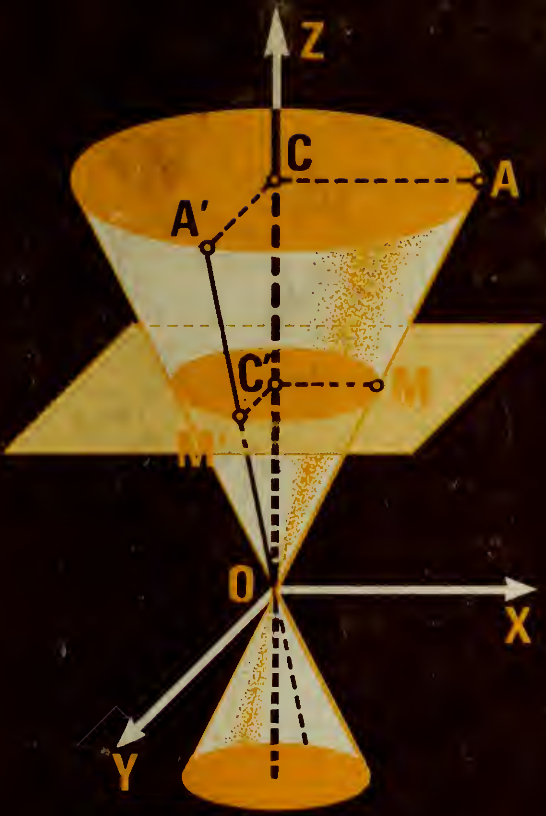
GEOMETRIA ANALITICA



ANFOSSI
FLORES MEYER

EDITORIAL PROGRESO, S. A.

$22

geometría
analítica

geometría analítica

décimo tercera edición

Agustín Anfossi

Maestro en Ciencias Matemáticas

Mejoró la edición

Marco A. Flores Meyer

EDITORIAL PROGRESO, S. A.
NARANJO 248 TEL. 547 73 04 STA. MARIA LA RIBERA
DELEGACION CUAUHTEMOC 06400 MEXICO, D.F.

1979: 1ª reimpresión
1980: 2ª reimpresión
1983: 3ª reimpresión

Hace la edición
según convenio con el autor

EDITORIAL PROGRESO, S.A.
Naranjo 248, 06400 México, D.F.

Miembro de la Cámara Nacional
de la Industria Editorial

Registro N° 00232

1ª edición: febrero 10 de 1949

ISBN 968-436-058-4

IMPRESO EN MEXICO
PRINTED IN MEXICO

PRESENTACION

El presente curso de Geometría Analítica, que publica la Editorial Progreso, está dedicado especialmente a los que dan los primeros pasos en el estudio de esta rama de las Matemáticas.

Un objetivo se ha tenido como norma: presentar los diferentes asuntos que corresponden a un curso propio para principiantes, exponiéndolos desde el punto de vista más sencillo. Así, para obtener las ecuaciones, tanto de la recta como de los diferentes lugares geométricos a los que dedica especial atención la Geometría Analítica, en vez de tomar como punto de partida alguna propiedad particular, se ha tenido en cuenta, preferentemente, un principio fundamental, la definición general, y se ha deducido, como naturalmente, la ecuación que se trataba de obtener.

No todos los puntos que suelen considerarse en muchos tratados, destinados a cursos bastante adelantados, figuran en el presente libro; sin embargo, el principiante que llegue a dominar perfectamente bien cuanto en él se expone, además de tener un pequeño caudal de conocimientos en Geometría Analítica, estará preparado para emprender estudios más elevados, en esta materia.

Siendo la claridad un punto de capital importancia en toda obra dedicada a la enseñanza, se ha procurado lograrla, tanto en la exposición como en la disposición y presentación de la materia. Esta se ha agrupado en capítulos, subdivididos en párrafos, lo cual puede contribuir al buen éxito del estudio, y hasta facilitar al lector una visión clara para abarcar el conjunto de los diferentes asuntos que se exponen.

Como la simple teoría suele ser, de por sí, bastante árida, y como, por otra parte, los conocimientos sólo se afianzan mediante la resolución de ejercicios que impliquen la aplicación de las fórmulas que paulatinamente se obtienen, se han resuelto algunos problemas, a modo de orientación para el estudiante, y se proponen, después de cada párrafo, otros problemas para que se ejercite en ellos y vea las aplicaciones que en los conocimientos teóricos se pueden hacer. A menudo, para cada nuevo principio o fórmula nueva, hay ejercicios de aplicación; por eso es indispensable esperar el fin del párrafo para pasar a las aplicaciones.

Tal vez haya quien objete que, al calcular la pendiente de la tangente a las cónicas, se ha dado como sabida la noción de límite de una magnitud variable, y de hecho se ha procedido como si la teoría relativa hubiese sido expuesta con anterioridad. Los profesores a quienes esto pareciese empírico y prefiriesen estudiar lo relacionado con el problema de las tangentes en el Cálculo Diferencial, pueden saltar el capítulo que a este asunto se dedica. Sin embargo, es de aconsejar que se trate el problema de las tangentes y de las normales, para que el curso resulte más completo. Muy fácilmente hallará el maestro recursos para que los alumnos se formen alguna idea de la noción de límite, especialmente si se procura, recurriendo a valores numéricos, hacer constar la validez del resultado obtenido.

Teniendo presente "que no hay asunto que pierda más que el de las Matemáticas si se desliga de su historia", según ha dicho un gran historiador, se ha incluído un breve bosquejo histórico de la Geometría Analítica. Por él podrá seguir el lector algunos de los pasos de esta ciencia, localizarla en el tiempo y en el espacio, y enterarse de cómo aparecieron los vocablos que tanto se usan en ella; abscisa, ordenada, coordenadas, ejes, focos, asíntotas, etc. Sólo así llegará a este conocimiento perfecto que requiere el saber no solamente el qué, o sea la afirmación y el porqué, es decir, la demostración, sino, además, cómo se formó dicho conocimiento, y cuándo y por qué fue agregado al acervo científico de la Humanidad.

Antes de terminar, cúmplese con un deber agradeciendo a los distinguidos Profesores de Matemáticas, Dr. Alfonso Nápoles y al Q. I. Marco A. Flores Meyer, las atinadas sugestiones que tuvieron a bien hacer y que el autor tuvo muy en cuenta. Se agradece igualmente la labor de las personas que siguieron la impresión y cuidaron la disposición tipográfica, así como los esfuerzos de los editores para que la presentación de la obra fuese una manifestación más de que el obrero mexicano, bien dirigido, puede ofrecer un trabajo que haga honor a las artes gráficas de México.

Los Editores

INDICE

PRIMERA PARTE

GEOMETRIA ANALITICA DE DOS DIMENSIONES

SEGUNDA PARTE

GEOMETRIA ANALITICA DE TRES DIMENSIONES

BREVE BOSQUEJO HISTORICO DE LA GEOMETRIA ANALITICA

En el año de 1637 publicó **René Descartes** (1596-1650) su *Géométrie,* dividida en tres libros, de los cuales dedica el segundo a lo que se

René Descartes

ha llamado *Geometría Analítica*, obra fundamental para toda la Matemática, y de la cual se ha dicho, con toda exactitud, que ha hecho época. En ella establece el enlace entre el número y el espacio, y aunque su importancia sólo se evidenció años más tarde, su publicación influyó en forma decisiva en el desarrollo de todas las ramas de las ciencias exactas, especialmente con la nueva simbólica que preconiza.

Es opinión generalmente admitida entre los matemáticos que la Geometría Analítica brotó completamente elaborada, adulta, de la cabeza de Descartes. Sin embargo, hay discrepancias entre los sabios a este respecto. "Algunos autores han escrito, dice **Ch. Bossut** (1730-1814), otros lo han repetido y se repite constantemente, que Descartes es el inventor de la aplicación del Algebra a la Geometría. Esto no es exacto. Se atribuye a Descartes más de lo que pudiera pretender". A pesar del mérito indiscutible de este matemático, no puede aceptarse lo que de la Géométrie dice **M. Chasles** (1793-1880) al llamarla *criatura generada sin madre* (proles sine matre creata), pues con tal afirmación se olvidan demasiado los derechos de sus antecesores, y de **F. Viète** (1540-1603) en particular, en cuyas obras hay aplicaciones del Algebra a la Geometría.

* * *

Si se atiende al uso de coordenadas para localizar un punto, los albores de la Geometría Analítica se remontan a **Arquímedes** (287-212 a. de J. C.) y a **Apolonio** de Perga (siglo II a. de J. C.) y, cerca de 18 siglos después, a **J. Képler** (1571-1630), pues para el estudio de las cónicas se valían ya, sustancialmente, de las coordenadas (cartesianas) refiriéndose, empero, a ejes intrínsecamente conectados con la curva estudiada.

Algo mejor relacionado con el concepto moderno de las coordenadas se encuentra en un dibujo del siglo X u XI, de autor desconocido, al hacer el estudio de las trayectorias de los planetas, en el cual representa la *latitud* y la *longitud*, respectivamente, como *ordenada* y *abscisa*. Este método de representación, que fue adoptado en Astronomía y aún se usaba en el siglo XIV, dio lugar a una obra, notable para aquella época, de **N. Oresme** (1323-1382), obispo de Lisieux, intitulada *Tractatus de latitudinibus formarum*, escrita en 1361. En este trabajo se reconoce, en realidad, la verdadera aparición de la Geometría Analítica, a la vez que un primer germen del concepto de *función* y hasta de *derivada*. Allí se halla la idea de la representación gráfica por medio de coordenadas rectangulares, de las funciones, que Oresme en latín denomina *formæ*. Considera dos magnitudes, llamadas *longitudo* y *latitudo*: la primera la considera como variable independiente, y la segunda como variable que depende de la primera. La latitudo puede ser *uniformis* o *difformis*: en el primer caso la gráfica correspondiente es una recta paralela al eje escogido, o sea la latitudo es constante; es difformis en el caso contrario. Cuando la latitudo es difformis, puede tenerse una *latitudo secundum se totam difformis*, si la gráfica consta de una línea única, o bien *latitudo secundum partem difformis*, si consta de porciones distintas, algunas de las cuales son rectas paralelas al eje.

La actitud de Oresme no es, precisamente, la de un creador de las ideas que expone, pues parece atribuirlas a autores antiguos, para nosotros completamente desconocidos.

* * *

Si en la Geometría Analítica se considera el estudio particularizado de las tres grandes curvas: *parábola*, *elipse* e *hipérbola*, debería hacerse remontar esta ciencia a Menaicmo (siglo IV a. de J. C.), a quien se atribuye la invención de dichas curvas — de la parábola e hipérbola equilátera por lo menos —, que constituyen lo que se ha denominado la *tríade de Menaicmo.*

En realidad, los nombres con que se designan las tres curvas citadas, ya existían, y habían sido creados por los pitagóricos. Estos al resolver el problema que denominaron aplicación de las superficies planas, introdujeron las palabras parábola, elipse e hipérbola según que en la aplicación de dichas superficies hubiese, respectivamente, *igualdad*, *deficiencia* y *exceso*.

Posteriormente a Menaicmo, Arquímedes amplió el campo del estudio de esas tres curvas; Apolonio de Perga, por su parte, concibió las secciones cónicas, determinadas no ya únicamente, según se presume lo había hecho Menaicmo, en un cono recto rectangular, o cono cuyas generatrices opuestas se cortan en ángulo recto, sino como resultantes de la intersección de un plano con un cono circular cualquiera, ya sea rectangular o no.

En la obra de Apolonio, que él denominó *Secciones Cónicas*, se encuentra la afirmación de que, en el plano, *el lugar de un punto* (móvil) *cuyas distancias a dos puntos fijos dan una suma o una diferencia constante, es una elipse o una hipérbola*, que tiene como focos esos puntos fijos.

El mismo Apolonio aclara que una tangente a la elipse deja los dos focos de un mismo lado de dicha tangente, y que en la hipérbola quedan uno de un lado y el otro del otro lado.

La amplitud con que, tanto Arquímedes como Apolonio, estudiaron las propiedades de las curvas nombradas es tal que, en muchos puntos, a su trabajo nada nuevo se añadió en los siglos posteriores, motivo por el cual escribió Leibniz: "*El que entiende a Arquímedes y a Apolonio, admira menos lo que los esclarecidos hombres recientes han inventado*". Por su parte, J. Wallis (1616-1703) en su admiración por Arquímedes, exclama: "*Hombre de estupenda sagacidad, que echó los cimientos de casi todo lo que nuestra edad se gloría de haber promovido*".

La primera propiedad notable relativa a las cónicas, enunciada por Apolonio y que se acaba de citar, fue tomada por F. de la Hire (1640-1718) como definición de las curvas que tienen centro, y de la segunda se ideó la manera de describir la elipse por trazo continuo.

Esta construcción la indicó por primera vez el bizantino **Antemio** (siglo VI).

Otro gran matemático, **P. de Fermat** (1601-1665), contemporáneo de Descartes y por éste admirado, había ideado, a su vez, la Geometría Analítica. Sus trabajos relacionados con ella se remontan al año 1629, es decir, precedieron la publicación de la Géométrie.

El pensamiento de Fermat, tal como se ve expuesto en una publicación póstuma, titulada *Ad locos planos et solidos isagoge* —introducción al estudio de los lugares planos y sólidos—, se aproxima a la actual Geometría Analítica casi más que el de Descartes. Así se expresa Fermat: "*Siempre que en una ecuación final figuran dos cantidades* (segmentos) *incógnitas* (variables), *la extremidad de una de ellas describe una recta o una curva*".

Pedro de Fermat

La obra geométrica de Fermat, que sólo fue publicada en 1679, es de gran importancia, pues enseña a interpretar ecuaciones sencillas con dos variables, considerando rectas, elipses, parábolas e hipérbolas.

* * *

Volviendo a Descartes y a su obra, justo es hacer notar que su punto de vista y su técnica, relativamente a la Geometría Analítica, son incomparablemente más adelantados que los de Fermat. Con respecto a la Géométrie, observa **J. E. Montucla** (1725-1799) que "Descartes no ha pretendido componer un trabajo didáctico; se limita a trazar a los matemáticos el camino que han de recorrer, y en su libro no hay ni orden ni desarrollos: sólo son ideas de un hombre de genio, que no sigue la marcha de los espíritus ordinarios". Y no solamente no resultó el libro de Descartes un tratado didáctico y completo, sino que, según el propio autor nos informa, omitió, con deliberada intención, muchas cosas que hubiera podido hacer figurar en ella; aún más: él mismo confiesa, en alguna parte, que fue intencionalmente oscuro.

Pero, aunque en la Géométrie sólo se contenga un primer ensayo de la Geometría Analítica, corresponde al gran Cartesio el mérito de haber abierto el camino a nuevos métodos, por lo cual ha sido mirado siempre como una obra que ha hecho época y como un instrumento de investigación incomparablemente más poderoso que la geometría de los antiguos.

Refiriéndose a la creación de Descartes, escribe el matemático P. **Boutroux** (1845-1922) que su importancia estriba en "hacer ver cómo en la aplicación sistemática de coordenadas había un método de un poderío y una universalidad desconocidos hasta entonces en la Matemática; un método destinado a anular, por la superación, a todos los anteriores; un método que, en colaboración con el concepto de función, debía revolucionar y regenerar todas las ciencias que se hallaban relacionadas con los conceptos de espacio y tiempo"

Descartes no habla de ejes, ni de abscisa, ni de ordenada, ni de coordenadas. Para la representación de las curvas, escoge una recta, en posición horizontal, que a veces llama *diámetro* y, para comenzar el cálculo, señala en ella un punto fijo (origen); luego toma puntos en el diámetro, y a cada punto asocia otro u otros, según la línea que estudia; en otras palabras: dada la ecuación de una línea y elegida una recta como eje y en ella un punto fijo, a cada distancia (abscisa) contada desde el origen corresponde otra distancia (ordenada) en una dirección perpendicular al eje; el extremo del segundo segmento u ordenada, determina un punto de la línea, es decir, el punto de la línea queda localizado cuando es conocido el punto tomado en el eje.

Descartes no introduce formalmente el segundo eje, el vertical.

Las coordenadas x, y las llama *cantidades indeterminadas* y, contrariamente a lo que se hace en la actualidad, toma las abscisas en el sentido vertical y las ordenadas en el horizontal.

"Obsérvase en Descartes que adopta como principio que la ecuación de un lugar geométrico únicamente es válida para el cuadrante para el cual fue establecida. La generalización de sus propiedades a los demás cuadrantes fue asunto que sólo a la larga llegó a considerarse, y no puede atribuirse a ningún geómetra en particular", según afirma **P. Tannery** (1843-1901).

G. F. de L'Hospital (1661-1704), que publicó el más importante texto de Geometría Analítica a fines del siglo XVII, fue quien introdujo realmente los dos ejes, no forzosamente perpendiculares, y atribuyó signos a las coordenadas, según las convenciones aún hoy día en uso, aunque advierte al lector *que se limitará a describir los fenómenos que se verifican dentro del ángulo* (cuadrante) *de las direcciones positivas de los ejes.*

Con respecto a los signos de las coordenadas, merece particular mención **I. Newton** (1642-1727) por ser el primer matemático que, en realidad, sacó grandes ventajas de la consideración de dichos signos, merced a lo cual logró grandes simplificaciones.

Con el mismo Newton comienza, propiamente, a considerarse la hipérbola como una curva de dos ramas, cosa que no se había hecho antes, pues Apolonio no consideraba ambas ramas como pertenecientes a una misma curva.

Justo es advertir, empero, que el considerar de una manera sistemática el signo de los segmentos, así como el de los ángulos, de las áreas, etc., sólo se hizo en época posterior, por A. F. Möbius (1790-1868).

En cuanto a los sucesores inmediatos de Descartes, y a los que siguieron de cerca a Newton, poco impulso dieron a la Geometría Analítica, y únicamente se esmeraron en aclarar las ideas de esos maestros. Entre los continuadores de la obra de Cartesio, además del marqués de L'Hospital, debe mencionarse al ya citado F. de La Hire. Un adelanto importante se tiene con este matemático, pues enseña que, con respecto a las coordenadas de un punto, puede tomarse indistintamente una de ellas como variable independiente y la otra como dependiente de la primera, y viceversa. Para entender su expresión, necesita tenerse presente que llama *origen del lugar* al origen; que las coordenadas de un punto arbitrario las designa con los nombres de *tallo* y *ramas;* que entiende por *nudo* el pie de la ordenada del punto considerado y que por *lugar* entiende a toda línea o superficie cuyos puntos todos tienen una misma relación con determinados elementos fijos. Su manera de expresar la indicada propiedad es: *Pueden cambiarse las partes del Tallo en Ramas y las Ramas en partes del Tallo, sin cambiar el lugar, el origen ni el ángulo comprendido entre el Tallo y las Ramas.*

* * *

Descartes termina el segundo libro de su obra observando que el concepto fundamental de su método puede extenderse del plano al espacio, es decir, mencionó la Geometría Analítica de tres dimensiones, pero nada escribió acerca de ella. F. van Schooten el joven (1615-1660), traductor y comentador de Descartes, fue el que sugirió, en 1657, el uso de las coordenadas en el espacio tridimensional.

En realidad, el que echó los cimientos de la Geometría Analítica de tres dimensiones, fue A. Parent (1666-1716). Enseñó por primera vez a representar una superficie, la de una esfera y otros sólidos, por medio de una ecuación cartesiana, que él llama *équation superficielle;* pero, aunque habla de un punto como origen o punto de referencia, no menciona ni ejes ni planos coordenados.

El que indicó la consideración de los tres ejes coordenados de un sistema cartesiano, es J. E. Hermann (1678-1733). Con él la Geometría Analítica del espacio, entonces incipiente, recibió notable impulso. Considera tres ejes de referencia, y hace observar que un punto cualquiera de cada eje tiene dos de sus coordenadas nulas. Demuestra que toda ecuación de primer grado con tres variables, $ax + by + cz - d = 0$, representa un plano; partiendo de ella, deduce las coordenadas de la intersección del plano con cada uno de los ejes cartesianos.

La obra de Hermann fue posteriormente ampliada con los trabajos de A. C. Clairaut (1713-1765), que constituyen un verdadero tratado de Geometría Analítica del espacio, pues, además de determinar tangentes y normales a las curvas alabeadas, hace figurar ecuaciones de planos, ecuaciones de las superficies de la esfera, del paraboloide y, en general, las ecuaciones de las superficies de los sólidos de revolución.

Las obras de Hermann y de Clairaut tuvieron como complemento los trabajos de **L. Euler** (1707-1783), quien establece los fundamentos de la Geometría Analítica del espacio. Estudia las superficies representadas por las ecuaciones de segundo grado, y hace la reducción de ellas a cinco tipos.

Leonardo Euler

* * *

Por lo que se refiere a las *coordenadas polares* en el plano, en Arquímedes se halla una primera alusión a ellas; empero, con toda propiedad, debe decirse que dichas coordenadas fueron inventadas en 1691 por **Jacobo Bernoulli** (1654-1705), pues antes se habían usado para el estudio de las espirales solamente.

La extensión de las coordenadas polares a la Geometría Analítica del espacio, de las que hay un indicio en A. Clairaut, se debe a **J. L. Lagrange** (1736-1813), y a L. I. Magnus (1790-1861) la introducción de las *coordenadas cilíndricas.*

El estudio sistemático de las curvas dadas por ecuaciones en coordenadas polares, se encuentra en una obra de **Gourief**, publicada por el año de 1794. Su notación es moderna; usa z para representar el radio vector y ω para el ángulo vectorial o argumento, como se ve en las ecuaciones siguientes:

$$x = z \cos \omega, \quad y = z \operatorname{sen} \omega.$$

* * *

El apelativo *Analítica* es posterior a Descartes. Aparece en la edición que de las obras de Newton hizo **S. Horsley** en 1779, con el nombre de *Geometria analytica, sive specimina artis analyticæ*, es decir, Geometría analítica, o especímenes del arte analítico.

En el sentido actual, la denominación de *Geometría Analítica* figura en el prefacio escrito para el *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* de **S. F. Lacroix**, publicado por los años 1787-1790. Como título de un libro, se encuentra, por primera vez, en J. G. Garnier: *Eléments de géométrie analytique*, que vieron la luz en 1808.

Débese al marqués de L'Hôpital la introducción de la palabra *origen*, y son de **G. G. Leibniz** (1646-1716) las palabras *abscisa* y *ordenada* (en el sentido que se les da actualmente) y *coordenadas*. La palabra *parámetro*, aplicada a *ecuaciones paramétricas*, fue usada por este mismo autor.

Arquímedes ya usaba las palabras *eje*, *vértice* y *diámetro*. Con esta última palabra indicaba los ejes de simetría de la elipse y el de la parábola, como rectas que contienen los puntos medios de cuerdas paralelas a una recta dada. El mismo Arquímedes usaba también la expresión *diámetros conjugados*, pero la teoría relacionada con ellos es, tal vez, de fecha anterior.

La palabra *asíntota* aparece usada por **Autolico** (cerca del año 320 a. de J. C.), pero sólo llega a ser un término propiamente técnico con Apolonio, el cual la consideraba como una recta cuya distancia a la curva disminuye constantemente. El primero que consideró las asíntotas como rectas tangentes cuyo punto de tangencia se halla en el infinito, fue **G. Désargues** (1593-1661).

Por último. débese a Képler el haber introducido la palabra *foco* que, en el caso de la elipse, le fue sugerida por la observación de que los rayos luminosos o caloríficos que parten de uno de los focos de esa curva, son reflejados por ella en tal forma que pasan por el otro foco.

Los geómetras antiguos, Apolonio inclusive, conocían los dos focos de las cónicas que tienen centro; parece que **Papo** (fines del siglo III) fue el primero que consideró el foco de la parábola, y definió esta curva como el lugar de los puntos del plano que equidistan de una recta fija y de un punto fijo, exterior a esa recta. Partiendo de esta definición, ideó un dispositivo sencillo para describir la parábola con trazo continuo.

Como es fácil comprenderlo, resulta casi imposible citar los nombres de todos los matemáticos que han contribuído a completar la estructura de esta ciencia, y para terminar este bosquejo, únicamente se hace mención de los siguientes matemáticos: **Proclo** (412-485), el cual refiere que los antiguos griegos ya sabían que un punto fijo de un segmento cuyos extremos se deslizan sobre dos rectas perpendiculares, describe una elipse; **J. B. Biot** (1774-1862), a quien se debe la ecuación de una recta apoyada en dos puntos; **A. Cayley** (1821-1895), que fue el primero que escribió, por medio de un determinante nulo, la ecuación de dicha recta que se apoya en dos puntos; **L. N. M. Carnot** (1753-1823), que expresa el área de la superficie de un polígono de n lados por medio de la fórmula:

$$A = \tfrac{1}{2}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \dots + (x_ny_1 - x_1y_n)].$$

PRIMERA PARTE

GEOMETRIA ANALITICA DE DOS DIMENSIONES

1

PRELIMINARES

I. DEFINICIONES. REPRESENTACION CARTESIANA

1. Definición. *Llámase* **Geometría Analítica** *la parte de las Matemáticas que establece una conexión entre el Algebra y la Geometría Euclidiana:* estudia las propiedades de las figuras por procedimientos algebraicos y sujeta las cuestiones de la Geometría a métodos generales y uniformes, aplicables a todas las figuras.

