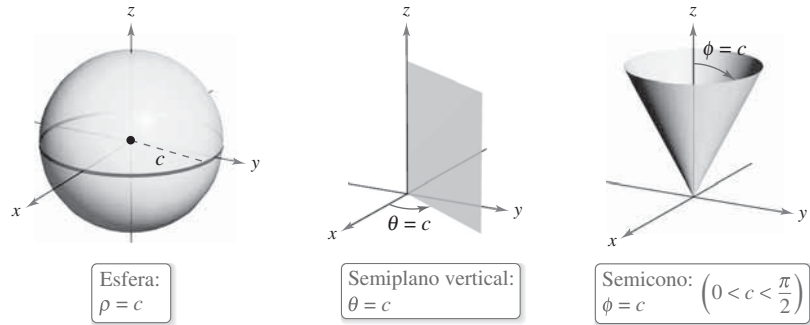


Figura 5.73

EJEMPLO 5

Convertir coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas

⋮⋮⋮▶ Consulte *LarsonCalculus.com* para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Encuentre una ecuación en coordenadas esféricas para la superficie representada por cada una de las ecuaciones rectangulares

- a. Cono: $x^2 + y^2 = z^2$ b. Esfera: $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$

Solución

- a. Use las ecuaciones de cambio de coordenadas de esféricas a rectangulares

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \quad \text{y} \quad z = \rho \cos \phi$$

y sustituya en la ecuación rectangular como se muestra.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= z^2 \\ \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen}^2 \theta &= \rho^2 \cos^2 \phi \\ \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) &= \rho^2 \cos^2 \phi \\ \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi &= \rho^2 \cos^2 \phi \\ \frac{\operatorname{sen}^2 \phi}{\cos^2 \phi} &= 1 && \rho \geq 0 \\ \tan^2 \phi &= 1 \\ \tan \phi &= \pm 1 \end{aligned}$$

Por consiguiente, se puede concluir que

$$\phi = \frac{\pi}{4} \quad \text{o} \quad \phi = \frac{3\pi}{4}.$$

La ecuación $\phi = \pi/4$ representa el semicono *superior*, y la ecuación $\phi = 3\pi/4$ representa el semicono *inferior*.

- b. Como $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ y $z = \rho \cos \phi$, la ecuación rectangular tiene la forma esférica siguiente.

$$\rho^2 - 4\rho \cos \phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho(\rho - 4 \cos \phi) = 0$$

Descartando por el momento la posibilidad de que $\rho = 0$, se obtiene la ecuación esférica

$$\rho - 4 \cos \phi = 0 \quad \text{o} \quad \rho = 4 \cos \phi.$$

Observe que el conjunto solución de esta ecuación comprende un punto en el cual $\rho = 0$, de manera que no se pierde nada al eliminar el factor ρ . La esfera representada por la ecuación $\rho = 4 \cos \phi$ se muestra en la figura 5.74.

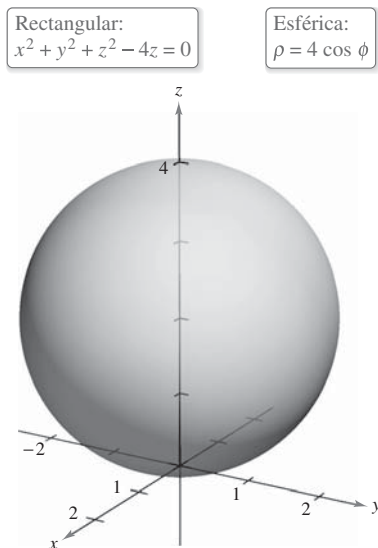


Figura 5.74

5.7 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Convertir cilíndricas a rectangulares En los ejercicios 1-6, convierta las coordenadas cilíndricas del punto en coordenadas rectangulares.

- | | |
|--|---|
| 1. $(-7, 0, 5)$ | 2. $(2, -\pi, -4)$ |
| 3. $\left(3, \frac{\pi}{4}, 1\right)$ | 4. $\left(6, -\frac{\pi}{4}, 2\right)$ |
| 5. $\left(4, \frac{7\pi}{6}, 3\right)$ | 6. $\left(-0.5, \frac{4\pi}{3}, 8\right)$ |

Convertir rectangulares a cilíndricas En los ejercicios 7-12, convierta las coordenadas rectangulares del punto en coordenadas cilíndricas.

- | | |
|------------------------|---------------------------------|
| 7. $(0, 5, 1)$ | 8. $(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, 4)$ |
| 9. $(2, -2, -4)$ | 10. $(3, -3, 7)$ |
| 11. $(1, \sqrt{3}, 4)$ | 12. $(2\sqrt{3}, -2, 6)$ |

Convertir rectangulares a cilíndricas En los ejercicios 13-20, encuentre una ecuación en coordenadas cilíndricas de la ecuación dada en coordenadas rectangulares.

- | | |
|----------------------------|--------------------------------|
| 13. $z = 4$ | 14. $x = 9$ |
| 15. $x^2 + y^2 + z^2 = 17$ | 16. $z = x^2 + y^2 - 11$ |
| 17. $y = x^2$ | 18. $x^2 + y^2 = 8x$ |
| 19. $y^2 = 10 - z^2$ | 20. $x^2 + y^2 + z^2 - 3z = 0$ |

Convertir cilíndricas a rectangulares En los ejercicios 21-28, encuentre una ecuación en coordenadas rectangulares de la ecuación dada en coordenadas cilíndricas y dibuje su gráfica.

- | | |
|------------------------------|-----------------------------|
| 21. $r = 3$ | 22. $z = 2$ |
| 23. $\theta = \frac{\pi}{6}$ | 24. $r = \frac{1}{2}z$ |
| 25. $r^2 + z^2 = 5$ | 26. $z = r^2 \cos^2 \theta$ |
| 27. $r = 2 \sin \theta$ | 28. $r = 2 \cos \theta$ |

Convertir rectangulares a esféricas En los ejercicios 29-34, convierta las coordenadas rectangulares del punto en coordenadas esféricas.

- | | |
|--------------------------------|-------------------------|
| 29. $(4, 0, 0)$ | 30. $(-4, 0, 0)$ |
| 31. $(-2, 2\sqrt{3}, 4)$ | 32. $(2, 2, 4\sqrt{2})$ |
| 33. $(\sqrt{3}, 1, 2\sqrt{3})$ | 34. $(-1, 2, 1)$ |

Convertir esféricas a rectangulares En los ejercicios 35-40, convierta las coordenadas esféricas del punto en coordenadas rectangulares.

- | | |
|---|--|
| 35. $\left(4, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$ | 36. $\left(12, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{9}\right)$ |
| 37. $\left(12, -\frac{\pi}{4}, 0\right)$ | 38. $\left(9, \frac{\pi}{4}, \pi\right)$ |
| 39. $\left(5, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$ | 40. $\left(6, \pi, \frac{\pi}{2}\right)$ |

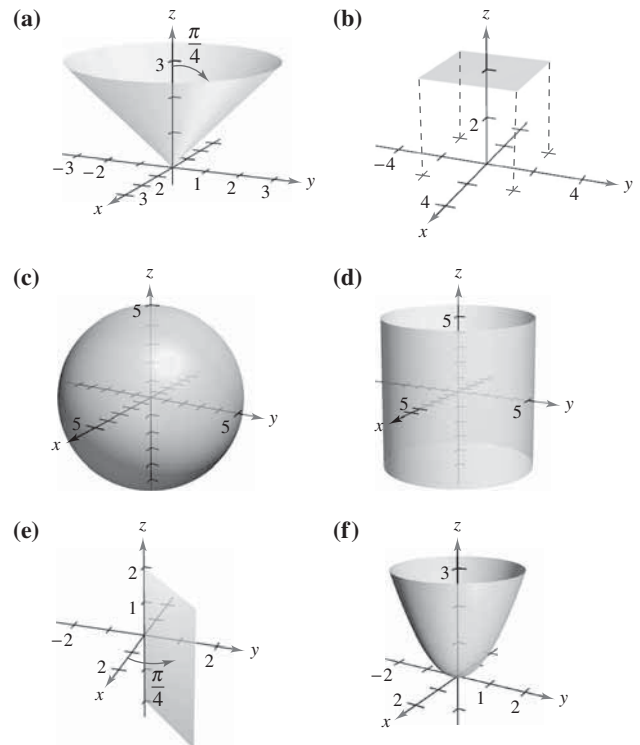
Convertir rectangulares a esféricas En los ejercicios 41-48, encuentre una ecuación en coordenadas esféricas de la ecuación dada en coordenadas rectangulares.

- | | |
|----------------------------|--------------------------------|
| 41. $y = 2$ | 42. $z = 6$ |
| 43. $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ | 44. $x^2 + y^2 - 3z^2 = 0$ |
| 45. $x^2 + y^2 = 16$ | 46. $x = 13$ |
| 47. $x^2 + y^2 = 2z^2$ | 48. $x^2 + y^2 + z^2 - 9z = 0$ |

Convertir esféricas a rectangulares En los ejercicios 49-56, encuentre una ecuación en coordenadas rectangulares de la ecuación dada en coordenadas esféricas y dibuje su gráfica.

- | | |
|----------------------------|--------------------------------------|
| 49. $\rho = 5$ | 50. $\theta = \frac{3\pi}{4}$ |
| 51. $\phi = \frac{\pi}{6}$ | 52. $\phi = \frac{\pi}{2}$ |
| 53. $\rho = 4 \cos \phi$ | 54. $\rho = 2 \sec \phi$ |
| 55. $\rho = \csc \phi$ | 56. $\rho = 4 \csc \phi \sec \theta$ |

Correspondencia En los ejercicios 57-62, relacione la ecuación (dada en términos de coordenadas cilíndricas o esféricas) con su gráfica. [Las gráficas se marcan (a), (b), (c), (d), (e) y (f).]



- | | |
|----------------|------------------------------|
| 57. $r = 5$ | 58. $\theta = \frac{\pi}{4}$ |
| 59. $\rho = 5$ | 60. $\phi = \frac{\pi}{4}$ |
| 61. $r^2 = z$ | 62. $\rho = 4 \sec \phi$ |

Convertir cilíndricas a esféricas En los ejercicios 63-70, convierta las coordenadas cilíndricas del punto en coordenadas esféricas.

63. $(4, \frac{\pi}{4}, 0)$ 64. $(3, -\frac{\pi}{4}, 0)$
 65. $(4, \frac{\pi}{2}, 4)$ 66. $(2, \frac{2\pi}{3}, -2)$
 67. $(4, -\frac{\pi}{6}, 6)$ 68. $(-4, \frac{\pi}{3}, 4)$
 69. $(12, \pi, 5)$ 70. $(4, \frac{\pi}{2}, 3)$

Convertir esféricas a cilíndricas En los ejercicios 71-78, convierta las coordenadas esféricas del punto en coordenadas cilíndricas.

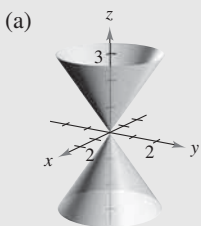
71. $(10, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$ 72. $(4, \frac{\pi}{18}, \frac{\pi}{2})$
 73. $(36, \pi, \frac{\pi}{2})$ 74. $(18, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$
 75. $(6, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$ 76. $(5, -\frac{5\pi}{6}, \pi)$
 77. $(8, \frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$ 78. $(7, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

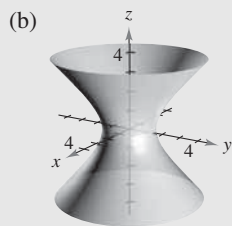
79. **Convertir coordenadas rectangulares a cilíndricas** Dé las ecuaciones para la conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas y viceversa.
 80. **Coordenadas esféricas** Explique por qué en las coordenadas esféricas la gráfica de $\theta = c$ es un semiplano y no un plano entero.
 81. **Coordenadas rectangulares y esféricas** Dé las ecuaciones para la conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas y viceversa.



82. ¿CÓMO LO VE? Identifique la gráfica de la superficie con su ecuación rectangular. Después halle una ecuación en coordenadas cilíndricas para la ecuación dada en coordenadas rectangulares.



(i) $x^2 + y^2 = \frac{4}{9}z^2$



(ii) $x^2 + y^2 - z^2 = 2$

Convertir una ecuación rectangular En los ejercicios 83-90, convierta la ecuación rectangular a una ecuación (a) en coordenadas cilíndricas y (b) en coordenadas esféricas.

83. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ 84. $4(x^2 + y^2) = z^2$
 85. $x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0$ 86. $x^2 + y^2 = z$
 87. $x^2 + y^2 = 4y$ 88. $x^2 + y^2 = 3z$
 89. $x^2 - y^2 = 9$ 90. $y = 4$

Trazar un sólido En los ejercicios 91-94, dibuje el sólido que tiene la descripción dada en coordenadas cilíndricas.

91. $0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq r \leq 2, 0 \leq z \leq 4$
 92. $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq r \leq 3, 0 \leq z \leq r \cos \theta$
 93. $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq a, r \leq z \leq a$
 94. $0 \leq \theta \leq 2\pi, 2 \leq r \leq 4, z^2 \leq -r^2 + 6r - 8$

Trazar un sólido En los ejercicios 95-98, dibuje el sólido que tiene la descripción dada en coordenadas esféricas.

95. $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi/6, 0 \leq \rho \leq a \sec \phi$
 96. $0 \leq \theta \leq 2\pi, \pi/4 \leq \phi \leq \pi/2, 0 \leq \rho \leq 1$
 97. $0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq \phi \leq \pi/2, 0 \leq \rho \leq 2$
 98. $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq \pi/2, 1 \leq \rho \leq 3$

Piénselo En los ejercicios 99-104, encuentre las desigualdades que describen al sólido y especifique el sistema de coordenadas utilizado. Posicione al sólido en el sistema de coordenadas en el que las desigualdades sean tan sencillas como sea posible.

99. Un cubo con cada arista de 10 centímetros de largo.
 100. Una capa cilíndrica de 8 metros de longitud, 0.75 metros de diámetro interior y un diámetro exterior de 1.25 metros.
 101. Una capa esférica con radios interior y exterior de 4 pulgadas y 6 pulgadas, respectivamente.
 102. El sólido que queda después de perforar un orificio de 1 pulgada de diámetro a través del centro de una esfera de 6 pulgadas de diámetro.
 103. El sólido dentro tanto de $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ como de $(x - \frac{3}{2})^2 + y^2 = \frac{9}{4}$.
 104. El sólido entre las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, y dentro del cono $z^2 = x^2 + y^2$.

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 105-108, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que pruebe que es falso.

105. En coordenadas cilíndricas, la ecuación $r = z$ es un cilindro.
 106. Las ecuaciones $\rho = 2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ representan la misma superficie.
 107. Las coordenadas cilíndricas de un punto (x, y, z) son únicas.
 108. Las coordenadas esféricas de un punto (x, y, z) son únicas.
 109. **Intersección de superficies** Identifique la curva de intersección de las superficies (en coordenadas cilíndricas) $z = \sin \theta$ y $r = 1$.
 110. **Intersección de superficies** Identifique la curva de intersección de las superficies (en coordenadas esféricas) $\rho = 2 \sec \phi$ y $\rho = 4$.

5.8 Integrales triples en coordenadas cilíndricas y esféricas

- Expresar y evaluar una integral triple en coordenadas cilíndricas.
- Expresar y evaluar una integral triple en coordenadas esféricas.

Integrales triples en coordenadas cilíndricas

Muchas regiones sólidas comunes como esferas, elipsoides, conos y paraboloides pueden dar lugar a integrales triples difíciles de calcular en coordenadas rectangulares. De hecho, fue precisamente esta dificultad la que llevó a la introducción de sistemas de coordenadas no rectangulares. En esta sección se aprenderá a usar coordenadas *cilíndricas* y *esféricas* para evaluar integrales triples.

Recuerde que en la sección anterior se vio que las ecuaciones rectangulares de conversión a coordenadas cilíndricas son

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \\y &= r \operatorname{sen} \theta \\z &= z.\end{aligned}$$

Una manera fácil de recordar estas ecuaciones es observar que las ecuaciones para obtener x y y son iguales que en el caso de coordenadas polares y que z no cambia.

En este sistema de coordenadas, la región sólida más simple es un bloque cilíndrico determinado por

$$\begin{aligned}r_1 &\leq r \leq r_2 \\ \theta_1 &\leq \theta \leq \theta_2\end{aligned}$$

y

$$z_1 \leq z \leq z_2$$

como se muestra en la figura 5.75.

Para expresar una integral triple por medio de coordenadas cilíndricas, suponga que Q es una región sólida cuya proyección R sobre el plano xy puede describirse en coordenadas polares. Es decir,

$$Q = \{(x, y, z): (x, y) \text{ está en } R, \quad h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\}$$

y

$$R = \{(r, \theta): \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \quad g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta)\}.$$

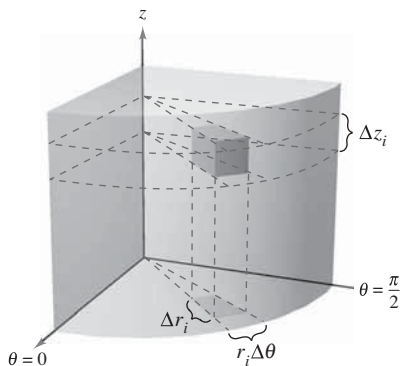
Si f es una función continua sobre el sólido Q , puede expresar la integral triple de f sobre Q como

$$\iiint_Q f(x, y, z) \, dV = \iint_R \left[\int_{h_1(x, y)}^{h_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right] dA$$

donde la integral doble sobre R se evalúa en coordenadas polares. Es decir, R es una región plana que es r -simple o θ -simple. Si R es r -simple, la forma iterada de la integral triple en forma cilíndrica es

$$\iiint_Q f(x, y, z) \, dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{h_1(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)}^{h_2(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta)} f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta, z) r \, dz \, dr \, d\theta.$$

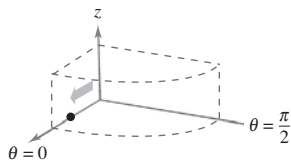
Este es solo uno de los seis posibles órdenes de integración. Los otros cinco son $dz \, d\theta \, dr$, $dr \, dz \, d\theta$, $dr \, d\theta \, dz$, $d\theta \, dz \, dr$ y $d\theta \, dr \, dz$.



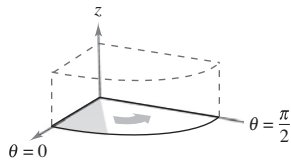
Volumen del bloque cilíndrico:

$$\Delta V_i = r_i \Delta r_i \Delta \theta_i \Delta z_i$$

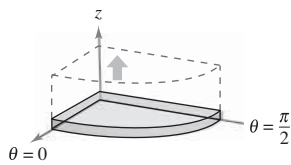
Figura 5.75



Integre respecto a r .



Integre respecto a θ .



Integre respecto a z .

Figura 5.76

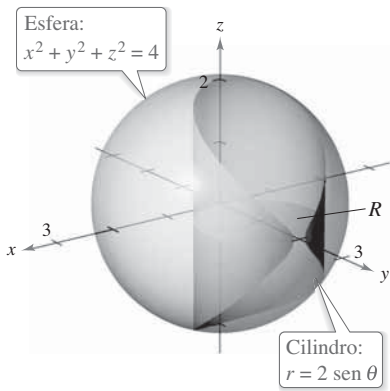


Figura 5.77

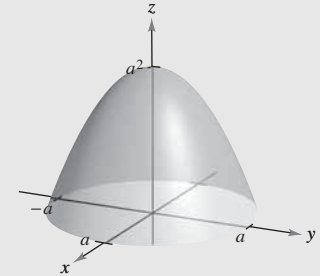
Para visualizar un orden de integración determinado ayuda contemplar la integral iterada en términos de tres movimientos de barrido, cada uno de los cuales agrega una dimensión al sólido. Por ejemplo, en el orden $dr d\theta dz$ la primera integración ocurre en la dirección r , aquí un punto barre (recorre) un rayo. Después, a medida que aumenta, la recta barre (recorre) un sector. Por último, a medida que z aumenta, el sector barre (recorre) una cuña sólida, como se muestra en la figura 5.76.

Exploración

Volumen de un sector paraboloides En las exploraciones de las páginas 263, 282 y 294, se le pidió resumir las formas conocidas para hallar el volumen del sólido acotado por el paraboloides

$$z = a^2 - x^2 - y^2, \quad a > 0$$

y el plano xy . Ahora ya conoce un método más. Utilícelo para hallar el volumen del sólido. Compare los diferentes métodos. ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de cada uno?



EJEMPLO 1

Hallar el volumen empleando coordenadas cilíndricas

Encuentre el volumen de la región sólida Q cortada en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ por el cilindro $r = 2 \text{ sen } \theta$, como se muestra en la figura 5.77.

Solución Como $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + z^2 = 4$, los límites de z son

$$-\sqrt{4 - r^2} \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}.$$

Sea R la proyección circular del sólido sobre el plano $r\theta$. Entonces los límites de R son

$$0 \leq r \leq 2 \text{ sen } \theta \quad \text{y} \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Por tanto, el volumen de Q es

$$\begin{aligned} V &= \int_0^\pi \int_0^{2 \text{ sen } \theta} \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \text{ sen } \theta} \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \text{ sen } \theta} 2r \sqrt{4 - r^2} \, dr \, d\theta \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{2}{3} (4 - r^2)^{3/2} \right]_0^{2 \text{ sen } \theta} d\theta \\ &= \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} (8 - 8 \cos^3 \theta) \, d\theta \\ &= \frac{32}{3} \int_0^{\pi/2} [1 - (\cos \theta)(1 - \text{sen}^2 \theta)] \, d\theta \\ &= \frac{32}{3} \left[\theta - \text{sen } \theta + \frac{\text{sen}^3 \theta}{3} \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{16}{9} (3\pi - 4) \\ &\approx 9.644. \end{aligned}$$

EJEMPLO 2

Hallar la masa empleando coordenadas cilíndricas

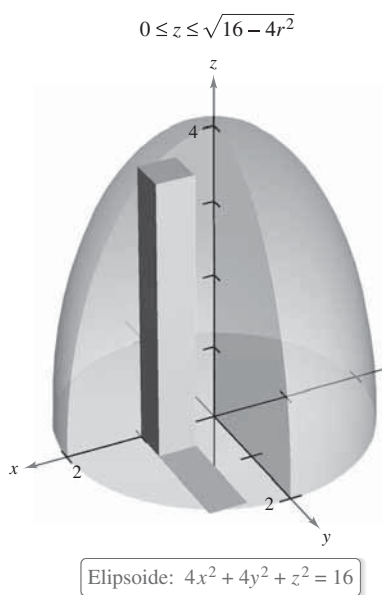


Figura 5.78

Encuentre la masa de la porción del elipsoide Q dado por $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$, situada sobre el plano xy . La densidad en un punto del sólido es proporcional a la distancia entre el punto y el plano xy .

Solución La función de densidad es $\rho(r, \theta, z) = kz$. Los límites de z son

$$0 \leq z \leq \sqrt{16 - 4x^2 - 4y^2} = \sqrt{16 - 4r^2}$$

donde $0 \leq r \leq 2$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$, como se muestra en la figura 5.78. La masa del sólido es

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{16-4r^2}} k z r \, dz \, dr \, d\theta \\ &= \frac{k}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^2 z^2 r \Big|_0^{\sqrt{16-4r^2}} \, dr \, d\theta \\ &= \frac{k}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^2 (16r - 4r^3) \, dr \, d\theta \\ &= \frac{k}{2} \int_0^{2\pi} \left[8r^2 - r^4 \right]_0^2 \, d\theta \\ &= 8k \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 16\pi k. \end{aligned}$$

La integración en coordenadas cilíndricas es útil cuando en el integrando aparecen factores $x^2 + y^2$ con la expresión como se ilustra en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3

Hallar el momento de inercia

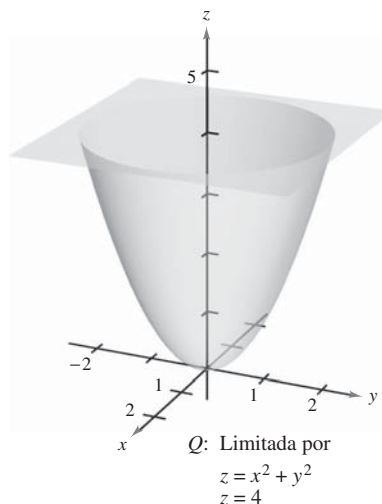


Figura 5.79

Encuentre el momento de inercia con respecto al eje de simetría del sólido Q acotado por el paraboloides $z = x^2 + y^2$ y el plano como se muestra en la figura 5.79. La densidad en cada punto es proporcional a la distancia entre el punto y el eje z .