2. Cuadrantes. Si se trazan dos rectas dirigidas $X'X$, $Y'Y$, perpendiculares entre sí, dividen el plano en cuatro regiones, llamadas *cuadrantes* (fig. 1).

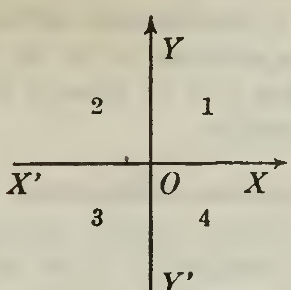


Fig. 1.

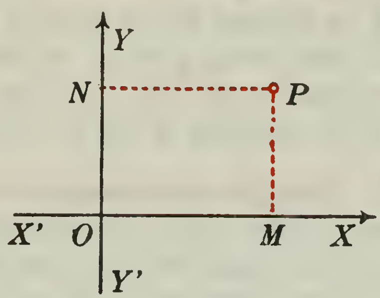


Fig. 2.

Por convención, XOY es el primer cuadrante, YOX' es el segundo, $X'OY'$ el tercero y $Y'OX$ el cuarto.

3. Ejes y origen. Las rectas $X'X$, $Y'Y$ se llaman *ejes* o *líneas de referencia*, y el punto de intersección, *origen* o *cero*.

El eje horizontal es el eje de las equis, y el vertical, el de las yes.

4. Coordenadas. La posición de un punto en un plano está determinada por medio de sus distancias a cada uno de los ejes (fig. 2).

Abscisa de un punto P *es su distancia* NP *al eje vertical;* se representa con x.

Ordenada de un punto P *es su distancia* MP *al eje horizontal;* se representa con y.

La abscisa y la ordenada del punto P *se llaman coordenadas rectilíneas o coordenadas cartesianas de ese punto.*

La palabra *cartesianas* proviene de *Descartes* (en latín Cartesius), iniciador de esta manera de localizar un punto en un plano.

5. Signos de las coordenadas. Por convención, las rectas dirigidas que forman los 4 cuadrantes, son *positivas* en el sentido $X'X$, $Y'Y$, y *negativas* en el contrario; según esto:

1º Toda abscisa a la *derecha* de $Y'Y$ es *positiva.*

2º Toda abscisa a la *izquierda* de $Y'Y$ es *negativa.*

3º Toda ordenada *arriba* de $X'X$ es *positiva.*

4º Toda ordenada *abajo* de $X'X$ es *negativa.*

6. Eje de las abscisas y eje de las ordenadas. En la fig. 2, la abscisa NP es igual a OM, y la ordenada MP es igual a ON; por tanto, pueden tomarse las abscisas en el eje $X'X$ y las ordenadas en $Y'Y$; por eso *dichos ejes se llaman también eje de las abscisas y eje de las ordenadas.*

7. Los ejes considerados como lugares geométricos. Considerado como *lugar geométrico*, es decir, como conjunto de puntos que gozan de una propiedad común, *el eje de las equis es el lugar de los puntos de ordenada cero, y el eje de las yes es el lugar de los puntos de abscisa cero.*

8. Designación de un punto. Para designar un punto R de abscisa 3 y ordenada 4, se escribe $R(3, 4)$; para un punto S de abscisa 5 y ordenada -7, se escribe $S(5,-7)$. Si las coordenadas de un punto P son variables, se indican escribiendo $P(x, y)$.

La coordenada horizontal se escribe siempre primero.

9. Localización de un punto en un plano. Para localizar un punto, dado por sus coordenadas, por ejemplo $P(-3,5)$, se llevan 3 unidades arbitrarias, negativamente, en el eje $X'X$, a partir del origen O, y se obtiene el punto Q; en Q se levanta una perpendicular, sobre la cual se cuentan 5 unidades, positivamente, y se obtiene así el punto P (fig. 3).

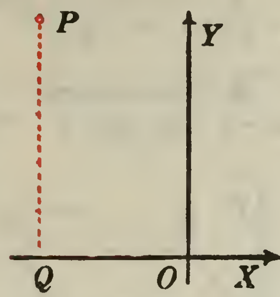


Fig. 3.

La unidad de medida es arbitraria, pero debe conservarse invariable en el curso de un mismo problema. Aunque en la mayor parte de los casos se hace uso de la misma unidad para las dos coordenadas, se toman, a veces, unidades diferentes para la abscisa y para la ordenada, como por ejemplo, en la fig. 20, pág. 17.

10. Otras coordenadas. La posición de un punto en un plano puede localizarse de otras maneras:

a) Sea la recta PX y el punto P en ella, ambos fijos (fig. 4). Un punto L queda localizado si se conocen la distancia PL y el ángulo θ (theta), dos magnitudes variables que constituyen otro sistema de coordenadas, llamadas *coordenadas polares*, que se estudiarán más adelante.

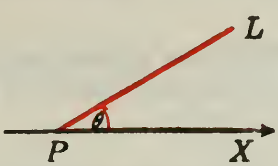


Fig. 4.

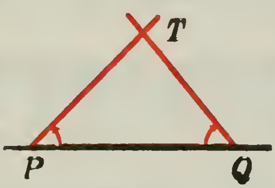


Fig. 5.

b) Si se da una recta fija y en ella dos puntos fijos P y Q (fig. 5), un punto T queda también localizado si se conocen los ángulos TPQ y TQP. Se tiene así otro sistema de coordenadas, llamadas *coordenadas bipolares*.

EJERCICIO 1

1. Representar los puntos $(3, 2)$, $(-2, 3)$, $(-1, -5)$, $(3, -4)$, $(7, -2)$, $(-5, 4)$.

2. Trácese la recta que une los puntos $(3, -1)$ y $(-2, 3)$.

3. Trácese el triángulo cuyos vértices son los puntos $(2, 3)$, $(-1, 4)$ y $(3, -2)$.

4. Represéntese el cuadrilátero cuyos vértices son los puntos $A(-2, -3)$, $B(3, 0)$, $C(5, 4)$, $D(0, 2)$.

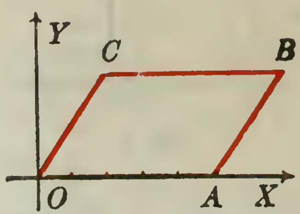


Fig. 6.

5. El segmento $OA = 5$, y las coordenadas de C son $(2, 3)$ (fig. 6). ¿Cuáles son las coordenadas del vértice B del paralelogramo $OABC$?

6. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos de abscisa constantemente igual a 3?

7. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos cuyas ordenadas son constantemente iguales a -5?

8. Por el punto $P(-2, 0)$ trácese una paralela a $Y'Y$, y por $Q(0, 4)$ una paralela a $X'X$. ¿Cuáles son las coordenadas del punto de intersección?

9. Trácese la bisectriz del ángulo XOY de los ejes coordenados. Tómese en ella el punto de abscisa 5. ¿Cuánto mide la ordenada del mismo punto?

10. En la figura del problema 9, trácese una perpendicular a la bisectriz desde el punto $P(0, 9)$. ¿Qué coordenadas tiene el punto de intersección?

11. Hállense las coordenadas de los puntos que distan 13 unidades del punto $P(1, 5)$ y 6 unidades del eje $Y'Y$.

12. Se da un triángulo isósceles ABC cuya base AB se encuentra en el eje $X'X$, y el vértice C en el eje $Y'Y$. Si $AB = 16$ y $OC = 15$, ¿cuáles son las coordenadas de cada vértice y las de los puntos medios de los lados AC y BC?

II. DISTANCIAS Y AREAS

11. Distancia entre dos puntos. Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ los puntos cuya distancia se quiere calcular (fig. 7).

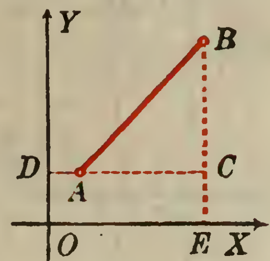


Fig. 7.

Trácese AC paralela a OX y BC perpendicular al mismo eje. Siendo rectángulo el triángulo ACB, se tiene:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2; \qquad (1)$$

pero, $AC = DC - DA = x_2 - x_1;$

y $CB = EB - EC = y_2 - y_1.$

Sustituyendo estos valores en (1), se obtiene:

$$\overline{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2;$$

de donde: $$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Si se intercambian x_2 y x_1, y_2 y y_1, el valor de AB no varía, porque: $(x_2 - x_1)^2 = (x_1 - x_2)^2$; $(y_2 - y_1)^2 = (y_1 - y_2)^2$;

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

12. Distancia de un punto al origen. Si uno de los puntos es el origen y el otro es $A(x_1, y_1)$ la distancia de A al origen es:

$$OA = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2}\ ;\ OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

13. Aplicaciones. 1ª Calcúlese la distancia de $A(-3, 4)$ a $B(6, -2)$.

$$\overline{AB}^2 = (6 + 3)^2 + (-2 - 4)^2 = 81 + 36 = 117.$$

$$AB = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}.$$

2ª Calcúlense las coordenadas del punto $P(x_1, y_1)$, (fig. 8), que equidista de $A(9, 3)$, $B(3, 7)$ y $C(-2, 6)$.

Debe tenerse: $$PA = PB = PC,$$

o sea: $$\sqrt{(x_1 - 9)^2 + (y_1 - 3)^2} = \sqrt{(x_1 - 3)^2 + (y_1 - 7)^2}$$
$$= \sqrt{(x_1 + 2)^2 + (y_1 - 6)^2}.$$

Elévese al cuadrado cada uno de los dos primeros radicales y redúzcase:

$$3x_1 - 2y_1 = 8. \qquad (1)$$

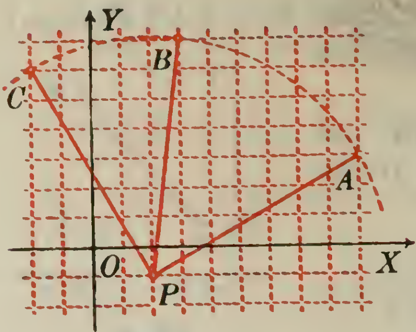


Fig. 8.

Elévense al cuadrado el primer radical y el tercero y redúzcase:

$$11x_1 - 3y_1 = 25. \qquad (2)$$

Resuélvase el sistema de (1) y (2); se obtiene:

$$x_1 = 2; \quad y_1 = -1;$$

$$P(2, -1).$$

14. Areas positivas y áreas negativas. Un móvil puede recorrer el contorno o perímetro de un polígono o figura cerrada cualquiera, en dos sentidos, a saber: teniendo constantemente a su *izquierda* la superficie limitada por dicho contorno, o bien teniéndola siempre a su *derecha.*

Por convención, el área de la superficie limitada por el contorno que recorre el móvil en el primer sentido se considera *positiva*, y *negativa* en el caso contrario.

15. Area de un triángulo Si se conocen las coordenadas de los vértices de un triángulo, se puede calcular su área en función de dichas coordenadas.

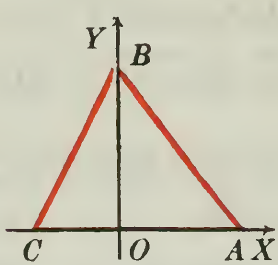


Fig. 9.

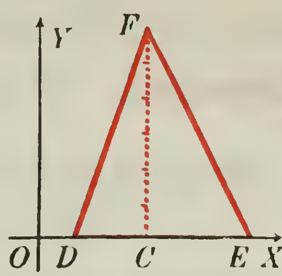


Fig. 10.

Ejemplos: 1º Sea calcular el área del triángulo ABC, dados los vértices $A(3,0)$, $B(0,4)$ y $C(-2,0)$, (fig. 9).

Area de $ABC = \frac{1}{2} CA \times OB = \frac{5 \times 4}{2} = 10$ unidades cuadradas.

2º Calcular el área del triángulo DEF dados los vértices $D(1,0)$, $E(6,0)$ y $F(3,6)$, (fig. 10).

$$\text{Area } DEF = \frac{1}{2} DE \times CF = \frac{5 \times 6}{2} = 15 \text{ u}^2.$$

16. Fórmula del área del triángulo. Considérense dos casos:

1º *El triángulo tiene un vértice en el origen.*

Sea el triángulo OAB, siendo $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, (fig. 11).

Proyéctense A y B sobre $X'X$; se tiene:

$$OAB = OA'B - OA'BA, \qquad (1)$$

$$\text{Area } OA'B = \frac{1}{2} OA' \times BB' = \frac{1}{2} x_1 y_2. \qquad (2)$$

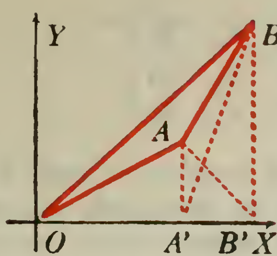


Fig. 11.

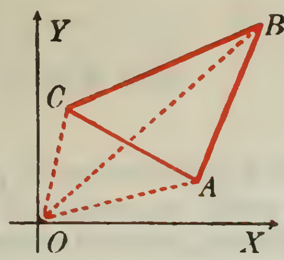


Fig. 12.

El cuadrilátero $OA'BA$ comprende el triángulo $OA'A$, más el triángulo $AA'B$.

El triángulo $AA'B$ es equivalente al triángulo $AA'B'$, por tener ambos la misma base $A'A$ e igual altura, la distancia entre las paralelas AA' y BB'; por tanto, dicho cuadrilátero es equivalente al triángulo $OB'A$; de donde:

$$\text{Area } OA'BA = \text{area } OB'A = \frac{1}{2} OB' \times A'A = \frac{1}{2} x_2 y_1. \qquad (3)$$

Sustitúyanse (2) y (3) en (1), y se obtiene:

$$\textbf{Area } OAB = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Este resultado puede expresarse en forma de determinante, como se indica a continuación:

$$\textbf{Area } OAB = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

2º *El triángulo no tiene ningún vértice en el origen.*

Sea el triángulo ABC (fig. 12), con $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, y $C(x_3, y_3)$.

Unase cada vértice con el origen. Se forman los triángulos OAB, OBC y OAC.

Se tiene: $$ABC = OAB + OBC - OAC.$$

Sustituyendo valores, según el resultado obtenido en el primer caso, se tiene:

$$\text{Area } ABC = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) + \frac{1}{2}(x_2y_3 - x_3y_2) - \frac{1}{2}(x_1y_3 - x_3y_1);$$

$$\textbf{Area } ABC = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3).$$

O sea, en forma de determinante:

$$\text{Area } ABC = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

Restando sucesivamente el primer renglón de cada uno de los restantes, queda expresada el área del triángulo por medio del siguiente determinante de segundo orden:

$$\text{Area } ABC = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

17. Area de un polígono cualquiera. Sea el polígono $ABCDE$ (fig. 13), en el que $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $D(x_4, y_4)$ y $E(x_5, y_5)$.

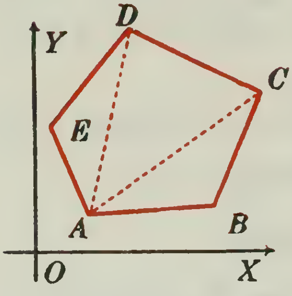


Fig. 13.

Unase el vértice A con los demás no consecutivos. Cualquiera que sea el polígono, se forman tantos triángulos como lados tiene el polígono, menos dos. Luego:

$$\text{Polígono } ABCDE = ABC + ACD + ADE.$$

Sustituyendo valores, según el número precedente y reduciendo, se obtiene, para el área del polígono:

$$\frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_4 - x_4y_3 + x_4y_5 - x_5y_4 + x_5y_1 - x_1y_5).$$

Observando los resultados obtenidos, ya sea el área de un triángulo con un vértice en el origen o no, o bien la de un polígono, se ve que *el área de la superficie es igual a la mitad del resultado que se obtiene al restar, para cada vértice, del producto de su abscisa por la ordenada del vértice consecutivo, el producto de la abscisa de éste por la ordenada del vértice que precede.*

18. Area nula. Considérese la figura $OABCD$ (fig. 14). Sean $A(5,0)$, $B(3,2)$, $C(-3,-2)$ y $D(-5,0)$. Evidentemente los triángulos OAB y ODC son iguales.

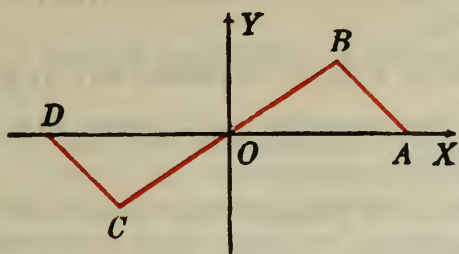


Fig. 14.

Si se suma el área de la superficie del triángulo OAB y la del triángulo OCD, o bien se aplica directamente la fórmula obtenida en el Nº 17, resulta:

$$\text{Area } ABCD = 5 - (+5) = 0.$$

19. Aplicaciones. Calcular:

1º El área del triángulo OAB, dados $A(4,2)$ y $B(7,9)$.

$$\text{Area } OAB = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(36 - 14) = 11 \text{ u}^2.$$

2º El área del triángulo ABC, dados $A(2,3)$, $B(-3,4)$ y $C(3,-5)$.

$$\text{Area } ABC = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}[(15 + 9 + 8) - (-9 + 12 - 10)] = 19.50 \text{ u}^2.$$

EJERCICIO 2

1. ¿Cuánto dista del origen cada uno de los siguientes puntos: $A(5,12)$, $B(8,-15)$, $C(-21,20)$, $D(99,-20)$?

2. Calcúlese la distancia del punto $A(5,3)$ al punto $B(3,4)$, y del punto $C(-2,5)$ al punto $D(4,-3)$.

3. Calcular la longitud del segmento que une $M(5,2)$ con $N(-1,6)$.

4. ¿Qué coordenadas tiene un punto A del eje $X'X$ que equidista de $B(0,6)$ y de $C(5,1)$?

5. Calcúlese el perímetro del triángulo cuyos vértices son $A(1,5)$, $B(-2,3)$ y $C(4,-3)$.

6. ¿Equidistan de $P(6,8)$ los puntos $M(1,5)$ y $N(9,3)$?

7. Exprésese algebraicamente que el punto $P(x_1, y_1)$ equidista de $M(4,3)$ y de $N(-2,9)$.

8. Los vértices de un triángulo son $A(12,2)$, $B(-3,5)$ y $C(8,8)$. Calcúlense las coordenadas del centro de la circunferencia circunscrita y la longitud del radio.

9. ¿Qué radio debe tener la circunferencia que pasa por los puntos $A(10,4)$, $B(9,7)$, $C(6,10)$? ¿Son de esta circunferencia los puntos $D(-2,-4)$ y $E(3,-5)$?

10. ¿Es inscriptible el polígono de vértices $M(11,0)$, $N(3,8)$, $P(1,8)$, $Q(-7,0)$, $R(1,-10)$?

11. Demuéstrese que el triángulo cuyos vértices son los puntos $D(2,6)$, $E(17,1)$ y $F\left(\frac{29}{2}, \frac{37}{2}\right)$ es isósceles.

12. Demuéstrese que el triángulo $A(3,-2)$, $B(9,6)$ y $C(10,5)$ es rectángulo en C.

13. Pruébese, sin recurrir a la gráfica, que el triángulo $M(1,2)$, $N(3,-4)$ y $P(5,-6)$ es obtusángulo.

14. Demuéstrese que el triángulo $A(1,2)$, $B(5,1)$ y $C(4,5)$ es acutángulo e isósceles.

15. Aplíquese la fórmula que permite calcular la distancia entre dos puntos a la resolución del siguiente problema: Sabiendo que dos triángulos equiláteros OAB y OAC tienen comunes el vértice O (origen de coordenadas) y el vértice $A(m,n)$, calcúlense las coordenadas de los otros vértices.

16. Obténgase la misma fórmula para el área del triángulo del Nº 16 1º (pág. 7), considerando el triángulo $OAB =$ triáng. $OB'B -$ triáng. $OA'A -$ trapecio $A'B'BA$.

17. Obténgase el área del triángulo de vértices O, $A(2,3)$ y $B(7,11)$.

18. ¿Por qué resulta negativa el área del triángulo OAB, en que se tiene $A(2,5)$ y $B(9,3)$?

19. Obténgase el área del triángulo de vértices $A(1,4)$, $B(-4,5)$ y $C(8,-3)$.

20. Calcúlese el área del triángulo de vértices $M(1,-1)$, $N(15,7)$ y $P(5,9)$.

21. ¿Cuál es el área del cuadrilátero de vértices $A(8,0)$, $B(2,3)$, $C(5,4)$ y $D(-1,8)$?

22. Calcúlese el área del paralelogramo $OABC$, dados $A(8,0)$, $B(10,4)$, $C(2,4)$, primero por el procedimiento analítico y luego por el geométrico, y véase cómo en ambos se obtiene el mismo resultado.

23. Dibújense, en la misma figura, el cuadrilátero de vértices $A(1,1)$, $B(5,3)$, $C(3,7)$ y $D(-3,5)$, y el cuadrilátero de vértices $M(3,2)$, $N(4,5)$, $P(0,6)$ y $Q(-1,3)$, y pruébese que el área del primero es doble de la del segundo.

24. Calcúlese el área del triángulo de vértices $A(1,0)$, $B(9,6)$ y $C(4,9)$. ¿Cuánto mide la altura trazada de C al lado AB?

25. El área del triángulo de vértices $A(1,3)$, $B(4,9)$ y $C(5,11)$ es cero. ¿Por qué?

26. Dibújese el triángulo cuyos vértices son $A(1,2)$, $B(5,1)$, $C(4,5)$. ¿Es equilátero? Calcúlese su área y la longitud de la altura relativa a la base AC.

III. ECUACIONES Y SU REPRESENTACION

20. Ecuación de un lugar geométrico. Sean las expresiones:

$$y = x \qquad (1)$$

$$y = 3x + 2 \qquad (2)$$

$$y^2 = 4x. \qquad (3)$$

La (1) indica que se trata de un lugar geométrico tal que cada uno de sus puntos tiene ordenada y abscisa iguales; la (2) indica que, para cada punto, la ordenada es el triple de la abscisa aumentado en 2; la (3) expresa que, para cada punto, el cuadrado de la ordenada es el cuádruplo de la abscisa de dicho punto.

Estas expresiones se llaman **ecuaciones**. *Ecuación de un lugar geométrico es una expresión que indica la conexión que debe existir entre las coordenadas de un punto y ciertas cantidades constantes, para que dicho punto sea de ese lugar geométrico.*

Así, por ej., el punto $P(3,9)$ no es del lugar geométrico representado por (2), porque $9 \neq 3 \times 3 + 2$.

21. Constantes. En las investigaciones matemáticas se encuentran dos clases de cantidades: unas que son *constantes* y otras que son *variables.*

Las constantes pueden ser *absolutas* o *arbitrarias.*

Así, en la ecuación: $y = 3x + 2$, 3 y 2 son constantes absolutas, porque nunca cambian; pero en $x^2 + y^2 = a^2$ que, como se verá más adelante, es la ecuación de una circunferencia, a representa el radio, y se pueden suponer circunferencias grandes o pequeñas, en las que a tendrá distintos valores, y sólo permanecerá constante en un problema determinado.

A estas constantes arbitrarias se las llama *parámetros.*

En la ecuación $y = mx + b$, m y b son parámetros.

Las constantes se representan con números o con las primeras letras del alfabeto.

22. Variables. Las variables son de dos clases: *independientes* y *dependientes.*

El radio de una circunferencia puede variar independientemente de cualquiera otra magnitud, mientras que la superficie del círculo *varía, forzosamente,* al variar el radio: el *radio* es, en este caso, *variable independiente,* y la *superficie* del círculo es *variable dependiente.*

Análogamente, dado $y = x^2 - 12x + 32$, a todo cambio de x corresponde otro para y; x es la variable independiente, y y es la variable dependiente.

Hay casos en que a toda variación de la variable independiente x, en cierto intervalo, no corresponde otra para y. Así, por ej., en los recibos se pone un timbre de 2 ¢ para cada \$ 20 ó fracción, y si se conviene en representar por x el número de pesos y por y el número de centavos, se tiene:

para $0 < x \leqq 20, \quad y = 2$;
para $20 < x \leqq 40, \quad y = 4$, etc.

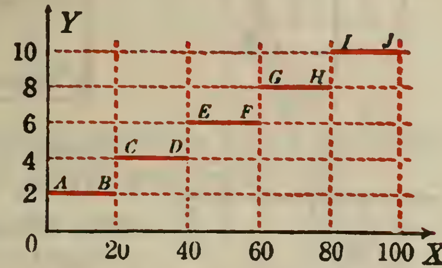


Fig. 15.

Si se representan con escala arbitraria las cantidades consideradas, se obtiene la gráfica de la figura 15, en la cual la ordenada de cada punto de los segmentos AB, CD, EF, GH, IJ, etc., representa el valor de la función correspondiente al valor de x en los intervalos $(0, 20)$, $(20, 40)$, $(40, 60)$, $(60, 80)$, $(80, 100)$, etc., respectivamente.