Solución Como el eje z es el eje de simetría, y $\rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$, se deduce que

$$I_z = \iiint_Q k(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} \, dV.$$

En coordenadas cilíndricas, $0 \leq r \leq \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z}$. Por tanto, tiene

$$\begin{aligned} I_z &= k \int_0^4 \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} r^2(r)r \, dr \, d\theta \, dz \\ &= k \int_0^4 \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^{\sqrt{z}} \, d\theta \, dz \\ &= k \int_0^4 \int_0^{2\pi} \frac{z^{5/2}}{5} \, d\theta \, dz \\ &= \frac{k}{5} \int_0^4 z^{5/2} (2\pi) \, dz \\ &= \frac{2\pi k}{5} \left[\frac{2}{7} z^{7/2} \right]_0^4 \\ &= \frac{512k\pi}{35}. \end{aligned}$$

Integrales triples en coordenadas esféricas

Las integrales triples que involucran esferas o conos son a menudo más fáciles de calcular mediante la conversión a coordenadas esféricas. Recuerde que en la sección anterior vio que las ecuaciones rectangulares para conversión a coordenadas esféricas son

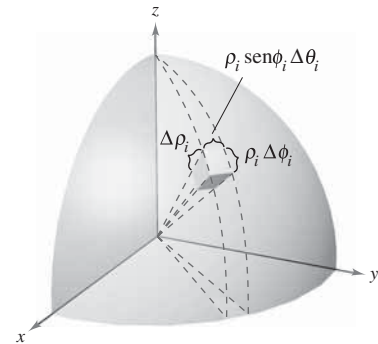
$$\begin{aligned} x &= \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta \\ y &= \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \\ z &= \rho \cos \phi. \end{aligned}$$

En este sistema de coordenadas, la región más simple es un bloque esférico determinado por

$$\{(\rho, \theta, \phi): \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2\}$$

donde $\rho_1 \geq 0$, $\theta_2 - \theta_1 \leq 2\pi$ y $0 \leq \phi_1 \leq \phi_2 \leq \pi$, como se muestra en la figura 5.80. Si (ρ, θ, ϕ) es un punto en el interior de uno de estos bloques, entonces el volumen del bloque puede ser aproximado por $\Delta V \approx \rho^2 \operatorname{sen} \phi \Delta \rho \Delta \phi \Delta \theta$. (Vea el ejercicio 18 en los ejercicios de solución de problemas de esta unidad.)

Utilizando el proceso habitual que comprende una partición interior, una suma y un límite, puede desarrollar la versión siguiente de una integral triple en coordenadas esféricas para una función continua f en la región sólida Q . Esta fórmula puede modificarse para emplear diferentes órdenes de integración y se puede generalizar a regiones con límites variables.



Bloque esférico: $\Delta V_i \approx \rho_i^2 \operatorname{sen} \phi_i \Delta \rho_i \Delta \phi_i \Delta \theta_i$
Figura 5.80

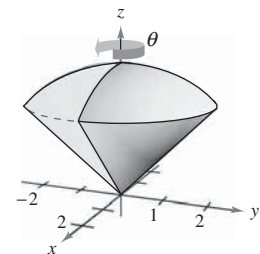
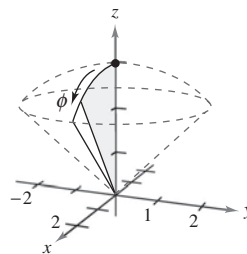
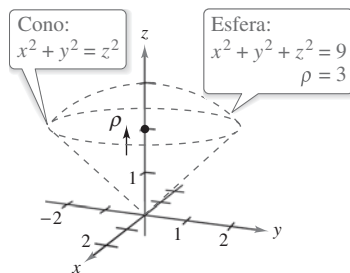
.....►
COMENTARIO La letra griega utilizada en coordenadas esféricas no está relacionada con la densidad. Más bien, es el análogo tridimensional de la utilizada en coordenadas polares. Para los problemas que involucran coordenadas esféricas y una densidad de función, este texto utiliza un símbolo diferente para denotar la densidad.

$$\iiint_Q f(x, y, z) dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(\rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \operatorname{sen} \phi d\rho d\phi d\theta$$

Al igual que las integrales triples en coordenadas cilíndricas, las integrales triples en coordenadas esféricas se evalúan empleando integrales iteradas. Como sucede con las coordenadas cilíndricas, puede visualizar un orden determinado de integración contemplando la integral iterada en términos de tres movimientos de barrido, cada uno de los cuales agrega una dimensión al sólido. Por ejemplo, la integral iterada

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^3 \rho^2 \operatorname{sen} \phi d\rho d\phi d\theta$$

(que se usó en el ejemplo 4) se ilustra en la figura 5.81.



ρ varía desde 0 hasta 3 mientras ϕ y θ se mantienen constantes

ϕ varía de 0 a $\pi/4$ mientras θ se mantiene constante.

θ varía desde 0 hasta 2π .

Figura 5.81

EJEMPLO 4

Hallar un volumen en coordenadas esféricas

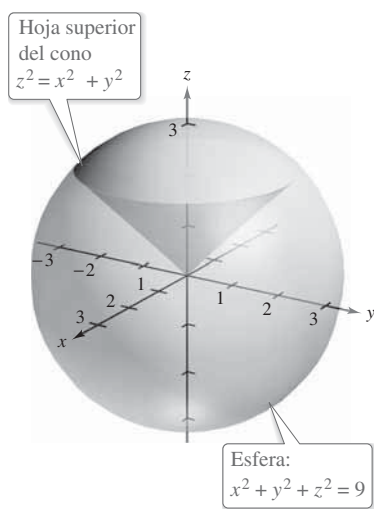


Figura 5.82

Encuentre el volumen de la región sólida Q limitada o acotada inferiormente por la hoja superior del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, como se muestra en la figura 5.82.

Solución En coordenadas esféricas, la ecuación de la esfera es

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad \rho = 3.$$

Además, la esfera y el cono se cortan cuando

$$(x^2 + y^2) + z^2 = (z^2) + z^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

y como $z = \rho \cos \phi$, tiene que

$$\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \cos \phi \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{\pi}{4}.$$

Por consiguiente, puede utilizar el orden de integración $d\rho \, d\phi \, d\theta$, donde $0 \leq \rho \leq 3$, $0 \leq \phi \leq \pi/4$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$. El volumen es

$$\begin{aligned} \iiint_Q dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^3 \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} 9 \sin \phi \, d\phi \, d\theta \\ &= 9 \int_0^{2\pi} [-\cos \phi]_0^{\pi/4} \, d\theta \\ &= 9 \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \, d\theta \\ &= 9\pi(2 - \sqrt{2}) \\ &\approx 16.563. \end{aligned}$$

EJEMPLO 5

Hallar el centro de masa de una región sólida

•••► Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Encuentre el centro de masa de la región sólida Q de densidad uniforme, acotada inferiormente por la hoja superior del cono $z^2 = x^2 + y^2$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Solución Como la densidad es uniforme, puede considerar que la densidad en el punto (x, y, z) es k . Por la simetría, el centro de masa se encuentra en el eje z , y solo necesita calcular $\bar{z} = M_{xy}/m$, donde $m = kV = 9k\pi(2 - \sqrt{2})$ por el ejemplo 4. Como $z = \rho \cos \phi$ se deduce que

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_Q kz \, dV = k \int_0^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} (\rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta \, d\rho \\ &= k \int_0^3 \int_0^{2\pi} \left[\rho^3 \frac{\sin^2 \phi}{2} \right]_0^{\pi/4} \, d\theta \, d\rho \\ &= \frac{k}{4} \int_0^3 \int_0^{2\pi} \rho^3 \, d\theta \, d\rho = \frac{k\pi}{2} \int_0^3 \rho^3 \, d\rho = \frac{81k\pi}{8}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{81k\pi/8}{9k\pi(2 - \sqrt{2})} = \frac{9(2 + \sqrt{2})}{16} \approx 1.920$$

y el centro de masa es aproximadamente $(0, 0, 1.92)$.

5.8 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Evaluar una integral iterada En los ejercicios 1-6, evalúe la integral iterada.


$$1. \int_{-1}^5 \int_0^{\pi/2} \int_0^3 r \cos \theta \, dr \, d\theta \, dz \quad 2. \int_0^{\pi/4} \int_0^6 \int_0^{6-r} rz \, dz \, dr \, d\theta$$

$$3. \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \cos^2 \theta} \int_0^{4-r^2} r \sin \theta \, dz \, dr \, d\theta$$

$$4. \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi} \int_0^2 e^{-\rho^3} \rho^2 \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

$$5. \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos \phi} \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$6. \int_0^{\pi/4} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos \theta} \rho^2 \sin \phi \cos \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

 **Aproximar una integral iterada usando tecnología** En los ejercicios 7 y 8, utilice un sistema algebraico por computadora para evaluar la integral iterada.

$$7. \int_0^4 \int_0^z \int_0^{\pi/2} re^r \, d\theta \, dr \, dz$$

$$8. \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi} \int_0^{\sin \theta} (2 \cos \phi) \rho^2 \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

Volumen En los ejercicios 9-12, dibuje la región sólida cuyo volumen está dado por la integral iterada, y evalúe la integral iterada.

$$9. \int_0^{\pi/2} \int_0^3 \int_0^3 e^{-r^2} r \, dz \, dr \, d\theta \quad 10. \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{5}} \int_0^{5-r^2} r \, dz \, dr \, d\theta$$

$$11. \int_0^{2\pi} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_0^4 \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

$$12. \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_2^5 \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta$$

Convertir coordenadas En los ejercicios 13-16, convierta la integral de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas y a coordenadas esféricas, y evalúe la integral iterada más sencilla.

$$13. \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^4 x \, dz \, dy \, dx$$

$$14. \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2} \, dz \, dy \, dx$$

$$15. \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_a^{a+\sqrt{a^2-x^2-y^2}} x \, dz \, dy \, dx$$

$$16. \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \, dz \, dy \, dx$$

Volumen En los ejercicios 17-22, utilice coordenadas cilíndricas para hallar el volumen del sólido.

$$17. \text{Sólido interior a } x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ \text{y } (x - a/2)^2 + y^2 = (a/2)^2$$

$$18. \text{Sólido interior a } x^2 + y^2 + z^2 = 16 \text{ y exterior a } z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$19. \text{Sólido limitado arriba por } z = 2x \text{ y abajo por } z = 2x^2 + 2y^2.$$

$$20. \text{Sólido limitado arriba por } z = 2 - x^2 - y^2 \text{ y abajo por } z = x^2 - y^2.$$

$$21. \text{Sólido limitado por las gráficas de la esfera } r^2 + z^2 = a^2 \text{ y del cilindro } r = a \cos \theta.$$

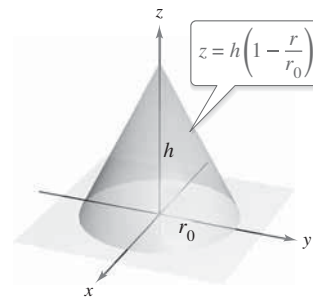
$$22. \text{Sólido interior a la esfera } x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ y sobre la hoja superior del cono } z^2 = x^2 + y^2.$$

Masa En los ejercicios 23 y 24, utilice coordenadas cilíndricas para hallar la masa del sólido Q de densidad ρ .

$$23. Q = \{(x, y, z): 0 \leq z \leq 9 - x - 2y, x^2 + y^2 \leq 4\} \\ \rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$$


$$24. Q = \{(x, y, z): 0 \leq z \leq 12e^{-(x^2+y^2)}, x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\} \\ \rho(x, y, z) = k$$


Usar coordenadas cilíndricas En los ejercicios 25-30, utilice coordenadas cilíndricas para hallar la característica indicada del cono que se muestra en la figura.



$$25. \text{Encuentre el volumen del cono.}$$

$$26. \text{Determine el centroide del cono.}$$

 27. Encuentre el centro de masa del cono suponiendo que su densidad en cualquier punto es proporcional a la distancia entre el punto y el eje del cono. Utilice un sistema algebraico por computadora para evaluar la integral triple.

 28. Encuentre el centro de masa del cono suponiendo que su densidad en cualquier punto es proporcional a la distancia entre el punto y la base. Utilice un sistema algebraico por computadora para evaluar la integral triple.

$$29. \text{Suponga que el cono tiene densidad uniforme y demuestre que el momento de inercia respecto al eje } z \text{ es}$$

$$I_z = \frac{3}{10}mr_0^2.$$

$$30. \text{Suponga que la densidad del cono es } \rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2} \text{ y encuentre el momento de inercia respecto al eje } z.$$

Momento de inercia En los ejercicios 31 y 32, use coordenadas cilíndricas para verificar la fórmula dada para el momento de inercia del sólido de densidad uniforme.

$$31. \text{Capa cilíndrica: } I_z = \frac{1}{2}m(a^2 + b^2)$$

$$0 < a \leq r \leq b, \quad 0 \leq z \leq h$$

- 32.** Cilindro circular recto: $I_z = \frac{3}{2}ma^2$
 $r = 2a \text{ sen } \theta, \quad 0 \leq z \leq h$

Utilice un sistema algebraico por computadora para calcular la integral triple.

Volumen En los ejercicios 33-36, utilice coordenadas esféricas para calcular el volumen del sólido.

- 33.** Sólido interior $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, exterior $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, y arriba del plano xy .
- 34.** Sólido limitado arriba por $x^2 + y^2 + z^2 = z$ y abajo por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- 35.** El toro dado por $\rho = 4 \text{ sen } \phi$. (Utilice un sistema algebraico por computadora para evaluar la integral triple.)
- 36.** El sólido comprendido entre las esferas
 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = b^2, b > a$,
 e interior al cono $z^2 = x^2 + y^2$

Masa En los ejercicios 37 y 38, utilice coordenadas esféricas para hallar la masa de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ con la densidad dada.

- 37.** La densidad en cualquier punto es proporcional a la distancia entre el punto y el origen.
- 38.** La densidad en cualquier punto es proporcional a la distancia del punto al eje z .

Centro de masa En los ejercicios 39 y 40, utilice coordenadas esféricas para hallar el centro de masa del sólido de densidad uniforme.

- 39.** Sólido hemisférico de radio r .
- 40.** Sólido comprendido entre dos hemisferios concéntricos de radios r y R donde $r < R$.

Momento de inercia En los ejercicios 41 y 42, utilice coordenadas esféricas para hallar el momento de inercia con respecto al eje z del sólido de densidad uniforme.

- 41.** Sólido acotado por el hemisferio $\rho = \cos \phi, \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$, y el cono $\phi = \frac{\pi}{4}$.
- 42.** Sólido comprendido entre dos hemisferios concéntricos de radios r y R donde $r < R$.

DESARROLLO DE CONCEPTOS

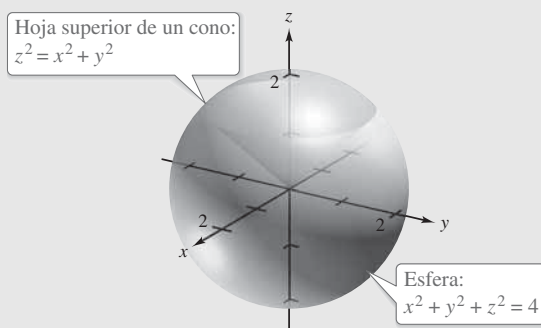
- 43. Convertir coordenadas** Dé las ecuaciones de conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas y viceversa.
- 44. Convertir coordenadas** Dé las ecuaciones de conversión de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas y viceversa.
- 45. Forma cilíndrica** Dé la forma iterada de la integral triple $\iiint_Q f(x, y, z) dV$ en forma cilíndrica.
- 46. Forma esférica** Dé la forma iterada de la integral triple $\iiint_Q f(x, y, z) dV$ en forma esférica.

DESARROLLO DE CONCEPTOS (continuación)

- 47. Utilizar coordenadas** Describa la superficie cuya ecuación es una coordenada igual a una constante en cada una de las coordenadas en (a) el sistema de coordenadas cilíndricas y (b) el sistema de coordenadas esféricas.



¿CÓMO LO VE? El sólido está acotado por debajo por la hoja superior de un cono y por arriba por una esfera (vea la figura). ¿Qué sería más fácil de usar para encontrar el volumen del sólido, coordenadas cilíndricas o esféricas? Explique.



DESAFÍOS DEL EXAMEN PUTNAM

- 49.** Hallar el volumen de la región de puntos (x, y, z) tal que $(x^2 + y^2 + z^2 + 8)^2 \leq 36(x^2 + y^2)$.

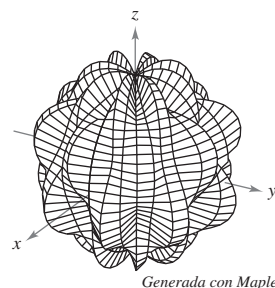
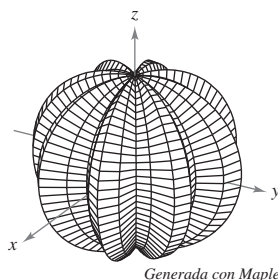
Este problema fue preparado por el Committee on the Putnam Prize Competition. © The Mathematical Association of America. Todos los derechos reservados.

PROYECTO DE TRABAJO

Esferas deformadas

En los incisos (a) y (b), encuentre el volumen de las esferas deformadas. Estos sólidos se usan como modelos de tumores.

- (a) Esfera arrugada $\rho = 1 + 0.2 \text{ sen } 8\theta \text{ sen } \phi$
 $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$
- (b) Esfera deformada $\rho = 1 + 0.2 \text{ sen } 8\theta \text{ sen } 4\phi$
 $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$



PARA INFORMACIÓN ADICIONAL Para más información sobre estos tipos de esferas, consulte el artículo "Heat Therapy for Tumors", de Leah Edelstein-Keshet, en *The UMAP Journal*.

Ejercicios de repaso

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.**Evaluar una integral** En los ejercicios 1 y 2, evalúe la integral.

$$1. \int_0^{2x} xy^3 dy \qquad 2. \int_y^{2y} (x^2 + y^2) dx$$

Evaluar una integral iterada En los ejercicios 3-6, evalúe la integral iterada

$$3. \int_0^1 \int_0^{1+x} (3x + 2y) dy dx$$

$$4. \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + 2y) dy dx$$

$$5. \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} 4x dy dx$$

$$6. \int_0^1 \int_0^{2y} (9 + 3x^2 + 3y^2) dx dy$$

Encontrar el área de una región En los ejercicios 7-10, utilice una integral iterada para hallar el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones.

$$7. x + 3y = 3, x = 0, y = 0$$

$$8. y = 6x - x^2, y = x^2 - 2x$$

$$9. y = x, y = 2x + 2, x = 0, x = 4$$

$$10. x = y^2 + 1, x = 0, y = 0, y = 2$$

Cambiar el orden de integración En los ejercicios 11-14, trace la región R cuya área está dada por la integral iterada. Después cambie el orden de integración y demuestre que con ambos órdenes se obtiene la misma área.

$$11. \int_2^4 \int_1^5 dx dy$$

$$12. \int_0^3 \int_0^x dy dx + \int_3^6 \int_0^{6-x} dy dx$$

$$13. \int_0^4 \int_{2x}^8 dy dx$$

$$14. \int_{-3}^3 \int_0^{9-y^2} dx dy$$

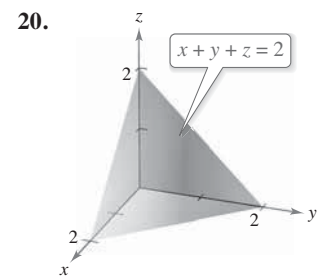
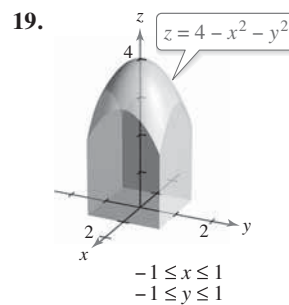
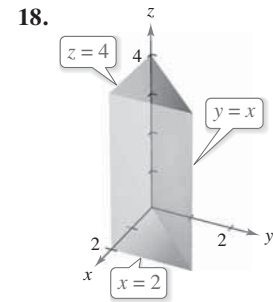
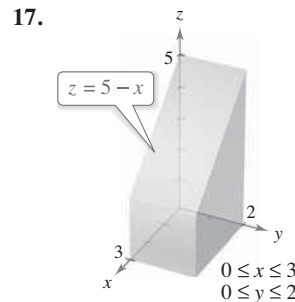
Evaluar una integral doble En los ejercicios 15 y 16, establezca las integrales para ambos órdenes de integración. Utilice el orden más conveniente para evaluar la integral sobre la región R .

$$15. \iint_R 4xy dA$$

R : rectángulo con vértices $(0, 0)$, $(0, 4)$, $(2, 4)$, $(2, 0)$

$$16. \iint_R 6x^2 dA$$

R : región acotada por $y = 0$, $y = \sqrt{x}$, $x = 1$

Encontrar un volumen En los ejercicios 17-20, use una integral doble para encontrar el volumen del sólido indicado.**Valor promedio** En los ejercicios 21 y 22, encuentre el valor promedio de $f(x, y)$ sobre la región plana R .

$$21. f(x) = 16 - x^2 - y^2$$

R : rectángulo con vértices $(2, 2)$, $(-2, 2)$, $(-2, -2)$, $(2, -2)$

$$22. f(x) = 2x^2 + y^2$$

R : cuadrado con vértices $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 3)$, $(0, 3)$

23. Temperatura promedio La temperatura en grados Celsius sobre la superficie de una placa metálica es

$$T(x, y) = 40 - 6x^2 - y^2$$

donde x y y están medidos en centímetros. Estime la temperatura promedio si x varía entre 0 y 3 centímetros, y y varía entre 0 y 5 centímetros.

24. Ganancia promedio La ganancia para la empresa P gracias al marketing de dos bebidas dietéticas es

$$P = 192x + 576y - x^2 - 5y^2 - 2xy - 5000$$

donde x y y representan el número de unidades de las dos bebidas dietéticas. Estime la ganancia promedio semanal si x varía entre 40 y 50 unidades y y varía entre 45 y 60 unidades.

Convertir a coordenadas polares En los ejercicios 25 y 26, evalúe la integral iterada convirtiendo a coordenadas polares.

$$25. \int_0^h \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2} dy dx$$

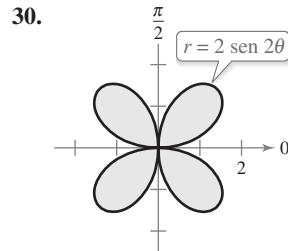
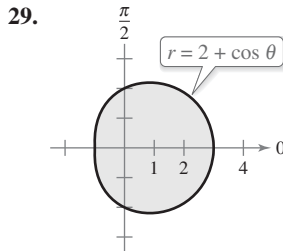
$$26. \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy$$

Volumen En los ejercicios 27 y 28, utilice una integral doble en coordenadas polares para hallar el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones.

27. $z = xy^2, x^2 + y^2 = 9$, primer octante

28. $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}, z = 0, x^2 + y^2 = 16$


Área En los ejercicios 29 y 30, utilice una integral doble para encontrar el área de la región sombreada.



Área En los ejercicios 31 y 32, trace una gráfica de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones. Después utilice una integral doble para encontrar el área de la región.

31. Dentro de la cardioide $r = 2 + 2 \cos \theta$ y fuera del círculo $r = 3$.

32. Dentro de la cardioide $r = 3 \sin \theta$ y fuera del círculo $r = 1 + \sin \theta$.

 33. **Área y volumen** Considere la región R en el plano xy acotada por la gráfica de la ecuación

$$(x^2 + y^2)^2 = 9(x^2 - y^2).$$

(a) Convierta la ecuación a coordenadas polares. Utilice una herramienta de graficación para trazar la gráfica de la ecuación.

(b) Use una integral doble para encontrar el área de la región R .

(c) Utilice un sistema algebraico por computadora para determinar el volumen del sólido sobre la región R y bajo el hemisferio

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}.$$

34. **Convertir a coordenadas polares** Combine la suma de las dos integrales iteradas en una sola integral iterada convirtiendo a coordenadas polares. Evalúe la integral iterada resultante.

$$\int_0^{8/\sqrt{13}} \int_0^{3x/2} xy \, dy \, dx + \int_{8/\sqrt{13}}^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} xy \, dy \, dx$$

Determinar el centro de masa En los ejercicios 35-38, encuentre la masa y el centro de masa de la lámina acotada por las gráficas de las ecuaciones con la densidad dada. (*Sugerencia:* Algunas de las integrales son más simples en coordenadas polares.)

35. $y = x^3, y = 0, x = 2, \rho = kx$

36. $y = \frac{2}{x}, y = 0, x = 1, x = 2, \rho = ky$

37. $y = 2x, y = 2x^3, x \geq 0, y \geq 0, \rho = kxy$

38. $y = 6 - x, y = 0, x = 0, \rho = kx^2$

Determinar momentos de inercia y radios de giro En los ejercicios 39 y 40, determine I_x, I_y, I_0, \bar{x} , y \bar{y} para la lámina acotada por las gráficas de las ecuaciones

39. $y = 0, y = b, x = 0, x = a, \rho = kx$

40. $y = 4 - x^2, y = 0, x > 0, \rho = ky$

Hallar el área de una superficie En los ejercicios 41-44, encuentre el área de la superficie dada por $z = f(x, y)$ sobre la región R . (*Sugerencia:* Algunas de las integrales son más simples en coordenadas polares.)

41. $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$

$$R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 25\}$$

42. $f(x, y) = 8 + 4x - 5y$

$$R = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$$

43. $f(x, y) = 9 - y^2$

R : triángulo limitado por las gráficas de las ecuaciones $y = x$, $y = -x$ y $y = 3$.

44. $f(x, y) = 4 - x^2$

R : triángulo limitado por las gráficas de las ecuaciones $y = x$, $y = -x$ y $y = 2$.