23. Función. *La variable dependiente se llama* **función.**

Atendiendo a todo lo expuesto, *se dice que* y *es una función de* x *en un intervalo, cuando a todo valor de* x *en ese intervalo, se hace corresponder, de alguna manera, un valor para* y.

24. Notación. Las variables se representan con las últimas letras del alfabeto.

La dependencia de una variable con respecto de otra, por ejemplo, que y es función de x, se indica simbólicamente:

$$y = f(x), \qquad y = F(x), \qquad y = \varphi(x), \text{ etc.}$$

Nota. Si en una ecuación no intervienen más variables que x y y, se tiene una ecuación en *coordenadas cartesianas.*

25. Representación de las funciones. Las funciones se pueden representar por métodos cartesianos.

EJEMPLOS: 1º Representar gráficamente la función $y = 2x + 1$.

Para trazar la gráfica que represente el lugar de la ecuación se atribuyen valores a la variable independiente x, haciéndola variar en el sentido de $-\infty$ a $+\infty$, y se calculan los

valores correspondientes de la función; así s tiene la siguiente tabulación:

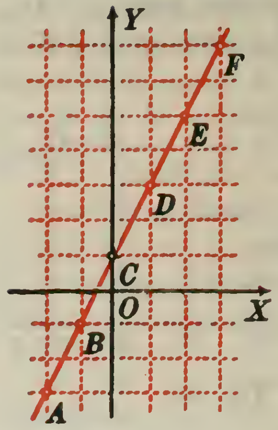


Fig. 16.

x	-2	-1	0	1	2	3
y	-3	-1	1	3	5	7
Puntos	A	B	C	D	E	F

Basta representar ahora los puntos A, B, C, D, E, F, llevando los valores de x como abscisas y los de y como ordenadas, y unirlos consecutivamente. Se obtiene, como gráfica, la recta AF (fig. 16).

2º Representar la función $y = \operatorname{sen} x$.

Considerado el ángulo x, expresado en *radianes*, como variable independiente y los valores de la función *seno* como variable dependiente, se puede formar la siguiente tabulación, en que se ha tomado $\pi = 3.1416$:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	...
$\operatorname{sen} x = y$	0	$.5$	$.7$	$.86$	1	$.86$	$.7$	$.5$	0	$-.5$	$-.7$	$-.86$	-1	...
Puntos	O	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	...

Se representan los puntos A, B, C, etc., y se unen después con trazo continuo, pero no con segmentos rectilíneos, pues sólo se procede así cuando la ecuación es algebraica y de primer grado. En los demás casos, es decir, cuando es algebraica de grado superior al primero, o bien no es algebraica, como la que se está considerando, la línea que resulta es una curva.

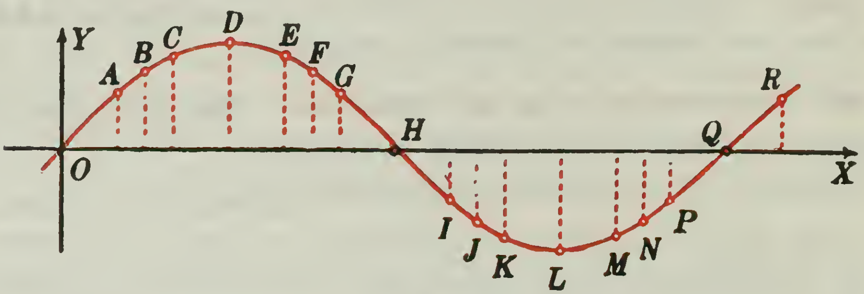


Fig. 17.

Teniendo en cuenta esta indicación se obtiene, al unir consecutivamente los puntos dados, la curva llamada *senoide* (fig. 17).

3º Representar la curva cuya ecuación es: $y^2 = -4x$.

Extráigase la raíz cuadrada:

$$y = \pm 2\sqrt{-x}.$$

La función es real sólo para valores negativos de x; por tanto la curva está toda en el segundo y tercer cuadrantes.

La tabulación da:

x	0	$-.25$	$-.5$	-1	-2	-3	-4
y	0	± 1	± 1.4	± 2	± 2.8	± 3.46	± 4
Puntos	O	A, A'	B, B'	C, C'	D, D'	E, E'	F, F'

Representando los puntos A, A', B, B', etc., y uniéndolos después consecutivamente, teniendo presente lo dicho en el caso anterior, se obtiene la curva que se llama *parábola* (figura 18).

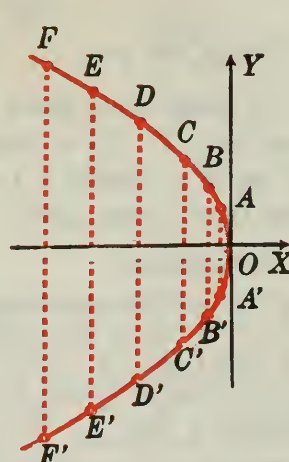


Fig. 18.

4º Representar la función $y = \frac{1}{x}$.

Antes de tabular obsérvese que la función es siempre del mismo signo que x, lo cual indica que la curva está toda en los cuadrantes primero y tercero.

Nótese también que a medida que el valor de x tiende a cero, pasando por valores negativos, y tiende a $-\infty$, y si x tiende a cero permaneciendo positiva, y crece indefinidamente, o sea, tiende a $+\infty$.

Previas estas advertencias, la tabulación puede presentarse del modo siguiente:

x	± 5	± 4	± 3	± 2	± 1	$\pm .5$	$\pm .25$	$\pm .2$	..	0
y	$\pm .2$	$\pm .25$	$\pm .3$	$\pm .5$	± 1	± 2	± 4	± 5	...	$\pm \infty$
Puntos	A, A'	B, B'	C, C'	D, D'	E, E'	F, F'	G, G'	H, H'	...	

El valor $\pm \infty$ no puede representarse gráficamente. Además, se ve que la ordenada correspondiente a una abscisa que difiere de cero tan poco como se quiera, es infinitamente grande, lo cual indica que el punto que describe la curva tiende a moverse paralelamente a $Y'Y$ cuando x tiende a cero. La curva que resulta se llama *hipérbola* (fig. 19).

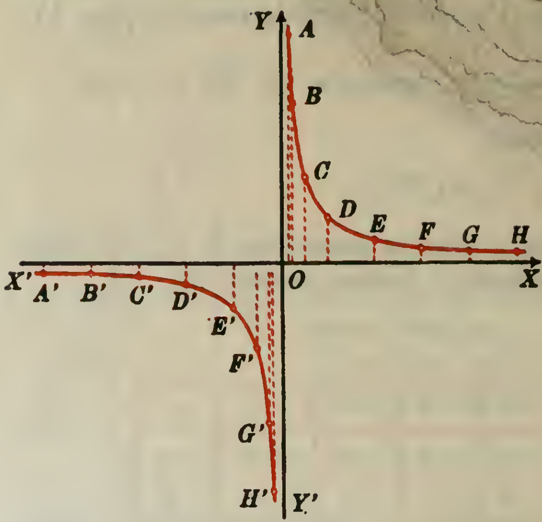


Fig. 19.

5º Representar la curva cuya ecuación es: $y = x^3 - xy$.

Despéjese y: $$y = \frac{x^3}{1+x}.$$

El valor de y crece indefinidamente para valores de x próximos a (-1). Si x tiende a (-1), pero con $x < -1$, y tiende a $+\infty$, y si tiende a (-1), pero con $x > -1$, y tiende a $-\infty$; por tanto, para $x = -1$, $y = \pm \infty$.

Tabulación:

x	-4	-3	-2	-1.5	-1.1	-1	$-.9$	$-.5$	0	1	2	3	4
y	21.3	13.5	8	6.75	13.3	$\pm \infty$	-7.3	$-.25$	0	.5	2.66	6.75	12.8
P.	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*O*	*I*	*J*	*K*	*L*

Siendo la variación de y muy fuerte, en casos como éste se toma muchas veces una unidad diferente para las dos coordenadas; así, en la figura 20 se han tomado 6 mm para unidad de las abscisas y 2 mm para unidad de las ordenadas.

6º Represéntese la curva cuya ecuación es:

$$y^2 = x^3 - 9x.$$

Extráigase raíz cuadrada:

$$y = \pm \sqrt{x(x^2 - 9)}.$$

Para que y sea real, se necesita tener $x(x^2 - 9) > 0$, lo cual sólo se verifica para

$$x < 0 \quad \text{y} \quad (x^2 - 9) < 0, \qquad (1)$$

o bien:

$$x > 0 \quad \text{y} \quad (x^2 - 9) > 0. \qquad (2)$$

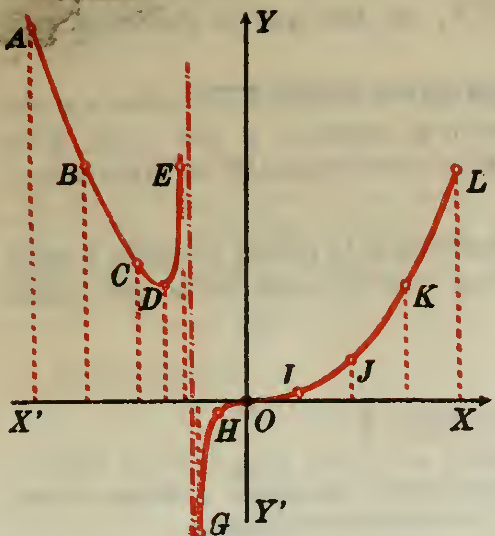


Fig. 20.

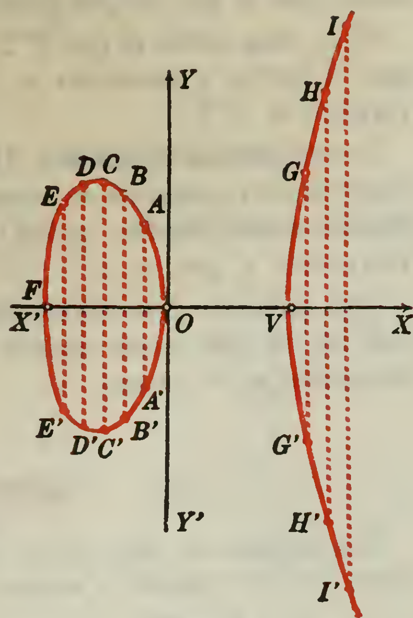


Fig. 21.

Las desigualdades (1) se verifican simultáneamente para $-3 < x < 0$, y las desigualdades (2) para $x > 3$.

Esto indica que la gráfica consta de una parte, que es una curva cerrada, comprendida entre el eje $Y'Y$ y una paralela a él, trazada por el punto $F(-3, 0)$, y otra parte, curva abierta, que empieza en $V(3, 0)$ y se extiende indefinidamente en la región de las equis positivas.

La tabulación es como sigue:

x	0	$-.5$	-1	-1.5	-2	-2.5	-3	3	3.5	4	4.5
y	0	± 2.09	± 2.82	± 3.18	± 3.16	± 2.62	0	0	± 3.3	± 5.3	± 7.11
P.	O	A, A'	B, B'	C, C'	D, D'	E, E'	F	V	G, G'	H, H'	I, I'

La gráfica es la representada en la figura 21.

26. Simetría de una curva. Cuando una curva, como las representadas en las figuras 18 y 21, es tal que a cada valor de x corresponden dos valores simétricos de y, o sea, dos valores que sólo difieren en el signo, es *simétrica* con respecto al eje $X'X$. En tal caso dicho eje biseca todas las cuerdas de la curva que le son *perpendiculares*.

Si en una curva el eje $Y'Y$ biseca todas las cuerdas limitadas por la curva y *paralelas* a $X'X$, se dice que es *simétrica* con respecto a $Y'Y$.

Puede decirse también: Una curva tiene $X'X$ como eje de simetría, si no cambia su ecuación al sustituir y por $-y$; y es simétrica con respecto al eje $Y'Y$, si su ecuación no cambia sustituyendo x por $-x$.

Una curva es *doblemente simétrica* si lo es con respecto a cada uno de los ejes, como sucede con una circunferencia que tenga su centro en el origen.

EJERCICIO 3

Represéntese el lugar de las ecuaciones siguientes, y dígase si son simétricas con respecto a alguno de los ejes coordenados.

1. $2y + 4x = 3.$
2. $y^2 = 5x.$
3. $y = x^2 - 4x + 3.$
4. $x^2 = 6y.$
5. $y^2 = -2x.$
6. $x^2 = -4y.$
7. $y = \dfrac{1}{x^2}.$
8. $y = \dfrac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$; $(a = 2)$.
9. $3x^2 + 4y^2 = 12.$
10. $2x^2 - 4y^2 - 8 = 0.$
11. $y^2 = x(x^2 - 4).$
12. $y = \dfrac{1}{x - 1}.$
13. $y = \dfrac{x + 2}{x + 1}.$
14. $y^2 = 4x^4 - x^6.$
15. $y = \cos x.$
16. $y = \tan x.$
17. $y = 2^x.$
18. $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}$; $(a = 2)$.
19. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$; $(a = 4)$.
20. $y = \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 2x - 15}.$

LA RECTA 2

I. DIFERENTES FORMAS DE SU ECUACION

27. Ecuación cartesiana de la recta. Sea $M(x, y)$ un punto móvil cualquiera de la recta MN (fig. 22), cuya ecuación cartesiana se quiere obtener. Puede escribirse:

$$y = CM = CD + DM. \qquad (1)$$

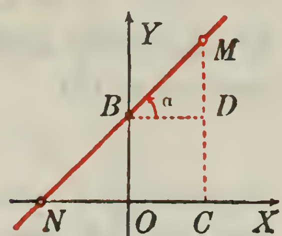


Fig. 22.

Sea también:

$$CD = OB = b. \qquad (2)$$

Por el triángulo BDM, se tiene:

$$\frac{DM}{BD} = \tan \alpha.$$

Si, para simplificar, se hace $\tan \alpha = m$, se obtiene:

$$\frac{DM}{BD} = m, \quad \text{o sea:} \quad DM = m \times BD = mx. \qquad (3)$$

Sustitúyanse (2) y (3) en (1); resulta:

$$y = mx + b;$$

que es la ecuación de la recta en su *forma simplificada.*

28. Otra forma de la ecuación. Si en la ecuación anterior se sustituye m por $-\frac{A}{B}$ y b por $-\frac{C}{B}$, se obtiene:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B};$$

o sea:

$$Ax + By + C = 0;$$

que es la ecuación de la recta en su *forma general.*

29. Ecuación de primer grado. Dada la ecuación de la forma $Ax + By + C = 0$, pueden considerarse los 6 casos siguientes:

$$1^{\circ} \quad A = 0, \quad B \neq 0, \quad C = 0;$$

la ecuación se reduce a: $By = 0$, o $y = 0$; es el eje $X'X$.

$$2^{\circ} \quad A \neq 0, \quad B = 0, \quad C = 0;$$

la ecuación se reduce a: $Ax = 0$, o $x = 0$; es el eje $Y'Y$.

$$3^{\circ} \quad A = 0, \quad B \neq 0, \quad C \neq 0;$$

la ecuación se reduce a: $By = -C$, o $y = -\frac{C}{B} = b$; es una paralela a $X'X$.

$$4^{\circ} \quad A \neq 0, \quad B = 0, \quad C \neq 0;$$

la ecuación se reduce a: $Ax = -C$, o $x = -\frac{C}{A} = c$; es una paralela a $Y'Y$.

$$5^{\circ} \quad A \neq 0, \quad B \neq 0, \quad C = 0;$$

la ecuación se reduce a: $By = -Ax$, o $y = -\frac{A}{B}x = mx$; es una recta que pasa por el origen.

$$6^{\circ} \quad A \neq 0, \quad B \neq 0, \quad C \neq 0.$$

En este caso la ecuación es $Ax + By + C = 0$; es una recta como la representada en la figura 22.

Toda ecuación algebraica de primer grado, representa una recta.

30. Ordenada y abscisa al origen. Sea la ecuación $y = 2x + 6$ (fig. 23).

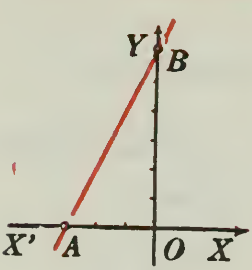


Fig. 23.

Si $x = 0$, $y = 6$, y se tiene el punto $B(0, 6)$; si $y = 0$, $x = -3$, y resulta el punto $A(-3, 0)$.

El segmento OB se llama *ordenada al origen*: es la distancia del origen al punto en que la recta corta a $Y'Y$; suele designarse por b.

El segmento OA se llama *abscisa al origen*: es la distancia del origen al punto en que la recta corta al eje $X'X$; se designa generalmente por a.

31. Construir una recta por los segmentos que determina en los ejes. Puesto que dos puntos determinan una recta. para representarla gráficamente basta calcular la ordenada y la abscisa al origen, y unir los dos puntos obtenidos.

Este procedimiento no puede seguirse cuando la ecuación de la recta es de la forma $y = mx$.

32. Coeficiente angular o pendiente de una recta. Sean las rectas

$$y = x + 1; \ (1) \qquad y = 2x + 1; \ (2)$$

$$y = 4x + 1; \ (3) \qquad y = -x + 1; \ (4) \qquad y = -5x + 1. \ (5)$$

Represéntese cada una de ellas en la misma figura. Puede observarse que todas pasan por el punto $B(0,1)$, (fig. 24); pero no todas están igualmente inclinadas con respecto al eje $X'X$, sino que forman con él ángulos diferentes.

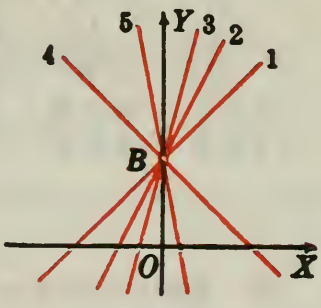


Fig. 24.

La magnitud del ángulo depende del coeficiente de x: por esta razón se llama *coeficiente angular de la recta.*

Se observa también que si $m > 0$, la recta forma con $X'X$ un ángulo agudo y si $m < 0$, el ángulo formado es obtuso. Nótase, además, que en cada caso el ángulo considerado se acerca tanto más a 90° cuanto mayor sea, numéricamente, el coeficiente m, o, en otras palabras, que la inclinación de la recta con respecto al eje $X'X$ depende de dicho coeficiente. De ahí que se llame también *pendiente de la recta.*

Según lo visto (Nº 27), $m = \tan \alpha$.

Pendiente de una recta es la tangente trigonométrica del ángulo que dicha recta forma con la dirección positiva del eje de las equis.

33. La pendiente en función de los segmentos. En el mis- Nº 27, se vió que $m = \frac{DM}{BD}$. Por la semejanza de los triángulos BDM y NOB (fig. 22), se tiene igualmente $\frac{DM}{BD} = \frac{b}{-a}$.

De donde: $$m = -\frac{b}{a};$$

es decir, la pendiente de una recta es el cociente del segmento determinado por la recta en el eje $Y'Y$ entre el segmento que determina en el eje $X'X$, con signo cambiado, o sea: *La pendiente es el cociente, con signo cambiado, de la ordenada al origen entre la abscisa al origen.*

34. Diferentes posiciones de una recta. La recta $y = mx + b$, según los valores particulares de los parámetros m y b, puede tener las siguientes posiciones:

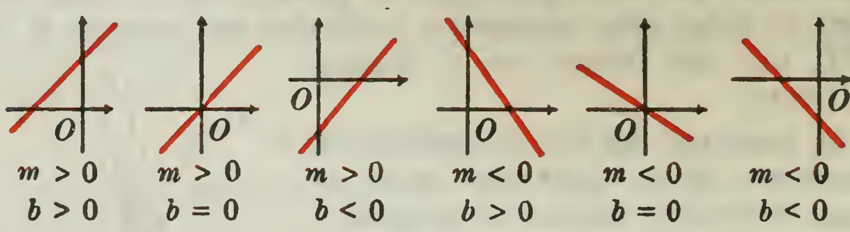


Fig. 25.

35. Aplicaciones. 1ª ¿Qué ángulo forma la recta $3x - 2y = 6$ con $X'X$?

La ecuación, escrita en su forma simplificada, es:

$$y = \frac{3}{2}x - 3.$$

Siendo el valor de $m = \frac{3}{2}$, la recta forma un ángulo agudo tal que $\alpha = \text{áng}\tan\frac{3}{2}$.

Por tanto: $$\alpha = 56° 20'.$$

2ª Obtener la ecuación de la recta que pasa por $B(0, 5)$ y forma un ángulo de 135° con $X'X$.

En este caso $m = \tan 135° = -1$, $b = 5$; por tanto la ecuación es:

$$y = -x + 5.$$

EJERCICIO 4

1. ¿Cuál es el lugar de los puntos de abscisa constantemente igual a 5, a -2? Escríbanse las ecuaciones correspondientes.

2. ¿Cuál es el lugar de los puntos de ordenada constantemente igual a 3, a -4? Escríbanse las ecuaciones de esos lugares.

3. Por el punto $P(3, 2)$ trazar una recta de pendiente $m = \frac{4}{3}$.

4. Obténgase la ecuación de la recta que corta a $Y'Y$ en $B(0, 2)$ y forma con $X'X$ un ángulo de 45°.

5. Obtener la ecuación de la recta de pendiente 2 y de ordenada al origen igual a 3.

Obtener la ecuación de la recta con los datos siguientes:

6. $\alpha = 30°, \quad b = -2.$

7. $\alpha = 60°, \quad b = -4.$

8. $\alpha = 120°, \quad b = 4.$

9. $\alpha = 135°, \quad b = 3.$

10. $\alpha = 150°, \quad b = \frac{3}{5}$

11. $\alpha = \text{áng tan } 2, \quad b = -4.$

12. $\alpha = \text{áng tan}\left(-\frac{5}{7}\right), \quad b = -\frac{4}{5}.$

13. Obtener la ecuación de la recta que pasa por el origen y tiene por pendiente $\frac{4}{3}$.

14. ¿Cuál es la pendiente de la recta $3x - 2y + 4 = 0$?

15. Calcular la pendiente y la ordenada al origen de la recta $\frac{x}{3} + \frac{y}{7} = 1$.

16. Un punto M se mueve de tal manera que su ordenada excede constantemente en 6 a los $\frac{2}{3}$ de la abscisa. ¿Cuál es la ecuación del lugar del punto M?

17. Un punto M se mueve de tal manera que la diferencia entre los cuadrados de sus distancias a los puntos $P(2, 3)$, $Q(5, 7)$ es 5. Obténgase la ecuación del lugar del punto M.

18. Obtener la ecuación del lugar de un punto M que equidista constantemente de $(3, 0)$ y de $(0, 3)$.

19. ¿Qué sucede si permaneciendo m constante en la ecuación $y = mx + b$, se hace variar b?

20. ¿Qué sucede si permaneciendo b constante en la misma ecuación, se hace variar m?

DIFERENTES FORMAS DE LA ECUACION DE LA RECTA
(Continuación)

36. Punto en una línea. La condición necesaria y suficiente para que un punto pertenezca a una línea, recta o curva, dada por su ecuación, es que las coordenadas del punto satisfagan la ecuación, es decir, que resulten iguales los dos miembros de la ecuación si se sustituyen las variables x, y por las coordenadas del punto considerado.

Condición necesaria: Si las coordenadas del punto no satisfacen, ese punto no es de la línea. Así, el punto $P(8, 8.5)$ no es del lugar que representa $y^2 = 9x$, porque $8.5^2 = 72.25 \neq 72$.

Condición suficiente: Si las coordenadas del punto satisfacen, ese punto es del lugar geométrico. Así, $Q(3, 4)$ es del lugar representado por $x^2 + y^2 = 25$, porque $3^2 + 4^2 = 25$.

37. Ecuación de la recta apoyada en un punto. Sea hallar la ecuación de la recta de pendiente m que pasa por $P(x_1, y_1)$.

La ecuación pedida es de la forma

$$y = mx + b. \qquad (1)$$

Por ser P un punto de la recta, se tiene:

$$y_1 = mx_1 + b;$$

de donde:

$$b = y_1 - mx_1;$$

valor que sustituído en (1) da:

$$y = mx + y_1 - mx_1;$$

o sea:

$$y - y_1 = m(x - x_1);$$

que es la ecuación pedida.

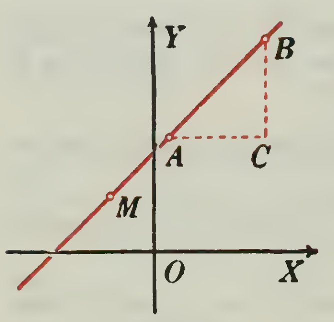


Fig. 26.

38. Ecuación de la recta apoyada en dos puntos. Sea obtener la ecuación de la recta que se apoya en $A(x_1, y_1)$ y en $B(x_2, y_2)$, (fig. 26).