45. **Diseño de construcción** Un nuevo auditorio es construido con un cimientado en forma de un cuarto de un círculo de 50 pies de radio. Así, se forma una región R limitada por la gráfica de

$$x^2 + y^2 = 50^2$$


con $x \geq 0$ y $y \geq 0$. Las siguientes ecuaciones son modelos para el piso y el techo.

$$\text{Piso: } z = \frac{x + y}{5}$$

$$\text{Techo: } z = 20 + \frac{xy}{100}$$

(a) Calcule el volumen del cuarto, el cual es necesario para determinar los requisitos de calor y enfriamiento.

(b) Encuentre el área de superficie del techo.

 46. **Área de una superficie** El techo del escenario de un teatro al aire libre en un parque se modela por

$$f(x, y) = 25 \left[1 + e^{-(x^2 + y^2)/1000} \cos^2 \left(\frac{x^2 + y^2}{1000} \right) \right]$$

donde el escenario es un semicírculo acotado por las gráficas de $y = \sqrt{50^2 - x^2}$ y $y = 0$.

(a) Utilice un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente la superficie.

(b) Utilice un sistema algebraico por computadora para aproximar la cantidad de pies cuadrados de techo requeridos para cubrir la superficie.

Evaluar una integral triple iterada En los ejercicios 47 a 50, evalúe la integral triple iterada.

47. $\int_0^4 \int_0^1 \int_0^2 (2x + y + 4z) \, dy \, dz \, dx$

48. $\int_0^2 \int_0^y \int_0^{xy} y \, dz \, dx \, dy$

49. $\int_0^a \int_0^b \int_0^c (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$

50. $\int_0^3 \int_{\pi/2}^{\pi} \int_2^5 z \operatorname{sen} x dy dx dz$

Aproximar una integral iterada usando tecnología En los ejercicios 51 y 52, utilice un sistema algebraico por computadora para aproximar la integral iterada.

51. $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2 + y^2) dz dy dx$

52. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} xyz dz dy dx$

Volumen En los ejercicios 53 y 54, use una integral triple para encontrar el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones.

53. $z = xy, z = 0, 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 4$

54. $z = 8 - x - y, z = 0, y = x, y = 3, x = 0$

Cambiar el orden de integración En los ejercicios 55 y 56, dibuje el sólido cuyo volumen está dado por la integral iterada y reescriba la integral usando el orden de integración indicado.

55. $\int_0^1 \int_0^y \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dz dx dy$

Reescriba utilizando el orden $dz dy dx$.

56. $\int_0^6 \int_0^{6-x} \int_0^{6-x-y} dz dy dx$

Reescriba utilizando el orden $dy dx dz$.

Masa y centro de masa En los ejercicios 57 y 58, encuentre la masa y las coordenadas indicadas del centro de masa de la región sólida Q de densidad ρ acotada por las gráficas de las ecuaciones.

57. Encuentre \bar{x} usando $\rho(x, y, z) = k$.

$Q: x + y + z = 10, x = 0, y = 0, z = 0$

58. Encuentre \bar{y} usando $\rho(x, y, z) = kx$.

$Q: z = 5 - y, z = 0, y = 0, x = 0, x = 5$

Evaluar una integral iterada En los ejercicios 59-62, evalúe la integral iterada.

59. $\int_0^3 \int_0^{\pi/3} \int_0^4 r \cos \theta dr d\theta dz$

60. $\int_0^{\pi/2} \int_0^3 \int_0^{4-z} z dr dz d\theta$

61. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^2 \rho^2 d\rho d\theta d\phi$

62. $\int_0^{\pi/4} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\cos \phi} \cos \theta d\rho d\phi d\theta$

Aproximar una integral iterada usando tecnología En los ejercicios 63 y 64, utilice un sistema algebraico por computadora para aproximar la integral iterada.

63. $\int_0^{\pi} \int_0^2 \int_0^3 \sqrt{z^2 + 4} dz dr d\theta$

64. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos \phi} \rho^2 \cos \theta d\rho d\theta d\phi$

65. Volumen Utilice coordenadas cilíndricas para encontrar el volumen del sólido acotado por $z = 8 - x^2 - y^2$ y debajo por $z = x^2 + y^2$.

66. Volumen Use coordenadas esféricas para encontrar el volumen del sólido acotado por $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ y debajo por $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Determinar un jacobiano En los ejercicios 67-70, encuentre el jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ para el cambio de variables indicado.

67. $x = u + 3v, y = 2u - 3v$

68. $x = u^2 + v^2, y = u^2 - v^2$

69. $x = u \operatorname{sen} \theta + v \cos \theta, y = u \cos \theta + v \operatorname{sen} \theta$

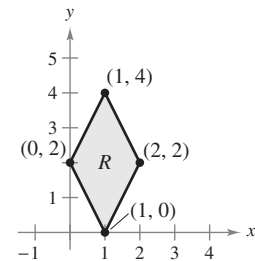
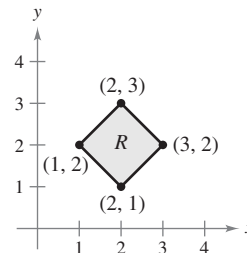
70. $x = uv, y = \frac{v}{u}$

Evaluar una integral doble usando un cambio de variables En los ejercicios 71-74, utilice el cambio de variables indicado para evaluar la integral doble.

71. $\int_R \int \ln(x + y) dA$

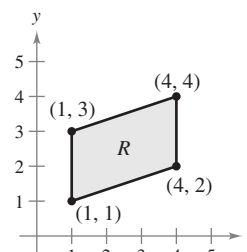
72. $\int_R \int 16xy dA$

$x = \frac{1}{2}(u + v), y = \frac{1}{2}(u - v)$ $x = \frac{1}{4}(u + v), y = \frac{1}{2}(v - u)$



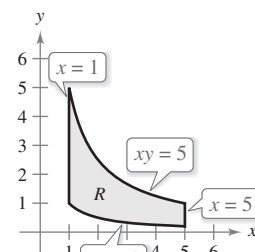
73. $\int_R \int (xy + x^2) dA$

$x = u, y = \frac{1}{3}(u - v)$



74. $\int_R \int \frac{x}{1 + x^2 y^2} dA$

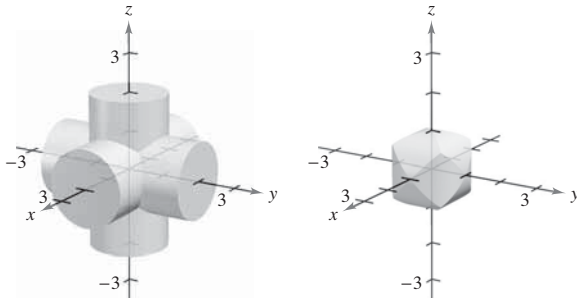
$x = u, y = \frac{v}{u}$



Solución de problemas

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

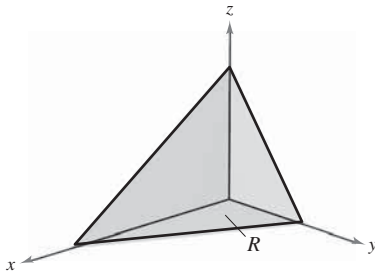
1. **Volumen** Encuentre el volumen del sólido de intersección de los tres cilindros $x^2 + z^2 = 1$, $y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 1$ (vea la figura).



2. **Área de una superficie** Sean a , b , c y d números reales positivos. El primer octante del plano $ax + by + cz = d$ se muestra en la figura. Demuestre que el área de la superficie de esta porción del plano es igual a

$$\frac{A(R)}{c} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

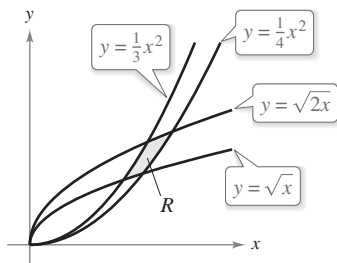
donde $A(R)$ es el área de la región triangular R en el plano xy , como se muestra en la figura.



3. **Usar un cambio de variables** La figura muestra la región R acotada por las curvas

$$y = \sqrt{x}, y = \sqrt{2x}, y = \frac{x^2}{3} \text{ y } y = \frac{x^2}{4}.$$

Use el cambio de variables $x = u^{1/3}v^{2/3}$ y $y = u^{2/3}v^{1/3}$ para encontrar el área de la región R .



4. **Demostración** Demuestre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \int_0^1 x^n y^n dx dy = 0$.

5. **Deducir una suma** Deduzca el famoso resultado de Euler que se mencionó en la sección 9.3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

completando cada uno de los pasos.

- (a) Demuestre que

$$\int \frac{dv}{2 - u^2 + v^2} = \frac{1}{\sqrt{2 - u^2}} \arctan \frac{v}{\sqrt{2 - u^2}} + C.$$

- (b) Demuestre que

$$I_1 = \int_0^{\sqrt{2}/2} \int_{-u}^u \frac{2}{2 - u^2 + v^2} dv du = \frac{\pi^2}{18}$$

Utilice la sustitución $u = \sqrt{2} \sin \theta$.

- (c) Demuestre que

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}} \int_{u-\sqrt{2}}^{-u+\sqrt{2}} \frac{2}{2 - u^2 + v^2} dv du \\ &= 4 \int_{\pi/6}^{\pi/2} \arctan \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} d\theta \end{aligned}$$

Use la sustitución $u = \sqrt{2} \sin \theta$.

- (d) Demuestre la identidad trigonométrica

$$\frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} = \tan\left(\frac{(\pi/2) - \theta}{2}\right).$$

- (e) Demuestre que

$$I_2 = \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}} \int_{u-\sqrt{2}}^{-u+\sqrt{2}} \frac{2}{2 - u^2 + v^2} dv du = \frac{\pi^2}{9}.$$

- (f) Utilice la fórmula para la suma de una serie geométrica infinita para comprobar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - xy} dx dy.$$

- (g) Use el cambio de variables

$$u = \frac{x+y}{\sqrt{2}} \quad y = \frac{y-x}{\sqrt{2}}$$

para demostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - xy} dx dy = I_1 + I_2 = \frac{\pi^2}{6}.$$

6. **Evaluar una integral doble** Evalúe la integral

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2} dx dy.$$

7. **Evaluar integrales dobles** Evalúe las integrales

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx dy \quad \text{y} \quad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy dx.$$

¿Son los mismos resultados? ¿Por qué sí o por qué no?

8. **Volumen** Demuestre que el volumen de un bloque esférico se puede aproximar por $\Delta V \approx \rho^2 \sin \phi \Delta \rho \Delta \phi \Delta \theta$.

Evaluar una integral En los ejercicios 9 y 10, evalúe la integral. (Sugerencia: Vea el ejercicio 65 en la sección 5.3.)

9. $\int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx$

10. $\int_0^1 \sqrt{\ln \frac{1}{x}} dx$

11. **Función de densidad conjunta** Considere la función

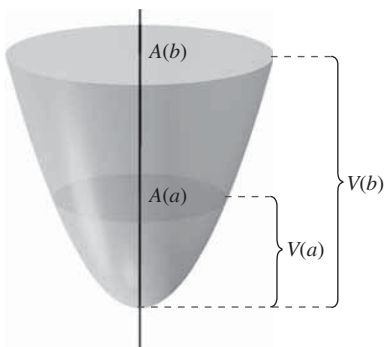
$$f(x, y) = \begin{cases} ke^{-(x+y)/a}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{demás} \end{cases}$$

Encuentre la relación entre las constantes positivas a y k tal que f es una función de densidad conjunta de las variables aleatorias continuas x y y .

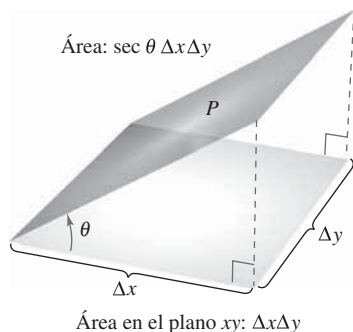
12. **Volumen** Encuentre el volumen del sólido generado al girar la región en el primer cuadrante limitado por $y = e^{-x^2}$ alrededor del eje y . Use este resultado para encontrar

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

13. **Volumen y área superficial** De 1963 a 1986, el volumen del lago Great Salt se triplicó, mientras que el área de su superficie superior se duplicó. Consulte el artículo "Relations between Surface Area and Volume in Lakes", de Daniel Cass y Gerald Wildenberg, en *The College Mathematics Journal*. Después, proporcione ejemplos de sólidos que tengan "niveles de agua" a y b tales que $V(b) = 3V(a)$ y $A(b) = 2A(a)$ (vea la figura), donde V es el volumen y A es el área.



14. **Demostración** El ángulo entre un plano P y el plano xy es θ , donde $0 \leq \theta \leq \pi/2$. La proyección de una región rectangular en P sobre el plano xy es un rectángulo en el que las longitudes de sus lados son Δx y Δy , como se muestra en la figura. Demuestre que el área de la región rectangular en P es $\sec \theta \Delta x \Delta y$.



15. **Área de una superficie** Utilice el resultado del ejercicio 14 para ordenar los planos en orden creciente de sus áreas de superficie, en una región fija R del plano xy . Explique el orden elegido sin hacer ningún cálculo.

- (a) $z_1 = 2 + x$
- (b) $z_2 = 5$
- (c) $z_3 = 10 - 5x + 9y$
- (d) $z_4 = 3 + x - 2y$

16. **Rociador** Considere un césped circular de 10 pies de radio, como se muestra en la figura. Suponga que un rociador distribuye agua de manera radial de acuerdo con la fórmula

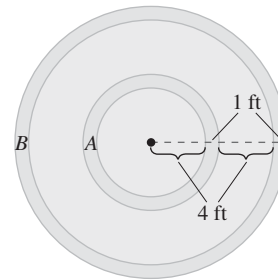
$$f(r) = \frac{r}{16} - \frac{r^2}{160}$$

(medido en pies cúbicos de agua por hora por pie cuadrado de césped), donde r es la distancia en pies al rociador. Encuentre la cantidad de agua que se distribuye en 1 hora en las dos regiones anulares siguientes.

$$A = \{(r, \theta): 4 \leq r \leq 5, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

$$B = \{(r, \theta): 9 \leq r \leq 10, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

¿Es uniforme la distribución del agua? Determine la cantidad de agua que recibe todo el césped en 1 hora.

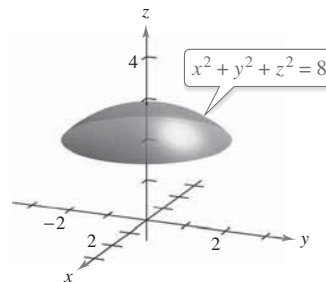


17. **Cambiar el orden de integración** Dibuje el sólido cuyo volumen está dado por la suma de las integrales iteradas

$$\int_0^6 \int_{z/2}^3 \int_{z/2}^y dx dy dz + \int_0^6 \int_3^{(12-z)/2} \int_{z/2}^{6-y} dx dy dz.$$

Después escriba el volumen como una sola integral iterada en el orden $dy dz dx$.

18. **Volumen** La figura muestra un sólido acotado por debajo con el plano $z = 2$ y por arriba con la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 8$.



- (a) Encuentre el volumen del sólido usando coordenadas cilíndricas.
- (b) Determine el volumen del sólido usando coordenadas esféricas.

Análisis vectorial

- 6.1 Campos vectoriales
- 6.2 Integrales de línea
- 6.3 Teoremas de integrales (Resumen*)

* El desarrollo completo del capítulo se encuentra disponible en línea en el apéndice F. Acceda a www.cengage.com e ingrese con el ISBN de la obra.

- 6.4 Campos vectoriales conservativos e independencia de la trayectoria*
- 6.5 Teorema de Green*
- 6.6 Superficies paramétricas*
- 6.7 Integrales de superficie*
- 6.8 Teorema de la divergencia (de Gauss)*
- 6.9 Teorema de Stokes*

* Este material se encuentra disponible en línea. Acceda a www.cengage.com e ingrese con el ISBN de la obra.



Trabajo



Un aplicación del rotacional



Determinar la masa del resorte



Campo magnético terrestre



Diseño de edificios

Trabajo (Caroline Warren/Photodisc/Getty Images); Un aplicación del rotacional (Elaine Davis/Shutterstock.com);
 Diseño de edificios (nui7711/Shutterstock.com); Campo magnético terrestre (Thufir/Big Stock Photo); Determinar la masa del resorte (David Stockman/iStockphoto.com).

6.1 Campos vectoriales

- Comprender el concepto de un campo vectorial.
- Determinar si un campo vectorial es conservativo.
- Calcular el rotacional de un campo vectorial.
- Calcular la divergencia de un campo vectorial.

Campos vectoriales

En la unidad 4 estudió funciones vectoriales que asignan un vector a un *número real*. Comprobó que las funciones vectoriales de números reales son útiles para representar curvas y movimientos a lo largo de una curva. En este capítulo estudiará otros dos tipos de funciones vectoriales que asignan un vector a un *punto en el plano* o a un *punto en el espacio*. Tales funciones se llaman **campos vectoriales (campos de vectores)**, y son útiles para representar varios tipos de **campos de fuerza** y **campos de velocidades**.

Definición de un campo vectorial

Un **campo vectorial sobre una región plana R** es una función F que asigna un vector $F(x, y)$ a cada punto en R .

Un **campo vectorial sobre una región sólida Q en el espacio** es una función F que asigna un vector $F(x, y, z)$ a cada punto en Q .

Aunque un campo vectorial está constituido por infinitos vectores, usted puede obtener una idea aproximada de su estructura dibujando varios vectores representativos $F(x, y)$, cuyos puntos iniciales son (x, y) .

El *gradiente* es un ejemplo de un campo vectorial. Por ejemplo, si

$$f(x, y) = x^2y + 3xy^3$$

entonces el gradiente de f

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} \\ &= (2xy + 3y^3)\mathbf{i} + (x^2 + 9xy^2)\mathbf{j}\end{aligned}\quad \text{Campo vectorial en el plano}$$

es un campo vectorial en el plano. La interpretación gráfica de este campo es una familia de vectores, cada uno de los cuales apunta en la dirección de máximo crecimiento a lo largo de la superficie dada por $z = f(x, y)$.

De manera similar, si

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

entonces el gradiente de f

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k} \\ &= 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}\end{aligned}\quad \text{Campo vectorial en el espacio}$$

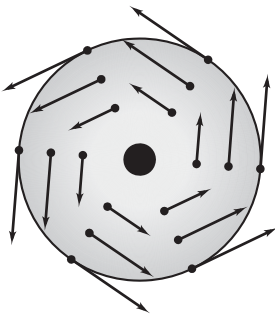
es un campo vectorial en el espacio. Observe que las funciones componentes para este campo vectorial particular son $2x$, $2y$ y $2z$.

Un campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\mathbf{i} + N(x, y, z)\mathbf{j} + P(x, y, z)\mathbf{k}$$

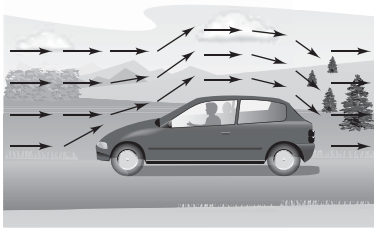
es **continuo** en un punto si y solo si cada una de sus funciones componentes M , N y P es continua en ese punto.

Campo de velocidades



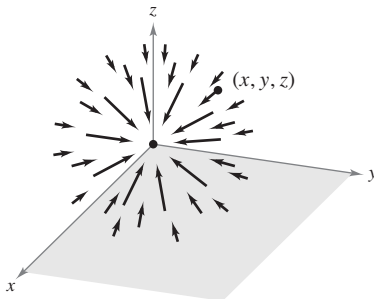
Rueda rotante.

Figura 6.1



Campo vectorial de flujo del aire.

Figura 6.2



m_1 está localizada en (x, y, z) .
 m_2 está localizada en $(0, 0, 0)$.

Campo de fuerzas gravitatorio.

Figura 6.3

Algunos ejemplos *físicos* comunes de campos vectoriales son los **campos de velocidades**, los **gravitatorios** y los **de fuerzas eléctricas**.

1. Un *campo de velocidades* describe el movimiento de un sistema de partículas en el plano o en el espacio. Por ejemplo, la figura 6.1 muestra el campo vectorial determinado por una rueda que gira en un eje. Observe que los vectores velocidad los determina la localización de sus puntos iniciales, cuanto más lejano está un punto del eje, mayor es su velocidad. Otros campos de velocidad están determinados por el flujo de líquidos a través de un recipiente o por el flujo de corrientes aéreas alrededor de un objeto móvil, como se muestra en la figura 6.2.
2. Los *campos gravitatorios* los define la **ley de la gravitación de Newton**, que establece que la fuerza de atracción ejercida en una partícula de masa m_1 localizada en (x, y, z) por una partícula de masa m_2 localizada en $(0, 0, 0)$ está dada por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-Gm_1m_2}{x^2 + y^2 + z^2} \mathbf{u}$$

donde G es la constante gravitatoria y \mathbf{u} es el vector unitario en la dirección del origen a (x, y, z) . En la figura 6.3 se puede ver que el campo gravitatorio \mathbf{F} tiene las propiedades de que todo vector $\mathbf{F}(x, y, z)$ apunta hacia el origen, y que la magnitud de $\mathbf{F}(x, y, z)$ es la misma en todos los puntos equidistantes del origen. Un campo vectorial con estas dos propiedades se llama un **campo de fuerzas central**. Utilizando el vector posición

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

para el punto (x, y, z) , se puede expresar el campo gravitatorio \mathbf{F} como

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{-Gm_1m_2}{\|\mathbf{r}\|^2} \left(\frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} \right) = \frac{-Gm_1m_2}{\|\mathbf{r}\|^2} \mathbf{u}.$$

3. Los *campos de fuerzas eléctricas* se definen por la **ley de Coulomb**, que establece que la fuerza ejercida en una partícula con carga eléctrica q_1 localizada en (x, y, z) por una partícula con carga eléctrica q_2 localizada en $(0, 0, 0)$ está dada por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{cq_1q_2}{\|\mathbf{r}\|^2} \mathbf{u}$$

donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, $\mathbf{u} = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$, y c es una constante que depende de la elección de unidades para $\|\mathbf{r}\|$, q_1 y q_2 .

Observe que un campo de fuerzas eléctricas tiene la misma forma que un campo gravitatorio. Es decir,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{k}{\|\mathbf{r}\|^2} \mathbf{u}$$

Tal campo de fuerzas se llama un **campo cuadrático inverso**.

Definición de campo cuadrático inverso

Sea $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ un vector posición. El campo vectorial \mathbf{F} es un **campo cuadrático inverso** si

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{k}{\|\mathbf{r}\|^2} \mathbf{u}$$

donde k es un número real

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}$$

es un vector unitario en la dirección de \mathbf{r} .

Como los campos vectoriales constan de una cantidad infinita de vectores, no es posible hacer un dibujo de todo el campo completo. En lugar de esto, cuando esboza un campo vectorial, su objetivo es dibujar vectores representativos que lo ayuden a visualizar el campo.

EJEMPLO 1 Dibujar un campo vectorial

Dibuje algunos vectores del campo vectorial dado por

$$\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}.$$

Solución Podría trazar los vectores en varios puntos del plano al azar. Sin embargo, es más ilustrativo trazar vectores de magnitud igual. Esto corresponde a encontrar curvas de nivel en los campos escalares. En este caso, vectores de igual magnitud se encuentran en círculos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}\| &= c && \text{Vectores de longitud } c \\ \sqrt{x^2 + y^2} &= c \\ x^2 + y^2 &= c^2 && \text{Ecuación del círculo} \end{aligned}$$

Para empezar a hacer el dibujo, elija un valor de c y dibuje varios vectores en la circunferencia resultante. Por ejemplo, los vectores siguientes se encuentran en la circunferencia unitaria.

Punto	Vector
(1, 0)	$\mathbf{F}(1, 0) = \mathbf{j}$
(0, 1)	$\mathbf{F}(0, 1) = -\mathbf{i}$
(-1, 0)	$\mathbf{F}(-1, 0) = -\mathbf{j}$
(0, -1)	$\mathbf{F}(0, -1) = \mathbf{i}$

En la figura 6.4 se muestran estos y algunos otros vectores del campo vectorial. Observe en la figura que este campo vectorial es parecido al dado por la rueda giratoria que se muestra en la figura 6.1.

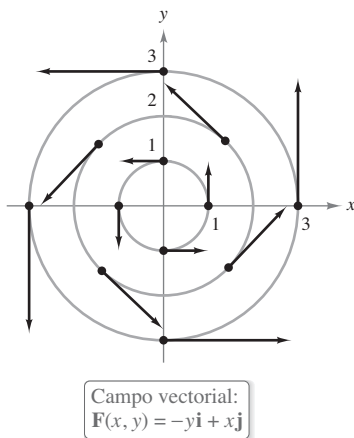


Figura 6.4

EJEMPLO 2 Dibujar un campo vectorial

Dibuje algunos vectores en el campo vectorial dado por

$$\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$

Solución Para este campo vectorial, los vectores de igual longitud están sobre las elipses dadas por

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}\| &= c \\ \sqrt{(2x)^2 + (y)^2} &= c \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$4x^2 + y^2 = c^2. \quad \text{Ecuación de la elipse}$$

Para $c = 1$, dibuje varios vectores $2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ de magnitud 1 en puntos de la elipse dada por

$$4x^2 + y^2 = 1.$$

Para $c = 2$, dibuje varios vectores de magnitud 2 en puntos de la elipse dada por

$$4x^2 + y^2 = 4.$$

Estos vectores se muestran en la figura 6.5.

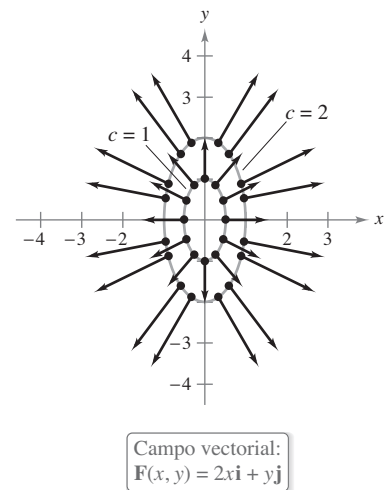


Figura 6.5

▷ **TECNOLOGÍA** Puede usar un sistema algebraico por computadora para trazar

- la gráfica de los vectores en un campo vectorial. Si tiene acceso a un sistema algebraico por computadora, utilícelo para trazar la gráfica de varios vectores representativos para el campo vectorial del ejemplo 2.

EJEMPLO 3

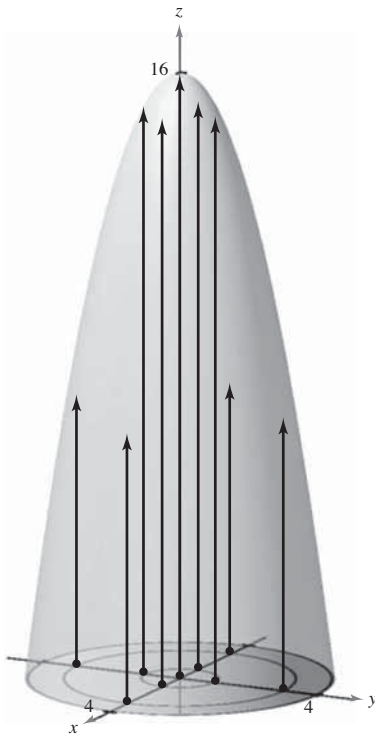
Dibujar un campo vectorial

Dibuje algunos vectores en el campo de velocidad dado por

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (16 - x^2 - y^2)\mathbf{k}$$

donde $x^2 + y^2 \leq 16$.

Solución Imagine que \mathbf{v} describe la velocidad de un fluido a través de un tubo de radio 4. Los vectores próximos al eje z son más largos que aquellos cercanos al borde del tubo. Por ejemplo, en el punto $(0, 0, 0)$, el vector velocidad es $\mathbf{v}(0, 0, 0) = 16\mathbf{k}$, mientras que en el punto $(0, 3, 0)$, el vector velocidad es $\mathbf{v}(0, 3, 0) = 7\mathbf{k}$. La figura 6.6 muestra estos y varios otros vectores para el campo de velocidades. De la figura, observe que la velocidad del fluido es mayor en la zona central que en los bordes del tubo. ■



Campo vectorial:
 $\mathbf{v}(x, y, z) = (16 - x^2 - y^2)\mathbf{k}$

Figura 6.6

Campos vectoriales conservativos

Observe en la figura 6.5 que todos los vectores parecen ser normales a la curva de nivel de la que emergen. Debido a que ésta es una propiedad de los gradientes, es natural preguntar si el campo vectorial dado por

$$\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

es el *gradiente* de alguna función derivable f . La respuesta es que algunos campos vectoriales, denominados campos vectoriales **conservativos**, pueden representarse como los gradientes de funciones derivables, mientras que algunos otros no pueden.

Definición de campos vectoriales conservativos

Un campo vectorial \mathbf{F} se llama **conservativo** si existe una función diferenciable f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$. La función f se llama **función potencial** para \mathbf{F} .

EJEMPLO 4

Campos vectoriales conservativos

a. El campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ es conservativo. Para comprobarlo, considere la función potencial $f(x, y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2$. Como

$$\nabla f = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = \mathbf{F}$$

se deduce que \mathbf{F} es conservativo.

b. Todo campo cuadrático inverso es conservativo. Para comprobarlo, sea

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{k}{\|\mathbf{r}\|^2} \mathbf{u} \quad \text{y} \quad f(x, y, z) = \frac{-k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

donde $\mathbf{u} = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$. Ya que

$$\begin{aligned} \nabla f &= \frac{kx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{i} + \frac{ky}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{j} + \frac{kz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{k} \\ &= \frac{k}{x^2 + y^2 + z^2} \left(\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ &= \frac{k}{\|\mathbf{r}\|^2} \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|} \\ &= \frac{k}{\|\mathbf{r}\|^2} \mathbf{u} \end{aligned}$$

se deduce que \mathbf{F} es conservativo. ■

Como puede ver en el ejemplo 4(b), muchos campos vectoriales importantes, incluyendo campos gravitatorios y de fuerzas eléctricas, son conservativos. Gran parte de la terminología introducida en este capítulo viene de la física. Por ejemplo, el término “conservativo” se deriva de la ley física clásica de la conservación de la energía. Esta ley establece que la suma de la energía cinética y la energía potencial de una partícula que se mueve en un campo de fuerzas conservativo es constante. (La energía cinética de una partícula es la energía debida a su movimiento, y la energía potencial es la energía debida a su posición en el campo de fuerzas.)

El teorema siguiente da una condición necesaria y suficiente para que un campo vectorial *en el plano* sea conservativo.



COMENTARIO El teorema 6.1 es válido en dominios *simplemente conexos*. Una región plana R es simplemente conexa si cada curva cerrada simple en R encierra solo puntos que están en R . (Vea la figura 6.26 en la sección 6.5.)

TEOREMA 6.1 Criterio para campos vectoriales conservativos en el plano

Sean M y N dos funciones con primeras derivadas parciales continuas en un disco abierto R . El campo vectorial dado por $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ es conservativo si y solo si

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Demostración Para demostrar que la condición dada es necesaria para que \mathbf{F} sea conservativo, suponga que existe una función potencial f tal que

$$\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}.$$

Entonces tiene

$$f_x(x, y) = M \implies f_{xy}(x, y) = \frac{\partial M}{\partial y}$$

$$f_y(x, y) = N \implies f_{yx}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}$$

y, por la equivalencia de derivadas parciales mixtas f_{xx} y f_{yy} puede concluir que $\partial N/\partial x = \partial M/\partial y$ para todo (x, y) en R . La suficiencia de la condición se demuestra en la sección 6.5.

Consulte *LarsonCalculus.com* para el video de Bruce Edwards de esta demostración. ■

EJEMPLO 5

Probar campos vectoriales conservativos en el plano

Decida si el campo vectorial dado por \mathbf{F} es conservativo

- a. $\mathbf{F}(x, y) = x^2y\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$ b. $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

Solución

a. El campo vectorial dado por

$$\mathbf{F}(x, y) = x^2y\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$$

no es conservativo porque

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[x^2y] = x^2 \quad y \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[xy] = y.$$

b. El campo vectorial dado por

$$\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

es conservativo porque

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[2x] = 0 \quad y \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[y] = 0.$$



El teorema 6.1 le permite decidir si un campo vectorial es o no conservativo, pero no le dice cómo encontrar una función potencial de \mathbf{F} . El problema es comparable al de la integración indefinida. A veces puede encontrar una función potencial por simple inspección. Así, en el ejemplo 4 observe que

$$f(x, y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2$$

tiene la propiedad de que

$$\nabla f(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$

EJEMPLO 6

Calcular una función potencial para $\mathbf{F}(x, y)$

Encuentre una función potencial para

$$\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 - y)\mathbf{j}.$$

Solución Del teorema 6.1 se deduce que \mathbf{F} es conservativo porque

$$\frac{\partial}{\partial y}[2xy] = 2x \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial x}[x^2 - y] = 2x.$$

Si f es una función cuyo gradiente es igual a $\mathbf{F}(x, y)$, entonces

$$\nabla f(x, y) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 - y)\mathbf{j}$$

lo cual implica que

$$f_x(x, y) = 2xy$$

y

$$f_y(x, y) = x^2 - y.$$

Para reconstruir la función f de estas dos derivadas parciales, integre $f_x(x, y)$ respecto a x

$$f(x, y) = \int f_x(x, y) dx = \int 2xy dx = x^2y + g(y)$$

e integre $f_y(x, y)$, respecto a y

$$f(x, y) = \int f_y(x, y) dy = \int (x^2 - y) dy = x^2y - \frac{y^2}{2} + h(x).$$

Observe que $g(y)$ es constante con respecto a x y $h(x)$ es constante con respecto a y . Para hallar una sola expresión que represente $f(x, y)$, sea

$$g(y) = -\frac{y^2}{2} \quad \text{y} \quad h(x) = K.$$

Entonces, puede escribir

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2y + g(y) + K \\ &= x^2y - \frac{y^2}{2} + K. \end{aligned}$$

Puede comprobar este resultado formando el gradiente de f . Verá que es igual a la función original \mathbf{F} . ■

Observe que la solución en el ejemplo 6 es comparable a la dada por una integral indefinida. Es decir, la solución representa a una familia de funciones potenciales, dos de las cuales difieren por una constante. Para hallar una solución única, tendría que fijar una condición inicial que deba satisfacer la función potencial.

Rotacional de un campo vectorial

El teorema 6.1 tiene un equivalente para campos vectoriales en el espacio. Antes de establecer ese resultado, se da la definición del **rotacional de un campo vectorial** en el espacio.

Definición del rotacional de un campo vectorial

La rot de $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) &= \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \mathbf{i} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k}.\end{aligned}$$

Si $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces se dice que \mathbf{F} es un **campo irrotacional**.

La notación de producto vectorial usada para el rotacional proviene de ver el gradiente ∇f como el resultado del **operador diferencial** que actúa sobre la función f . En este contexto, utilice la siguiente forma de determinante como ayuda mnemotécnica para recordar la fórmula para el rotacional

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) &= \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z} \right) \mathbf{i} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \mathbf{k}\end{aligned}$$

EJEMPLO 7

Calcular el rotacional de un campo vectorial

•••► Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Encuentre $\text{rot } \mathbf{F}$ para el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 + z^2)\mathbf{j} + 2yz\mathbf{k}.$$

¿Es \mathbf{F} irrotacional?

Solución El rotacional de \mathbf{F} está dado por

$$\begin{aligned}\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) &= \nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2 + z^2 & 2yz \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + z^2 & 2yz \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & 2yz \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 2xy & x^2 + z^2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= (2z - 2z)\mathbf{i} - (0 - 0)\mathbf{j} + (2x - 2x)\mathbf{k} \\ &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Como $\text{rot } \mathbf{F} = \mathbf{0}$, \mathbf{F} es irrotacional. ■

► **TECNOLOGÍA** Algunos sistemas algebraicos por computadora tienen una instrucción que se puede utilizar para encontrar el rotacional de un campo vectorial. Si tiene acceso a un sistema algebraico por computadora que tenga dicha instrucción, úsela para encontrar el rotacional del campo vectorial en el ejemplo 7.

Más adelante, en este capítulo, se asignará una interpretación física al rotacional de un campo vectorial. Pero por ahora, el uso primario del rotacional se muestra en la siguiente prueba para campos vectoriales conservativos en el espacio. El criterio establece que para un campo vectorial en el espacio, el rotacional es $\mathbf{0}$ en cada punto en el dominio si y solo si \mathbf{F} es conservativo. La demostración es similar a la dada para el teorema 6.1.

.....▶
COMENTARIO El teorema 6.2 es válido para dominios *simplemente conectados* en el espacio. Un dominio simplemente conexo en el espacio es un dominio D para el cual cada curva simple cerrada en D se puede reducir a un punto en D sin salirse de D (ver la sección 6.5).

TEOREMA 6.2 Criterio para campos vectoriales conservativos en el espacio

Suponga que M, N y P tienen primeras derivadas parciales continuas en una esfera abierta Q en el espacio. El campo vectorial dado por

$$\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$$

es conservativo si y solo si

$$\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{0}.$$

Es decir, \mathbf{F} es conservativo si y solo si

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial z} \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

Del teorema 6.2, puede ver que el campo vectorial del ejemplo 7 es conservativo, ya que $\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{0}$. Demuestre que el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^3y^2z\mathbf{i} + x^2z\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}$$

no es conservativo, puede hacer esto al demostrar que su rotacional es

$$\text{rot } \mathbf{F}(x, y, z) = (x^3y^2 - 2xy)\mathbf{j} + (2xz - 2x^3yz)\mathbf{k} \neq \mathbf{0}.$$

Para los campos vectoriales en el espacio que satisfagan el criterio y sean, por tanto, conservativos, puede encontrar una función potencial siguiendo el mismo modelo utilizado en el plano (como se demostró en el ejemplo 6).

.....▶
COMENTARIO Los ejemplos 6 y 8 son las ilustraciones de un tipo de problemas llamados *reconstrucción de una función a partir de su gradiente*. Si decide tomar un curso en ecuaciones diferenciales, estudiará otros métodos para resolver este tipo de problemas. Un método popular da una interacción entre las “integraciones parciales” sucesivas y las derivaciones parciales.

EJEMPLO 8 Calcular una función potencial para $\mathbf{F}(x, y, z)$

Encuentre una función potencial para

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 + z^2)\mathbf{j} + 2yz\mathbf{k}.$$

Solución Del ejemplo 7 sabe que el campo vectorial dado por \mathbf{F} es conservativo. Si f es una función tal que $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$, entonces

$$f_x(x, y, z) = 2xy, \quad f_y(x, y, z) = x^2 + z^2 \quad \text{y} \quad f_z(x, y, z) = 2yz$$

e integrando separadamente respecto a x, y y z obtiene

$$f(x, y, z) = \int M \, dx = \int 2xy \, dx = x^2y + g(y, z)$$

$$f(x, y, z) = \int N \, dy = \int (x^2 + z^2) \, dy = x^2y + yz^2 + h(x, z)$$

$$f(x, y, z) = \int P \, dz = \int 2yz \, dz = yz^2 + k(x, y).$$

Comparando estas tres versiones de $f(x, y, z)$, puede concluir que

$$g(y, z) = yz^2 + K, \quad h(x, z) = K \quad \text{y} \quad k(x, y) = x^2y + K.$$

Por tanto $f(x, y, z)$ está dada por

$$f(x, y, z) = x^2y + yz^2 + K.$$

Divergencia de un campo vectorial

Ha visto que el rotacional de un campo vectorial \mathbf{F} es a su vez un campo vectorial. Otra función importante definida en un campo vectorial es la **divergencia**, que es una función escalar.

Definición de divergencia de un campo vectorial

La **divergencia** de $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ es

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y) = \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}. \quad \text{Plano}$$

La **divergencia** de $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}. \quad \text{Espacio}$$

Si $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, entonces se dice que \mathbf{F} es de **divergencia nula**.

La notación de producto escalar usada para la divergencia proviene de considerar ∇ como un **operador diferencial**, como sigue

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{k} \right] \cdot (M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}) \\ &= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \end{aligned}$$

- **TECNOLOGÍA** Algunos sistemas de álgebra computacional tienen una instrucción que se puede utilizar para localizar la divergencia de un campo vectorial. Si tiene acceso a un sistema algebraico por computadora que tiene dicha instrucción, úselo en el ejemplo 9 para encontrar la divergencia del campo vectorial.

EJEMPLO 9

Divergencia de un campo vectorial

Encuentre la divergencia en $(2, 1, -1)$ para el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^3y^2z\mathbf{i} + x^2z\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}.$$

Solución La divergencia de \mathbf{F} es

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}[x^3y^2z] + \frac{\partial}{\partial y}[x^2z] + \frac{\partial}{\partial z}[x^2y] = 3x^2y^2z.$$

En el punto $(2, 1, -1)$ la divergencia es

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(2, 1, -1) = 3(2^2)(1^2)(-1) = -12. \quad \blacksquare$$

La divergencia puede verse como un tipo de derivadas de \mathbf{F} ya que, para campos de velocidades de partículas, mide el ritmo de flujo de partículas por unidad de volumen en un punto. En hidrodinámica (el estudio del movimiento de fluidos), un campo de velocidades de divergencia nula se llama **incompresible**. En el estudio de electricidad y magnetismo, un campo vectorial de divergencia nula se llama el **solenoidal**.

Hay muchas propiedades importantes de la divergencia y el rotacional de un campo vectorial \mathbf{F} [vea el ejercicio 77(a)–(g)]. Se establece una de uso muy frecuente en el teorema 6.3. En el ejercicio 77(h) se le pide demostrar este teorema.

TEOREMA 6.3 Divergencia y rotacional

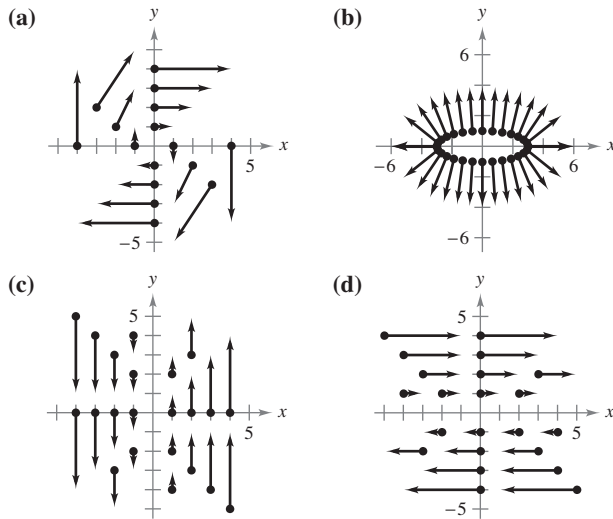
Si $\mathbf{F}(x, y, z) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es un campo vectorial, y M , N y P tienen segundas derivadas parciales continuas, entonces

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{F}) = 0.$$

6.1 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Relacionar En los ejercicios 1-4, asocie el campo vectorial con su gráfica. [Las gráficas se marcan (a), (b), (c) y (d).]



1. $F(x, y) = yi$
2. $F(x, y) = xj$
3. $F(x, y) = yi - xj$
4. $F(x, y) = xi + 3yj$

Dibujar un campo vectorial En los ejercicios 5-10, calcule $\|F\|$ y dibuje varios vectores representativos del campo vectorial.

5. $F(x, y) = i + j$
6. $F(x, y) = yi - 2xj$
7. $F(x, y, z) = 3yj$
8. $F(x, y) = yi + xj$
9. $F(x, y, z) = i + j + k$
10. $F(x, y, z) = xi + yj + zk$

Trazar la gráfica de un campo vectorial En los ejercicios 11-14, utilice un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente varios vectores representativos del campo vectorial.

11. $F(x, y) = \frac{1}{8}(2xyi + y^2j)$
12. $F(x, y) = \langle 2y - x, 2y + x \rangle$
13. $F(x, y, z) = \frac{xi + yj + zk}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
14. $F(x, y, z) = \langle x, -y, z \rangle$

Determinar un campo vectorial conservativo En los ejercicios 15-24, determine el campo vectorial conservativo para la función potencial, encontrando su gradiente.

15. $f(x, y) = x^2 + 2y^2$
16. $f(x, y) = x^2 - \frac{1}{4}y^2$
17. $g(x, y) = 5x^2 + 3xy + y^2$
18. $g(x, y) = \text{sen } 3x \cos 4y$
19. $f(x, y, z) = 6xyz$
20. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + 4y^2 + z^2}$
21. $g(x, y, z) = z + ye^{xz}$
22. $g(x, y, z) = \frac{y}{z} + \frac{z}{x} - \frac{xz}{y}$
23. $h(x, y, z) = xy \ln(x + y)$
24. $h(x, y, z) = x \arcsen yz$

Comprobar que un campo vectorial es conservativo En los ejercicios 25-32, compruebe que el campo vectorial es conservativo.

25. $F(x, y) = xy^2i + x^2yj$
26. $F(x, y) = \frac{1}{x^2}(yi - xj)$

27. $F(x, y) = \text{sen } yi + x \cos yj$
28. $F(x, y) = 5y^2(yi + 3xj)$
29. $F(x, y) = \frac{1}{xy}(yi - xj)$
30. $F(x, y) = \frac{2}{y^2}e^{2x/y}(yi - xj)$

31. $F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(i + j)$
32. $F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 + xy}}(yi + xj)$

Determinar una función potencial En los ejercicios 33-42, determine si el campo vectorial es conservativo. Si es así, calcule una función potencial para el campo vectorial.

33. $F(x, y) = yi + xj$
34. $F(x, y) = 3x^2y^2i + 2x^3yj$
35. $F(x, y) = 2xyi + x^2j$
36. $F(x, y) = xe^{xy}(2yi + xj)$
37. $F(x, y) = 15y^3i - 5xy^2j$
38. $F(x, y) = \frac{1}{y^2}(yi - 2xj)$
39. $F(x, y) = \frac{2y}{x}i - \frac{x^2}{y^2}j$
40. $F(x, y) = \frac{xi + yj}{x^2 + y^2}$
41. $F(x, y) = e^x(\cos yi - \text{sen } yj)$
42. $F(x, y) = \frac{2xi + 2yj}{(x^2 + y^2)^2}$

Determinar el rotacional de un campo vectorial En los ejercicios 43-46, determine $\text{rot } F$ para el campo vectorial para el punto dado.

43. $F(x, y, z) = xyz i + xyz j + xyz k; (2, 1, 3)$
44. $F(x, y, z) = x^2z i - 2xz j + yz k; (2, -1, 3)$
45. $F(x, y, z) = e^x \text{sen } yi - e^x \cos yj; (0, 0, 1)$
46. $F(x, y, z) = e^{-xyz}(i + j + k); (3, 2, 0)$

Determinar el rotacional de un campo vectorial En los ejercicios 47-50, use un sistema algebraico para determinar el rotacional del campo vectorial.

47. $F(x, y, z) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)i + \ln\sqrt{x^2 + y^2}j + k$
48. $F(x, y, z) = \frac{yz}{y-z}i + \frac{xz}{x-z}j + \frac{xy}{x-y}k$
49. $F(x, y, z) = \text{sen}(x-y)i + \text{sen}(y-z)j + \text{sen}(z-x)k$
50. $F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(i + j + k)$

Determinar una función potencial En los ejercicios 51-56, determine si el campo vectorial F es conservativo. Si lo es, calcule una función potencial para el campo vectorial.

51. $F(x, y, z) = xy^2z^2i + x^2yz^2j + x^2y^2zk$
52. $F(x, y, z) = y^2z^3i + 2xyz^3j + 3xy^2z^2k$
53. $F(x, y, z) = \text{sen } zi + \text{sen } xj + \text{sen } yk$
54. $F(x, y, z) = ye^z i + ze^{xy} j + xe^{yz} k$
55. $F(x, y, z) = \frac{z}{y}i - \frac{xz}{y^2}j + \frac{x}{y}k$
56. $F(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2}i + \frac{y}{x^2 + y^2}j + k$

Determinar la divergencia de un campo vectorial En los ejercicios 57-60, determine la divergencia del campo vectorial F .

57. $F(x, y) = x^2\mathbf{i} + 2y^2\mathbf{j}$

58. $F(x, y) = xe^x\mathbf{i} + ye^y\mathbf{j}$

59. $F(x, y, z) = \text{sen } x\mathbf{i} + \text{cos } y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

60. $F(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2)\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + \ln(y^2 + z^2)\mathbf{k}$

Determinar la divergencia de un campo vectorial En los ejercicios 61-64, calcule la divergencia del campo vectorial F en un punto dado.

61. $F(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; (2, 1, 1)

62. $F(x, y, z) = x^2z\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$; (2, -1, 3)

63. $F(x, y, z) = e^x \text{sen } y\mathbf{i} - e^x \text{cos } y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; (3, 0, 0)

64. $F(x, y, z) = \ln(xyz)(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$; (3, 2, 1)

DESARROLLO DE CONCEPTOS

65. **Campo vectorial** Defina un campo vectorial en el plano y en el espacio. Dé algunos ejemplos físicos de campos vectoriales.

66. **Campo vectorial conservativo** ¿Qué es un campo vectorial conservativo y cuál es su criterio en el plano y en el espacio?

67. **Rotacional** Defina el rotacional de un campo vectorial.

68. **Divergencia** Defina la divergencia de un campo vectorial en el plano y en el espacio.

Rotacional de un producto cruz En los ejercicios 69 y 70, calcular el rotacional $(F \times G) = \nabla \times (F \times G)$.

69. $F(x, y, z) = \mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$ 70. $F(x, y, z) = x\mathbf{i} - z\mathbf{k}$

$G(x, y, z) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ $G(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

Rotacional del rotacional de un campo vectorial En los ejercicios 71 y 72, encuentre $\text{rot}(\text{rot } F) = \nabla \times (\nabla \times F)$.

71. $F(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

72. $F(x, y, z) = x^2z\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$

Divergencia de un producto cruz En los ejercicios 73 y 74, hallar $\text{div}(F \times G) = \nabla \cdot (F \times G)$.

73. $F(x, y, z) = \mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$ 74. $F(x, y, z) = x\mathbf{i} - z\mathbf{k}$

$G(x, y, z) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ $G(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

Divergencia del rotacional de un campo vectorial En los ejercicios 75 y 76, encuentre $\text{div}(\text{rot } F) = \nabla \cdot (\nabla \times F)$.

75. $F(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

76. $F(x, y, z) = x^2z\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$

77. **Demostración** En los incisos (a)-(h), demuestre la propiedad para los campos vectoriales F y G y la función escalar f . (Suponga que las derivadas parciales requeridas son continuas.)