Puesto que la recta pasa por el punto A, la ecuación pedida es de la forma

$$y - y_1 = m(x - x_1). \qquad (1)$$

Falta expresar m en función de las coordenadas de A y de B.

En el triángulo rectángulo ACB, se tiene:

$$m = \tan CAB = \frac{CB}{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Sustituyendo este último valor en (1), resulta:

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1);$$

que es la ecuación pedida.

Esta fórmula se escribe también del modo siguiente:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2},$$

y por ella se indica que la pendiente del segmento que une el punto móvil $M(x, y)$ con el punto A, es igual a la del segmento AB.

39. Casos particulares. 1º Si la recta pasa por dos puntos de igual abscisa, $A(x_1, y_1)$ y $B(x_1, y_2)$, es decir, si la recta es paralela a $Y'Y$, su ecuación es de la forma

$$x = c \text{ (constante)}.$$

2º Si la recta pasa por dos puntos de igual ordenada, $C(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_1)$, o sea, si la recta es paralela a $X'X$, su ecuación es de la forma

$$y = c.$$

40. Aplicaciones. Obténgase la ecuación de la recta que se apoya en $A(2, 9)$ y $B(-1, 3)$.

Si se consideran las coordenadas de A como (x_1, y_1) y las de B como (x_2, y_2), la fórmula del Nº 38 da:

$$y - 9 = \frac{9 - 3}{2 + 1}(x - 2): \qquad y = 2x + 5.$$

Si se hubieran considerado las coordenadas de B como (x_1, y_1) y las de A como (x_2, y_2), se habría obtenido:

$$y - 3 = \frac{3 - 9}{-1 - 2}(x + 1);$$

$$y = 2x + 5.$$

Los resultados son idénticos en ambos casos.

41. Ecuación de la recta en forma de determinante. La ecuación de la recta que se apoya en los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ puede expresarse por medio de un determinante de tercer orden.

Considérese, en efecto, el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Este determinante se anula cuando se sustituyen las variables (x, y) por (x_1, y_1) o por (x_2, y_2), pues en cada caso resultan dos renglones iguales y, por tanto, vale cero.

Luego,
$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

es una ecuación de primer grado con dos variables y representa, por tanto, una recta que se apoya en los puntos A y B.

Así, la ecuación obtenida en el Nº 40, en forma de determinante se escribe:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 9 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

o sea, desarrollando:

$$6x - 3y + 15 = 0,$$

o, simplificando por 3 y despejando y:

$$y = 2x + 5;$$

resultado idéntico al que se ha obtenido en el Nº 40.

42. Puntos alineados. Sean los puntos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, (fig. 27).

La pendiente del segmento AB es:

$$m_{AB} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2},$$

y la del segmento BC:

$$m_{BC} = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}.$$

La condición analítica para que los puntos A, B, C, estén alineados es que:

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_3}{x_2 - x_3}.$$

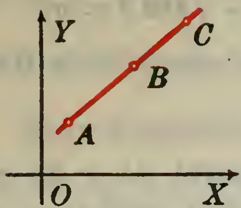


Fig. 27.

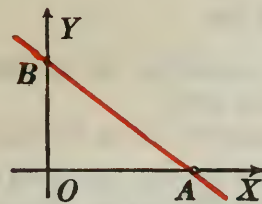


Fig. 28.

43. Ecuación de la recta en forma simétrica. Sea obtener la ecuación de la recta que se apoya en $A(a, 0)$ y $B(0, b)$, (fig. 28).

La ecuación es de la forma

$$y = mx + b. \qquad (1)$$

Pero, $$m = -\frac{b}{a};$$

valor que sustituído en (1) da:

$$y = -\frac{b}{a}x + b.$$

Divídase entre b y pásese al primer miembro el término en x; se obtiene:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1;$$

que es la ecuación pedida.

44. Ecuación de la recta en forma normal. Sea obtener la ecuación de la recta RS (fig. 29), en función de la perpendicular p trazada a ella desde el origen, y del ángulo θ que ésta forma con OX.

Según el Nº 43 y conforme a la figura 29, se puede escribir:

$$\frac{x}{OR} + \frac{y}{OS} = 1. \qquad (1)$$

Considerando los triángulos rectángulos OMR y OMS, se tiene, respectivamente:

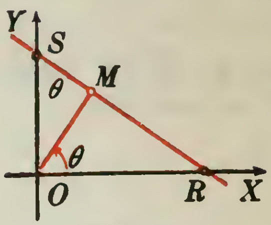


Fig. 29.

$$OR = \frac{p}{\cos\theta}, \quad OS = \frac{p}{\operatorname{sen}\theta}.$$

Sustituyendo estos valores en (1) y dando forma entera, se obtiene:

$$x\cos\theta + y\operatorname{sen}\theta = p;$$

o sea, la ecuación de la recta en *forma normal* o de *Hesse*.

45. Cambio de la forma general a la forma normal. Dada la ecuación de una recta en su forma general $Ax + By + C = 0$, para escribirla en su forma normal, deben sustituirse los coeficientes A y B por dos números tales que representen, respectivamente, el coseno y el seno del ángulo θ.

Divídanse ambos miembros de la ecuación $Ax + By + C = 0$ entre K, constante por determinar, de tal manera que resulte:

$$\frac{A}{K} = \cos\theta; \qquad \frac{B}{K} = \operatorname{sen}\theta.$$

Sustitúyanse estos valores en la fórmula $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$; se obtiene:

$$\frac{A^2}{K^2} + \frac{B^2}{K^2} = 1; \quad \text{de donde:} \quad K = \pm\sqrt{A^2 + B^2}.$$

La ecuación $Ax + By + C = 0$ toma entonces la forma

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0,$$

en que debe tomarse, para el radical, el signo que haga positivo a p, es decir, el signo contrario al de C.

Siendo $\cos\theta = \frac{p}{OR} = \frac{p}{a}$ (fig. 29), resulta que $\cos\theta$ es siempre del mismo signo que la abscisa al origen a, y el signo de ésta es contrario al de C.

En efecto, para conocer el signo de a basta considerar que las coordenadas de $R(a, 0)$ satisfacen la ecuación $Ax + By + C = 0$.

Sustituyendo x y y, respectivamente, por a y 0, se tiene:

$$Aa + C = 0; \quad \text{de donde:} \quad a = -\frac{C}{A}.$$

46. Aplicaciones. 1ª Obtener la ecuación de la recta, dado $p = 5$, $\tan\theta = \frac{15}{8}$, sabiendo que θ es del tercer cuadrante (fig. 30).

De los datos se obtiene:

$$\operatorname{sen}\theta = -\frac{15}{17};\quad \cos\theta = -\frac{8}{17}.$$

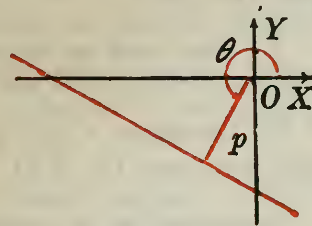


Fig. 30.

Por tanto, la ecuación pedida es:

$$-\frac{8}{17}x - \frac{15}{17}y = 5:$$

o sea: $8x + 15y + 85 = 0.$

2ª Escribir la ecuación $3x - 4y = 15$ en forma normal.

Según lo expuesto anteriormente:

$$K = \pm\sqrt{3^2 + 4^2} = \pm 5.$$

Tómese el signo $+$ porque, en este caso, $C < 0$.

Resulta por consiguiente:

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y = 3$$

En este caso, θ es un ángulo del 4º cuadrante. Se tiene, en efecto:

$$\cos\theta > 0,\quad \operatorname{sen}\theta < 0.$$

EJERCICIO 5

Obténgase la ecuación de la recta que: (Nº 1 a 7 inclusive)

1. Pasa por $P(2, 3)$ y tiene una inclinación de $45°$.

2. Pasa por $Q(5, -2)$ y de pendiente igual a -2.

3. Tiene una pendiente igual a -3 y ordenada al origen igual a $-\frac{2}{3}$.

4. Pasa por el punto $P\left(\frac{5}{3}, -7\right)$ y de pendiente cero.

5. Pasa por $R(-4, 1)$ y forma con $X'X$ un ángulo tal que $\alpha = \text{áng tan } 5$.

6. Se apoya en el punto $P(3,5)$, que equidista de los puntos A y B en que la recta corta los ejes.

7. De pendiente 4, y corta los ejes en los puntos A y B, tales que $AB = \sqrt{17}$.

8. Una recta se apoya en el punto $Q(3,6)$ y su abscisa a al origen es -5. ¿Cuál es su pendiente?

9. Calcúlese c en la ecuación $3x + 2cy = 4$, sabiendo que esta recta pasa por $P(-2,5)$.

Dígase cuál es la pendiente de la recta que se apoya en los puntos:

10. $(1,5)$, $(4,-3)$.

11. $(5,8)$, $(-2,3)$.

12. $(3,3)$, $(4,-9)$.

13. $(8,1)$, $(1,8)$.

14. Obténgase la ecuación de la recta que une los puntos $R(3,-5)$ y $S(4,7)$.

15. Una recta se apoya en los puntos $A(3,-5)$ y $B(-2,c)$. Calcúlese c, sabiendo que la pendiente de la recta es 3.

16. Obténganse las ecuaciones de los lados del triángulo cuyos vértices son: $A(2,1)$, $B(3,-2)$, $C(-4,1)$.

17. Los vértices de un cuadrilátero son $A(-1,-1)$, $B(3,0)$, $C(4,3)$, $D(0,2)$. Obténganse las ecuaciones de las diagonales y dígase qué valores tienen las pendientes de los lados opuestos.

18. Dese la ecuación de la recta en que la ordenada y la abscisa al origen son, respectivamente, -3 y 2.

19. Obténgase la ecuación de la recta que pasa por $P(4,6)$, sabiendo que la ordenada al origen es doble de la abscisa al origen y que ambas son positivas.

20. ¿Pertenece el punto $P\left(3, \frac{9}{2}\right)$ a la recta que se apoya en los puntos $A(5,7)$ y $B(2,3)$?

21. La pendiente de una recta es 8, y pasa por el punto $P(7,1)$. Calcúlense la abscisa y la ordenada al origen. Escríbase su ecuación en forma simétrica.

Examínese si están alineados los puntos:

22. $A(-2,-2)$, $B(2,6)$, $C(5,12)$.

23. $M(1,2)$, $N(3,5)$, $P(9,17)$.

24. Calcúlese el valor que debe tener a para que los puntos $(a, 8)$, $(2a, 13)$ y $(0, a)$ estén alineados. Escríbase la ecuación de la recta que se apoya en esos tres puntos.

25. ¿Qué punto C del eje $X'X$ deberá tocar el móvil que partiendo de $A(1, 8)$ debe llegar a $B(6, 18)$ haciendo un recorrido mínimo?

26. Obténgase la ecuación de la recta que dista 2 unidades del origen y forma con OX un ángulo de $135°$. ¿Cuál es su ordenada al origen?

27. ¿Qué sistema o familia de rectas se obtiene haciendo variar el parámetro θ en la ecuación $x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta = 6$?

Hállese la ecuación de las rectas en que concurren los datos siguientes:

28. $p = 2, \quad \theta = \text{áng sen}\ \frac{5}{13}$; ($\theta$ es del 1er cuadrante).

29. $p = 5, \quad \theta = \text{áng cos}\ \frac{24}{25}$; ($\theta$ es del 4º cuadrante).

30. $p = 3, \quad \theta = \text{áng tan}\ \frac{20}{21}$; ($\theta$ es del 3er cuadrante).

31. $p = 4, \quad \theta = \text{áng sen}\ \frac{12}{37}$; ($\theta$ es del 2º cuadrante).

Escríbanse en forma normal o de Hesse las ecuaciones siguientes y dígase, en cada caso, de qué cuadrante es el ángulo θ.

32. $5x + 12y = 15.$ **34.** $20x - 21y = 15.$

33. $4x + 3y = 21.$ **35.** $3x - 7y = 8.$

36. Hállese el valor de θ en $ax + by = ab$, y en $5x - 6y = 7$.

37. Dado $\theta = 30°$, dígase qué valor debe tener p para que la recta $x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta = p$ pase por $P(12, -1)$.

38. Una recta se apoya en $Q(-5, -3)$, y una perpendicular a ella desde el origen forma con $X'X$ un ángulo de $225°$. Obténgase la ecuación de la primera recta.

39. Obténgase la ecuación de la recta de pendiente $\frac{4}{3}$, sabiendo que dista 4 unidades del origen.

40. El cuadrado $ABCD$ (fig. 31) tiene 8 unidades de lado. En los lados AB y AD se señalan los puntos G y E, a 5 u. de A. Por E se traza una paralela a AB y en ella se marca el punto H, a 3 u. de E. Se unen los puntos G y H, y se traza la diagonal DF.

Luego se colocan los dos cuadriláteros *AGHE* y *BFHG* y los triángulos rectángulos *DEF* y *FCD* como lo indica la figura 32, y se forma así el rectángulo *A'G'F'H'*, de 13 u. de alto y 5 u. de base. Siendo el rectángulo equivalente al cuadrado, resulta que 65 = 64, o, lo que es lo mismo, 1 = 0. ¿Dónde está el error?

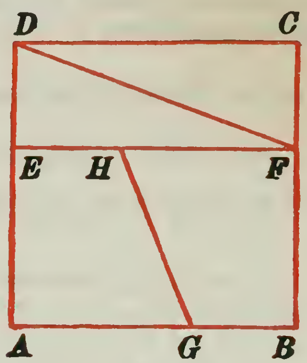


Fig. 31.

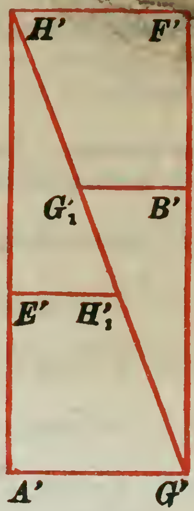


Fig. 32.

II. POSICIONES RELATIVAS DE DOS O MAS RECTAS ANGULOS

47. Paralelismo. Considérense dos rectas paralelas cualesquiera, AB y CD, por ejemplo (fig. 33). Sus pendientes son iguales, pues forman ángulos iguales con OX.

La condición necesaria y suficiente para que dos rectas sean paralelas es que tengan pendientes iguales.

48. Perpendicularidad. Sea $y = m_1 x + b_1$ la ecuación de la recta AB, $y = m_2 x + b_2$ la de la recta CD, perpendicular a AB (fig. 34).

Por ser $\alpha_1 + \beta = 90°$, y $\alpha_2 + \beta = 180°$,

se tiene por trigonometría:

$$\tan \alpha_2 = -\tan \beta = -\cot \alpha_1.$$

Por tanto:

$$\tan \alpha_2 = -\cot \alpha_1 = -\frac{1}{\tan \alpha_1}.$$

Sustituyendo $\tan \alpha_1$ por m_1 y $\tan \alpha_2$ por m_2, se tiene:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}; \quad \text{o sea:} \quad m_1 m_2 = -1.$$

Las pendientes de dos rectas perpendiculares son recíprocas y de signos contrarios.

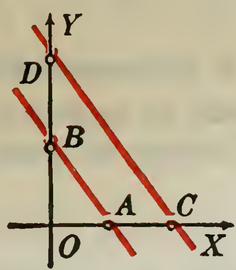


Fig. 33.

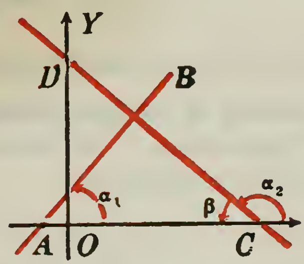


Fig. 34.

49. Aplicación. Obtener la ecuación de la recta que pasa por $P(4, 7)$ y es perpendicular a la recta $y = -2x + 1$.

La ecuación pedida es de la forma: $y - y_1 = m(x - x_1)$. (1)

En este caso, $m = \frac{1}{2}$; $x_1 = 4$; $y_1 = 7$.

Sustitúyase en (1); se obtiene:

$$y - 7 = \tfrac{1}{2}(x - 4), \quad \text{ó} \quad x - 2y + 10 = 0.$$

50. Intersección de dos rectas. Sean las rectas

$$y = m_1 x + b_1;$$
$$y = m_2 x + b_2;$$

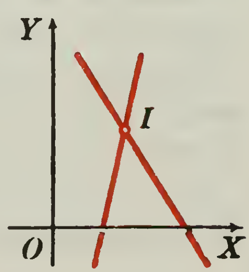


Fig. 35.

cuya intersección es $I(x_1, y_1)$, (fig. 35), siendo (x_1, y_1) constantes por determinar.

Las coordenadas de I satisfacen las dos ecuaciones; por tanto:

$$y_1 = m_1 x_1 + b_1; \qquad (1)$$
$$y_1 = m_2 x_1 + b_2. \qquad (2)$$

Réstese (2) de (1) y se tiene:

$$0 = (m_1 - m_2)x_1 + b_1 - b_2;$$

de donde:

$$x_1 = \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2}. \qquad (3)$$

Sustitúyase (3) en (1):

$$y_1 = m_1 \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} + b_1,$$

$$y_1 = \frac{m_1 b_2 - m_2 b_1}{m_1 - m_2}.$$

51. Discusión. Considérense los tres casos siguientes:

1º $m_1 \neq m_2$, $b_1 \neq b_2$. En este caso x_1 es finito, o sea, hay punto de intersección. Se tiene un sistema de ecuaciones independientes y simultáneas.

2º $m_1 = m_2$, $b_1 \neq b_2$. En este caso $x_1 = \infty$; las rectas se encuentran en el infinito, es decir, son paralelas. Efectivamente, tienen pendientes iguales. Se tiene un sistema de ecuaciones independientes, pero no simultáneas.

3º $m_1 = m_2$, $b_1 = b_2$. En este caso, $x_1 = \frac{0}{0}$; hay indeterminación. Las dos rectas se confunden, pues pasan por el mismo punto $(0, b)$, y tienen la misma pendiente. Se trata de dos ecuaciones simultáneas, pero no independientes.

52. Intersección de dos líneas cualesquiera. El procedimiento seguido en el número anterior puede aplicarse a la determinación de la intersección o intersecciones de dos líneas cualesquiera, dadas por sus ecuaciones.

Ejemplo. — Calcular las coordenadas de la intersección de la recta $7y + x = 25$ con la curva $x^2 + y^2 = 25$ (circunferencia de radio 5 y centro en el origen).

Sea $I(x_1, y_1)$ el punto de intersección. Sus coordenadas satisfacen las dos ecuaciones; por tanto:

$$x_1^2 + y_1^2 = 25; \qquad (1)$$

$$7y_1 + x_1 = 25. \qquad (2)$$

Despéjese x en (2) y sustitúyase su valor en (1):

$$49y_1^2 - 350y_1 + 625 + y_1^2 = 25,$$
$$50y_1^2 - 350y_1 + 600 = 0,$$
$$y_1^2 - 7y_1 + 12 = 0,$$

ecuación cuyas raíces son: $y_1' = 4, \quad y_1'' = 3.$

Por tanto:

$$x_1' = 25 - 7y_1' = 25 - 28 = -3;$$
$$x_1'' = 25 - 7y_1'' = 25 - 21 = 4.$$

Las intersecciones son: $I(4, 3), \quad I'(-3, 4).$

Hay tantos puntos de intersección como pares de valores reales se obtienen para x_1, y_1.

53. Condición para que tres rectas sean concurrentes.

Sean las rectas:

$$y = m_1x + b_1;$$
$$y = m_2x + b_2;$$
$$y = m_3x + b_3.$$

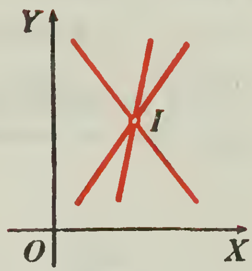


Fig. 36.

Sea $I(x_1, y_1)$, (fig. 36) el punto de intersección de la primera con la segunda. Sus coordenadas las verifican; por tanto:

$$y_1 = m_1x_1 + b_1; \qquad (1)$$
$$y_1 = m_2x_1 + b_2. \qquad (2)$$

Las coordenadas de la intersección de (1) y de (2) son:

$$x_1 = \frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2}; \qquad y_1 = \frac{m_1b_2 - m_2b_1}{m_1 - m_2}.$$

Si la tercera recta pasa por I, las coordenadas de este punto la satisfacen, y se tiene:

$$\frac{m_1b_2 - m_2b_1}{m_1 - m_2} = m_3\,\frac{b_2 - b_1}{m_1 - m_2} + b_3.$$

Incorpórese b_3 al quebrado, desarróllese y redúzcase; se obtiene:

$$m_1b_2 - m_2b_1 + m_2b_3 - m_3b_2 + m_3b_1 - m_1b_3 = 0,$$

que son los términos del desarrollo del determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & m_1 & b_1 \\ 1 & m_2 & b_2 \\ 1 & m_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Luego, la condición para que tres rectas concurran, es que este determinante sea nulo.

54. Coordenadas del punto medio de un segmento. Sea el segmento limitado por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, (fig. 37).

Proyéctense los extremos A y B y el punto medio M sobre cada eje.

Por el trapecio $GFAB$, se tiene:

$$HM = \frac{FA + GB}{2}; \quad \text{o sea:} \qquad x_M = \frac{x_1 + x_2}{2};$$

y por el trapecio $ACDB$:

$$EM = \frac{CA + DB}{2}; \quad \text{es decir:} \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Una coordenada del punto medio de un segmento es la semi suma de las coordenadas de mismo nombre de los extremos.

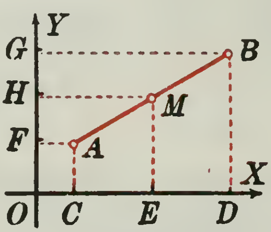


Fig. 37.

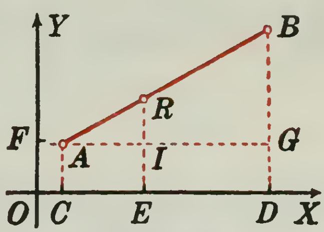


Fig. 38.

55. Coordenadas del punto que divide un segmento en una razón dada. Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ los extremos de un segmento (fig. 38). Sea R el punto que divide el segmento AB en forma tal que se tenga:

$$\frac{AR}{AB} = r \text{ (razón dada)}.$$

Proyéctense los puntos A, R y B sobre OX y trácese por A la recta FG paralela a OX.

Considerando los triángulos semejantes AIR y AGB, se puede escribir:

$$\frac{AI}{AG}=\frac{AR}{AB}=r; \quad (1) \qquad \frac{IR}{GB}=\frac{AR}{AB}=r. \quad (2)$$

Siendo
$$AI=FI-FA=x_R-x_1,$$
$$AG=FG-FA=x_2-x_1,$$
$$IR=ER-EI=y_R-y_1,$$
$$GB=DB-DG=y_2-y_1;$$

de las igualdades (1) y (2) se obtiene, dando forma entera y despejando:

$$x_R=x_1+r(x_2-x_1);$$
$$y_R=y_1+r(y_2-y_1).$$

Si R es el punto medio de AB, $r=\frac{1}{2}$. Efectuando las operaciones, se llega al resultado del Nº 54.

56. Aplicación. Los extremos de un segmento son $A(7,4)$ y $B(1,10)$. Obténganse las coordenadas del punto R tal que $\frac{AR}{AB}=\frac{1}{3}$.

$$x=7+\frac{1}{3}(1-7)=5;$$
$$y=4+\frac{1}{3}(10-4)=6.$$

EJERCICIO 6

1. Obtener la ecuación de la recta que pasa por $P(3,-2)$ y es paralela a la recta $2x+3y=5$.

2. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el origen y es perpendicular a la recta $3x-2y=6$?

3. Obténgase la ecuación de la recta que pasa por el origen y es paralela a $5y-4x=7$.

4. Obténgase la ecuación de la recta que pasa por $P(5,3)$ y es perpendicular a la recta que une los puntos $Q(5,-2)$ y $R(-3,4)$.

5. ¿Qué valor debe tener m para que la recta $y=mx-7$ pase por la intersección de las rectas $y=2x-4$, $y=5x-13$?

6. Uno de los lados de un paralelogramo es la recta apoyada en $A(2,1)$ y $B(7,6)$. Obténgase la ecuación del lado opuesto, sabiendo que pasa por $C(4,6)$.

7. ¿Son perpendiculares las rectas $3x+2y=11$ y $3y+2x=6$?

8. Los vértices de un triángulo son $A(2,3)$, $B(-1,5)$ y $C(4,-2)$. Obténganse las ecuaciones de las tres alturas.

9. Dadas las rectas $y=3x-1$, $3x+7=y$, y $2y-6x+15=0$, dígase en qué difieren y qué tienen de común. ¿Son paralelas?

10. El área de un triángulo es $36\,u^2$ y dos de sus vértices son $A(-5,-3)$ y $B(4,3)$. Obténganse las ecuaciones del lugar del vértice C.

11. Calcúlense las coordenadas de la intersección de $2x-y=1$ con $3x-y=3$.

12. Obténgase la ecuación de la recta que pasa por la intersección de $2x-y=4$ con $3x-y=5$ y forma un ángulo de $135°$ con $X'X$.

13. Las ecuaciones de los lados de un triángulo son: $x+2y=5$, $2x+y=7$, $y=x+1$. Obténganse las coordenadas de los vértices y calcúlese la longitud de los lados.

14. ¿Cuáles son las coordenadas del pie de la perpendicular trazada del origen a la recta $5x=7y+2$?

15. Demuéstrese que si por el punto $(5,9)$ se hace pasar una recta de pendiente 1, el triángulo formado por esa recta y las rectas $x+3y=20$, $7x+y=120$, es isósceles.

16. Tres de los vértices de un paralelogramo son los puntos $(1,1)$, $(5,-2)$ y $(3,4)$. Hállense las coordenadas del cuarto vértice. (Tres soluciones).

17. Desde el punto $(29,0)$ se bajan perpendiculares a los lados del triángulo de vértices $A(20,21)$, $B(-20,21)$, $C(0,-29)$. Demuéstrese que los pies de las 3 perpendiculares están alineados.

18. En el triángulo del problema anterior, ¿cuál es la longitud de la altura trazada del vértice A al lado opuesto?

19. Calcúlense las coordenadas de las intersecciones de $y=2x+1$ con $y^2=9x$.

20. ¿Cuántos puntos comunes tienen la recta $3x+4y=25$ y la circunferencia $x^2+y^2=25$?

21. Dígase si concurren en un mismo punto las rectas $y = 3x - 17$, $2y = x - 9$, $y = -2x + 8$.

22. ¿Qué valor debe tener c para que las rectas $3x + y = 2$, $2x - y - 3 = 0$ y $5x + 2y + c = 0$ concurran en el mismo punto?

23. Calcúlese el área del triángulo cuyos vértices son $A(3a, 0)$, $B(0, 3b)$, $C(a, 2b)$. ¿Cómo se explica el resultado?

24. Obténganse las coordenadas del punto B, simétrico de $A(8, 5)$ con respecto a la recta $y = 2x - 1$.

25. Las coordenadas del punto medio de la diagonal de un cuadrado son $(4, 3)$ y las de un vértice $(7, -3)$. Calcúlense las coordenadas del vértice opuesto y obténgase la ecuación de la otra diagonal.

26. Los vértices de un triángulo son $A(-4, -3)$, $B(6, 1)$ y $C(4, 11)$. Calcúlense las coordenadas de los puntos medios de los lados y dense las ecuaciones de las medianas.

27. Demuéstrese que las medianas del triángulo anterior concurren en el mismo punto I.

28. Demuéstrese que la distancia del punto I a cada vértice es los $\frac{2}{3}$ de la mediana relativa a dicho vértice.

29. Hágase ver que uniendo el punto I con los vértices, se forman tres triángulos equivalentes.

30. ¿Cuáles son las coordenadas del punto R que divide al segmento limitado por los puntos $M(3, -2)$ y $N(8, 3)$, sabiendo que $\frac{\overline{MR}}{\overline{MN}} = \frac{2}{5}$?

31. El punto $R(1, 6)$ divide al segmento AB en la razón $\frac{\overline{AR}}{\overline{AB}} = \frac{2}{3}$. ¿Cuáles son las coordenadas de B, si las de A son $(-3, 4)$?

32. Los vértices del triángulo isósceles ABC son $A(2, 8)$, $B(9, 1)$, $C(17, 16)$. Calcúlense las coordenadas de la intersección de la bisectriz de cada uno de los ángulos del triángulo con el lado opuesto.

33. Pruébese que la recta que une el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo con el punto medio de la hipotenusa, es igual a la mitad de dicha hipotenusa.

34. Las coordenadas de los vértices de un cuadrilátero son: $(1, 1)$, $(5, 3)$, $(3, 7)$ y $(-3, 5)$. Pruébese que si se unen consecutivamente los

puntos medios de los lados se obtiene un paralelogramo, y que el área de éste es la mitad de la del cuadrilátero dado.

35. Los vértices de un paralelogramo son $A(-1,-1)$, $B(7,5)$, $C(11,13)$ y $D(3,7)$. Demuéstrese que si se une el vértice B con el punto medio de DC, y el vértice D con el punto medio de AB, la diagonal AC resulta trisecada.

POSICIONES RELATIVAS DE DOS O MAS RECTAS ANGULOS

(Continuación)

57. Angulo entre dos rectas. Sean las dos rectas

$$y = m_1x + b_1; \qquad y = m_2x + b_2;$$

y sea V el ángulo que forman (fig. 39).

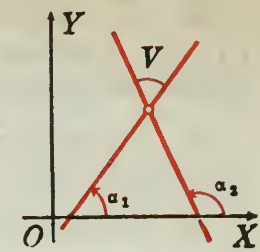


Fig. 39.

Se tiene: $\alpha_2 = \alpha_1 + V$;

de donde: $V = \alpha_2 - \alpha_1$.

El cálculo de V por medio de la función tangente da:

$$\tan V = \frac{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}{1 + \tan \alpha_1 \tan \alpha_2}.$$

Sustitúyase $\tan \alpha_1$ por m_1 y $\tan \alpha_2$ por m_2; se obtiene:

$$\tan V = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}.$$

Si se intercambian m_1 y m_2, se obtiene, para el quebrado, un valor simétrico del primero, o sea, la tangente del suplemento de V.

Para calcular V cuando ocupe una posición análoga a la de la figura 39, póngase en primer lugar, en el numerador, la pendiente de la recta que forma el mayor ángulo con OX, según se procedió para obtener la fórmula.

Si se tienen que calcular los ángulos interiores del triángulo ABC (fig. 40), y se conviene en designar por 1, 2 y 3 las pendientes de los lados CA, AB y BC, los numeradores respectivos para $\tan A$, $\tan B$ y $\tan C$ son:

$$1 - 2, \quad 2 - 3, \quad 3 - 1,$$

conforme a la observación que precede, y como puede comprobarse prolongando hasta el eje $X'X$ los lados que forman el ángulo cuyo valor se busca.

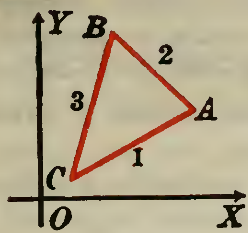


Fig. 40.

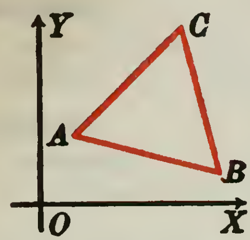


Fig. 41.

58. Aplicaciones. 1ª Calcúlense los ángulos del triángulo cuyos vértices son $A(1,2)$, $B(5,1)$ y $C(4,5)$, (fig. 41).

$$m_{AB} = \frac{2-1}{1-5} = -\frac{1}{4};$$

$$m_{BC} = \frac{1-5}{5-4} = -4;$$

$$m_{CA} = \frac{5-2}{4-1} = 1.$$

$$\tan A = \frac{1+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{5}{3}; \qquad A = 59^\circ\, 2';$$

$$\tan B = \frac{-\frac{1}{4}+4}{1+1} = \frac{15}{8}; \qquad B = 61^\circ\, 56';$$

$$\tan C = \frac{-4-1}{1-4} = \frac{5}{3}; \qquad C = 59^\circ\, 2'.$$

El triángulo ABC es isósceles.

2ª La pendiente de una recta es -3, y la de otra es 2. Las dos pasan por $P(3,1)$. ¿Cuál es la ecuación de la bisectriz del ángulo RPQ formado por las rectas? (fig. 42).

Sea m la pendiente de la bisectriz. Se tiene, considerando la recta de pendiente -3 y la bisectriz:

$$\tan RPB = \frac{-3-m}{1-3m}. \qquad (1)$$

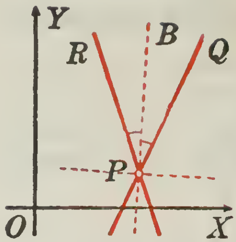


Fig. 42.

Considerando ahora la bisectriz y la recta de pendiente 2, se tiene:

$$\tan BPQ = \frac{m-2}{1+2m}. \qquad (2)$$

Iguálense (1) y (2):

$$\frac{-3-m}{1-3m} = \frac{m-2}{1+2m}.$$

Multiplíquense medios y extremos y redúzcase:

$$m^2 - 14m - 1 = 0.$$

Resultan para m los valores:

$$m_1 = 7 + 5\sqrt{2}, \quad \text{y} \quad m_2 = 7 - 5\sqrt{2}.$$

Habrá, por tanto, dos soluciones para el problema. Efectivamente, las rectas dadas forman 4 ángulos iguales dos a dos.

Las ecuaciones son:

$$y-1 = (7+5\sqrt{2})(x-3), \quad \text{ó} \quad y = (7+5\sqrt{2})x - 5(4+3\sqrt{2});$$

$$y-1 = (7-5\sqrt{2})(x-3), \quad \text{ó} \quad y = (7-5\sqrt{2})x + 5(3\sqrt{2}-4).$$

Nótese que $m_1 \times m_2 = (7+5\sqrt{2})(7-5\sqrt{2}) = 49-50 = -1$; las dos bisectrices son perpendiculares, como deben serlo las de dos ángulos adyacentes suplementarios.

EJERCICIO 7

1. Calcúlese el ángulo agudo formado por las rectas $3x + y = 7$, $2x - y = 3$.

2. Calcúlese el ángulo obtuso formado por las rectas $3y+x+1 = 0$, $3y - x = 1$.

3. Calcúlese el ángulo agudo de las rectas $4y = 3x - 7$, $y = 2x - 3$.

4. Calcular el ángulo agudo formado por $ay + bx = ab$ y $bx - ay = 1$.

5. Hágase ver que la recta $11x + 3y + 1 = 0$ biseca el ángulo agudo de las rectas $12x - 5y + 7 = 0$, y $3x + 4y - 2 = 0$.

6. Los vértices de un triángulo son $A(-2,-1)$, $B(4,4)$, y $C(2,7)$. ¿Cuáles son los ángulos del triángulo que se forma uniendo consecutivamente los puntos medios de los lados del triángulo ABC?

7. Obténganse las ecuaciones de las rectas PQ y PR que se apoyan en $P(3,5)$ y forman un triángulo rectángulo isósceles con la recta $x+2y=8$. Calcúlense, además, las coordenadas del cuarto vértice del cuadrado $PQRS$.

8. El segmento que une los puntos $A(-1,2)$ y $B(3,-2)$ es un lado de un triángulo equilátero cuyo tercer vértice C se halla en el primer cuadrante. Calcúlense las coordenadas de C y obténganse las ecuaciones de los lados AC y BC.

9. La pendiente de una recta es -2, y la de otra recta es 1 y ambas se apoyan en el punto $(2,-3)$. Obténgase la ecuación de la bisectriz del ángulo que forman.

10. Obténgase la ecuación de la recta que se apoya en el punto $(7,8)$ y forma un triángulo isósceles con las rectas $5y=12x-9$ y $4y=3x-1$. (2 soluciones).

11. De la fórmula obtenida en el Nº 57, dedúzcanse las condiciones necesarias y suficientes para que dos rectas sean paralelas o perpendiculares.

III. DISTANCIAS

59. Distancia del origen a una recta. Sea $y=mx+b$ la ecuación de la recta AB cuya distancia al origen se quiere calcular (fig. 43).

Por el triángulo rectángulo OPB se tiene:

$$OP = OB\cos\alpha = b\cos\alpha.$$

De $\tan\alpha = m$, se obtiene: $\cos\alpha = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+m^2}}$;

de donde:

$$OP = \frac{b}{\pm\sqrt{1+m^2}}; \qquad (1)$$

y como, por otra parte, sólo se considera el valor absoluto de OP, el radical debe tomarse con el mismo signo de b, es decir, la igualdad (1) expresa la distancia del origen a dos rectas de igual pendiente, y de ordenadas al origen simétricas.

Observando, además, que para valores simétricos de m resultan valores iguales para OP, de las consideraciones hechas se infiere que OP es el radio de una circunferencia tangente a 4 rectas de pendientes simétricas dos a dos y de ordenadas al origen también simétricas dos a dos.

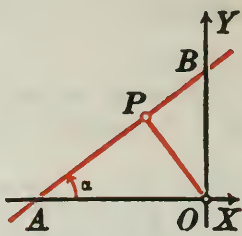


Fig. 43.

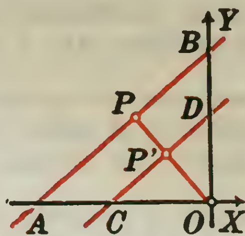


Fig. 44.

60. Distancia entre dos rectas paralelas. Sean AB y CD dos rectas paralelas cuyas ecuaciones son $y = mx + b_1$ y $y = mx + b_2$ (fig. 44).

La distancia entre las dos es $P'P = OP - OP'$.

Pero. $$OP = \frac{b_1}{\sqrt{1+m^2}}, \text{ y } OP' = \frac{b_2}{\sqrt{1+m^2}};$$

por tanto: $$P'P = \frac{b_1 - b_2}{\sqrt{1+m^2}},$$

en que el signo de b_2 es algebraico.

61. Distancia de un punto a una recta. Sea $P(x_1, y_1)$ el punto cuya distancia a la recta $y = mx + b$ se quiere calcular.

Por el triángulo rectángulo RMP (fig. 45), se tiene:

$$MP = RP \cos \alpha. \qquad (1)$$

Por otra parte: $$RP = QP - QR, \qquad (2)$$
$$QP = y_1. \qquad (3)$$

El punto R pertenece a EF, y sus coordenadas, (x_1, y_2), satisfacen la ecuación de la recta; por tanto:

$$QR = y_2 = mx_1 + b. \qquad (4)$$

Además, $$\cos \alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+m^2}}. \qquad (5)$$

Sustitúyanse (3) y (4) en (2); y después (2) y (5) en (1); se obtiene, teniendo en cuenta el doble signo del radical cuadrático:

$$MP = \frac{y_1 - (mx_1 + b)}{\pm\sqrt{1+m^2}}.$$

La longitud de la perpendicular trazada de un punto a una recta es igual al cociente de la ordenada de ese punto, menos el segundo miembro de la ecuación de la recta, en el cual se ha sustituído la variable x *por la abscisa del punto, entre* $\pm$ *la raíz cuadrada de* 1 *más el cuadrado de la pendiente de la recta.*

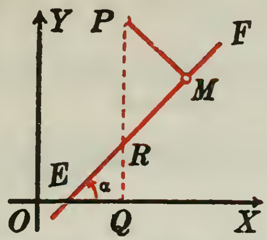


Fig. 45.

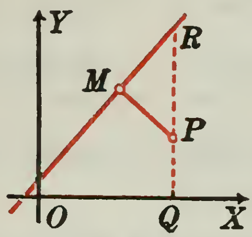


Fig. 46.

Notas. 1ª El numerador $y_1 - y_2$, o sea, $QP - QR$, puede ser positivo, como se ve en la figura 45, o negativo, como lo indica la figura 46. Por tanto, se tomará para el radical el signo que dé el numerador; es decir, la distancia se considera siempre positiva.

2ª Recordando que: $m = -\frac{A}{B}$ y $b = -\frac{C}{B}$,

se puede escribir también:

$$MP = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

EJERCICIO 8

1. Calcúlese la distancia del origen a la recta que se apoya en $(0, 3)$ y forma con OX un ángulo de $60°$.

2. ¿Cuál es la distancia del origen a la recta $\frac{x}{3} - \frac{y}{5} = 1$?

3. ¿Qué radio debe darse a la circunferencia que tiene su centro en el origen, para que resulte tangente a la recta $2x + 3y = 9$?

4. Hállese la distancia del punto $(-4, -5)$ a la recta que une los puntos $(3, -1)$ y $(-4, 2)$.

5. Calcúlese la distancia del punto $P(4, 5)$ a la recta $4x + 3y = 26$.

6. La ecuación de un lado de un cuadrado es $y = 2x + 1$. Hállese la longitud del lado opuesto, sabiendo que pasa por $P(-5, 3)$.

7. Los vértices de un paralelogramo son $A(1, 1)$, $B(10, 3)$, $C(12, 7)$, $D(3, 5)$. Calcúlese la distancia entre los lados AB y CD.

8. Hállese la distancia del punto $P(x_1, y_1)$ a la recta $y = mx + b$. valiéndose de la fórmula obtenida en el Nº 60.

9. Dedúzcase la fórmula obtenida en el Nº 59 de la del Nº 61.

10. Obténgase la ecuación de la recta que dista 6 unidades del origen, y es perpendicular a la recta $y = 2x + 4$.

11. ¿Equidista el punto $P(4, 10)$ de las rectas $4y - 3x + 2 = 0$ y $8y + 15x = 38$?

12. Obténgase la ecuación de cada una de las tangentes que pueden trazarse desde el punto $P(2, 14)$ a la circunferencia de radio 10 y centro en el origen.

13. Los vértices de un triángulo son los puntos $A(3, 1)$, $B(2, 3)$ y $C(1, 2)$. Calcúlese la longitud de cada altura.

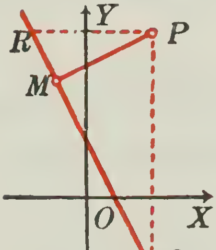


Fig. 47.

14. Hállense las ecuaciones de las dos rectas trazadas paralelamente a la recta $15y + 8x = 8$, a una distancia 12 de ella.

15. Calcúlese la distancia del punto $P(3, 7)$ a la recta $y = -2x + 3$. Luego calcúlese esa distancia considerándola como altura del triángulo rectángulo RPQ formado por la recta dada y las rectas PR y PQ paralelas a los ejes cartesianos, y véase cómo se obtiene, en ambos casos, el mismo resultado (fig. 47).

16. La recta $5y = 14x + 33$ es bisectriz de uno de los ángulos formados por las rectas $5y + 12x + 19 = 0$, y $15y = 8x + 31$. Haciendo centro en un punto de la bisectriz se traza una circunferencia de radio 10, tangente a los dos lados del ángulo. Calcúlense las coordenadas del centro.

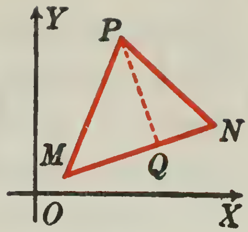


Fig. 48.

17. Los vértices del triángulo PMN (fig. 48) son (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Obténgase la fórmula para calcular el área de la superficie en función de las coordenadas de los vértices, considerando que el área es igual a

$$\frac{1}{2} MN \times QP.$$

$\left(\text{Tómese como pendiente de } MN \text{ el valor } \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}\right).$

18. Teniendo presente que la ecuación de la recta que se apoya en los puntos $M(x_2, y_2)$, $N(x_3, y_3)$ puede escribirse en forma del determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

pruébese que la distancia del punto $P(x_1, y_1)$ a la recta MN puede, a su vez, escribirse:

$$d = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

19. Aprovechando el resultado anterior, demuéstrese que el área de la superficie del triángulo cuyos vértices son $P(x_1, y_1)$, $M(x_2, y_2)$ y $N(x_3, y_3)$, es igual a

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

3

LUGARES GEOMETRICOS

I. MEDIATRIZ Y BISECTRIZ

62. Ecuación del lugar de los puntos que equidistan de dos puntos fijos. Sean $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ dos puntos fijos, y $M(x, y)$ un punto móvil cualquiera del lugar geométrico (fig. 49).

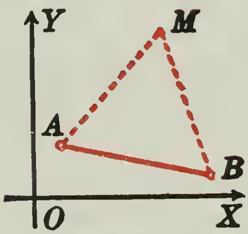


Fig. 49.

La propiedad característica del lugar M es:

$$MA = MB.$$

Se puede escribir:

$$MA = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}; \qquad (1)$$

$$MB = \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2}. \qquad (2)$$

Iguálense (1) y (2), elévese al cuadrado y redúzcase:

$$x_1{}^2 - 2x_1x + y_1{}^2 - 2y_1y = x_2{}^2 - 2x_2x + y_2{}^2 - 2y_2y.$$

Esta ecuación es de primer grado con dos variables; por tanto, representa una recta. Para ver su naturaleza, pásense al primer miembro los términos en y, y al segundo los restantes; luego póngase en factor. Se obtiene:

$$\begin{aligned} 2y(y_2-y_1) &= 2x(x_1-x_2)+y_2{}^2-y_1{}^2+x_2{}^2-x_1{}^2 \\ &= 2x(x_1-x_2)+(y_2+y_1)(y_2-y_1)+(x_2+x_1)(x_2-x_1). \end{aligned}$$

Despéjese y:

$$y = \frac{x_1-x_2}{y_2-y_1}\,x + \frac{y_1+y_2}{2} + \frac{x_2-x_1}{y_2-y_1} \times \frac{x_1+x_2}{2};$$

ecuación que puede escribirse, sucesivamente:

$$y - \frac{y_1+y_2}{2} = -\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}\,x + \frac{x_1-x_2}{y_1-y_2} \times \frac{x_1+x_2}{2};$$

o sea: $$y - \frac{y_1+y_2}{2} = -\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2}\left(x - \frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

Siendo $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ la pendiente de AB, se ve que la de la recta cuya ecuación se ha obtenido, es recíproca y de signo contrario al de la pendiente de AB; además, $\frac{x_1 + x_2}{2}$ y $\frac{y_1 + y_2}{2}$ son las coordenadas del punto medio de AB; luego la ecuación obtenida es la de la perpendicular bisectriz o mediatriz del segmento AB.

63. Ecuación del lugar de los puntos equidistantes de dos rectas. Sean $y = m_1x + b_1$, $y = m_2x + b_2$, las ecuaciones de las rectas RQ y RP, y M un punto móvil cualquiera del lugar (fig. 50).

La propiedad del lugar es: $MQ = MP$.

Designando por (x', y') las coordenadas variables del punto M, se tiene:

$$QM = \frac{y' - m_1x' - b_1}{\pm\sqrt{1 + m_1^2}}; \qquad (1)$$

$$PM = \frac{y' - m_2x' - b_2}{\pm\sqrt{1 + m_2^2}}. \qquad (2)$$

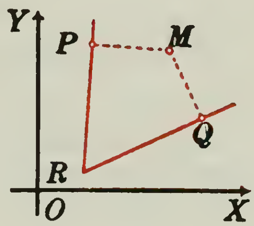


Fig. 50.

Por lo expuesto en el Nº 61, en (1) debe tomarse el signo $+$ del radical y en (2) el signo $-$. Siendo numéricamente iguales los quebrados, puede escribirse, suprimiendo los acentos:

$$\frac{y - m_1x - b_1}{\sqrt{1 + m_1^2}} = \pm \frac{y - m_2x - b_2}{\sqrt{1 + m_2^2}};$$

o bien:

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Por ser esta ecuación de primer grado con dos variables, representa una recta, que es la **bisectriz del ángulo de las rectas** RQ y RP.

El doble signo indica que hay dos bisectrices. En efecto, las rectas RQ y RP forman cuatro ángulos, iguales de dos en dos.

64. Aplicación. Obtener la ecuación de la bisectriz del ángulo de las rectas: $3x + 4y = 8$ y $5y + 15 = 12x$.

Se tiene: $$\frac{4y + 3x - 8}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \pm \frac{5y - 12x + 15}{\sqrt{12^2 + 5^2}}.$$

Tómese primero el signo $+$, multiplíquese y redúzcase:

$$27y + 99x - 179 = 0, \quad \text{o bien:} \quad y = -\frac{11}{3}x + \frac{179}{27}.$$

Tómese luego el signo $-$, multiplíquese y redúzcase como antes:

$$77y - 21x - 29 = 0, \quad \text{o sea:} \quad y = \frac{3}{11}x + \frac{29}{77}.$$

Las dos bisectrices tienen pendientes recíprocas y de signos contrarios; por tanto, son perpendiculares.

EJERCICIO 9

1. Obténgase la ecuación de la perpendicular bisectriz del segmento cuyos extremos son $A(-5, 2)$ y $B(7, 8)$.

2. ¿Cuál es la ecuación de la mediatriz del segmento AB en que A es la intersección de $y = 2x - 1$ con $y = 3x - 4$, y B lo es de $y + x = 16$ con $y = 4x - 29$?

3. Los vértices de un triángulo son $M(-3, -4)$, $N(9, 4)$, y $P(3, 12)$. Demuéstrese que las tres mediatrices concurren en el mismo punto.

4. Hágase ver que el punto de encuentro de las mediatrices del problema anterior equidista de los vértices del triángulo.

5. En el cuadrado $ABCD$, $y = 3x - 2$ es la ecuación del lado AD. Obténganse las coordenadas de los vértices D y B, dados $A(1, 1)$ y $C(9, 5)$.

6. Una de las diagonales de un cuadrado termina en los puntos $A(1, 1)$ y $C(3, 5)$. Calcúlense las coordenadas de los vértices D y B.

7. En el cuadrado $MNPQ$ se conocen las coordenadas del centro $C(2, 1)$, y las del vértice $M(-3, 7)$. ¿Qué coordenadas tienen los otros vértices y cuál es el área del cuadrado?

8. Los vértices de un triángulo son $A(-4, -3)$, $B(6, 1)$, y $C(4, 11)$. Demuéstrese que los puntos comunes a las mediatrices, a las medianas y a las alturas están alineados.