(a) $\text{rot}(F + G) = \text{rot } F + \text{rot } G$

(b) $\text{rot}(\nabla f) = \nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$

(c) $\text{div}(F + G) = \text{div } F + \text{div } G$

(d) $\text{div}(F \times G) = (\text{rot } F) \cdot G - F \cdot (\text{rot } G)$

(e) $\nabla \times [\nabla f + (\nabla \times F)] = \nabla \times (\nabla \times F)$

(f) $\nabla \times (fF) = f(\nabla \times F) + (\nabla f) \times F$

(g) $\text{div}(fF) = f \text{div } F + \nabla f \cdot F$

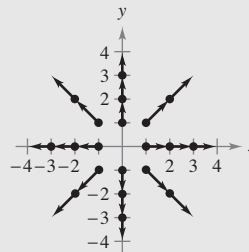
(h) $\text{div}(\text{rot } F) = 0$ (Teorema 6.3)



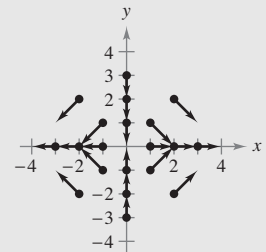
¿CÓMO LO VE? Varios vectores representativos en los campos vectoriales

$F(x, y) = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ y $G(x, y) = \frac{x\mathbf{i} - y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

se muestran a continuación. Explique cualquier similitud o diferencia en los campos vectoriales.



Campo vectorial:
 $F(x, y) = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$



Campo vectorial:
 $G(x, y) = \frac{x\mathbf{i} - y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 79-82, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que demuestre su falsedad.

79. Si $F(x, y) = 4x\mathbf{i} - y^2\mathbf{j}$, entonces $\|F(x, y)\| \rightarrow 0$ cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

80. Si $F(x, y) = 4x\mathbf{i} - y^2\mathbf{j}$ y (x, y) está en el eje y positivo, entonces el vector apunta en la dirección y negativa.

81. Si f es un campo escalar, entonces el rotacional de f tiene sentido.

82. Si F es un campo vectorial y $\text{rot } F = \mathbf{0}$, entonces F es irrotacional, pero no conservativo.

••• 83. **Campo magnético de la Tierra** •••••

Una sección transversal del campo magnético se puede representar como un campo vectorial en el que el centro de la Tierra está ubicado en el origen y los puntos positivos del eje y en la dirección del polo norte magnético. La ecuación para este campo es

$$F(x, y) = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$$

$$= \frac{m}{(x^2 + y^2)^{5/2}}[3xy\mathbf{i} + (2y^2 - x^2)\mathbf{j}]$$

donde m es el momento magnético de la Tierra. Demuestre que este campo vectorial es conservativo.



6.2 Integrales de línea

- Comprender y utilizar el concepto de curva suave por partes.
- Expresar y evaluar una integral de línea.
- Expresar y evaluar una integral de línea de un campo vectorial.
- Expresar y calcular una integral de línea en forma diferencial.

Curvas suaves por partes

Una propiedad clásica de los campos gravitacionales es que, sujeto a ciertas restricciones físicas, el trabajo realizado por la gravedad sobre un objeto que se mueve entre dos puntos en el campo es independiente de la trayectoria que siga el objeto. Una de las restricciones es que la **trayectoria** debe ser una curva suave por partes. Recuerde que una curva plana C dada por

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad a \leq t \leq b$$

es **suave** si

$$\frac{dx}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dt}$$

son continuas en $[a, b]$ y no simultáneamente 0 en (a, b) . Similarmente, una curva C en el espacio dada por

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b$$

es **suave** si

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{dz}{dt}$$

son continuas en $[a, b]$ y no simultáneamente 0 en (a, b) . Una curva C es **suave por partes** si el intervalo $[a, b]$ puede dividirse en un número finito de subintervalos, en cada uno de los cuales C es suave.

EJEMPLO 1

Hallar una parametrización suave por partes

Encuentre una parametrización suave por partes de la gráfica C que se muestra en la figura 6.7.

Solución Como C consta de tres segmentos de recta C_1 , C_2 y C_3 , puede construir una parametrización suave de cada segmento y unirlos haciendo que el último valor de t en C_i coincida con el primer valor de t en C_{i+1} .

$$\begin{aligned} C_1: & \quad x(t) = 0, & \quad y(t) = 2t, & \quad z(t) = 0, & \quad 0 \leq t \leq 1 \\ C_2: & \quad x(t) = t - 1, & \quad y(t) = 2, & \quad z(t) = 0, & \quad 1 \leq t \leq 2 \\ C_3: & \quad x(t) = 1, & \quad y(t) = 2, & \quad z(t) = t - 2, & \quad 2 \leq t \leq 3 \end{aligned}$$

Por tanto, C está dada por

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} 2t\mathbf{j}, & 0 \leq t \leq 1 \\ (t-1)\mathbf{i} + 2\mathbf{j}, & 1 \leq t \leq 2 \\ \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + (t-2)\mathbf{k}, & 2 \leq t \leq 3 \end{cases}$$

Como C_1 , C_2 y C_3 son suaves, se deduce que C es suave por partes. ■

Recuerde que la parametrización de una curva induce una **orientación** de la curva. Así, en el ejemplo 1, la curva está orientada de manera que la dirección positiva va desde $(0, 0, 0)$, siguiendo la curva, hasta $(1, 2, 1)$. Trate de obtener una parametrización que induzca la orientación opuesta

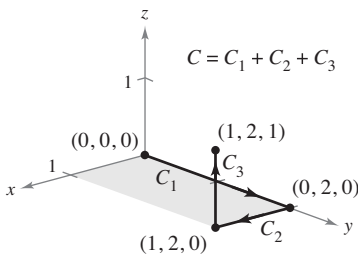


Figura 6.7

Integrales de línea

Hasta ahora en el texto ha estudiado varios tipos de integrales. Para una integral simple

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{Integre sobre el intervalo } [a, b].$$

integre sobre el intervalo $[a, b]$. De manera similar, en las integrales dobles

$$\iint_R f(x, y) dA \quad \text{Integre sobre la región } R.$$

integre sobre la región R del plano. En esta sección estudiará un nuevo tipo de integral llamada **integral de línea**

$$\int_C f(x, y) ds \quad \text{Integre sobre una curva } C.$$

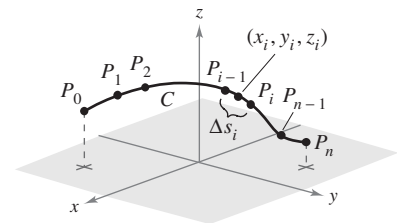
en la que integra sobre una curva C suave por partes. (Esta terminología es un poco desafortunada, este tipo de integral quedará mejor descrita como integral de curva.)

Para introducir el concepto de una integral de línea, considere la masa de un cable de longitud finita, dado por una curva C en el espacio. La densidad (masa por unidad de longitud) del cable en el punto (x, y, z) está dada por $f(x, y, z)$. Se particiona la curva C mediante los puntos

$$P_0, P_1, \dots, P_n$$

produciendo n subarcos, como se muestra en la figura 6.8. La longitud del i -ésimo subarco está dada por Δs_i . A continuación, elija un punto (x_i, y_i, z_i) en cada subarco. Si la longitud de cada subarco es pequeña, la masa total del cable puede ser aproximada por la suma

$$\text{Masa del alambre} \approx \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i.$$



Partición de la curva C .
Figura 6.8

Si $\|\Delta\|$ denota la longitud del subarco más largo y se hace que $\|\Delta\|$ se aproxime a 0, parece razonable que el límite de esta suma se aproxime a la masa del cable. Esto conduce a la definición siguiente.

Definición de integral de línea

Si f está definida en una región que contiene una curva suave C de longitud finita, entonces la **integral de línea de f a lo largo de C** está dada por

$$\int_C f(x, y) ds = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta s_i \quad \text{Plano}$$

o

$$\int_C f(x, y, z) ds = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i \quad \text{Espacio}$$

siempre que este límite exista.

Como sucede con las integrales analizadas en la unidad 5, para evaluar una integral de línea es útil convertirla en una integral definida. Puede demostrarse que si f es *continua*, el límite dado arriba existe y es el mismo para todas las parametrizaciones suaves de C .

Para evaluar una integral de línea sobre una curva plana C dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, utilice el hecho de que

$$ds = \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

Para una curva en el espacio hay una fórmula similar, como se indica en el teorema 6.4.

TEOREMA 6.4 Evaluar una integral de línea como integral definida

Sea f continua en una región que contiene una curva suave C . Si C está dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, donde $a \leq t \leq b$, entonces

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

Si C está dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, donde $a \leq t \leq b$, entonces

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt.$$

Observe que si $f(x, y, z) = 1$, entonces la integral de línea proporciona la longitud de arco de la curva C , como se definió en la unidad 4. Es decir

$$\int_C 1 ds = \int_a^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \text{longitud de la curva } C.$$

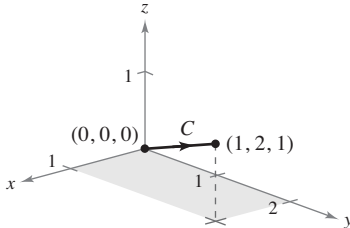


Figura 6.9

EJEMPLO 2

Evaluar una integral de línea

Evalúe

$$\int_C (x^2 - y + 3z) ds$$

donde C es el segmento de recta que se muestra en la figura 6.9.

Solución Para empezar, exprese la ecuación de la recta en forma paramétrica

$$x = t, \quad y = 2t \quad y \quad z = t, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Por tanto, $x'(t) = 1$, $y'(t) = 2$ y $z'(t) = 1$, lo que implica que

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}.$$

Así, la integral de línea toma la forma siguiente

$$\begin{aligned} \int_C (x^2 - y + 3z) ds &= \int_0^1 (t^2 - 2t + 3t) \sqrt{6} dt \\ &= \sqrt{6} \int_0^1 (t^2 + t) dt \\ &= \sqrt{6} \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{5\sqrt{6}}{6} \end{aligned}$$

En el ejemplo 2, el valor de la integral de línea no depende de la parametrización del segmento de recta C , con cualquier parametrización suave se obtendrá el mismo valor. Para convencerse de esto, pruebe con alguna otra parametrización, como por ejemplo $x = 1 + 2t$, $y = 2 + 4t$ y $z = 1 + 2t$, $-\frac{1}{2} \leq t \leq 0$, o $x = -t$, $y = -2t$ y $z = -t$, $-1 \leq t \leq 0$.

Sea C una trayectoria compuesta de las curvas suaves C_1, C_2, \dots, C_n . Si f es continua en C , entonces se puede demostrar que

$$\int_C f(x, y) ds = \int_{C_1} f(x, y) ds + \int_{C_2} f(x, y) ds + \dots + \int_{C_n} f(x, y) ds.$$

Esta propiedad se utiliza en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Evaluar una integral de línea sobre una trayectoria

Evalúe

$$\int_C x ds$$

donde C es la curva suave por partes que se muestra en la figura 6.10.

Solución Para empezar, integre en sentido ascendente sobre la recta $y = x$, usando la parametrización siguiente.

$$C_1: x = t, y = t, \quad 0 \leq t \leq 1$$

Para esta curva, $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}$, lo que implica $x'(t) = 1$ y $y'(t) = 1$. Así,

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \sqrt{2}$$

y tiene

$$\int_{C_1} x ds = \int_0^1 t\sqrt{2} dt = \left. \frac{\sqrt{2}}{2} t^2 \right|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

A continuación, integre en sentido descendente sobre la parábola $y = x^2$, usando la parametrización

$$C_2: x = 1 - t, \quad y = (1 - t)^2, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Para esta curva,

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{i} + (1 - t)^2\mathbf{j}$$

lo cual implica que $x'(t) = -1$ y $y'(t) = -2(1 - t)$. Entonces,

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \sqrt{1 + 4(1 - t)^2}$$

y tiene

$$\begin{aligned} \int_{C_2} x ds &= \int_0^1 (1 - t)\sqrt{1 + 4(1 - t)^2} dt \\ &= -\frac{1}{8} \left[\frac{2}{3} [1 + 4(1 - t)^2]^{3/2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{12} (5^{3/2} - 1). \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$\int_C x ds = \int_{C_1} x ds + \int_{C_2} x ds = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{12} (5^{3/2} - 1) \approx 1.56. \quad \blacksquare$$

Para parametrizaciones dadas por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ es útil recordar la forma de ds como

$$ds = \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt.$$

Esto se demuestra en el ejemplo 4.

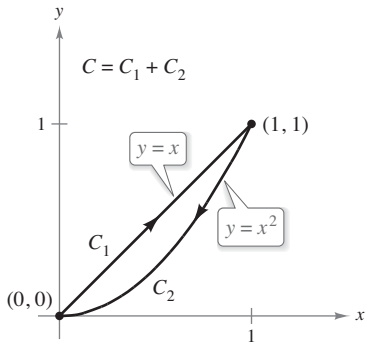


Figura 6.10

EJEMPLO 4**Evaluar una integral de línea**

Evalúe $\int_C (x + 2) ds$, donde C es la curva representada por

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{4}{3}t^{3/2}\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}, \quad 0 \leq t \leq 2.$$

Solución Ya que $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t^{1/2}\mathbf{j} + t\mathbf{j}$ y

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} = \sqrt{1 + 4t + t^2}$$

se deduce que

$$\begin{aligned} \int_C (x + 2) ds &= \int_0^2 (t + 2)\sqrt{1 + 4t + t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 2(t + 2)(1 + 4t + t^2)^{1/2} dt \\ &= \frac{1}{3} \left[(1 + 4t + t^2)^{3/2} \right]_0^2 \\ &= \frac{1}{3} (13\sqrt{13} - 1) \\ &\approx 15.29. \end{aligned}$$

El ejemplo siguiente muestra cómo usar una integral de línea para hallar la masa de un resorte cuya densidad varía. En la figura 6.11 observe cómo la densidad de este resorte aumenta a medida que la espiral del resorte asciende por el eje z .

EJEMPLO 5**Hallar la masa de un resorte**

Encuentre la masa de un resorte que tiene la forma de una hélice circular

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k})$$

donde $0 \leq t \leq 6\pi$ la densidad del resorte es

$$\rho(x, y, z) = 1 + z$$

como se muestra en la figura 6.11.

Solución Como

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (1)^2} = 1$$

se deduce que la masa del resorte es

$$\begin{aligned} \text{Masa} &= \int_C (1 + z) ds \\ &= \int_0^{6\pi} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right) dt \\ &= \left[t + \frac{t^2}{2\sqrt{2}} \right]_0^{6\pi} \\ &= 6\pi \left(1 + \frac{3\pi}{\sqrt{2}}\right) \\ &\approx 144.47. \end{aligned}$$

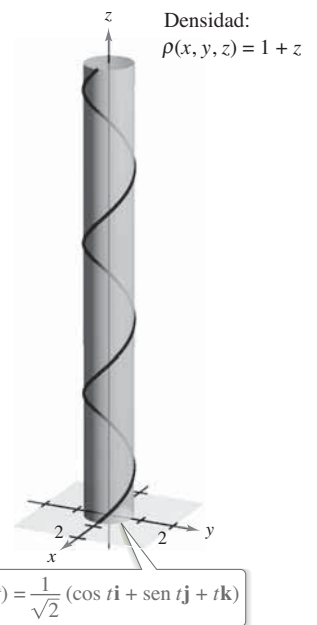
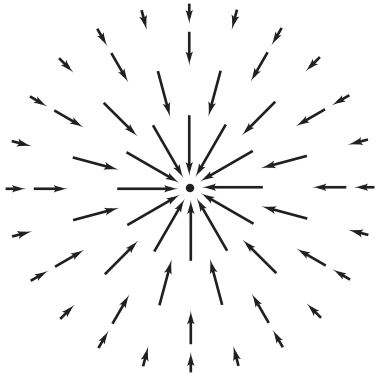
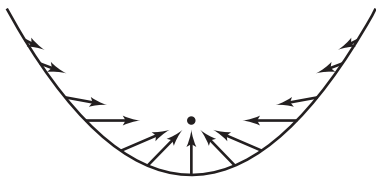


Figura 6.11



Campo de fuerzas cuadrático inverso \mathbf{F}



Vectores a lo largo de una trayectoria parabólica en el campo de fuerzas \mathbf{F} .

Figura 6.12

Integrales de línea de campos vectoriales

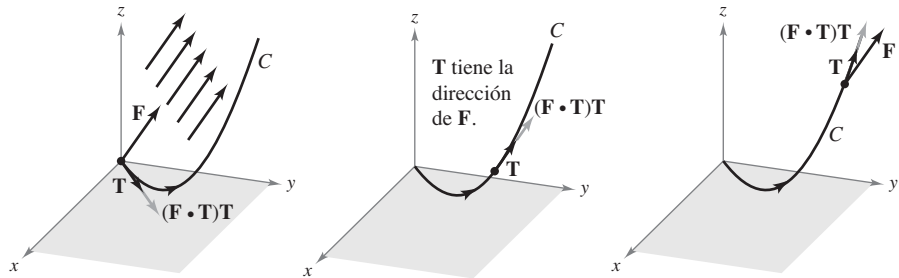
Una de las aplicaciones físicas más importantes de las integrales de línea es la de hallar el **trabajo** realizado sobre un objeto que se mueve en un campo de fuerzas. Por ejemplo, la figura 6.12 muestra un campo de fuerzas cuadrático inverso similar al campo gravitatorio del Sol. Observe que la magnitud de la fuerza a lo largo de una trayectoria circular en torno al centro es constante, mientras que la magnitud de la fuerza a lo largo de una trayectoria parabólica varía de un punto a otro.

Para ver cómo puede utilizarse una integral de línea para hallar el trabajo realizado en un campo de fuerzas \mathbf{F} considere un objeto que se mueve a lo largo de una trayectoria C en el campo, como se muestra en la figura 6.13. Para determinar el trabajo realizado por la fuerza, solo necesita considerar aquella parte de la fuerza que actúa en la dirección en que se mueve el objeto (o en la dirección contraria). Esto significa que en cada punto de C puede considerar la proyección $\mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$ del vector fuerza \mathbf{F} sobre el vector unitario tangente \mathbf{T} . En un subarco pequeño de longitud Δs_i , el incremento de trabajo es

$$\begin{aligned} \Delta W_i &= (\text{fuerza})(\text{distancia}) \\ &\approx [\mathbf{F}(x_i, y_i, z_i) \cdot \mathbf{T}(x_i, y_i, z_i)] \Delta s_i \end{aligned}$$

donde (x_i, y_i, z_i) es un punto en el subarco i -ésimo. Por consiguiente, el trabajo total realizado está dado por la integral siguiente

$$W = \int_C \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{T}(x, y, z) ds.$$



En cada punto en C , la fuerza en la dirección del movimiento es $(\mathbf{F} \cdot \mathbf{T})\mathbf{T}$.

Figura 6.13

Esta integral de línea aparece en otros contextos y es la base de la definición siguiente de la **integral de línea de un campo vectorial**. En la definición, observe que

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds &= \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} \|\mathbf{r}'(t)\| dt \\ &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

Definición de la integral de línea de un campo vectorial

Sea \mathbf{F} un campo vectorial continuo definido sobre una curva suave C dada por

$$\mathbf{r}(t), a \leq t \leq b$$

La **integral de línea** de \mathbf{F} sobre C está dada por

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds \\ &= \int_a^b \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt. \end{aligned}$$

EJEMPLO 6

Trabajo realizado por una fuerza

•••► Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

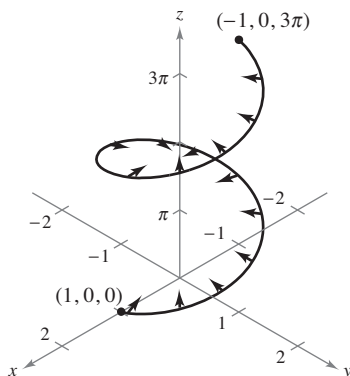


Figura 6.14

Determine el trabajo realizado por el campo de fuerzas

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{1}{2}x\mathbf{i} - \frac{1}{2}y\mathbf{j} + \frac{1}{4}\mathbf{k} \quad \text{Campo de fuerzas } \mathbf{F}$$

sobre una partícula que se mueve a lo largo de la hélice dada por

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k} \quad \text{Curva en el espacio } C$$

desde el punto $(1, 0, 0)$ hasta el punto $(-1, 0, 3\pi)$, como se muestra en la figura 6.14.

Solución Como

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \\ &= \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k} \end{aligned}$$

se deduce que

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t \quad \text{y} \quad z(t) = t.$$

Por tanto, el campo de fuerzas puede expresarse como

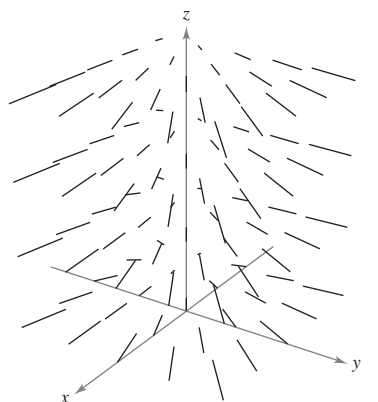
$$\mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) = -\frac{1}{2}\cos t\mathbf{i} - \frac{1}{2}\sin t\mathbf{j} + \frac{1}{4}\mathbf{k}.$$

Para hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas al moverse la partícula a lo largo de la curva C , utilice el hecho de que

$$\mathbf{r}'(t) = -\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

y escriba lo siguiente.

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_a^b \mathbf{F}(x(t), y(t), z(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \\ &= \int_0^{3\pi} \left(-\frac{1}{2}\cos t\mathbf{i} - \frac{1}{2}\sin t\mathbf{j} + \frac{1}{4}\mathbf{k} \right) \cdot (-\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}) dt \\ &= \int_0^{3\pi} \left(\frac{1}{2}\sin t \cos t - \frac{1}{2}\sin t \cos t + \frac{1}{4} \right) dt \\ &= \int_0^{3\pi} \frac{1}{4} dt \\ &= \frac{1}{4}t \Big|_0^{3\pi} \\ &= \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$



Generado por Mathematica

Figura 6.15

► **TECNOLOGÍA** La gráfica, generada por computadora, del campo de fuerzas del ejemplo 6 que se muestra en la figura 6.15 indica que todo vector en los puntos del campo de fuerzas apunta hacia el eje z .

Para las integrales de línea de funciones vectoriales, la orientación de la curva C es importante. Si la orientación de la curva se invierte, el vector tangente unitario $\mathbf{T}(t)$ cambia a $-\mathbf{T}(t)$, y obtiene

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

EJEMPLO 7 Orientar y parametrizar una curva

Sea $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ y evalúe la integral de línea

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

para las curvas parabólicas mostradas en la figura 6.16.

- a. $C_1: \mathbf{r}_1(t) = (4 - t)\mathbf{i} + (4t - t^2)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 3$
- b. $C_2: \mathbf{r}_2(t) = t\mathbf{i} + (4t - t^2)\mathbf{j}, \quad 1 \leq t \leq 4$

Solución

a. Como $\mathbf{r}_1'(t) = -\mathbf{i} + (4 - 2t)\mathbf{j}$ y

$$\mathbf{F}(x(t), y(t)) = (4t - t^2)\mathbf{i} + (4 - t)^2\mathbf{j}$$

la integral de línea es

$$\begin{aligned} \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^3 [(4t - t^2)\mathbf{i} + (4 - t)^2\mathbf{j}] \cdot [-\mathbf{i} + (4 - 2t)\mathbf{j}] dt \\ &= \int_0^3 (-4t + t^2 + 64 - 64t + 20t^2 - 2t^3) dt \\ &= \int_0^3 (-2t^3 + 21t^2 - 68t + 64) dt \\ &= \left[-\frac{t^4}{2} + 7t^3 - 34t^2 + 64t \right]_0^3 \\ &= \frac{69}{2}. \end{aligned}$$

b. Como $\mathbf{r}_2'(t) = \mathbf{i} + (4 - 2t)\mathbf{j}$ y

$$\mathbf{F}(x(t), y(t)) = (4t - t^2)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$$

la integral de línea es

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_1^4 [(4t - t^2)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}] \cdot [\mathbf{i} + (4 - 2t)\mathbf{j}] dt \\ &= \int_1^4 (4t - t^2 + 4t^2 - 2t^3) dt \\ &= \int_1^4 (-2t^3 + 3t^2 + 4t) dt \\ &= \left[-\frac{t^4}{2} + t^3 + 2t^2 \right]_1^4 \\ &= -\frac{69}{2}. \end{aligned}$$

El resultado del inciso (b) es el negativo del inciso (a) porque C_1 y C_2 representan orientaciones opuestas del mismo segmento parabólico.

$$\begin{aligned} C_1: \mathbf{r}_1(t) &= (4 - t)\mathbf{i} + (4t - t^2)\mathbf{j} \\ C_2: \mathbf{r}_2(t) &= t\mathbf{i} + (4t - t^2)\mathbf{j} \end{aligned}$$

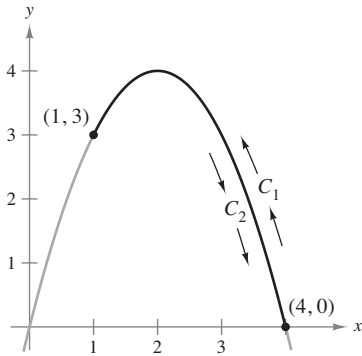


Figura 6.16

••• **COMENTARIO** Aunque en el ejemplo 7 el valor de la integral de línea depende de la orientación de C , no depende de la parametrización de C . Para ver esto, sea C_3 la curva representada por $\mathbf{r}_3 = (t + 2)\mathbf{i} + (4 - t^2)\mathbf{j}$ donde $-1 \leq t \leq 2$. La gráfica de esta curva es el mismo segmento parabólico que se muestra en la figura 6.16. ¿El valor de la integral de línea sobre C_3 coincide con el valor sobre C_1 o C_2 ? ¿Por qué sí o por qué no?



Integrales de línea en forma diferencial

Una segunda forma normalmente utilizada de las integrales de línea se deduce de la notación de campo vectorial usada en la sección 6.1. Si \mathbf{F} es un campo vectorial de la forma $\mathbf{F}(x, y) = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ y C está dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ entonces $\mathbf{F} \times d\mathbf{r}$ se escribe a menudo como $M dx + N dy$.

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} dt \\ &= \int_a^b (M\mathbf{i} + N\mathbf{j}) \cdot (x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}) dt \\ &= \int_a^b \left(M \frac{dx}{dt} + N \frac{dy}{dt} \right) dt \\ &= \int_C (M dx + N dy)\end{aligned}$$

.....►
COMENTARIO Los paréntesis se omiten a menudo en esta forma diferencial, como se muestra a continuación

$$\int_C M dx + N dy$$

Con tres variables, la forma diferencial es

$$\int_C M dx + N dy + P dz.$$

Esta **forma diferencial** puede extenderse a tres variables.

EJEMPLO 8

Evaluar una integral de línea en forma diferencial

Sea C el círculo de radio 3 dado por

$$\mathbf{r}(t) = 3 \cos t \mathbf{i} + 3 \sin t \mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

como se muestra en la figura 6.17. Evalúe la integral de línea

$$\int_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy.$$

Solución Como $x = 3 \cos t$ y $y = 3 \sin t$, se tiene $dx = -3 \sin t dt$ y $dy = 3 \cos t dt$. Por tanto, la integral de línea es

$$\begin{aligned}\int_C M dx + N dy &= \int_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy \\ &= \int_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy \\ &= \int_0^{2\pi} [(27 \sin^3 t)(-3 \sin t) + (27 \cos^3 t + 81 \cos t \sin^2 t)(3 \cos t)] dt \\ &= 81 \int_0^{2\pi} (\cos^4 t - \sin^4 t + 3 \cos^2 t \sin^2 t) dt \\ &= 81 \int_0^{2\pi} \left(\cos^2 t - \sin^2 t + \frac{3}{4} \sin^2 2t \right) dt \\ &= 81 \int_0^{2\pi} \left[\cos 2t + \frac{3}{4} \left(\frac{1 - \cos 4t}{2} \right) \right] dt \\ &= 81 \left[\frac{\sin 2t}{2} + \frac{3}{8} t - \frac{3 \sin 4t}{32} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{243\pi}{4}.\end{aligned}$$

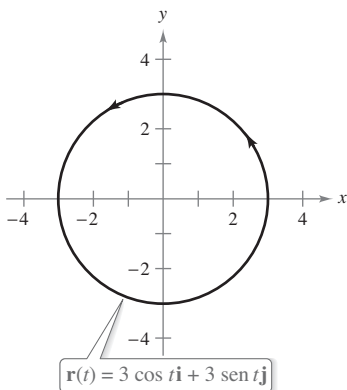


Figura 6.17

La orientación de C afecta el valor de la forma diferencial de una integral de línea. Específicamente, si $-C$ tiene orientación opuesta a C , entonces

$$\int_{-C} M dx + N dy = - \int_C M dx + N dy.$$

Por tanto, de las tres formas de la integral de línea presentadas en esta sección, la orientación de C no afecta a la forma $\int_C f(x, y) ds$, pero sí afecta a la forma vectorial y la forma diferencial.

Para las curvas representadas por $y = g(x)$, $a \leq x \leq b$, puede hacer $x = t$ y obtener la forma paramétrica

$$x = t \quad y = g(t), \quad a \leq t \leq b.$$

Como $dx = dt$ en esta forma, tiene la opción de evaluar la integral de línea en la variable x o en la variable t . Esto se demuestra en el ejemplo 9.

EJEMPLO 9 Evaluar una integral de línea en forma diferencial

Evalúe

$$\int_C y \, dx + x^2 \, dy$$

donde C es el arco parabólico dado por $y = 4x - x^2$ desde $(4, 0)$ a $(1, 3)$, como se muestra en la figura 6.18.

Solución En lugar de convertir al parámetro t , puede simplemente conservar la variable x y escribir

$$y = 4x - x^2 \quad \Rightarrow \quad dy = (4 - 2x) \, dx.$$

Entonces, en la dirección desde $(4, 0)$ a $(1, 3)$, la integral de línea es

$$\begin{aligned} \int_C y \, dx + x^2 \, dy &= \int_4^1 [(4x - x^2) \, dx + x^2(4 - 2x) \, dx] \\ &= \int_4^1 (4x + 3x^2 - 2x^3) \, dx \\ &= \left[2x^2 + x^3 - \frac{x^4}{2} \right]_4^1 \\ &= \frac{69}{2}. \end{aligned}$$

Vea el ejemplo 7. ■

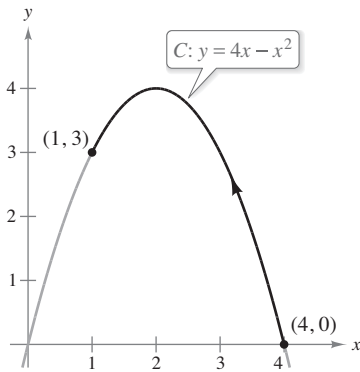


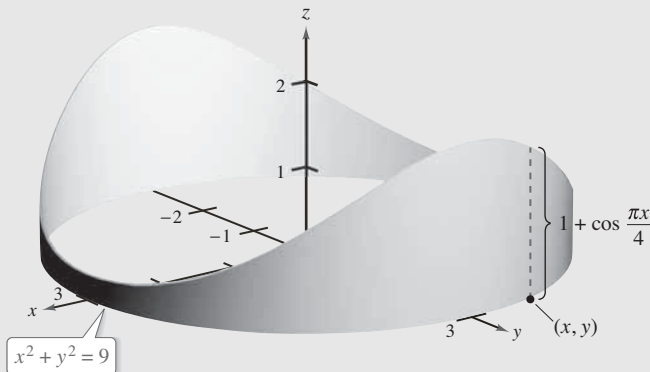
Figura 6.18

Exploración

Hallar el área de la superficie lateral La figura muestra un pedazo de hojalata cortado de un cilindro circular. La base del cilindro circular se representa por $x^2 + y^2 = 9$. Para todo punto (x, y) de la base, la altura del objeto está dada por

$$f(x, y) = 1 + \cos \frac{\pi x}{4}.$$

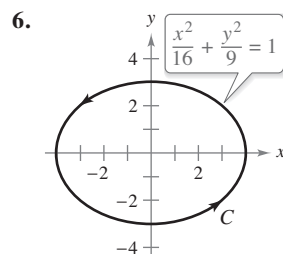
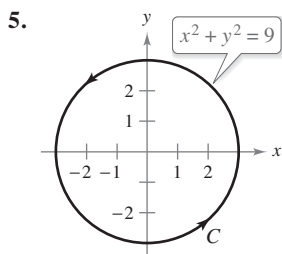
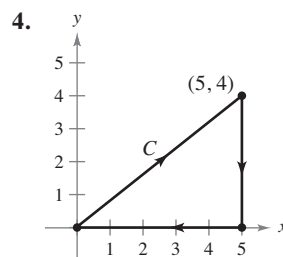
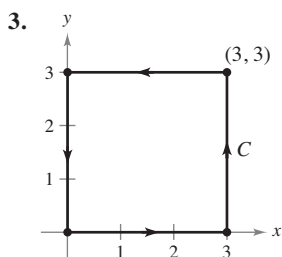
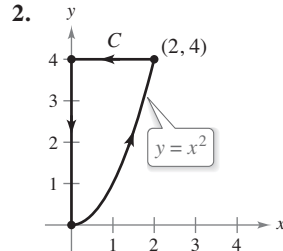
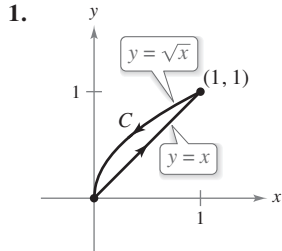
Explique cómo utilizar una integral de línea para hallar el área de la superficie del pedazo de hojalata.



6.2 Ejercicios

Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Determinar una parametrización suave por partes En los ejercicios 1-6, encuentre una parametrización suave por partes de la trayectoria C . (Existe más de una respuesta correcta.)



Evaluar una integral de línea En los ejercicios 7-10, evalúe la integral de línea a lo largo de la trayectoria dada.

7. $\int_C xy \, ds$

$C: \mathbf{r}(t) = 4t\mathbf{i} + 3t\mathbf{j}$
 $0 \leq t \leq 1$

8. $\int_C 3(x - y) \, ds$

$C: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (2 - t)\mathbf{j}$
 $0 \leq t \leq 2$

9. $\int_C (x^2 + y^2 + z^2) \, ds$

$C: \mathbf{r}(t) = \sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
 $0 \leq t \leq \pi/2$

10. $\int_C 2xyz \, ds$

$C: \mathbf{r}(t) = 12t\mathbf{i} + 5t\mathbf{j} + 84t\mathbf{k}$
 $0 \leq t \leq 1$

Evaluar una integral de línea En los ejercicios 11-14, (a) encuentre una parametrización de la trayectoria y (b) evalúe

$\int_C (x^2 + y^2) \, ds$

a lo largo de C .

11. C : segmento de recta de $(0, 0)$ a $(1, 1)$.

12. C : segmento de recta de $(0, 0)$ a $(2, 4)$.

13. C : círculo $x^2 + y^2 = 1$ recorrido en sentido contrario a las manecillas del reloj, desde $(1, 0)$ hasta $(0, 1)$.

14. C : círculo $x^2 + y^2 = 4$ recorrido en sentido contrario a las manecillas del reloj, desde $(2, 0)$ hasta $(0, 2)$.

Evaluar una integral de línea En los ejercicios 15-18, (a) encuentre una parametrización de la trayectoria C y (b) evalúe

$\int_C (x + 4\sqrt{y}) \, ds$

a lo largo de C .

15. C : eje x de $x = 0$ a $x = 1$.

16. C : eje y de $y = 1$ a $y = 9$.

17. C : triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$, recorrido en sentido contrario a las manecillas del reloj.

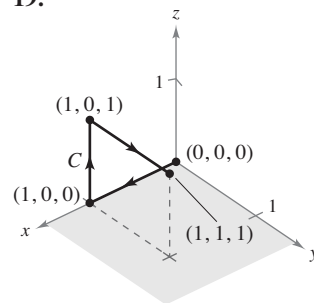
18. C : cuadrado cuyos vértices son $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$ y $(0, 2)$, recorrido en sentido contrario a las manecillas del reloj.

Determinar una parametrización y evaluar una integral de línea En los ejercicios 19-20, (a) encuentre una parametrización continua por partes de la trayectoria que se muestra en la figura y (b) evalúe

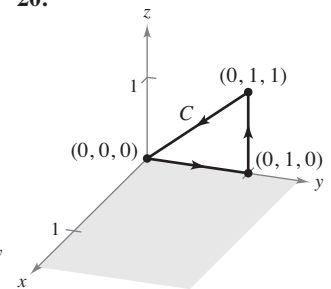
$\int_C (2x + y^2 - z) \, ds$

a lo largo de C .

19.



20.



Masa En los ejercicios 21 y 22, encuentre la masa total de dos vueltas completas de un resorte de densidad ρ y que tiene forma de hélice circular.

$\mathbf{r}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 4\pi.$

21. $\rho(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$

22. $\rho(x, y, z) = z$

Masa En los ejercicios 23-26, encuentre la masa total del cable de densidad ρ .

23. $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}, \rho(x, y) = x + y + 2, 0 \leq t \leq \pi$

24. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}, \rho(x, y) = \frac{3}{4}y, 0 \leq t \leq 1$

25. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \rho(x, y, z) = kz (k > 0), 1 \leq t \leq 3$

26. $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}, \rho(x, y, z) = k + z (k > 0), 0 \leq t \leq 2\pi$

Evaluar una integral de línea de un campo vectorial En los ejercicios 27-32, evalúe

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

donde C está representada por $\mathbf{r}(t)$.

27. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

$C: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j}, 0 \leq t \leq 1$

28. $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

$C: \mathbf{r}(t) = 4 \cos t\mathbf{i} + 4 \sin t\mathbf{j}, 0 \leq t \leq \pi/2$

29. $\mathbf{F}(x, y) = 3x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j}$

$C: \mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}, 0 \leq t \leq \pi/2$

30. $\mathbf{F}(x, y) = 3x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j}$

$C: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \sqrt{4 - t^2}\mathbf{j}, -2 \leq t \leq 2$

31. $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$

$C: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 1$

32. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$

$C: \mathbf{r}(t) = 2 \sin t\mathbf{i} + 2 \cos t\mathbf{j} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}, 0 \leq t \leq \pi$



Evaluar una integral de línea de un campo vectorial En los ejercicios 33 y 34, utilice un sistema algebraico por computadora y calcule la integral

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

donde C se representa por $\mathbf{r}(t)$.

33. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2z\mathbf{i} + 6y\mathbf{j} + yz^2\mathbf{k}$

$C: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \ln t\mathbf{k}, 1 \leq t \leq 3$

34. $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

$C: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 2$

Trabajo En los ejercicios 35-40, encuentre el trabajo realizado por el campo de fuerzas \mathbf{F} sobre una partícula que se mueve a lo largo de la trayectoria dada.

35. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$

$C: x = t, y = t^3$ desde $(0, 0)$ a $(2, 8)$

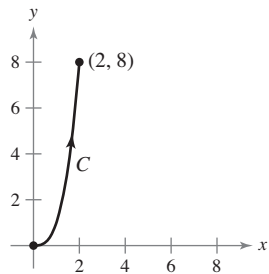


Figura para 35

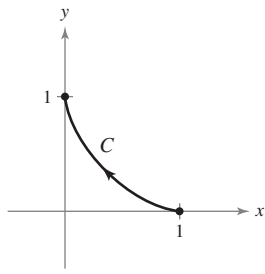


Figura para 36

36. $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} - xy\mathbf{j}$

$C: x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$ desde $(1, 0)$ a $(0, 1)$

37. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

C : alrededor del triángulo con vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$.
(Sugerencia: Vea el ejercicio 17a.)

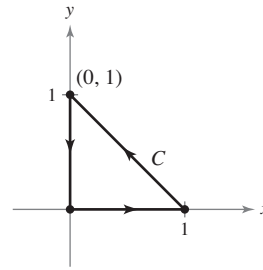


Figura para 37

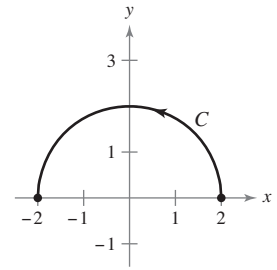


Figura para 38

38. $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$

C : alrededor del semicírculo $y = \sqrt{4 - x^2}$ desde $(2, 0)$ hasta $(-2, 0)$

39. $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 5z\mathbf{k}$

$C: \mathbf{r}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 2\pi$

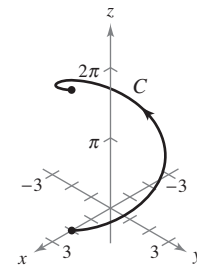


Figura para 39

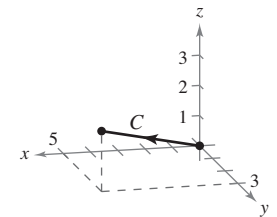


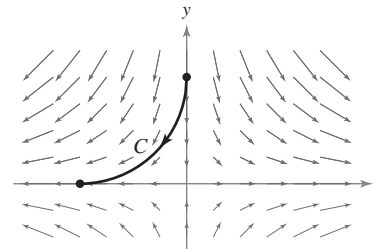
Figura para 40

40. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$

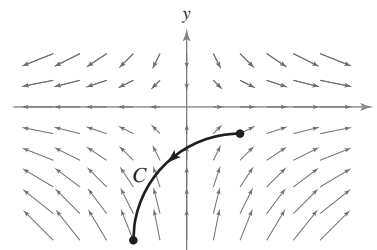
C : recta desde $(0, 0, 0)$ hasta $(5, 3, 2)$

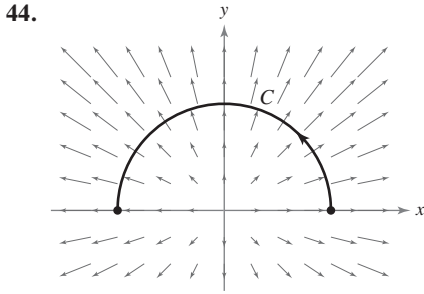
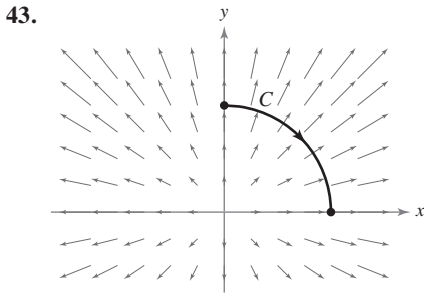
Trabajo En los ejercicios 41-44, determine si el trabajo efectuado a lo largo de la trayectoria C es positivo, negativo o cero. Explique

41.



42.





Evaluar una integral de línea de un campo vectorial En los ejercicios 45 y 46, evalúe $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para cada curva. Analice la orientación de la curva y su efecto sobre el valor de la integral.

45. $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$
 (a) $\mathbf{r}_1(t) = 2t\mathbf{i} + (t - 1)\mathbf{j}, \quad 1 \leq t \leq 3$
 (b) $\mathbf{r}_2(t) = 2(3 - t)\mathbf{i} + (2 - t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2$
46. $\mathbf{F}(x, y) = x^2y\mathbf{i} + xy^3/2\mathbf{j}$
 (a) $\mathbf{r}_1(t) = (t + 1)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 2$
 (b) $\mathbf{r}_2(t) = (1 + 2 \cos t)\mathbf{i} + (4 \cos^2 t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq \pi/2$

Demostrar una propiedad En los ejercicios 47-50, demuestre la propiedad

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

independientemente de cuáles sean los puntos inicial y final de C , si el vector tangente es ortogonal al campo de fuerzas \mathbf{F} .

47. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ 48. $\mathbf{F}(x, y) = -3y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
 $C: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - 2t\mathbf{j}$ $C: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - t^3\mathbf{j}$
49. $\mathbf{F}(x, y) = (x^3 - 2x^2)\mathbf{i} + \left(x - \frac{y}{2}\right)\mathbf{j}$
 $C: \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$
50. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
 $C: \mathbf{r}(t) = 3 \sin t\mathbf{i} + 3 \cos t\mathbf{j}$

Evaluar una integral de línea en forma diferencial En los ejercicios 51-54, evalúe la integral de línea a lo largo de la trayectoria dada por $x = 2t, y = 10t$, donde $0 \leq t \leq 1$.

51. $\int_C (x + 3y^2) dy$ 52. $\int_C (x + 3y^2) dx$
 53. $\int_C xy dx + y dy$ 54. $\int_C (3y - x) dx + y^2 dy$

Evaluar una integral de línea en forma diferencial En los ejercicios 55-62, evalúe la integral

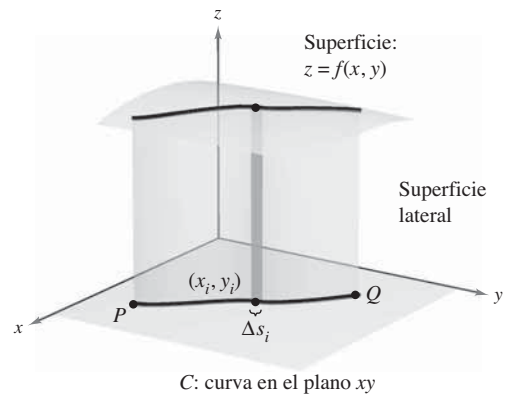
$$\int_C (2x - y) dx + (x + 3y) dy$$

a lo largo de la trayectoria C .

55. C : eje x desde $x = 0$ hasta $x = 5$
 56. C : eje y desde $y = 0$ hasta $y = 2$
 57. C : los segmentos de recta de $(0, 0)$ a $(3, 0)$ y de $(3, 0)$ a $(3, 3)$
 58. C : los segmentos de recta de $(0, 0)$ a $(0, -3)$ y de $(0, -3)$ a $(2, -3)$
 59. C : arco sobre $y = 1 - x^2$ desde $(0, 1)$ hasta $(1, 0)$
 60. C : arco sobre $y = x^{3/2}$ desde $(0, 0)$ hasta $(4, 8)$
 61. C : trayectoria parabólica $x = t, y = 2t^2$ desde $(0, 0)$ hasta $(2, 8)$
 62. C : trayectoria elíptica $x = 4 \sin t, y = 3 \cos t$ desde $(0, 3)$ hasta $(4, 0)$

Área de una superficie lateral En los ejercicios 63-70, encuentre el área de la superficie lateral (vea la figura) sobre la curva en el plano xy y bajo la superficie $z = f(x, y)$, donde

$$\text{Área de la superficie lateral} = \int_C f(x, y) ds.$$



63. $f(x, y) = h, \quad C$: línea desde $(0, 0)$ hasta $(3, 4)$
 64. $f(x, y) = y, \quad C$: línea desde $(0, 0)$ hasta $(4, 4)$
 65. $f(x, y) = xy, \quad C: x^2 + y^2 = 1$ desde $(1, 0)$ hasta $(0, 1)$
 66. $f(x, y) = x + y, \quad C: x^2 + y^2 = 1$ desde $(1, 0)$ hasta $(0, 1)$
 67. $f(x, y) = h, \quad C: y = 1 - x^2$ desde $(1, 0)$ hasta $(0, 1)$
 68. $f(x, y) = y + 1, \quad C: y = 1 - x^2$ desde $(1, 0)$ hasta $(0, 1)$
 69. $f(x, y) = xy, \quad C: y = 1 - x^2$ desde $(1, 0)$ hasta $(0, 1)$
 70. $f(x, y) = x^2 - y^2 + 4, \quad C: x^2 + y^2 = 4$
71. **Diseño de ingeniería** Un motor de tractor tiene un componente de acero con una base circular representada por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \sin t\mathbf{j}$. Su altura está dada por $z = 1 + y^2$. Todas las medidas están en centímetros.
 (a) Encuentre el área de la superficie lateral del componente.
 (b) El componente tiene forma de capa de 0.2 centímetros de espesor. Utilice el resultado del inciso (a) para aproximar la cantidad de acero empleada para su fabricación.
 (c) Haga un dibujo del componente.

•• 72. Diseño de edificios •••••

La altura del techo de un edificio está dada por $z = 20 + \frac{1}{4}x$. Una de las paredes sigue una trayectoria representada por $y = x^{3/2}$. Calcule el área de la superficie de la pared si $0 \leq x \leq 40$. Todas las medidas se dan en pies.



Momentos de inercia Considere un cable de densidad $\rho(x, y)$ dado por la curva en el espacio

$C: \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq b.$

Los momentos de inercia con respecto a los ejes x y y están dados por

$I_x = \int_C y^2 \rho(x, y) ds \quad \text{e} \quad I_y = \int_C x^2 \rho(x, y) ds.$

En los ejercicios 73 y 74, encuentre los momentos de inercia del cable de densidad ρ .

- 73. El cable se encuentra a lo largo de $\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j}$, $0 \leq t < 2\pi$ y $a > 0$, su densidad es $\rho(x, y) = 1$.
- 74. El cable se encuentra a lo largo de $\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j}$, $0 \leq t < 2\pi$ y $a > 0$, su densidad es $\rho(x, y) = y$.

75. Investigación El borde exterior de un sólido con lados verticales y que descansa en el plano xy , se modela por $\mathbf{r}(t) = 3 \cos t \mathbf{i} + 3 \sin t \mathbf{j} + (1 + \sin^2 2t)\mathbf{k}$, donde todas las medidas se dan en centímetros. La intersección del plano $y = b$ ($-3 < b < 3$) con la parte superior del sólido es una recta horizontal.

- (a) Utilice un sistema algebraico por computadora para representar gráficamente el sólido.
- (b) Utilice un sistema algebraico por computadora para aproximar el área de la superficie lateral del sólido.
- (b) Encuentre (si es posible) el volumen del sólido.

76. Trabajo Una partícula se mueve a lo largo de la trayectoria $y = x^2$ desde el punto $(0, 0)$, hasta el punto $(1, 1)$. El campo de fuerzas \mathbf{F} se mide en cinco puntos a lo largo de la trayectoria y los resultados se muestran en la tabla. Use la regla de Simpson o una herramienta de graficación para aproximar el trabajo efectuado por el campo de fuerza.