9. Obténgase la ecuación de la bisectriz del ángulo de las rectas $2y = x + 1$ y $y = -2x + 2$.

10. Hallar la ecuación de la bisectriz del ángulo de $3y = x + 5$ y $y = 3x + 7$.

11. Demuéstrese que la recta $7y = 9x - 11$, es bisectriz del ángulo agudo formado por las rectas $4y = 3x - 2$ y $5y = 12x - 19$.

Los vértices de un triángulo son $A(1, 3)$, $B\left(\frac{157}{25}, -\frac{24}{25}\right)$, y $C(13, 8)$. Obténgase: Nº 12 a 16 inclusive.

12. Las ecuaciones de los tres lados.

13. Las ecuaciones de las bisectrices interiores AI y BI.

14. La intersección de las bisectrices anteriores.

15. Hágase ver que el punto I es de la bisectriz trazada por el vértice del ángulo C.

16. Calcúlese el radio de la circunferencia inscrita.

17. Demuéstrese que la recta $19y = 4x + 219$ es bisectriz del ángulo obtuso formado por las rectas cuyas ecuaciones son, respectivamente: $21y + 20x = 413$ y $5y = 12x - 19$.

18. Los vértices de un triángulo son $A(4, -3)$, $B(7, 1)$, y $C(3, 4)$. Demuéstrese que la bisectriz interior del ángulo B y las exteriores de los otros dos concurren en el mismo punto.

II. LA CIRCUNFERENCIA

65. Definición. *Como lugar geométrico, la* **circunferencia** *es el lugar de los puntos que equidistan de un punto interior llamado centro.*

66. Ecuación de la circunferencia. 1º *La circunferencia es referida a su centro,* el origen.

Sea $M(x, y)$ un punto móvil cualquiera de la circunferencia y r el radio (fig. 51).

Se tiene: $OM = r$;

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Sustitúyase OM por su valor y elévese al cuadrado:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

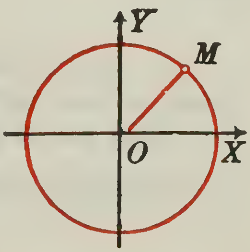


Fig. 51.

2º *La circunferencia tiene su centro en un punto cualquiera.*

Sea, por ejemplo, $C(3,4)$ el centro, 8 el radio y $M(x,y)$ un punto de la curva (fig. 52).

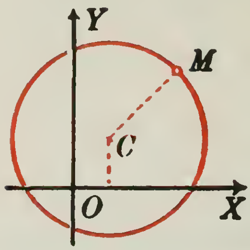


Fig. 52.

Se tiene:

$$CM = 8;$$

$$CM = \sqrt{(x-3)^2 + (y-4)^2}.$$

De donde:

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 64;$$

$$x^2 - 6x + y^2 - 8y = 39.$$

Generalizando: Si (α, β) son las coordenadas del centro de una circunferencia y r es el radio, su ecuación es:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2. \qquad (1)$$

La condición para que una ecuación de 2º grado represente una circunferencia, es que contenga las variables (x, y) al cuadrado con coeficientes iguales y ningún otro término cuadrático.

Si $$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 > 0,$$

la ecuación (1) representa una *circunferencia real;*

si $$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = 0,$$

la circunferencia se reduce al punto $C(\alpha, \beta)$, pues sólo sus coordenadas satisfacen la igualdad anterior; se tiene una *circunferencia que ha degenerado en un punto;*

si $$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 < 0,$$

la ecuación (1) representa una *circunferencia imaginaria,* pues la suma de dos números positivos no puede dar un número negativo.

67. Aplicación. Obtener la ecuación de la circunferencia tangente a la recta $3y = 2x - 8$ en el punto $T(7,2)$, sabiendo que pasa por el punto $P(9,12)$, (fig. 53).

La ecuación pedida es de la forma

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2.$$

Hay que determinar α, β y r.

El centro $C(\alpha, \beta)$ se encuentra en la recta trazada por $T(7, 2)$ perpendicularmente a la tangente dada, a saber, en la recta

$$y - 2 = -\frac{3}{2}(x - 7),$$

o sea: $$y = -\frac{3}{2}x + \frac{25}{2}.$$

Por ser C de esta recta, se tiene:

$$\beta = -\frac{3}{2}\alpha + \frac{25}{2}. \qquad (1)$$

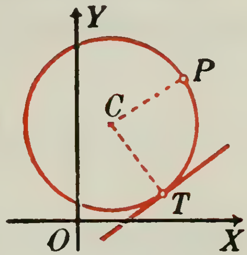


Fig. 53.

Para obtener otra expresión que ligue α con β, basta considerar que T y P son de la circunferencia y que, por tanto:

$$\overline{CT}^2 = \overline{CP}^2,$$

$$(7 - \alpha)^2 + (2 - \beta)^2 = (9 - \alpha)^2 + (12 - \beta)^2.$$

Reduciendo: $$5\beta + \alpha = 43. \qquad (2)$$

Haciendo simultáneas (1) y (2), se obtiene:

$$\alpha = 3, \qquad \beta = 8;$$

de donde:

$$r^2 = \overline{CT}^2 = (7 - 3)^2 + (2 - 8)^2 = 16 + 36 = 52.$$

La ecuación pedida es, por consiguiente:

$$(x - 3)^2 + (y - 8)^2 = 52.$$

68. Cálculo del radio y de las coordenadas del centro. Dada la ecuación de una circunferencia, se pueden obtener las coordenadas del centro y la longitud del radio.

Sea la ecuación

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y = 11.$$

Agrúpense los términos en x, y los términos en y:

$$(x^2 - 6x) + (y^2 + 8y) = 11.$$

En cada paréntesis agréguese el cuadrado de la mitad del coeficiente del primer grado de la variable, y añádase la suma de esos cuadrados al segundo miembro:

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 8y + 16) = 11 + 25 = 36;$$

o sea: $(x-3)^2+(y+4)^2=36;$

de donde: $C(3,-4)$; $r=6.$

Nota. Si el coeficiente del cuadrado de las variables es diferente de 1, comiéncese por dividir todos los términos entre dicho coeficiente.

EJERCICIO 10

Obténgase la ecuación de la circunferencia, dado:

1. $C(2,0)$, $r=2.$
2. $C(\alpha,0)$, $r=\alpha.$
3. $C(0,5)$, $r=5.$
4. $C(0,\beta)$, $r=\beta.$
5. $C(0,0)$, $r=\frac{2}{5}.$
6. $C\left(-\frac{5}{4}, 2\right)$, $r=3.$
7. $C\left(2,-\frac{3}{2}\right)$, $r=4.$
8. $C(-3,4)$, $r=10.$
9. $C(-2,-7)$, $r=9.$

Obténgase la ecuación de la circunferencia que: Nº 10 a 21 inclusive.

10. Tiene su centro en $Y'Y$ y pasa por el punto $Q(2,3)$ y por el origen.

11. Es tangente a la recta $2y=x-2$ en el punto $(8,3)$ y pasa por el punto $P(12,7)$.

12. Pasa por los puntos $A(6,10)$, $B(-2,-4)$ y $C(3,-5)$.

13. Pasa por los puntos $P(1,2)$, $Q(3,-4)$, $S(5,-6)$.

14. Tiene su centro en la bisectriz del ángulo agudo de las rectas $12x-5y+7=0$, $3x+4y=2$, y cuyo radio es igual a 4.

15. Tiene como diámetro la cuerda común a las circunferencias $x^2-6x+y^2+8y=1$, $x^2+4x+y^2-2y=11.$

16. Tiene su centro en la recta $y+2x=1$, pasa por el punto $P(-1,13)$ y es tangente a la recta $4y+3x+1=0.$

17. Tiene su centro en la recta $y=2x+5$, y es tangente a las rectas $2y+x=4$, $y=2x-3.$

18. Es tangente a la recta $5y=7x-1$ en el punto $(8,11)$ y tiene un radio igual a $\sqrt{74}$.

19. Es tangente a la recta $3y = 5x - 1$ en el punto $(5, 8)$ y tiene un radio igual a $\sqrt{34}$.

20. Pasa por $E(10, 2)$ y $F(3, 3)$ y tiene un radio igual a 5.

21. Tiene por diámetro la cuerda $y + x = 7$ de la circunferencia $x^2 + y^2 = 169$.

22. ¿Cuáles son las coordenadas de las intersecciones de las circunferencias $x^2+y^2-14x-16y+100 = 0$ y $x^2+y^2-2x-4y = 20$?

23. El punto $M(1, 4)$ biseca una cuerda de la circunferencia $x^2 + y^2 = 34$. ¿Cuál es la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro es aquella cuerda?

24. Obténgase la ecuación de la trayectoria que recorre un punto móvil M, cuya distancia al origen O es constantemente igual al doble de su distancia al punto fijo $A(6, 0)$.

25. Hágase ver que las circunferencias $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 36$ y $(x - 12)^2 + (y - 3)^2 = 16$ son tangentes.

26. Se inscribe un triángulo equilátero en la circunferencia cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 74$. La base tiene uno de sus extremos en el arco del primer cuadrante, el otro extremo en el arco del segundo cuadrante y el vértice opuesto a la base se encuentra en $Y'Y$. ¿Cuáles son las coordenadas de los tres vértices?

27. Pruébese que todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

28. Pruébese que la perpendicular trazada de un punto cualquiera de una semicircunferencia al diámetro, es media proporcional entre los segmentos que determina en dicho diámetro.

29. Los extremos de un segmento de recta móvil se apoyan constantemente en los ejes cartesianos. Demuéstrese que el punto medio del segmento describe una circunferencia.

30. Pruébese que si dos circunferencias son tangentes interiormente, y el radio de la mayor es diámetro de la menor, toda cuerda de la mayor trazada desde el punto de contacto, queda bisecada por la circunferencia menor.

31. Por el punto de tangencia de dos circunferencias exteriores, se trazan dos cuerdas cualesquiera, AB y CD. Se une el punto B con

el punto C, y D con A. Pruébese que las cuerdas BC y DA son paralelas. (Tómese el punto de tangencia como origen y la tangente común como eje de las ordenadas).

Dadas las circunferencias siguientes, obténgase el centro y el radio.

32. $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 10.$

33. $9x^2 + 9y^2 + 12x - 18y = 266.$

34. $36x^2 + 36y^2 - 36x + 24y = 112.$

III. LA PARABOLA

69. Definición. Como lugar geométrico, *la* **parábola** *es el lugar de los puntos que equidistan de un punto fijo, llamado foco, y de una recta fija, llamada directriz.*

70. Construcción de la parábola. Partiendo de la definición puede construirse la curva por puntos, en la forma siguiente:

Sea DD' una recta fija cualquiera y F un punto fijo. Trácese la recta FX perpendicular a DD'. El punto medio V de la distancia FD es de la curva (fig. 54).

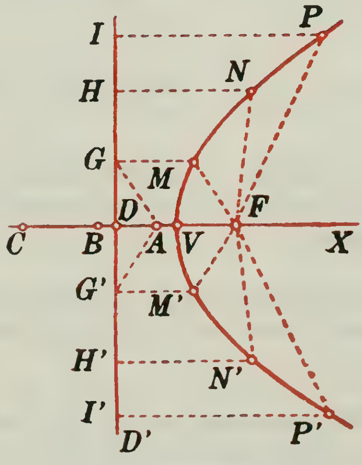


Fig. 54.

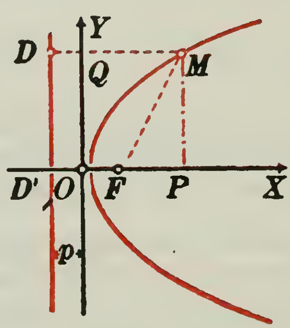


Fig. 55.

Tómense, después, distancias mayores que FV, como FA, FB, FC, etc.; hágase centro, sucesivamente, en A, B, C, etc., y con radios iguales a dichas distancias, córtese DD' en los puntos G y G', H y H', I e I', etc. Con esas mismas distancias como radios y centro en F y en los puntos G, G', H, H', etc., trácense arcos de circunferencia que se cortarán en los puntos M y M', N y N', P y P', etc., que son otros tantos puntos de la curva. Uniendo consecutivamente esos puntos, se obtiene la curva representada en la figura 54, que es simétrica con respecto a FX.

La recta VX se llama *eje de simetría* de la curva; el punto V, en que el eje corta la curva, se llama *vértice*, y la distancia FD, *parámetro*.

71. Ecuación de la parábola referida a su vértice, y cuyo eje de simetría coincide con un eje coordenado. 1º *El eje de simetría está en* X'X, *y la curva se extiende indefinidamente en la dirección* OX.

Sea $M(x, y)$, (fig. 55), un punto móvil cualquiera de la parábola, y $F(p, 0)$ el foco.

Por la propiedad de la curva se tiene:

$$MF = DM; \qquad (1)$$

$$MF = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}. \qquad (2)$$

Las coordenadas de D son $(-p, y)$, pues

$$DQ = D'O = OF = p;$$

por tanto:

$$DM = \sqrt{(x+p)^2}. \qquad (3)$$

Sustitúyanse (2) y (3) en (1), elévese al cuadrado y redúzcase; se obtiene como ecuación de la parábola:

$$y^2 = 4px.$$

Si el eje de simetría y el vértice no cambian, pero la parábola se extiende indefinidamente en la dirección OX', la ecuación de la curva es:

$$y^2 = -4px.$$

2º *El eje de simetría está en* Y'Y *y la curva se extiende indefinidamente en la dirección* OY.

Sea $M(x, y)$ un punto móvil cualquiera de la parábola y $F(0, p)$ el foco (fig. 56).

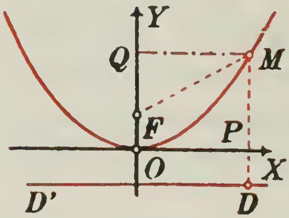


Fig. 56.

Se tiene:

$$MF = DM; \qquad (1)$$

$$MF = \sqrt{x^2 + (y - p)^2}. \qquad (2)$$

Las coordenadas de D son $(x, -p)$; por tanto:

$$DM = \sqrt{(y + p)^2}. \qquad (3)$$

Sustitúyanse (2) y (3) en (1), elévese al cuadrado y redúzcase:

$$x^2 = 4py.$$

Si el foco de la parábola es $F(O, -p)$ y no cambian el eje de simetría y el vértice, la ecuación de la parábola es:

$$x^2 = -4py.$$

Nota. Las ecuaciones obtenidas pueden condensarse en las dos fórmulas siguientes:

$$y^2 = \pm 4px, \qquad x^2 = \pm 4py;$$

o sea: $\overline{PM}^2 = \pm 4p \times QM, \qquad \overline{QM}^2 = \pm 4p \times PM.$

72. Ecuación de la parábola referida a su vértice, y cuyo eje de simetría es paralelo a un eje coordenado. 1º *El eje de simetría es paralelo a* X′X.

Sea el vértice $V(2, 3)$ y $F(6, 3)$ el foco (fig. 57).

Puesto que el vértice equidista del foco y de la directriz, ésta es una perpendicular a $X'X$ por $(-2, 0)$.

Se tiene:

$$MF = DM; \qquad (1)$$

$$MF = \sqrt{(x - 6)^2 + (y - 3)^2}. \qquad (2)$$

Las coordenadas de D son $(-2, y)$; por tanto:

$$DM = \sqrt{(x + 2)^2}. \qquad (3)$$

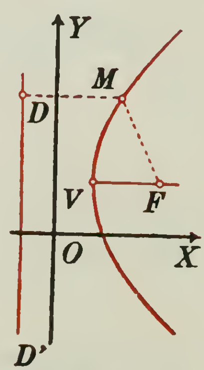


Fig. 57.

Sustitúyanse (2) y (3) en (1), elévese al cuadrado y redúzcase: se obtiene:

$$(y-3)^2 = 16x - 32 = 16(x-2);$$

o bien: $$y^2 - 6y - 16x + 41 = 0.$$

Obsérvese que en $(x-2)$ y $(y-3)$, 2 y 3 son las coordenadas del vértice, y que $16 = 4 \times 4$ es el cuádruplo de la distancia del vértice al foco; por tanto, $16 = 4p$.

Generalizando, y conviniendo en llamar (α, β) las coordenadas del vértice, las ecuaciones de las parábolas de parámetro $2p$ y eje de simetría paralelo a $X'X$, se condensan en la fórmula:

$$\boldsymbol{(y-\beta)^2 = 4p(x-\alpha)}.$$

Nótese que si $\alpha = \beta = 0$, resulta la fórmula ya obtenida:

$$y^2 = 4px.$$

Si el eje de simetría de la parábola es paralelo a $X'X$, y su vértice $V(\alpha, \beta)$ dista p del foco, y la curva se extiende indefinidamente en la dirección OX', su ecuación es de la forma:

$$\boldsymbol{(y-\beta)^2 = -4p(x-\alpha)}.$$

2º *El eje de simetría es paralelo a* Y'Y.

Procediendo en forma análoga se hallaría que si el vértice de una parábola es $V(\alpha, \beta)$, $2p$ el parámetro, y el eje de simetría es paralelo al eje $Y'Y$, su ecuación es:

$$\boldsymbol{(x-\alpha)^2 = 4p(y-\beta)},$$

si se extiende indefinidamente en la dirección OY, y

$$\boldsymbol{(x-\alpha)^2 = -4p(y-\beta)},$$

si se extiende indefinidamente en la dirección de OY'.

Si $\alpha = \beta = 0$, las dos ecuaciones se reducen a:

$$x^2 = \pm 4py,$$

anteriormente obtenidas.

73. Observación. La ecuación de una parábola referida a su vértice y de eje de simetría paralelo a uno de los ejes coordenados, puede obtenerse también fundándose en la forma de la ecuación de la curva referida a su vértice y de eje de simetría coincidente con uno de los ejes coordenados.

En las parábolas cuyas ecuaciones son (fig. 55):

$$\overline{PM}^2 = \pm 4p \times QM,$$

PM y QM representan, respectivamente, las distancias del punto móvil M al eje de simetría y a la recta trazada por el vértice perpendicularmente a dicho eje; y en las parábolas cuyas ecuaciones son (fig. 56):

$$\overline{QM}^2 = \pm 4p \times PM,$$

QM y PM representan, respectivamente, las distancias del punto M al eje de simetría y a la recta trazada por el vértice perpendicularmente a ese eje.

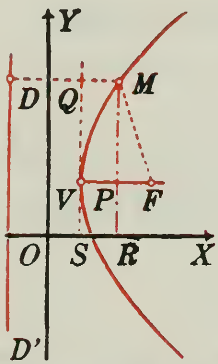


Fig. 58.

Según esto, para la parábola que se extiende indefinidamente en la dirección de las equis positivas y tiene por vértice el punto $V(2, 3)$ y por foco $F(6, 3)$, se tiene (fig. 58):

$$PM = RM - RP = y - 3,$$
$$QM = OR - OS = x - 2;$$

por tanto, la ecuación es:

$$(y-3)^2 = 16(x-2);$$

o, generalizando:

$$(y-\beta)^2 = 4p(x-\alpha),$$

en que (α, β) son las coordenadas del vértice, p es la distancia del vértice al foco, y la curva se extiende indefinidamente en la dirección OX.

74. Las variables en la ecuación de la parábola. Por lo anteriormente explicado, se ha podido observar que en la ecuación de la parábola cuyo eje de simetría coincide con uno de los ejes coordenados, o le es paralelo, sólo figura un término cuadrático, el de la variable x o el de la variable y.

75. Ancho focal. Llámase *ancho focal* o *lado recto* de una parábola la cuerda trazada por el foco, perpendicularmente al eje de simetría.

Si dicho eje coincide con $X'X$, el ancho focal es igual al duplo de la ordenada cuyo pie es el foco.

Dada la simetría de la curva (fig. 59), se tiene:

$$\text{ancho focal} = 2FP.$$

Las coordenadas de $P(p, FP)$, satisfacen la ecuación de la parábola; por tanto:

$$\overline{FP}^2 = 4p^2;$$
$$FP = 2p;$$
$$2FP = 4p.$$

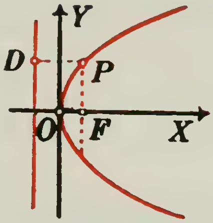


Fig. 59.

Nótese que $FP = DP = 2p$.

76. Cálculo de los elementos de la parábola. Dada la ecuación de una parábola, determinar el vértice, el foco y la directriz.

Ejemplos. — 1º Dada la ecuación

$$y^2 - 14y - 24x + 25 = 0,$$

obtener V, F, $4p$ y la ecuación de la directriz.

El eje de simetría de la parábola es paralelo a $X'X$ porque en la ecuación figura el término y^2.

Pásense al segundo miembro los términos independientes de y:

$$y^2 - 14y = 24x - 25.$$

Agréguese a cada miembro el cuadrado de la mitad del coeficiente del primer grado de la variable y; se obtiene:

$$y^2 - 14y + 49 = 24x - 25 + 49,$$
$$(y - 7)^2 = 24(x + 1).$$

El vértice es $V(-1, 7)$, $4p = 24$, $p = 6$.

Por ser $4p > 0$, la curva se extiende indefinidamente en la dirección OX; por tanto, la abscisa del foco es:

$$-1 + 6 = 5, \quad \text{o sea,} \quad F(5, 7);$$

la ecuación de la directriz es: $x = -7$,

y el ancho focal es: $4p = 4 \times 6 = 24$.

2º La ecuación es $x^2 - 7x + 12y + 5 = 0$.

La parábola tiene su eje de simetría paralelo a $Y'Y$ porque en su ecuación no figura y^2.

Procediendo en forma análoga a lo expuesto en el caso anterior, se obtiene sucesivamente:

$$x^2 - 7x + \frac{49}{4} = -12y - 5 + \frac{49}{4},$$

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = -12\left(y - \frac{29}{48}\right).$$

El vértice es $V\left(\frac{7}{2}, \frac{29}{48}\right)$, $-4p = -12$, $p = 3$.

El signo $-$ que precede a $4p$, indica que la curva se extiende indefinidamente en la dirección OY'; por tanto la ordenada del foco es:

$$\frac{29}{48} - 3 = \frac{29 - 144}{48} = -\frac{115}{48}, \quad \text{o sea,} \quad F\left(\frac{7}{2}, -\frac{115}{48}\right).$$

Ecuación de la directriz: $y = \dfrac{29}{48} + 3 = \dfrac{29 + 144}{48} = \dfrac{173}{48}$.

77. Ecuación de la parábola cuyo eje de simetría no es paralelo a ningún eje coordenado. Sea la parábola cuya directriz es la recta $y = -2x + 3$ y el foco es $F(3, 2)$, (fig. 60).

Sea también $M(x, y)$ un punto móvil de la curva.

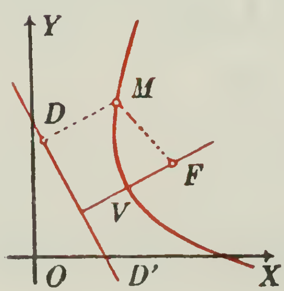


Fig. 60.

Se tiene:

$$MF = DM; \tag{1}$$

$$MF = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}; \tag{2}$$

$$DM = \frac{y + 2x - 3}{\sqrt{5}}. \tag{3}$$

Sustitúyanse (2) y (3) en (1), elévese al cuadrado y redúzcase; resulta:

$$4y^2 - 14y - 4xy + x^2 - 18x + 56 = 0,$$

que es la ecuación buscada.

En todo caso análogo a éste, figuran en la ecuación los cuadrados de las variables (x, y), y además, un término en xy.

EJERCICIO 11

Obténgase, sin aplicar las fórmulas que preceden, la ecuación de la parábola en las condiciones siguientes: Nº 1 a 4 inclusive.

1. $V(0,0)$, $F\left(0, \frac{1}{4}\right)$.
2. $V(0,0)$, $F\left(\frac{1}{4}, 0\right)$.
3. $V(2,3)$, $F(5,3)$.
4. $V(1,4)$, $F(1,6)$.

Obténgase la ecuación de la parábola, sabiendo que: Nº 5 a 10 inclusive.

5. $V(1,3)$, $p = \frac{3}{2}$, eje de simetría paralelo a $X'X$, y se extiende indefinidamente en la dirección de las equis positivas.

6. $V(-1,2)$, $p = \frac{4}{3}$. eje de simetría paralelo a $Y'Y$, y se extiende indefinidamente en la dirección de las yes negativas.

7. $V(-2,-4)$, $p = 1$, eje de simetría paralelo a $Y'Y$, y se extiende indefinidamente en la dirección de las yes positivas.

8. $V(3,-1)$, $p = \frac{3}{5}$, eje de simetría paralelo a $X'X$, y se extiende indefinidamente en la dirección de las equis negativas.

9. $V(2,3)$, eje de simetría paralelo a $X'X$, y pasa por el punto $P(6,5)$.

10. $V(2,-1)$, eje de simetría paralelo a $Y'Y$, y pasa por el punto $Q(-5,4)$.