(x, y)	$(0, 0)$	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{16})$	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$	$(\frac{3}{4}, \frac{9}{16})$	$(1, 1)$
$\mathbf{F}(x, y)$	$\langle 5, 0 \rangle$	$\langle 3.5, 1 \rangle$	$\langle 2, 2 \rangle$	$\langle 1.5, 3 \rangle$	$\langle 1, 5 \rangle$

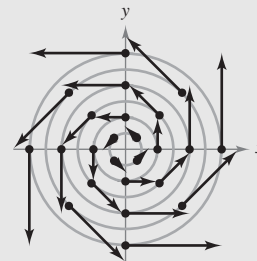
- 77. **Trabajo** Determine el trabajo realizado por una persona que pesa 175 libras y que camina exactamente una revolución hacia arriba en una escalera de forma helicoidal circular de 3 pies de radio si la persona sube 10 pies.
- 78. **Investigación** Determine el valor c tal que el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y) = 15[(4 - x^2)\mathbf{i} - xy\mathbf{j}]$ sobre un objeto que se mueve a lo largo de la trayectoria parabólica $y = c(1 - x^2)$ entre los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ sea mínimo. Compare el resultado con el trabajo requerido para mover el objeto a lo largo de la trayectoria recta que une esos dos puntos.

DESARROLLO DE CONCEPTOS

- 79. **Integral de línea** Defina la integral de línea de una función f a lo largo de una curva suave C en el plano y en el espacio. ¿Cómo evalúa la integral de línea como una integral definida?
- 80. **Integral de línea de un campo vectorial** Defina una integral de línea de un campo vectorial continuo \mathbf{F} sobre una curva suave C . ¿Cómo evalúa la integral de línea como integral definida?
- 81. **Ordenar las superficies** Ordene las superficies en forma ascendente del área de la superficie lateral bajo la superficie y sobre la curva desde $y = \sqrt{x}$ desde $(0, 0)$ hasta $(4, 2)$ en el plano xy . Explique el orden elegido sin hacer cálculo alguno.
 - (a) $z_1 = 2 + x$
 - (b) $z_2 = 5 + x$
 - (c) $z_3 = 2$
 - (d) $z_4 = 10 + x + 2y$



82. ¿CÓMO LO VE? En cada uno de los incisos siguientes, determine si el trabajo realizado para mover un objeto del primero hasta el segundo punto a través del campo de fuerzas que se muestra en la figura es positivo, negativo o cero. Explique su respuesta.



- (a) Desde $(-3, 3)$ hasta $(3, 3)$.
- (b) Desde $(-3, 0)$ hasta $(0, 3)$.
- (c) Desde $(5, 0)$ hasta $(0, 3)$.

¿Verdadero o falso? En los ejercicios 83-86, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que demuestre que es falso.

- 83. Si C está dada por $x(t) = t, y(t) = t$, donde $0 \leq t \leq 1$, entonces $\int_C xy ds = \int_0^1 t^2 dt$.
- 84. Si $C_2 = -C_1$, entonces $\int_{C_1} f(x, y) ds + \int_{C_2} f(x, y) ds = 0$.
- 85. Las funciones vectoriales $\mathbf{r}_1 = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, donde $0 \leq t \leq 1$ y $\mathbf{r}_2 = (1 - t)\mathbf{i} + (1 - t^2)\mathbf{j}$, donde $0 \leq t \leq 1$ definen la misma curva.
- 86. Si $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = 0$, entonces \mathbf{F} y \mathbf{T} son ortogonales.
- 87. **Trabajo** Considere una partícula que se mueve a través del campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y) = (y - x)\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$ del punto $(0, 0)$ al punto $(0, 1)$ a lo largo de la curva $x = kt(1 - t), y = t$. Encuentre el valor de k , tal que el trabajo realizado por el campo de fuerzas sea 1.

6.3 Teoremas de integrales (Resumen*)

- Teorema de Green.
- Teorema de la divergencia (de Gauss).
- Teorema de Stokes.

* El desarrollo completo del capítulo se encuentra disponible en línea en el apéndice F. Acceda a www.cengage.com e ingrese con el ISBN de la obra.

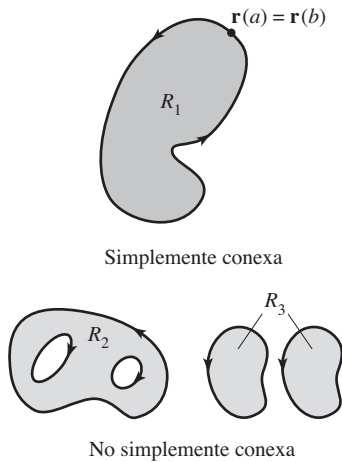
En esta sección presentamos de manera resumida los tres teoremas de integrales más importantes del cálculo: el teorema de Green, el teorema de la divergencia (de Gauss) y el teorema de Stokes.

En cada caso, se da una breve introducción del correspondiente teorema, se enuncia de manera formal sin demostración y se presenta un ejemplo de su aplicación.

Un estudio más profundo de estos resultados se puede leer en las secciones:

- 6.4 Campos vectoriales conservativos e independencia de la trayectoria.
- 6.5 Teorema de Green.
- 6.6 Superficies paramétricas.
- 6.7 Integrales de superficie.
- 6.8 Teorema de la divergencia (de Gauss).
- 6.9 Teorema de Stokes.

Los cuales aparecen en línea en el sitio www.cengage.com e ingrese con el ISBN de la obra.



Teorema de Green

En esta sección estudiará el **teorema de Green**, que recibe este nombre en honor del matemático inglés George Green (1793-1841). Este teorema establece que el valor de una integral doble sobre una región *simplemente conexa* R está determinado por el valor de una integral de línea a lo largo de la frontera de R .

Una curva C dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, donde $a \leq t \leq b$, es **simple** si no se corta a sí misma, es decir, $\mathbf{r}(c) \neq \mathbf{r}(d)$ para todo c y d en el intervalo abierto (a, b) . Una región plana R es **simplemente conexa** si cada curva cerrada simple en R encierra solo los puntos que están en R (ver la figura). De manera informal, una región simplemente conexa no puede consistir de partes separadas o con agujeros.

TEOREMA Teorema de Green

Sea R una región simplemente conexa cuya frontera es una curva C suave por partes, orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj (es decir, C se recorre *una vez* de manera que la región R siempre esté a la *izquierda*). Si M y N tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a R , entonces

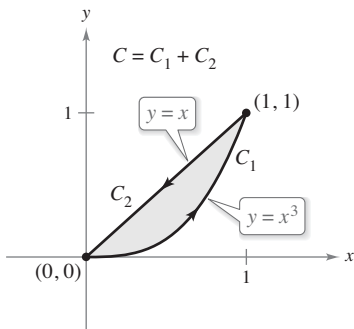
$$\int_C M dx + N dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA.$$

Un signo de integral con un círculo es algunas veces utilizado para indicar una integral de línea alrededor de una curva cerrada simple, como se muestra a continuación. Para indicar la orientación de la frontera, se puede utilizar una flecha. Por ejemplo, en la segunda integral, la flecha indica que la frontera C está orientada en sentido contrario a las manecillas del reloj.

$$1. \oint_C M dx + N dy \quad 2. \oint_C M dx + N dy$$

EJEMPLO

Aplicar el teorema de Green



C es simple y cerrada, y la región R siempre se encuentra a la izquierda de C .

Utilice el teorema de Green para evaluar la integral de línea

$$\int_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy$$

donde C es la trayectoria desde $(0, 0)$, hasta $(1, 1)$ a lo largo de la gráfica de $y = x^3$, desde $(1, 1)$ hasta $(0, 0)$ a lo largo de la gráfica de $y = x$, como se muestra en la figura.

Solución Como $M = y^3$ y $N = x^3 + 3xy^2$, tiene que

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 3y^2.$$

Aplicando el teorema de Green, tiene entonces

$$\begin{aligned} \int_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy &= \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA \\ &= \int_0^1 \int_{x^3}^x [(3x^2 + 3y^2) - 3y^2] dy dx \\ &= \int_0^1 \int_{x^3}^x 3x^2 dy dx \\ &= \int_0^1 3x^2 y \Big|_{x^3}^x dx \\ &= \int_0^1 (3x^3 - 3x^5) dx \\ &= \left[\frac{3x^4}{4} - \frac{x^6}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

El teorema de Green no se puede aplicar a toda integral de línea. Entre las restricciones establecidas en el teorema, la curva C debe ser simple y cerrada. Sin embargo, cuando el teorema de Green es aplicable, puede ahorrar tiempo. Para ver esto, trate de aplicar las técnicas descritas en la sección 6.2 para evaluar la integral de línea del ejemplo 1. Para esto, necesita escribir la integral de línea como

$$\begin{aligned} \int_C y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy &= \int_{C_1} y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy + \int_{C_2} y^3 dx + (x^3 + 3xy^2) dy \end{aligned}$$

donde C_1 es la trayectoria cúbica dada por

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}$$

desde $t = 0$ hasta $t = 1$ y C_2 es el segmento de recta dado por

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{i} + (1 - t)\mathbf{j}$$

desde $t = 0$ hasta $t = 1$.

**GEORGE GREEN
(1793-1841)**

Green, autodidacta, hijo de un molinero, publicó por primera vez el teorema que lleva su nombre en 1828 en un ensayo sobre electricidad y magnetismo. En ese tiempo no había casi ninguna teoría matemática para explicar los fenómenos eléctricos. "Considerando cuán deseable sería que una energía de naturaleza universal, como la electricidad, fuera susceptible, hasta donde fuera posible, de someterse al cálculo... me vi impulsado a intentar descubrir cualquier posible relación general entre esta función y las cantidades de electricidad en los cuerpos que la producen."

Teorema de la divergencia

Recuerde que una forma alternativa del teorema de Green es

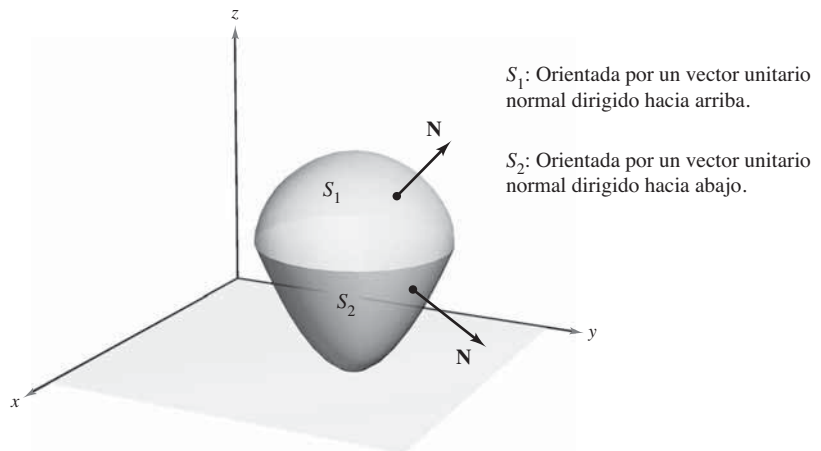
$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, ds &= \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) dA \\ &= \iint_R \operatorname{div} \mathbf{F} \, dA.\end{aligned}$$

De manera análoga, el **teorema de la divergencia** da la relación entre una integral triple sobre una región sólida Q y una integral de superficie sobre la superficie de Q . En el enunciado del teorema, la superficie S es **cerrada** en el sentido de que forma toda la frontera completa del sólido Q . Ejemplos de superficies cerradas surgen de las regiones acotadas por esferas, elipsoides, cubos, tetraedros o combinaciones de estas superficies. Suponga que Q es una región sólida sobre la cual se evalúa una integral triple, y que la superficie cerrada S está orientada mediante vectores normales unitarios dirigidos hacia el *exterior*, como se muestra en la figura. Con estas restricciones sobre S y Q , el teorema de la divergencia se puede establecer como se muestra en la figura siguiente.



CARL FRIEDRICH GAUSS
(1777-1855)

Al teorema de la divergencia también se le llama *teorema de Gauss*, en honor al famoso matemático alemán Carl Friedrich Gauss. Gauss es reconocido, junto con Newton y Arquímedes, como uno de los tres más grandes matemáticos de la historia. Una de sus muchas contribuciones a las matemáticas la hizo a los 22 años, cuando, como parte de su tesis doctoral, demostró el *teorema fundamental del álgebra*. Consulte LarsonCalculus.com para leer más acerca de esta biografía.



TEOREMA Teorema de la divergencia

Sea Q una región sólida acotada por una superficie cerrada S orientada por un vector unitario normal dirigido hacia el exterior de Q . Si \mathbf{F} es un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en Q , entonces

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS = \iiint_Q \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV.$$

COMENTARIO Como se indica arriba, al teorema de la divergencia a veces se le llama *teorema de Gauss*. También se le llama *teorema de Ostrogradsky*, en honor al matemático ruso Michel Ostrogradsky (1801-1861).

EJEMPLO

Aplicar el teorema de la divergencia

Sea Q la región sólida limitada o acotada por los planos coordenados y el plano

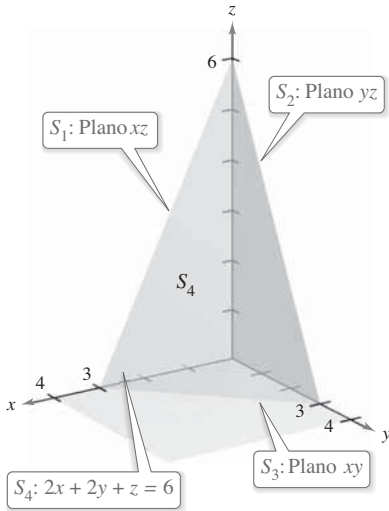
$$2x + 2y + z = 6$$

y sea $\mathbf{F} = xi + y^2j + zk$. Determine

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS$$

donde S es la superficie de Q .

Solución En la figura se ve que Q está limitada o acotada por cuatro superficies. Por tanto, se necesitarán cuatro *integrales de superficie* para evaluarla



$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS.$$

Sin embargo, por el teorema de la divergencia, solo necesita una integral triple. Como

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F} &= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \\ &= 1 + 2y + 1 \\ &= 2 + 2y \end{aligned}$$

tiene

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS &= \iiint_Q \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV \\ &= \int_0^3 \int_0^{3-y} \int_0^{6-2x-2y} (2 + 2y) \, dz \, dx \, dy \\ &= \int_0^3 \int_0^{3-y} (2z + 2yz) \Big|_0^{6-2x-2y} \, dx \, dy \\ &= \int_0^3 \int_0^{3-y} (12 - 4x + 8y - 4xy - 4y^2) \, dx \, dy \\ &= \int_0^3 \left[12x - 2x^2 + 8xy - 2x^2y - 4xy^2 \right]_0^{3-y} \, dy \\ &= \int_0^3 (18 + 6y - 10y^2 + 2y^3) \, dy \\ &= \left[18y + 3y^2 - \frac{10y^3}{3} + \frac{y^4}{2} \right]_0^3 \\ &= \frac{63}{2}. \end{aligned}$$

▷ **TECNOLOGÍA** Si tiene acceso a un sistema algebraico por computadora que pueda evaluar integrales iteradas triples, utilícelo para verificar el resultado del ejemplo 1. Al usar este sistema algebraico por computadora observe que el primer paso es convertir la integral triple en una integral iterada, este paso debe hacerse a mano. Para adquirir práctica para realizar este paso importante, encuentre los límites de integración de las integrales iteradas siguientes. Después use una computadora para comprobar que el valor es el mismo que el obtenido en el ejemplo.

$$\int_2^? \int_2^? \int_2^? (2 + 2y) \, dy \, dz \, dx, \quad \int_?^? \int_?^? \int_?^? (2 + 2y) \, dx \, dy \, dz$$



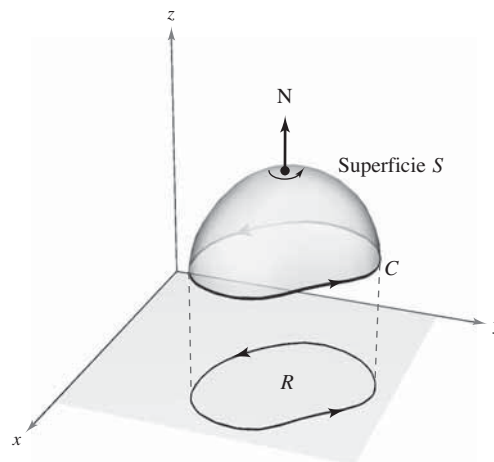
GEORGE GABRIEL STOKES
(1819-1903)

Stokes se convirtió en profesor Lucasiano de matemáticas en Cambridge en 1849. Cinco años después, publicó el teorema que lleva su nombre como examen para optar a un premio de investigación. Consulte LarsonCalculus.com para leer más acerca de esta biografía.

Teorema de Stokes

Un segundo teorema, análogo al teorema de Green, pero con más dimensiones, es el **teorema de Stokes**, llamado así en honor al físico matemático inglés George Gabriel Stokes. Stokes formó parte de un grupo de físicos matemáticos ingleses conocido como la Escuela de Cambridge, entre los que se encontraban William Thomson (Lord Kelvin) y James Clerk Maxwell. Además de hacer contribuciones a la física, Stokes trabajó con series infinitas y con ecuaciones diferenciales, así como con los resultados de integración que se presentan en esta sección.

El teorema de Stokes establece la relación entre una integral de superficie sobre una superficie orientada S y una integral de línea a lo largo de una curva cerrada C en el espacio que forma la frontera o el borde de S , como se muestra en la primera figura. La dirección positiva a lo largo de C es la dirección en sentido contrario a las manecillas del reloj con respecto al vector normal \mathbf{N} . Es decir, si se imagina que toma el vector normal \mathbf{N} con la mano derecha, con el dedo pulgar apuntando en la dirección de \mathbf{N} , los demás dedos apuntarán en la dirección positiva de C , como se muestra en la segunda figura.



La dirección a lo largo de C es en sentido contrario a las manecillas del reloj con respecto a \mathbf{N} .

TEOREMA Teorema de Stokes

Sea S una superficie orientada con vector unitario normal \mathbf{N} , acotada por una curva cerrada simple, suave a trozos C , con orientación positiva. Si \mathbf{F} es un campo vectorial cuyas funciones componentes tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene a S y a C , entonces

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} \, dS.$$

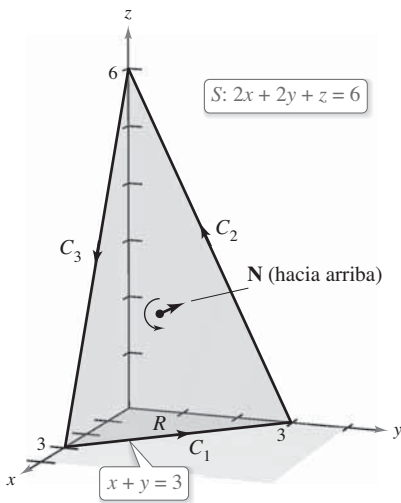
En el teorema observe que la integral de línea puede escribirse en forma diferencial $\int_C M dx + N dy + P dz$ o en forma vectorial $\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} \, ds$.

EJEMPLO

Aplicar el teorema de Stokes

Sea C el triángulo orientado situado en el plano

$$2x + 2y + z = 6$$



como se muestra en la figura. Evalúe

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

donde $\mathbf{F}(x, y, z) = -y^2\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$.

Solución Usando el teorema de Stokes, empiece por hallar el rotacional de \mathbf{F}

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & z & x \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2y\mathbf{k}$$

Considerando

$$z = g(x, y) = 6 - 2x - 2y$$

se puede usar una integral de superficie para un vector normal dirigido hacia arriba para obtener

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} \, dS \\ &= \iint_R (-\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2y\mathbf{k}) \cdot [-g_x(x, y)\mathbf{i} - g_y(x, y)\mathbf{j} + \mathbf{k}] \, dA \\ &= \iint_R (-\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2y\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \, dA \\ &= \int_0^3 \int_0^{3-y} (2y - 4) \, dx \, dy \\ &= \int_0^3 (-2y^2 + 10y - 12) \, dy \\ &= \left[-\frac{2y^3}{3} + 5y^2 - 12y \right]_0^3 \\ &= -9. \end{aligned}$$

Intente evaluar la integral de línea del ejemplo directamente, *sin usar* el teorema de Stokes. Una manera de hacerlo es considerar a C como la unión de C_1 , C_2 y C_3 , como sigue

$$C_1: \mathbf{r}_1(t) = (3 - t)\mathbf{i} + t\mathbf{j}, \quad 0 \leq t \leq 3$$

$$C_2: \mathbf{r}_2(t) = (6 - t)\mathbf{j} + (2t - 6)\mathbf{k}, \quad 3 \leq t \leq 6$$

$$C_3: \mathbf{r}_3(t) = (t - 6)\mathbf{i} + (18 - 2t)\mathbf{k}, \quad 6 \leq t \leq 9$$

El valor de la integral de la línea es

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'_1(t) \, dt + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'_2(t) \, dt + \int_{C_3} \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'_3(t) \, dt \\ &= \int_0^3 t^2 \, dt + \int_3^6 (-2t + 6) \, dt + \int_6^9 (-2t + 12) \, dt \\ &= 9 - 9 - 9 \\ &= -9. \end{aligned}$$

ÁLGEBRA

Ceros y factores de un polinomio

Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ un polinomio. Si $p(a) = 0$, entonces a es un *cero* del polinomio y una solución de la ecuación $p(x) = 0$. Además, $(x - a)$ es un *factor* del polinomio.

Teorema fundamental del álgebra

Un polinomio de grado n tiene n ceros (no necesariamente distintos). Aunque todos estos ceros pueden ser imaginarios, un polinomio real de grado impar tendrá por lo menos un cero real.

Fórmula cuadrática

Si $p(x) = ax^2 + bx + c$ y $0 \leq b^2 - 4ac$, entonces los ceros reales de p son $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Factores especiales

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$$

$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$$

$$x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$$

$$x^4 - a^4 = (x^2 - a^2)(x^2 + a^2)$$

Teorema del binomio

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$$

$$(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$$(x - y)^4 = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$$

$$(x + y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \dots + nxy^{n-1} + y^n$$

$$(x - y)^n = x^n - nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 - \dots \pm nxy^{n-1} \mp y^n$$

Teorema del cero racional

Si $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ tiene coeficientes enteros, entonces todo *cero racional* de p es de la forma $x = r/s$, donde r es un factor de a_0 y s es un factor de a_n .

Factorización por agrupamiento

$$acx^3 + adx^2 + bcx + bd = ax^2(cx + d) + b(cx + d) = (ax^2 + b)(cx + d)$$

Operaciones aritméticas

$$ab + ac = a(b + c)$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)\frac{c}{c} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{\left(\frac{b}{c}\right)} = \frac{ac}{b}$$

$$a\left(\frac{b}{c}\right) = \frac{ab}{c}$$

$$\frac{a - b}{c - d} = \frac{b - a}{d - c}$$

$$\frac{ab + ac}{a} = b + c$$

Exponentes y radicales

$$a^0 = 1, \quad a \neq 0$$

$$(ab)^x = a^x b^x$$

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

$$\sqrt{a} = a^{1/2}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

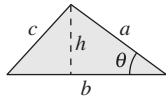
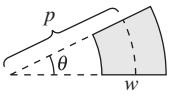
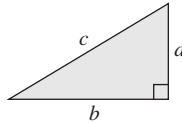
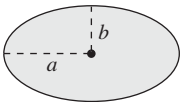
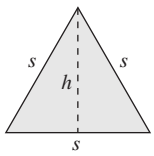
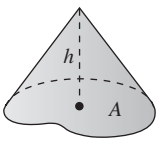
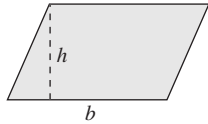
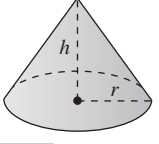
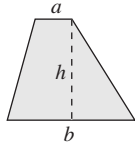
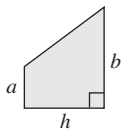
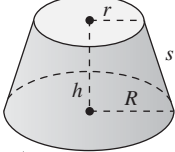
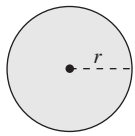
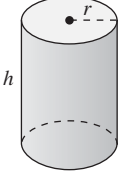
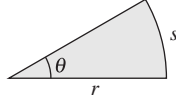
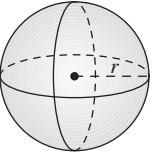
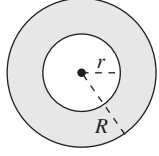
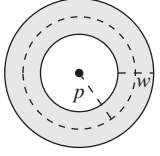
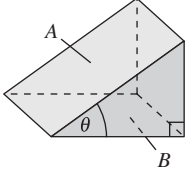
$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

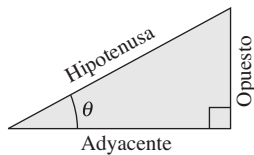
FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS



<p>Triángulo</p> <p>$h = a \operatorname{sen} \theta$</p> <p>Área = $\frac{1}{2}bh$</p> <p>(Ley de los cosenos)</p> <p>$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta$</p> 	<p>Sector de un anillo circular</p> <p>(p = radio promedio, w = ancho del anillo, θ en radianes)</p> <p>Área = θpw</p> 
<p>Triángulo rectángulo</p> <p>(Teorema de Pitágoras)</p> <p>$c^2 = a^2 + b^2$</p> 	<p>Elipse</p> <p>Área = πab</p> <p>Circunferencia $\approx 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$</p> 
<p>Triángulo equilátero</p> <p>$h = \frac{\sqrt{3}s}{2}$</p> <p>Área = $\frac{\sqrt{3}s^2}{4}$</p> 	<p>Cono</p> <p>(A = área de la base)</p> <p>Volumen = $\frac{Ah}{3}$</p> 
<p>Paralelogramo</p> <p>Área = bh</p> 	<p>Cono circular recto</p> <p>Volumen = $\frac{\pi r^2 h}{3}$</p> <p>Área de la superficie lateral = $\pi r \sqrt{r^2 + h^2}$</p> 
<p>Trapezoide</p> <p>Área = $\frac{h}{2}(a + b)$</p>  	<p>Tronco de un cono circular recto</p> <p>Volumen = $\frac{\pi(r^2 + rR + R^2)h}{3}$</p> <p>Área de la superficie lateral = $\pi s(R + r)$</p> 
<p>Círculo</p> <p>Área = πr^2</p> <p>Circunferencia = $2\pi r$</p> 	<p>Cilindro circular recto</p> <p>Volumen = $\pi r^2 h$</p> <p>Área de la superficie lateral = $2\pi rh$</p> 
<p>Sector circular</p> <p>(θ en radianes)</p> <p>Área = $\frac{\theta r^2}{2}$</p> <p>$s = r\theta$</p> 	<p>Esfera</p> <p>Volumen = $\frac{4}{3}\pi r^3$</p> <p>Área de la superficie = $4\pi r^2$</p> 
<p>Anillo circular</p> <p>(p = radio promedio, w = ancho del anillo)</p> <p>Área = $\pi(R^2 - r^2)$ $= 2\pi pw$</p>  	<p>Cuña</p> <p>(A = área de la cara superior, B = área de la base)</p> <p>$A = B \sec \theta$</p> 

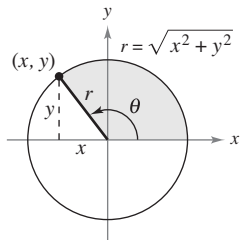
Definiciones de las seis funciones trigonométricas

Definiciones para un triángulo rectángulo, donde $0 < \theta < \pi/2$.