Obténgase la ecuación de la parábola de vértice $V\ (0,0)$, y eje de simetría en $X'X$, sabiendo que: Nº 11 y 12.

11. El foco está en la recta $3x + 2y = 8$.

12. La ecuación de la directriz es $x = -2$.

13. Calcúlese p en la ecuación $y^2 = 4px$, sabiendo que $R(6,2)$ es de la curva.

14. Dada la parábola $y^2 = 4px$, dígase en qué punto de la curva. distinto del origen, se tiene $y = x$. ¿En cuáles se tiene $y > x$? ¿En cuáles $y < x$?

15. En la misma parábola, ¿en qué punto es $x = 2y$?

16. Exprésese, en función de x_1 y de p, la distancia de $P(x_1, y_1)$ al foco de la parábola $y^2 = 4px$. Calcúlese (x_1, y_1), dado $4p = 8$ y la distancia de P al foco igual a 12.

17. Obténgase la ecuación de la parábola cuyo eje de simetría es paralelo a $X'X$, sabiendo que se apoya en los puntos $A(-1,-1)$, $B(2,1)$ y $C(7,-9)$ y se extiende indefinidamente en la dirección de las equis positivas.

18. Cierto móvil M se mueve en tal forma que equidista constantemente de la recta $y = 2x + 1$ y de cierto punto fijo. Obténgase la ecuación de la trayectoria del móvil, sabiendo que en el punto $A(4,4)$ la distancia de M a la recta es mínima.

19. Obténgase la ecuación de la parábola cuya directriz es la recta $y = x$, y el foco es $F(m,n)$.

20. La arcada de un puente tiene la forma de parábola. Los extremos del arco, situados en una paralela al puente, distan entre sí 18 m y 24 m del puente. Si el punto más alto del arco se encuentra a 2 m del puente, ¿cuánto dista de dicho puente el punto del arco situado a 5 m de cada extremo?

21. Calcúlese el área de la superficie del triángulo equilátero inscrito en la parábola $y^2 = 4px$, dado que uno de los vértices del triángulo coincide con el origen.

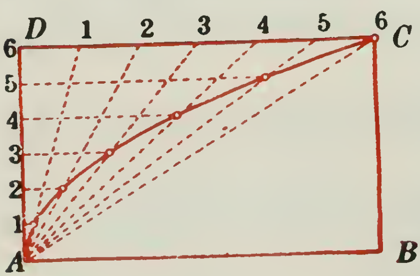


Fig. 61.

22. Dos lados de un rectángulo, AD y DC (fig. 61), se dividen en igual número de partes iguales. Por los puntos divisorios de la altura, numerados de abajo arriba, se trazan paralelas a la base AB, y cada uno de los puntos divisorios de la base superior, numerados de izquierda a derecha, se une con el vértice A. Demuéstrese que las intersecciones de las rectas correspondientes a puntos igualmente numerados, son de una parábola.

23. Obténgase la ecuación de la parábola que tiene por directriz la recta $y = -x$ y por foco el punto $F\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$.

Dadas las siguientes parábolas, obténgase V, F, la ecuación de la directriz y el ancho focal.

24. $y^2 - 4y - 8x - 12 = 0$.

25. $y^2 + 6y + 9x - 27 = 0$.

26. $y^2 - 9y - 7x + 11 = 0$.

27. $x^2 - 6x - 12y - 15 = 0$.

28. $x^2 - 5x + 10y - 7 = 0$.

29. $x^2 + 11x - 3y + 2 = 0$.

Averígüese qué clase de parábola es la representación cartesiana de:

30. $y = x^2 - 6x + 5$. **31.** $y = x^2 + 4x + 4$.

32. $y = 6x - 10 - x^2$.

IV. LA ELIPSE

78. Definición. Como lugar geométrico puede definirse: **Elipse** *es el lugar de los puntos tales que la suma de las distancias de cada uno a dos puntos fijos, es constante.*

Así, si M es un punto móvil de la elipse, cualquiera que sea su posición, se tiene:

$$MF' + MF = A'A.$$

79. Construcción. Partiendo de la definición, puede construirse la curva por puntos en la forma siguiente (figura 62):

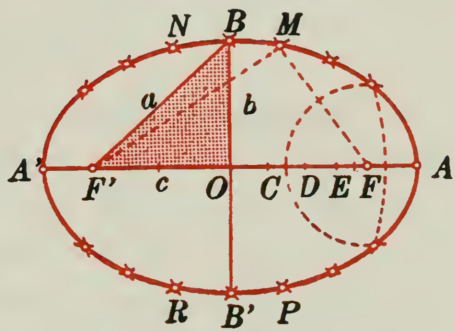


Fig. 62.

Trácese una recta indefinida, y en ella dos puntos A', A. De uno y otro lado de O, punto medio del segmento $A'A$, llévense distancias iguales, OF' y OF, menores que OA, y señálense entre O y F puntos cualesquiera, como C, D, E, etc. Luego, con centro en F' y F, focos de la curva, y con radio igual a OA, descríbanse dos arcos, cuyas intersecciones, B' y B, son dos puntos de la curva, simétricos con respecto al eje $A'A$. Después, con radios iguales, sucesivamente, a CA y CA' y desde cada foco como centro, trácense dos arcos que al cortarse darán cuatro puntos más de la curva, M, N, R, P, tales que M y P, lo mismo que N y R, son simétricos con respecto a $A'A$, como M y N, al igual que R y P, lo son con relación al segmento $B'B$.

Procediendo en forma análoga con los puntos D, E, G, etc., se determinan tantos puntos como se quieran. Uniendo consecutivamente esos puntos obtenidos, resulta una curva cerrada, que es la representada en la figura 62.

80. Nomenclatura. Las rectas $A'A$ y $B'B$ son los *ejes de simetría* de la curva, o *diámetros principales.*

$A'A$ es el *eje* o *diámetro mayor,* o *eje focal,* y se designa por $2a$.

$B'B$ es el *eje* o *diámetro menor,* o *eje no focal,* y se designa por $2b$.

$F'F$ es la *distancia focal,* y se designa por $2c$.

A' y A son los *vértices* de la elipse.

Los radios $F'M$ y FM, se llaman *radios vectores,* o simplemente *vectores.*

81. Observación. Por la construcción de la figura, la hipotenusa del triángulo rectángulo BOF' es a, y los catetos son b y c. Resulta, por tanto:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

82. Ecuación de la curva en diferentes posiciones. 1º *Los ejes de simetría coinciden con los ejes coordenados.*

Sea $M(x, y)$ un punto de la elipse, $F'(-c, 0)$ y $F(c, 0)$ los focos (fig. 63).

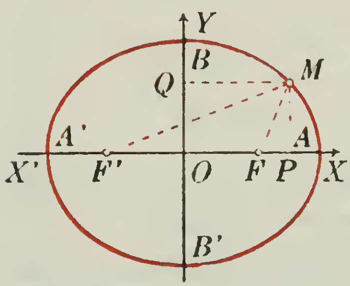


Fig. 63.

Por la propiedad que caracteriza a la curva, se tiene:

$$MF' + MF = 2a; \qquad (1)$$

$$MF' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2};$$

$$MF = \sqrt{(x-c)^2 + y^2};$$

valores que sustituídos en (1) dan:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Despéjese un radical, elévese al cuadrado y redúzcase:

$$4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elévese al cuadrado:

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2.$$

Redúzcase y pásense las constantes al primer miembro.

$$a^4 - a^2c^2 \quad = a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2,$$
$$a^2(a^2 - c^2) = (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2.$$

Sustitúyase $a^2 - c^2$ por b^2; se obtiene la ecuación buscada:

$$\mathbf{b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.}$$

Si se dividen ambos miembros entre a^2b^2, resulta la ecuación de la curva en forma simétrica:

$$\frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{a^2}} + \frac{\mathbf{y^2}}{\mathbf{b^2}} = \mathbf{1},$$

o sea:
$$\frac{\overline{QM}^2}{a^2} + \frac{\overline{PM}^2}{b^2} = 1.$$

2º *Los ejes de simetría son paralelos a los ejes coordenados*

Sea $M(x, y)$ (fig. 64) un punto móvil de la elipse, $C(4, 2)$ su centro, $2a = 10$ y $2c = 6$, o sea $F'(1, 2)$ y $F(7, 2)$. Se tiene:

$$MF' + MF = 10; \qquad (1)$$
$$MF' = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2};$$
$$MF \ = \sqrt{(x-7)^2 + (y-2)^2};$$

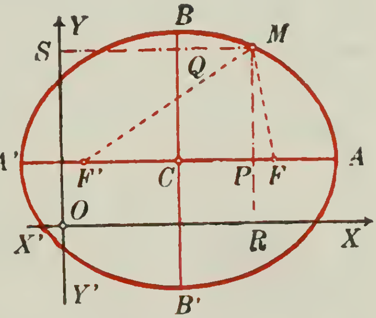


Fig. 64.

valores que sustituídos en (1) dan:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-7)^2 + (y-2)^2} = 10.$$

Despéjese un radical, elévese al cuadrado y redúzcase:

$$12x - 148 = -20\sqrt{(x-7)^2 + (y-2)^2},$$
$$3x - \ 37 = - \ 5\sqrt{(x-7)^2 + (y-2)^2}.$$

Elévese al cuadrado y redúzcase:

$$144 = 16x^2 - 128x + 25(y-2)^2,$$
$$144 = 16(x^2 - 8x) + 25(y-2)^2.$$

Agréguese 16 al binomio $x^2 - 8x$ para convertirlo en trinomio cuadrado perfecto. Esto equivale a sumar $16 \times 16 = 256$

al segundo miembro. Añadiendo también 256 al primer miembro, se obtiene:

$$400 = 16(x - 4)^2 + 25(y - 2)^2.$$

Divídase entre 400 y se tiene la ecuación buscada:

$$\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1.$$

83. Observaciones. 1ª El primer denominador, 25, es a^2; y el segundo, 16, es b^2. En efecto: $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$. Los segundos términos de los binomios, -4 y -2, son las coordenadas del centro con signos contrarios. Si se conviene, para generalizar, en designar con (α, β) las coordenadas del centro, las ecuaciones de las elipses cuyos ejes de simetría son paralelos a los ejes coordenados, se resumen en esta fórmula:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1.$$

2ª Si se conviene en que por $2a$ se designe siempre el eje paralelo a $X'X$ y por $2b$ el eje paralelo a $Y'Y$, entonces:

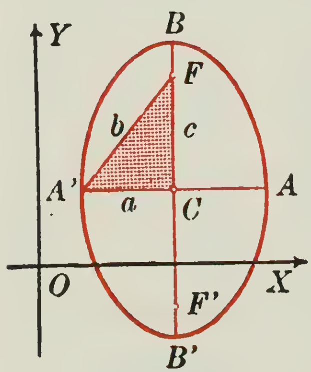


Fig. 65.

Si $a > b$, el eje focal es paralelo a $X'X$; si $a < b$, el eje focal es paralelo a $Y'Y$, y la posición de la curva, con respecto a los ejes, es análoga a la de la figura 65. En este caso se tiene:

$$b^2 = a^2 + c^2.$$

3ª Puede llegarse más rápidamente al resultado del Nº 82 partiendo de la ecuación de la elipse cuyos ejes de simetría coinciden con los ejes coordenados, o sea:

$$\frac{\overline{QM}^2}{a^2} + \frac{\overline{PM}^2}{b^2} = 1,$$

en que QM y PM representan la distancia del punto móvil M a los ejes no focal y focal, respectivamente (fig. 64).

Para la elipse de la figura 64, se tiene:

$$QM = SM - SQ = x - 4,$$
$$PM = RM - RP = y - 2;$$

por tanto, la ecuación buscada es:

$$\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1.$$

84. Las variables en la ecuación de la elipse. Por los resultados obtenidos puede verse que en la ecuación de una elipse, cuyos ejes de simetría coinciden con los ejes coordenados o les son paralelos, sólo figuran dos términos cuadráticos: los cuadrados de las variables x y y, con coeficientes desiguales y positivos.

85. Ancho focal. Llámase *ancho focal* de una elipse la cuerda trazada por uno de los focos, perpendicularmente al eje mayor.

Si los ejes de simetría coinciden con los ejes coordenados y el eje focal está en $X'X$, el ancho focal es el duplo de la ordenada que pasa por el foco.

Procediendo como se hizo para la parábola, se obtiene $\frac{2b^2}{a}$ como valor del ancho focal de la elipse cuyo eje focal coincide con $X'X$, o le es paralelo, y $\frac{2a^2}{b}$ si el eje focal de la elipse coincide con $Y'Y$, o le es paralelo.

86. Excentricidad. Llámase *excentricidad* de una elipse el cociente de la distancia focal entre el eje focal, y se designa por e; luego:

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}, \quad \text{o bien:} \quad e = \frac{2c}{2b} = \frac{c}{b},$$

según que el eje focal sea paralelo al eje $X'X$ o al eje $Y'Y$.

87. Cálculo de los elementos de una elipse. Conocida la ecuación de una elipse, determinar sus elementos.

EJEMPLOS:

1º Sea la ecuación $5x^2 + 9y^2 - 40x - 36y + 71 = 0$.

Agrúpense los términos en x, y los términos en y:

$$5(x^2 - 8x) + 9(y^2 - 4y) = -71.$$

Agréguese, en cada paréntesis, el cuadrado de la mitad del coeficiente del primer grado de la variable, y restablézcase la igualdad:

$$5(x^2 - 8x + 16) + 9(y^2 - 4y + 4) = -71 + 80 + 36,$$

$$5(x-4)^2 + 9(y-2)^2 = 45,$$

$$\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{5} = 1,$$

ecuación de una elipse de eje focal paralelo a $X'X$, porque $a > b$.

Por tanto, los elementos de la elipse son:

semieje focal: $a = 3$; ancho focal: $\frac{2b^2}{a} = \frac{10}{3}$;

semieje no focal: $b = \sqrt{5}$; excentricidad: $e = \frac{2}{3}$;

semidistancia focal: $c = \sqrt{9-5} = 2$; $C(4, 2)$, $F'(2, 2)$, $F(6, 2)$.

2º Sea la ecuación $4x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0$.

Procediendo en forma análoga a lo expuesto en el caso anterior, se tiene sucesivamente:

$$4(x^2 - 2x) + (y^2 + 2y) = -1,$$

$$4(x-1)^2 + (y+1)^2 = -1 + 5 = 4,$$

$$(x-1)^2 + \frac{(y+1)^2}{4} = 1,$$

ecuación de una elipse de eje focal paralelo a $Y'Y$, porque $a < b$.

Luego, se tiene:

semieje focal: $b = 2$; ancho focal: $\frac{2a^2}{b} = \frac{2}{2} = 1$;

semieje no focal: $a = 1$; excentricidad: $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

semidist. focal: $c = \sqrt{3}$; $C(1, -1)$, $F(1, -1 + \sqrt{3})$, $F'(1, -1 - \sqrt{3})$.

En casos análogos a éste, las coordenadas de los focos se indican conjuntamente por medio de la expresión:

$$F(1, -1 \pm \sqrt{3}).$$

88. Ecuación de la elipse de ejes de simetría oblicuos con respecto a los ejes coordenados. Sea obtener la ecuación de la elipse cuyos focos son $F'(1, 1)$ y $F(3, 5)$, y $2a = 6$.

Sea $M(x, y)$ un punto móvil de la curva (fig. 66).

Se tiene: $MF' + MF = 6$; (1)

$$MF' = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2};$$

$$MF = \sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2}.$$

Sustitúyanse estos valores en (1), despéjese un radical, elévese al cuadrado y redúzcase:

$$4x + 8y - 68 = -12\sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2}.$$

$$x + 2y - 17 = -3\sqrt{(x-3)^2 + (y-5)^2}.$$

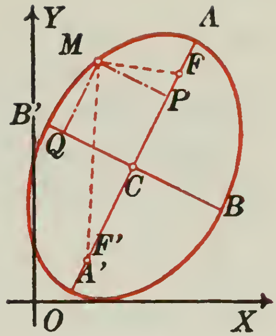


Fig. 66.

Elévese nuevamente al cuadrado y redúzcase:

$$5y^2 - 4xy - 22y + 8x^2 - 20x + 17 = 0,$$

que es la ecuación buscada.

Como se dijo al tratarse de la parábola, nótese también aquí que, en casos como éste, aparece en la ecuación de la elipse, además de los términos cuadráticos en x y y, otro término de segundo grado en xy.

Puede obtenerse la ecuación pedida partiendo de la ecuación

$$\frac{\overline{QM}^2}{a^2} + \frac{\overline{PM}^2}{b^2} = 1.$$

en la cual QM y PM representan, según se dijo antes, las distancias del punto móvil M al eje no focal y eje focal, respectivamente.

La ecuación del eje no focal $B'B$ es:

$$2y + x - 8 = 0;$$

y la del eje focal $A'A$:

$$y - 2x + 1 = 0.$$

Luego, se puede escribir:

$$QM = \frac{2y + x - 8}{\sqrt{5}}; \qquad PM = \frac{y - 2x + 1}{\sqrt{5}}.$$

Por tanto, la ecuación buscada es:

$$\frac{(2y + x - 8)^2}{9 \times 5} + \frac{(y - 2x + 1)^2}{4 \times 5} = 1.$$

Efectuando las operaciones indicadas, se obtiene, después de dar forma entera y de reducir términos semejantes:

$$5y^2 - 4xy - 22y + 8x^2 - 20x + 17 = 0,$$

resultado idéntico al anteriormente obtenido.

EJERCICIO 12

1. Dibújese la elipse cuyos focos son $F'(-2,0)$, $F(2,0)$ y el diámetro mayor es 6.

Obténganse las ecuaciones de las elipses en las condiciones siguientes: Nos. 2 a 7 inclusive.

2. $2a = 8$, $F'(-2,0)$, $F(2,0)$, $C(0,0)$.

3. $2b = 8$, $F'(0,-3)$, $F(0,3)$, $C(0,0)$.

4. $2a = 12$, $e = \frac{1}{3}$, $C(0,0)$, y focos en $X'X$.

5. $2b = 10$, $e = \frac{1}{2}$, $C(0,0)$, y focos en $Y'Y$.

6. $2a = 10$, ancho focal $= 8$, $C(0,0)$, y focos en $X'X$.

7. $2a = 18$, focos en $X'X$, $C(0,0)$, y pasa por $P(6,4)$.

8. Dos puntos, P y Q distan 6 cm. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a esos puntos fijos P y Q sea igual a 10? Obténgase la ecuación de ese lugar, refiriéndolo a la recta PQ y a la mediatriz de PQ como ejes cartesianos.

9. Dado el punto $P(x_1, y_1)$ y la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, ¿cuándo pertenece P a la elipse? ¿cuándo es interior o exterior a ella?

10. ¿Qué valor deben tener a^2 y b^2 para que los puntos $P(3,1)$ y $Q(-1,2)$ sean de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$?

Obténganse las ecuaciones de las elipses en las condiciones siguientes: Nº 11 a 15 inclusive.

11. $2a = 10$, $2c = 8$, $C(2,-3)$ y focos en una paralela a $X'X$.

12. $2b = 24$, $2a = 16$, $C(-2,1)$ y focos en una paralela a $Y'Y$.

13. El eje focal $2a$ está en $X'X$, y el vértice A' coincide con el origen.

14. El eje focal $2b$ está en $Y'Y$, y el vértice B coincide con el origen.

15. El eje focal y el no focal miden, respectivamente, $\sqrt{5}$ y 2, sabiendo que el primero coincide con la recta $x + y = 0$, y el segundo con $x - y = 0$.

16. ¿Cuáles son las intersecciones de la elipse $3x^2 + 4y^2 = 19$ con la recta $3x + 2y + 1 = 0$?

17. Hállese la longitud del diámetro mayor de una elipse que pasa por el origen de las coordenadas, y los focos son $F'(-8, 15)$ y $F(12, 5)$.

18. Hágase ver que el centro de la elipse $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$, biseca la cuerda cuya ecuación es $3y = 2x$.

19. Dada la ecuación de la elipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, probar que:

a) La curva es simétrica con respecto a $X'X$.

b) La curva es simétrica con respecto a $Y'Y$.

c) Es curva cerrada, o sea limitada tanto en sentido de las x como en el de las y.

Calcúlese el ancho focal de las elipses: Nº 20 y 21.

20. $3x^2 + 4y^2 = 48$.

21. $25x^2 + 16y^2 = 400$.

En las elipses siguientes, hállense el centro, los diámetros principales, los focos, la excentricidad y el ancho focal: Nº 22 a 25 inclusive.

22. $3x^2 + 9y^2 - 6x - 27y + 2 = 0$.

23. $4x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0$.

24. $4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y - 24 = 0$.

25. $2x^2 + 5y^2 + 16x - 10y - 13 = 0$.

26. Obténgase la ecuación de la elipse cuyos focos son: $F'(-2, 1)$, $F(2, 3)$ y el eje focal es igual a 8.

27. Obténgase la ecuación del lugar descrito por un punto que se mueve en tal forma que su distancia al eje $Y'Y$ es constantemente igual al doble de la distancia al punto $P(3, 2)$.

28. Hágase ver que el semieje focal de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, es medio geométrico entre las abscisas de los puntos de intersección, con dicho eje, de las rectas que unen los extremos del eje no focal con un punto cualquiera de la curva.

29. Con un radio arbitrario a se describe la semicircunferencia de centro O' (fig. 67), y se trazan las ordenadas correspondientes a diferentes puntos de la curva: K, L, M, N, etc. Luego, en un segmento $OA' = 2a$ y a partir de A' se llevan, en la dirección $A'O$, longitudes $A'P' = 2OP$, $A'Q' = 2OQ$, etc., y por los puntos P', Q', etc. se levantan perpendiculares a $A'O$ y en ellas se toman longitudes iguales, respectivamente, a PK, QL, etc. Demuéstrese que los puntos K', L', etc., extremos de esos segmentos, son de una elipse de centro O y semiejes focal y no focal iguales a $2a$ y a.

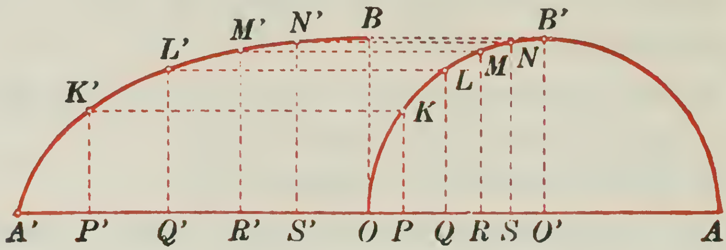


Fig. 67.

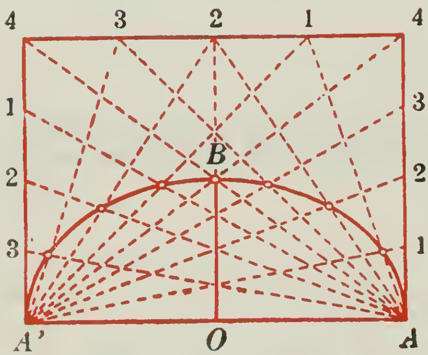


Fig. 68.

30. Tres lados de un rectángulo se dividen en igual número de partes, de tal modo que sean iguales entre sí las partes de los lados opuestos, y los puntos divisorios se unen con los extremos de la base, como lo indica la figura 68. Demuéstrese que las intersecciones de las rectas que terminan en los puntos igualmente numerados, son de una elipse que tiene como ejes los lados del rectángulo.

V. LA HIPERBOLA

89. Definición. Como lugar geométrico puede definirse: **Hipérbola** *es el lugar de los puntos tales que la diferencia de las distancias de cada uno de ellos a dos puntos fijos, es constante.*

Así, si M es un punto móvil de la hipérbola, cualquiera que sea su posición, se tiene: (figura 69)

$$MF' - MF = A'A.$$

90. Construcción. Partiendo de la definición, puede construirse la curva por puntos.

Trácese una recta indefinida y en ella los puntos A' y A (fig. 69). De uno y otro lado de O, punto medio del segmento $A'A$, llévense distancias iguales, OF' y OF, mayores que OA, y señálense, a continuación de F, puntos cualesquiera, como C, D, E, etc. Luego, con centro en F y F', focos de la curva, y con radios iguales, sucesivamente, a CA' y CA, trácense, desde cada foco, dos arcos que al cortarse darán 4 puntos de la curva, M, N, P, Q, tales que M y Q, lo mismo que N y P, son simétricos con respecto a $A'A$, como M y N, al igual que P y Q, lo son con relación a la recta $B'B$, mediatriz del segmento $A'A$.

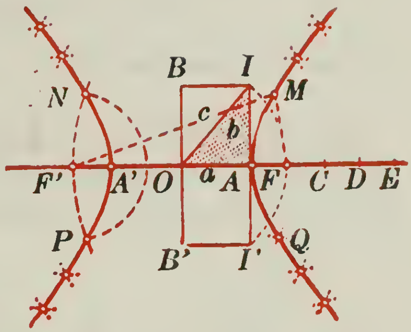


Fig. 69.