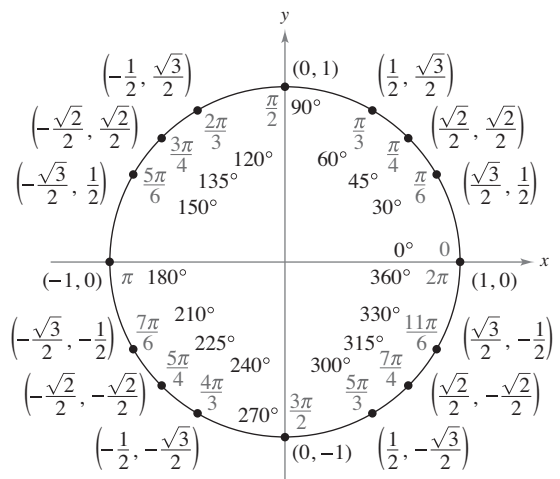


$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{\text{op}}{\text{hip}} & \csc \theta &= \frac{\text{hip}}{\text{op}} \\ \cos \theta &= \frac{\text{ady}}{\text{hip}} & \sec \theta &= \frac{\text{hip}}{\text{ady}} \\ \tan \theta &= \frac{\text{op}}{\text{ady}} & \cot \theta &= \frac{\text{ady}}{\text{op}} \end{aligned}$$

Definiciones de las funciones circulares, donde θ es cualquier ángulo.



$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{y}{r} & \csc \theta &= \frac{r}{y} \\ \cos \theta &= \frac{x}{r} & \sec \theta &= \frac{r}{x} \\ \tan \theta &= \frac{y}{x} & \cot \theta &= \frac{x}{y} \end{aligned}$$



Identidades recíprocas

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{1}{\csc x} & \sec x &= \frac{1}{\cos x} & \tan x &= \frac{1}{\cot x} \\ \csc x &= \frac{1}{\sin x} & \cos x &= \frac{1}{\sec x} & \cot x &= \frac{1}{\tan x} \end{aligned}$$

Identidades para la tangente y la cotangente

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Identidades pitagóricas

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ 1 + \tan^2 x &= \sec^2 x & 1 + \cot^2 x &= \csc^2 x \end{aligned}$$

Identidades para cofunciones

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x & \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x \\ \csc\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sec x & \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cot x \\ \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \csc x & \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \tan x \end{aligned}$$

Fórmulas de reducción

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin x & \cos(-x) &= \cos x \\ \csc(-x) &= -\csc x & \tan(-x) &= -\tan x \\ \sec(-x) &= \sec x & \cot(-x) &= -\cot x \end{aligned}$$

Fórmulas para la suma y la diferencia

$$\begin{aligned} \sin(u \pm v) &= \sin u \cos v \pm \cos u \sin v \\ \cos(u \pm v) &= \cos u \cos v \mp \sin u \sin v \\ \tan(u \pm v) &= \frac{\tan u \pm \tan v}{1 \mp \tan u \tan v} \end{aligned}$$

Fórmulas para ángulos dobles

$$\begin{aligned} \sin 2u &= 2 \sin u \cos u \\ \cos 2u &= \cos^2 u - \sin^2 u = 2 \cos^2 u - 1 = 1 - 2 \sin^2 u \\ \tan 2u &= \frac{2 \tan u}{1 - \tan^2 u} \end{aligned}$$

Fórmulas para la reducción de potencias

$$\begin{aligned} \sin^2 u &= \frac{1 - \cos 2u}{2} \\ \cos^2 u &= \frac{1 + \cos 2u}{2} \\ \tan^2 u &= \frac{1 - \cos 2u}{1 + \cos 2u} \end{aligned}$$

Fórmulas suma a producto

$$\begin{aligned} \sin u + \sin v &= 2 \sin\left(\frac{u+v}{2}\right) \cos\left(\frac{u-v}{2}\right) \\ \sin u - \sin v &= 2 \cos\left(\frac{u+v}{2}\right) \sin\left(\frac{u-v}{2}\right) \\ \cos u + \cos v &= 2 \cos\left(\frac{u+v}{2}\right) \cos\left(\frac{u-v}{2}\right) \\ \cos u - \cos v &= -2 \sin\left(\frac{u+v}{2}\right) \sin\left(\frac{u-v}{2}\right) \end{aligned}$$

Fórmulas producto a suma

$$\begin{aligned} \sin u \sin v &= \frac{1}{2} [\cos(u-v) - \cos(u+v)] \\ \cos u \cos v &= \frac{1}{2} [\cos(u-v) + \cos(u+v)] \\ \sin u \cos v &= \frac{1}{2} [\sin(u+v) + \sin(u-v)] \\ \cos u \sin v &= \frac{1}{2} [\sin(u+v) - \sin(u-v)] \end{aligned}$$



Reglas básicas de diferenciación

- | | | |
|---|--|--|
| 1. $\frac{d}{dx}[cu] = cu'$ | 2. $\frac{d}{dx}[u \pm v] = u' \pm v'$ | 3. $\frac{d}{dx}[uv] = uv' + vu'$ |
| 4. $\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{vu' - uv'}{v^2}$ | 5. $\frac{d}{dx}[c] = 0$ | 6. $\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}u'$ |
| 7. $\frac{d}{dx}[x] = 1$ | 8. $\frac{d}{dx}[u] = \frac{u}{ u }(u'), \quad u \neq 0$ | 9. $\frac{d}{dx}[\ln u] = \frac{u'}{u}$ |
| 10. $\frac{d}{dx}[e^u] = e^u u'$ | 11. $\frac{d}{dx}[\log_a u] = \frac{u'}{(\ln a)u}$ | 12. $\frac{d}{dx}[a^u] = (\ln a)a^u u'$ |
| 13. $\frac{d}{dx}[\sen u] = (\cos u)u'$ | 14. $\frac{d}{dx}[\cos u] = -(\sen u)u'$ | 15. $\frac{d}{dx}[\tan u] = (\sec^2 u)u'$ |
| 16. $\frac{d}{dx}[\cot u] = -(\csc^2 u)u'$ | 17. $\frac{d}{dx}[\sec u] = (\sec u \tan u)u'$ | 18. $\frac{d}{dx}[\csc u] = -(\csc u \cot u)u'$ |
| 19. $\frac{d}{dx}[\arcsen u] = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ | 20. $\frac{d}{dx}[\arccos u] = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$ | 21. $\frac{d}{dx}[\arctan u] = \frac{u'}{1+u^2}$ |
| 22. $\frac{d}{dx}[\operatorname{arccot} u] = \frac{-u'}{1+u^2}$ | 23. $\frac{d}{dx}[\operatorname{arcsec} u] = \frac{u'}{ u \sqrt{u^2-1}}$ | 24. $\frac{d}{dx}[\operatorname{arccsc} u] = \frac{-u'}{ u \sqrt{u^2-1}}$ |
| 25. $\frac{d}{dx}[\sinh u] = (\cosh u)u'$ | 26. $\frac{d}{dx}[\cosh u] = (\sinh u)u'$ | 27. $\frac{d}{dx}[\tanh u] = (\operatorname{sech}^2 u)u'$ |
| 28. $\frac{d}{dx}[\coth u] = -(\operatorname{csch}^2 u)u'$ | 29. $\frac{d}{dx}[\operatorname{sech} u] = -(\operatorname{sech} u \tanh u)u'$ | 30. $\frac{d}{dx}[\operatorname{csch} u] = -(\operatorname{csch} u \coth u)u'$ |
| 31. $\frac{d}{dx}[\sinh^{-1} u] = \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$ | 32. $\frac{d}{dx}[\cosh^{-1} u] = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$ | 33. $\frac{d}{dx}[\tanh^{-1} u] = \frac{u'}{1-u^2}$ |
| 34. $\frac{d}{dx}[\coth^{-1} u] = \frac{u'}{1-u^2}$ | 35. $\frac{d}{dx}[\operatorname{sech}^{-1} u] = \frac{-u'}{u\sqrt{1-u^2}}$ | 36. $\frac{d}{dx}[\operatorname{csch}^{-1} u] = \frac{-u'}{ u \sqrt{1+u^2}}$ |

Fórmulas básicas de integración

- | | |
|---|---|
| 1. $\int kf(u) du = k \int f(u) du$ | 2. $\int [f(u) \pm g(u)] du = \int f(u) du \pm \int g(u) du$ |
| 3. $\int du = u + C$ | 4. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$ |
| 5. $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$ | 6. $\int e^u du = e^u + C$ |
| 7. $\int a^u du = \left(\frac{1}{\ln a}\right)a^u + C$ | 8. $\int \sen u du = -\cos u + C$ |
| 9. $\int \cos u du = \sen u + C$ | 10. $\int \tan u du = -\ln \cos u + C$ |
| 11. $\int \cot u du = \ln \sen u + C$ | 12. $\int \sec u du = \ln \sec u + \tan u + C$ |
| 13. $\int \csc u du = -\ln \csc u + \cot u + C$ | 14. $\int \sec^2 u du = \tan u + C$ |
| 15. $\int \csc^2 u du = -\cot u + C$ | 16. $\int \sec u \tan u du = \sec u + C$ |
| 17. $\int \csc u \cot u du = -\csc u + C$ | 18. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsen \frac{u}{a} + C$ |
| 19. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C$ | 20. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{ u }{a} + C$ |

Formas que implican u^n

$$1. \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

$$2. \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C$$

Formas que implican $a + bu$

$$3. \int \frac{u}{a+bu} du = \frac{1}{b^2}(bu - a \ln|a+bu|) + C$$

$$4. \int \frac{u}{(a+bu)^2} du = \frac{1}{b^2}\left(\frac{a}{a+bu} + \ln|a+bu|\right) + C$$

$$5. \int \frac{u}{(a+bu)^n} du = \frac{1}{b^2}\left[\frac{-1}{(n-2)(a+bu)^{n-2}} + \frac{a}{(n-1)(a+bu)^{n-1}}\right] + C, \quad n \neq 1, 2$$

$$6. \int \frac{u^2}{a+bu} du = \frac{1}{b^3}\left[-\frac{bu}{2}(2a-bu) + a^2 \ln|a+bu|\right] + C$$

$$7. \int \frac{u^2}{(a+bu)^2} du = \frac{1}{b^3}\left(bu - \frac{a^2}{a+bu} - 2a \ln|a+bu|\right) + C$$

$$8. \int \frac{u^2}{(a+bu)^3} du = \frac{1}{b^3}\left[\frac{2a}{a+bu} - \frac{a^2}{2(a+bu)^2} + \ln|a+bu|\right] + C$$

$$9. \int \frac{u^2}{(a+bu)^n} du = \frac{1}{b^3}\left[\frac{-1}{(n-3)(a+bu)^{n-3}} + \frac{2a}{(n-2)(a+bu)^{n-2}} - \frac{a^2}{(n-1)(a+bu)^{n-1}}\right] + C, \quad n \neq 1, 2, 3$$

$$10. \int \frac{1}{u(a+bu)} du = \frac{1}{a} \ln\left|\frac{u}{a+bu}\right| + C$$

$$11. \int \frac{1}{u(a+bu)^2} du = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{a+bu} + \frac{1}{a} \ln\left|\frac{u}{a+bu}\right|\right) + C$$

$$12. \int \frac{1}{u^2(a+bu)} du = -\frac{1}{a}\left(\frac{1}{u} + \frac{b}{a} \ln\left|\frac{u}{a+bu}\right|\right) + C$$

$$13. \int \frac{1}{u^2(a+bu)^2} du = -\frac{1}{a^2}\left[\frac{a+2bu}{u(a+bu)} + \frac{2b}{a} \ln\left|\frac{u}{a+bu}\right|\right] + C$$

Formas que implican $a + bu + cu^2, b^2 \neq 4ac$

$$14. \int \frac{1}{a+bu+cu^2} du = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \arctan \frac{2cu+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C, & b^2 < 4ac \\ \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \ln\left|\frac{2cu+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cu+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right| + C, & b^2 > 4ac \end{cases}$$

$$15. \int \frac{u}{a+bu+cu^2} du = \frac{1}{2c}\left(\ln|a+bu+cu^2| - b \int \frac{1}{a+bu+cu^2} du\right)$$

Formas que implican $\sqrt{a+bu}$

$$16. \int u^n \sqrt{a+bu} du = \frac{2}{b(2n+3)}\left[u^n(a+bu)^{3/2} - na \int u^{n-1} \sqrt{a+bu} du\right]$$

$$17. \int \frac{1}{u\sqrt{a+bu}} du = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|\frac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}\right| + C, & a > 0 \\ \frac{2}{\sqrt{-a}} \arctan \sqrt{\frac{a+bu}{-a}} + C, & a < 0 \end{cases}$$

$$18. \int \frac{1}{u^n \sqrt{a+bu}} du = \frac{-1}{a(n-1)}\left[\frac{\sqrt{a+bu}}{u^{n-1}} + \frac{(2n-3)b}{2} \int \frac{1}{u^{n-1} \sqrt{a+bu}} du\right], \quad n \neq 1$$

$$19. \int \frac{\sqrt{a+bu}}{u} du = 2\sqrt{a+bu} + a \int \frac{1}{u\sqrt{a+bu}} du$$

$$20. \int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^n} du = \frac{-1}{a(n-1)} \left[\frac{(a+bu)^{3/2}}{u^{n-1}} + \frac{(2n-5)b}{2} \int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^{n-1}} du \right], n \neq 1$$

$$21. \int \frac{u}{\sqrt{a+bu}} du = \frac{-2(2a-bu)}{3b^2} \sqrt{a+bu} + C$$

$$22. \int \frac{u^n}{\sqrt{a+bu}} du = \frac{2}{(2n+1)b} \left(u^n \sqrt{a+bu} - na \int \frac{u^{n-1}}{\sqrt{a+bu}} du \right)$$

Formas que implican $a^2 \pm u^2$, $a > 0$

$$23. \int \frac{1}{a^2+u^2} du = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C$$

$$24. \int \frac{1}{u^2-a^2} du = - \int \frac{1}{a^2-u^2} du = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C$$

$$25. \int \frac{1}{(a^2 \pm u^2)^n} du = \frac{1}{2a^2(n-1)} \left[\frac{u}{(a^2 \pm u^2)^{n-1}} + (2n-3) \int \frac{1}{(a^2 \pm u^2)^{n-1}} du \right], n \neq 1$$

Formas que implican $\sqrt{u^2 \pm a^2}$, $a > 0$

$$26. \int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{1}{2} (u\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}|) + C$$

$$27. \int u^2 \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \frac{1}{8} [u(2u^2 \pm a^2) \sqrt{u^2 \pm a^2} - a^4 \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}|] + C$$

$$28. \int \frac{\sqrt{u^2+a^2}}{u} du = \sqrt{u^2+a^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{u^2+a^2}}{u} \right| + C$$

$$29. \int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u} du = \sqrt{u^2-a^2} - a \operatorname{arcsec} \frac{|u|}{a} + C$$

$$30. \int \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u^2} du = \frac{-\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u} + \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

$$31. \int \frac{1}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} du = \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C$$

$$32. \int \frac{1}{u\sqrt{u^2+a^2}} du = \frac{-1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{u^2+a^2}}{u} \right| + C$$

$$33. \int \frac{1}{u\sqrt{u^2-a^2}} du = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{|u|}{a} + C$$

$$34. \int \frac{u^2}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} du = \frac{1}{2} (u\sqrt{u^2 \pm a^2} \mp a^2 \ln|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}|) + C$$

$$35. \int \frac{1}{u^2 \sqrt{u^2 \pm a^2}} du = \mp \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{a^2 u} + C$$

$$36. \int \frac{1}{(u^2 \pm a^2)^{3/2}} du = \frac{\pm u}{a^2 \sqrt{u^2 \pm a^2}} + C$$

Formas que implican $\sqrt{a^2 - u^2}$, $a > 0$

$$37. \int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{1}{2} \left(u\sqrt{a^2 - u^2} + a^2 \arcsen \frac{u}{a} \right) + C$$

$$38. \int u^2 \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{1}{8} \left[u(2u^2 - a^2) \sqrt{a^2 - u^2} + a^4 \arcsen \frac{u}{a} \right] + C$$



$$39. \int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} du = \sqrt{a^2 - u^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$$

$$40. \int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2} du = \frac{-\sqrt{a^2 - u^2}}{u} - \arcsen \frac{u}{a} + C$$

$$41. \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = \arcsen \frac{u}{a} + C$$

$$42. \int \frac{1}{u\sqrt{a^2 - u^2}} du = \frac{-1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u} \right| + C$$

$$43. \int \frac{u^2}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = \frac{1}{2} \left(-u\sqrt{a^2 - u^2} + a^2 \arcsen \frac{u}{a} \right) + C$$

$$44. \int \frac{1}{u^2\sqrt{a^2 - u^2}} du = \frac{-\sqrt{a^2 - u^2}}{a^2 u} + C$$

$$45. \int \frac{1}{(a^2 - u^2)^{3/2}} du = \frac{u}{a^2 \sqrt{a^2 - u^2}} + C$$

Formas que implican sen u o cos u

$$46. \int \sen u du = -\cos u + C$$

$$47. \int \cos u du = \sen u + C$$

$$48. \int \sen^2 u du = \frac{1}{2}(u - \sen u \cos u) + C$$

$$49. \int \cos^2 u du = \frac{1}{2}(u + \sen u \cos u) + C$$

$$50. \int \sen^n u du = -\frac{\sen^{n-1} u \cos u}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sen^{n-2} u du$$

$$51. \int \cos^n u du = \frac{\cos^{n-1} u \sen u}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} u du$$

$$52. \int u \sen u du = \sen u - u \cos u + C$$

$$53. \int u \cos u du = \cos u + u \sen u + C$$

$$54. \int u^n \sen u du = -u^n \cos u + n \int u^{n-1} \cos u du$$

$$55. \int u^n \cos u du = u^n \sen u - n \int u^{n-1} \sen u du$$

$$56. \int \frac{1}{1 \pm \sen u} du = \tan u \mp \sec u + C$$

$$57. \int \frac{1}{1 \pm \cos u} du = -\cot u \pm \csc u + C$$

$$58. \int \frac{1}{\sen u \cos u} du = \ln|\tan u| + C$$

Formas que implican tan u, cot u, sec u o csc u

$$59. \int \tan u du = -\ln|\cos u| + C$$

$$60. \int \cot u du = \ln|\sen u| + C$$

$$61. \int \sec u du = \ln|\sec u + \tan u| + C$$

$$62. \int \csc u du = \ln|\csc u - \cot u| + C \quad \text{o} \quad \int \csc u du = -\ln|\csc u + \cot u| + C$$

$$63. \int \tan^2 u du = -u + \tan u + C$$

$$64. \int \cot^2 u du = -u - \cot u + C$$

$$65. \int \sec^2 u du = \tan u + C$$

$$66. \int \csc^2 u du = -\cot u + C$$

$$67. \int \tan^n u du = \frac{\tan^{n-1} u}{n-1} - \int \tan^{n-2} u du, n \neq 1$$

$$68. \int \cot^n u du = -\frac{\cot^{n-1} u}{n-1} - \int (\cot^{n-2} u) du, n \neq 1$$

$$69. \int \sec^n u du = \frac{\sec^{n-2} u \tan u}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} u du, n \neq 1$$

$$70. \int \csc^n u du = -\frac{\csc^{n-2} u \cot u}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} u du, n \neq 1$$

$$71. \int \frac{1}{1 \pm \tan u} du = \frac{1}{2}(u \pm \ln|\cos u \pm \sin u|) + C$$

$$73. \int \frac{1}{1 \pm \sec u} du = u + \cot u \mp \csc u + C$$

$$72. \int \frac{1}{1 \pm \cot u} du = \frac{1}{2}(u \mp \ln|\sin u \pm \cos u|) + C$$

$$74. \int \frac{1}{1 \pm \csc u} du = u - \tan u \pm \sec u + C$$

Formas que implican funciones trigonométricas

$$75. \int \arcsen u du = u \arcsen u + \sqrt{1-u^2} + C$$

$$77. \int \arctan u du = u \arctan u - \ln\sqrt{1+u^2} + C$$

$$79. \int \operatorname{arcsec} u du = u \operatorname{arcsec} u - \ln|u + \sqrt{u^2-1}| + C$$

$$76. \int \arccos u du = u \arccos u - \sqrt{1-u^2} + C$$

$$78. \int \operatorname{arccot} u du = u \operatorname{arccot} u + \ln\sqrt{1+u^2} + C$$

$$80. \int \operatorname{arccsc} u du = u \operatorname{arccsc} u + \ln|u + \sqrt{u^2-1}| + C$$

Formas que implican e^u

$$81. \int e^u du = e^u + C$$

$$83. \int u^n e^u du = u^n e^u - n \int u^{n-1} e^u du$$

$$85. \int e^{au} \sin bu du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2} (a \sin bu - b \cos bu) + C$$

$$82. \int u e^u du = (u-1)e^u + C$$

$$84. \int \frac{1}{1+e^u} du = u - \ln(1+e^u) + C$$

$$86. \int e^{au} \cos bu du = \frac{e^{au}}{a^2 + b^2} (a \cos bu + b \sin bu) + C$$

Formas que implican $\ln u$

$$87. \int \ln u du = u(-1 + \ln u) + C$$

$$89. \int u^n \ln u du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2} [-1 + (n+1) \ln u] + C, n \neq -1$$

$$90. \int (\ln u)^2 du = u[2 - 2 \ln u + (\ln u)^2] + C$$

$$88. \int u \ln u du = \frac{u^2}{4} (-1 + 2 \ln u) + C$$

$$91. \int (\ln u)^n du = u(\ln u)^n - n \int (\ln u)^{n-1} du$$

Formas que implican funciones hiperbólicas

$$92. \int \cosh u du = \sinh u + C$$

$$94. \int \operatorname{sech}^2 u du = \tanh u + C$$

$$96. \int \operatorname{sech} u \tanh u du = -\operatorname{sech} u + C$$

$$93. \int \sinh u du = \cosh u + C$$

$$95. \int \operatorname{csch}^2 u du = -\operatorname{coth} u + C$$

$$97. \int \operatorname{csch} u \operatorname{coth} u du = -\operatorname{csch} u + C$$

Formas que implican funciones hiperbólicas inversas (en forma logarítmica)

$$98. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}) + C$$

$$99. \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C$$

$$100. \int \frac{du}{u\sqrt{a^2 \pm u^2}} = -\frac{1}{a} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 \pm u^2}}{|u|} + C$$

¿Sabías qué? Los fractales son representaciones geométricas de la teoría del caos, cambiantes e impredecibles, que nos invitan a pensar en dimensiones y teorías maravillosas que solo el estudio analítico, cualitativo y cuantitativo del cálculo nos permitiría entender. Es por esta razón que en esta edición de *Matemáticas* los fractales son parte fundamental de la imagen que representa esta nueva colección.

Matemáticas III. Cálculo de varias variables forma parte de una serie de libros elaborados para cubrir de manera específica los planes de estudio de los cursos de matemáticas a nivel superior: cálculo diferencial, cálculo integral, cálculo vectorial, álgebra lineal y ecuaciones diferenciales.

En esta nueva edición de **Cálculo de varias variables** podrás estudiar:

- Vectores en el espacio
- Curvas planas, ecuaciones paramétricas y coordenadas polares
- Funciones vectoriales
- Funciones de varias variables
- Integrales múltiples
- Análisis vectorial

Estos temas establecen una manera singular de abordar el cálculo mediante ejemplos, explicaciones, recursos didácticos, definiciones y demostraciones, las cuales se presentan de una manera clara, accesible y con un estilo directo y legible, lo que hacen de esta obra un clásico instantáneo.

Acompáñanos a conocer el **Cálculo de varias variables** desde una perspectiva clara y eficaz.



Visite nuestro sitio en <http://latinoamerica.cengage.com>

ISBN-13: 978-607-526-653-4
ISBN-10: 607-526-653-4