Procediendo en forma análoga con los puntos D, E, etc., se determinan tantos puntos como se quieran. Uniendo consecutivamente esos puntos obtenidos, resulta una curva abierta, de dos ramas, que es la representada en la figura 69.

91. Nomenclatura. Las rectas $A'A$ y $B'B$ son los *ejes de simetría* de la curva, o *diámetros principales.*

$A'A$ es el *eje focal*, o *eje transverso*, o *eje real*, y se designa por $2a$;

$B'B$ es el *eje no focal*, o *eje conjugado*, o *eje imaginario*, y se designa por $2b$;

$F'F$ es la *distancia focal*, y se designa por $2c$.

A' y A son los *vértices* de la hipérbola, y las rectas $F'M$ y FM son los *vectores.*

92. Observación. Para determinar el eje no focal, trácese en uno de los vértices, A por ejemplo, la perpendicular AI al eje focal; luego, con un radio igual a la semidistancia focal, trácese un arco con centro O, que cortará la recta AI en los puntos I, I'. Las perpendiculares IB, $I'B'$ determinan en la mediatriz del segmento $A'A$ el eje no focal $B'B$.

La relación entre los diámetros principales y la distancia focal está expresada por la igualdad:

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

en que a puede ser mayor, igual o menor que b.

93. Ecuación de la hipérbola en diferentes posiciones.

1º *Los ejes de simetría coinciden con los ejes coordenados, el eje focal está en* X′X *y es igual a* 2a.

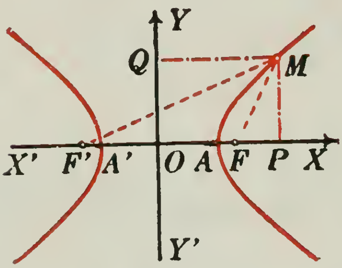


Fig. 70.

Sea $M(x, y)$ un punto móvil de la hipérbola, $F'(-c, 0)$ y $F(c, 0)$ los focos (fig. 70). La propiedad intrínseca de la curva es:

$$MF' - MF = 2a;$$

$$MF' = 2a + MF; \qquad (1)$$

$$MF' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2};$$

$$MF = \sqrt{(x-c)^2 + y^2};$$

valores que sustituídos en (1) dan:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elévese al cuadrado y redúzcase:

$$4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Elévese al cuadrado, redúzcase y pásense las variables al primer miembro:

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Sustitúyase $(c^2 - a^2)$ por b^2; se obtiene la ecuación buscada:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

Dividiendo ambos miembros entre a^2b^2, se obtiene la ecuación de la curva en forma simétrica:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

que puede escribirse:

$$\frac{\overline{QM}^2}{a^2} - \frac{\overline{PM}^2}{b^2} = 1.$$

2º *Los ejes de simetría coinciden con los ejes coordenados, el eje focal está en* Y′Y, *y es igual a* 2b.

Sea $M(x,y)$ un punto de la hipérbola, $F'(0,-c)$ y $F(0,c)$ los focos (fig. 71). Se tiene:

$$MF' - MF = 2b;$$

$$MF' = 2b + MF; \qquad (1)$$

$$MF' = \sqrt{x^2 + (y+c)^2};$$

$$MF = \sqrt{x^2 + (y-c)^2};$$

valores que sustituídos en (1) dan:

$$\sqrt{x^2 + (y+c)^2} = 2b + \sqrt{x^2 + (y-c)^2}.$$

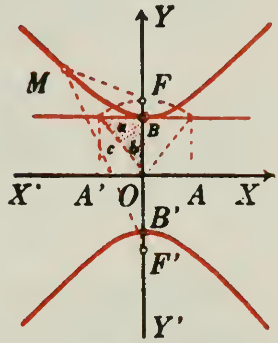


Fig. 71.

Elévese al cuadrado y redúzcase:

$$4cy - 4b^2 = 4b\sqrt{x^2 + (y-c)^2},$$

$$cy - b^2 = b\sqrt{x^2 + (y-c)^2}.$$

Elévese al cuadrado y redúzcase:

$$(c^2 - b^2)y^2 - b^2x^2 = b^2(c^2 - b^2).$$

Sustitúyase $(c^2 - b^2)$ por a^2:

$$a^2y^2 - b^2x^2 = a^2b^2. \qquad (2)$$

Dividiendo ambos miembros entre a^2b^2, se obtiene:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1. \qquad (3)$$

Multiplicando en (2) y (3) por -1, resulta:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = -a^2b^2; \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

3º *Los ejes de simetría son paralelos a los ejes coordenados.*

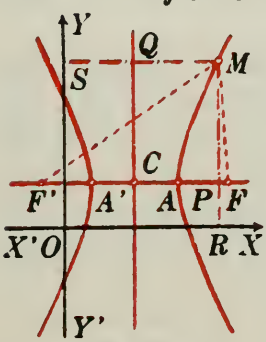


Fig. 72.

Sea $M(x,y)$ un punto móvil de la hipérbola, $C(3,2)$ su centro, $F'(-1,2)$ y $F(7,2)$ los focos, con $2a = 4$ (fig. 72).

Se tiene:

$$MF' - MF = 4;$$

$$MF' = 4 + MF; \qquad (1)$$

$$MF' = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2};$$

$$MF = \sqrt{(x-7)^2 + (y-2)^2};$$

de donde, sustituyendo en (1):

$$\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}=4+\sqrt{(x-7)^2+(y-2)^2}.$$

Elévese al cuadrado y redúzcase:

$$16x-64=8\sqrt{(x-7)^2+(y-2)^2},$$

$$2x-8=\sqrt{(x-7)^2+(y-2)^2}.$$

Elévese al cuadrado y redúzcase; se obtiene, sucesivamente:

$$3x^2-18x-(y-2)^2=-15,$$

$$3(x^2-6x)-(y-2)^2=-15.$$

Agréguese 9 al binomio x^2-6x para convertirlo en trinomio cuadrado perfecto. Esto equivale a sumar $3\times 9=27$ al primer miembro. Añadiendo también 27 al segundo miembro, se obtiene:

$$3(x-3)^2-(y-2)^2=-15+27=12;$$

o, dividiendo entre 12: $\dfrac{(x-3)^2}{4}-\dfrac{(y-2)^2}{12}=1.$

94. Observaciones. 1ª Las hipérbolas consideradas en el primero y segundo casos se llaman *hipérbolas conjugadas*.

Dos hipérbolas son conjugadas cuando el eje focal o real de la primera es el eje no focal de la segunda, y viceversa.

Observando las ecuaciones de las dos curvas, se nota que los primeros miembros son iguales, y los segundos son simétricos.

2ª Si los diámetros principales de una hipérbola son iguales, o sea, si $b=a$, la curva se llama *hipérbola equilátera*, y su ecuación es:

$$x^2-y^2=a^2.$$

3ª En la ecuación obtenida en el tercer caso, el segundo denominador es b^2. En efecto, $b^2=c^2-a^2=16-4=12$. Además, los segundos términos de los binomios, -3 y -2, son las coordenadas del centro, con signos cambiados. Si se conviene, para generalizar, en designar por (α,β) las coordenadas del centro, la ecuación de toda hipérbola cuyo eje focal es paralelo a $X'X$, es la de la forma

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1.$$

4ª En forma análoga se obtendría:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=-1,$$

como ecuación de toda hipérbola de eje focal paralelo a $Y'Y$ y centro en el punto $C(\alpha, \beta)$.

5ª Puede obtenerse más rápidamente el resultado a que se ha llegado en el Nº 93 partiendo de la ecuación de la hipérbola, escrita en la forma

$$\frac{\overline{QM}^2}{a^2}-\frac{\overline{PM}^2}{b^2}=1.$$

Efectivamente, por la figura 72 se tiene:

$$QM=SM-SQ=x-3;$$
$$PM=RM-RP=y-2;$$

luego, la ecuación buscada es:

$$\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(y-2)^2}{12}=1.$$

95. Las variables en la ecuación de la hipérbola. Por los resultados obtenidos, se ve que en la ecuación de una hipérbola cuyos ejes de simetría coinciden con los ejes coordenados, o les son paralelos, sólo figuran dos términos cuadráticos: los cuadrados de las variables x y y, con coeficientes desiguales y de signos contrarios.

96. Ancho focal. Llámase *ancho focal* de una hipérbola la cuerda trazada por uno de los focos, perpendicularmente al eje focal.

Si el centro está en O y el eje focal es $X'X$, el ancho focal es el duplo de la ordenada que pasa por el foco, y su valor es $\frac{2b^2}{a}$. Este mismo valor tiene el ancho focal de una hipérbola cuyo eje real es paralelo a $X'X$.

Si el centro está en O y el eje focal coincide con $Y'Y$, el ancho focal es el duplo de la abscisa que pasa por el foco, y entonces su valor es $\frac{2a^2}{b}$. Igual valor tiene el ancho focal de una hipérbola de eje real paralelo a $Y'Y$.

97. Excentricidad. Como en la elipse, la *excentricidad* de una hipérbola es el cociente de la distancia focal entre el eje focal, y se designa por e; luego:

$$c = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}; \quad \text{o bien:} \quad e = \frac{2c}{2b} = \frac{c}{b},$$

según que el eje focal coincida o sea paralelo a $X'X$ o a $Y'Y$.

98. Cálculo de los elementos de una hipérbola. Conocida la ecuación de una hipérbola, determinar a, b, c, e.

EJEMPLOS:

1º Sea la ecuación $6x^2 - 8y^2 + 12x + 32y - 74 = 0$.

Agrúpense los términos en x y los términos en y:

$$6(x^2 + 2x) - 8(y^2 - 4y) = 74.$$

Agréguese, en cada paréntesis, el cuadrado de la mitad del coeficiente del primer grado de la variable, y restablézcase la igualdad:

$$6(x^2 + 2x + 1) - 8(y^2 - 4y + 4) = 74 + 6 - 32 = 48$$

$$6(x + 1)^2 - 8(y - 2)^2 = 48,$$

$$\frac{(x+1)^2}{8} - \frac{(y-2)^2}{6} = 1,$$

ecuación de una hipérbola cuyo eje focal es paralelo a $X'X$, porque el segundo miembro es positivo.

De donde, los elementos de la hipérbola son:

semieje focal: $a = 2\sqrt{2}$;

semieje no focal: $b = \sqrt{6}$;

semidistancia focal: $c = \sqrt{8 + 6} = \sqrt{14}$;

ancho focal: $\dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{12}{2\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$;

excentricidad: $e = \sqrt{\dfrac{14}{8}} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$;

$C(-1, 2)$, $F(-1 \pm \sqrt{14}, 2)$.

2º Sea la ecuación: $16x^2 - 9y^2 + 64x + 54y + 127 = 0$. Procediendo en forma análoga a la del caso anterior, se obtiene sucesivamente:

$$16(x^2+4x+4)-9(y^2-6y+9) = -127+64-81 = -144,$$

$$16(x+2)^2 - 9(y-3)^2 = -144,$$

$$\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{16} = -1,$$

hipérbola cuyo eje focal es paralelo a $Y'Y$ porque el 2º miembro es negativo.

Por tanto, se tiene:

semieje focal: $b = 4$; ancho focal: $\frac{2a^2}{b} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$;

semieje no focal: $a = 3$; excentricidad: $e = \frac{5}{4}$;

semidistancia focal: $c = \sqrt{16+9} = 5$; $C(-2, 3)$, $F(-2, 3 \pm 5)$.

99. Ecuación de una hipérbola de ejes oblicuos con respecto a los ejes coordenados.

Sea obtener la ecuación de la hipérbola cuyos focos son $F(5, 3)$, $F'(2, 1)$ y $2a = 3$ (fig. 73).

Sea $M(x, y)$ un punto de la hipérbola. Se tiene:

$$MF = 3 + MF'; \qquad (1)$$

$$MF = \sqrt{(x-5)^2 + (y-3)^2};$$

$$MF' = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}.$$

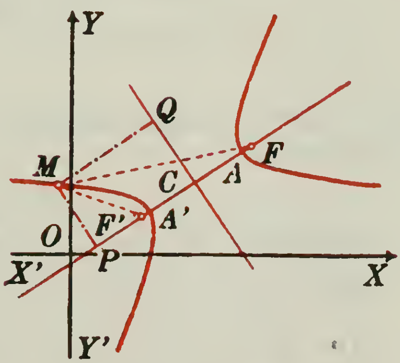


Fig. 73.

Sustitúyanse estos valores en (1):

$$\sqrt{(x-5)^2 + (y-3)^2} = 3 + \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}.$$

Elévese al cuadrado y redúzcase:

$$-3x - 2y + 10 = 3\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2}.$$

Elévese al cuadrado y redúzcase:

$$5y^2 - 12xy + 22y + 24x - 55 = 0.$$

Puede obtenerse igualmente la ecuación pedida aplicando la fórmula

$$\frac{\overline{QM}^2}{a^2} - \frac{\overline{PM}^2}{b^2} = 1.$$

EJERCICIO 13

1. Dibújese la hipérbola cuyos focos son $F'(-2, 0)$, $F(2, 0)$ y el eje focal $= 3$.

Obténganse, sin aplicar fórmulas, las ecuaciones de las hipérbolas siguientes, dado: Nº 2 a 16 inclusive.

2. $2a = 3$, $F'(-2, 0)$, $F(2, 0)$.

3. $2b = 4$, $F'(0, -3)$, $F(0, 3)$.

4. $2a = 3$, $e = \frac{4}{3}$, $C(0, 0)$ y focos en $X'X$.

5. $2b = 4$, $C(0, 0)$, $e = \frac{3}{2}$ y focos en $Y'Y$.

6. $2a = 8$, ancho focal $= \frac{9}{2}$ y focos en $X'X$.

7. $2a = 8$, focos en $X'X$, $C(0, 0)$ sabiendo que la curva pasa por $P(8, 3\sqrt{3})$.

8. $2b = 6$; focos en $Y'Y$, $C(0, 0)$, y la curva pasa por el punto $P(8, 3\sqrt{5})$.

9. $P(4, 3)$ y $Q(14, 12)$ son de la curva, y los ejes de simetría coinciden con los ejes coordenados.

10. $2a = 3$, $2c = 4$, $C(-5, 2)$, focos en una paralela a $X'X$.

11. $2b = 5$, $2c = 7$, $C(3, -2)$, focos en una paralela a $Y'Y$.

12. La distancia focal es igual al duplo del eje focal.

13. El semieje focal es 4 y la curva pasa por $P(6, 4)$.

14. Los vértices son $A'(-1, 1)$ y $A(5, 1)$, y la excentricidad $e = \frac{5}{3}$.

15. La hipérbola es equilátera y pasa por el punto $P(3, -1)$.

16. La hipérbola tiene por vértices los focos de la elipse cuyos semiejes a y b son, respectivamente, 5 y 3, y por focos los vértices de la elipse, sabiendo que los ejes de simetría de las dos curvas coinciden con los ejes coordenados.

17. Dada la ecuación de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, hágase ver que:

1º La curva es simétrica con respecto a $X'X$;

2º La curva es simétrica con respecto a $Y'Y$;

3º Que no hay puntos de la curva para $|x| < a$, y que se extiende indefinidamente en la dirección AX y en la dirección $A'X'$.

18. ¿Hay puntos de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ que tengan abscisa y ordenada iguales?

Calcúlese el ancho focal y la excentricidad de las hipérbolas:

19. $16x^2 - 9y^2 = 64$.

20. $9x^2 - 16y^2 = 576$.

En las siguientes hipérbolas hállense el centro, los semidiámetros principales, los focos, la excentricidad y el ancho focal:

21. $9x^2 - 16y^2 - 72x + 64y - 496 = 0$.

22. $x^2 - 3y^2 - 2x - 6y + 7 = 0$.

23. $4x^2 - 36y^2 + 24x - 288y - 684 = 0$.

24. $4x^2 - 3y^2 - 8x + 12y + 28 = 0$.

25. Obténgase la ecuación de la hipérbola cuyos ejes focal y no focal miden, respectivamente, 2 y 6, y coinciden, el primero con la recta $x = 2y$, y el segundo con $2x + y = 0$.

26. Obténgase la ecuación de la hipérbola cuyos focos son $F'(-1, -2)$, $F(3, 3)$ y la diferencia de los vectores es 3.

27. Desde el punto fijo $P(0, a)$ se trazan secantes PS que cortan en S al eje $X'X$. Desde cada punto S de intersección se lleva, en la dirección OX, una distancia constante $SQ = k$. Se trazan después las rectas QM perpendiculares a $X'X$, que cortan a las secantes PS en M. Obténgase la ecuación del lugar de los puntos M (fig. 74).

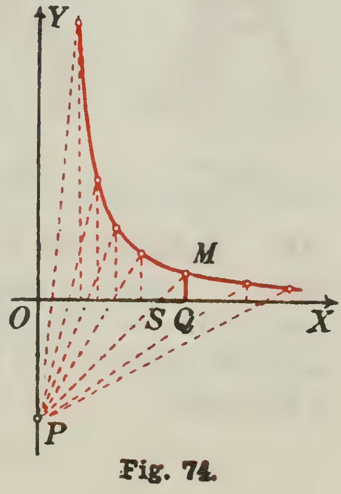


Fig. 74.

VI. CONICAS — ECUACION DE UNA CONICA QUE SE APOYA EN PUNTOS DADOS

100. Definiciones. Las curvas de segundo grado que se acaban de estudiar, *circunferencia, elipse, parábola* e *hipérbola*, pueden considerarse como intersecciones de la superficie de un cono de base circular con un plano secante. Por ese motivo se las llama **secciones** cónicas, o simplemente **cónicas**.

Si el plano secante:

a) Corta todas las generatrices y es perpendicular al eje del cono, se obtiene una *circunferencia* (fig. 75).

b) Corta todas las generatrices y no es perpendicular al eje, determina una *elipse* (fig. 76).

c) Es paralelo a una generatriz, determina una *parábola* (fig. 77).

d) Es paralelo al eje, determina una *hipérbola* (fig. 78).

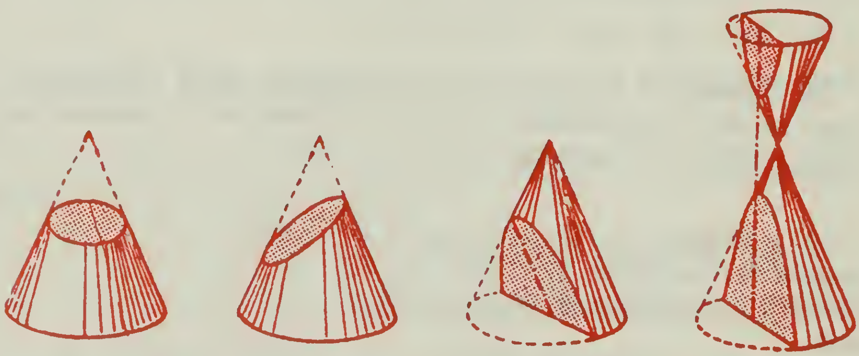


Fig. 75. Fig. 76. Fig. 77. Fig. 78.

101. Ecuación de una circunferencia que se apoya en 3 puntos. Dados 3 puntos no alineados, puede obtenerse la ecuación de la circunferencia que se apoya en ellos, determinando los valores de los parámetros α, β y r, y sustituyéndolos en la ecuación

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2. \qquad (1)$$

Para que la curva se apoye en esos tres puntos, se necesita y basta que las coordenadas de cada uno de ellos satisfaga la ecuación (1), o sea, suponiendo que (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) son coordenadas de dichos puntos, que se tenga:

$$(x_1 - \alpha)^2 + (y_1 - \beta)^2 = r^2,$$
$$(x_2 - \alpha)^2 + (y_2 - \beta)^2 = r^2,$$
$$(x_3 - \alpha)^2 + (y_3 - \beta)^2 = r^2.$$

Resolviendo este sistema de 3 ecuaciones simultáneas, quedan determinados los valores de los tres parámetros.

Se puede, por medio de un determinante, establecer la ecuación de la circunferencia que se apoya en los 3 puntos dados.

Considérese, en efecto, el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Este determinante, en el que la suma $x^2 + y^2$ se considera como un solo término, porque en la ecuación de la circunferencia los términos cuadráticos tienen coeficientes iguales, se anula cuando se sustituyen las variables (x, y) por (x_1, y_1), puesto que resulta un determinante con dos renglones iguales que, ya se sabe, tiene un valor nulo. Lo mismo sucede al sustituir las variables por (x_2, y_2) y por (x_3, y_3). Infiérese de esto que la ecuación $\Delta = 0$ representa una circunferencia que se apoya en los 3 puntos dados.

Como aplicación, sea obtener la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(9, 3)$, $B(3, 7)$ y $C(-2, 6)$.

Se tiene:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ 90 & 9 & 3 & 1 \\ 58 & 3 & 7 & 1 \\ 40 & -2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Teniendo presente que todo determinante es igual a la suma algebraica de los productos de los elementos de una línea por el *menor correspondiente* a cada uno de ellos, se puede escribir, conviniendo en designar por M_1 el *menor correspondiente* a (x^2+y^2), por M_2 el que corresponde al segundo término, o sea x, etc.:

$$M_1(x^2+y^2) - M_2x + M_3y - M_4 = 0. \qquad (2)$$

$$M_1 = \begin{vmatrix} 9 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \\ -2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 26; \qquad M_2 = \begin{vmatrix} 90 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 1 \\ 40 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 104;$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 90 & 9 & 1 \\ 58 & 3 & 1 \\ 40 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 52; \qquad M_4 = \begin{vmatrix} 90 & 9 & 3 \\ 58 & 3 & 7 \\ 40 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 1\,560.$$

Sustituyendo estos valores en (2) se obtiene:

$$26(x^2+y^2) - 104x + 52y - 1\,560 = 0,$$

o sea, dividiendo entre 26:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 60 = 0,$$

ecuación de una circunferencia de centro $C(2, -1)$ y radio igual a $\sqrt{65}$.

102. Ecuación de una parábola que se apoya en 3 puntos. Si el eje de simetría de una parábola es paralelo a uno de los ejes cartesianos, dados 3 puntos no alineados, puede obtenerse la ecuación de la curva que se apoya en ellos, determinando los valores de los parámetros α, β y p, y sustituyéndolos en la ecuación $(y-\beta)^2 = 4p(x-\beta)$ o en la ecuación $(x-\alpha)^2 = 4p(y-\beta)$, según que el eje de simetría de la curva sea paralelo a $X'X$, o a $Y'Y$.

Para determinar aquellos tres valores, basta formar un sistema de 3 ecuaciones, como se ha expuesto en el número anterior.

Puede obtenerse igualmente la ecuación formando un determinante parecido al que se obtuvo en el caso de la circunferencia, fundándose en análogas consideraciones.

Sea, como ejemplo, obtener la ecuación de la parábola que se apoya en los puntos $A(0, 1)$, $B(6, -1)$ y $C(16, 9)$, sabiendo que el eje de simetría es paralelo a $X'X$.

Se tiene:

$$\begin{vmatrix} y^2 & x & y & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & -1 & 1 \\ 81 & 16 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

o sea:
$$M_1y^2 - M_2x + M_3y - M_4 = 0. \qquad (1)$$

Calculando el valor de M_1, M_2, M_3 y M_4, se obtiene:

$$M_1 = 80, \quad M_2 = 160, \quad M_3 = -480, \quad M_4 = -400.$$

Sustituyendo estos valores en (1), resulta:

$$80y^2 - 160x - 480y + 400 = 0,$$

o sea, dividiendo entre 80:

$$y^2 - 2x - 6y + 5 = 0,$$

o bien:
$$(y-3)^2 = 2(x+2)$$

Tratándose de una parábola cuyo eje de simetría fuese paralelo a $Y'Y$, bastaría escribir:

$$M_1x^2 - M_2x + M_3y - M_4 = 0.$$

103. Ecuación de una cónica que se apoya en 4 ó 5 puntos. Si una elipse o una hipérbola tienen sus ejes de simetría paralelos a los ejes cartesianos y se conocen 4 puntos de la curva, puede obtenerse su ecuación determinando, por medio de las coordenadas de los puntos dados, las 4 constantes o parámetros, a saber: las coordenadas del centro y los semiejes, que figuran en la ecuación de las citadas curvas.

Pero, si se trata de una parábola, elipse o hipérbola de eje o ejes de simetría de posición desconocida con respecto a los ejes cartesianos, se necesita conocer 5 puntos de la cónica para poder dar su ecuación.

Esta es de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (1)$$

en la cual intervienen 6 constantes, que es preciso determinar.

Como se puede dividir cada una de esas constantes entre una de ellas, siempre que sea diferente de cero, en la ecuación sólo

figurarán, después de efectuada la división indicada, 5 constantes, a saber, la razón de cada una de las cinco a la sexta.

Si las coordenadas de los 5 puntos de la cónica se designan por

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad (x_3, y_3), \quad (x_4, y_4), \quad (x_5, y_5),$$

para que la curva pase por cada uno de ellos se necesita y basta que sus coordenadas satisfagan la ecuación (1), es decir, que se tenga:

$$\begin{aligned} &Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cy_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F = 0; \\ &Ax_2^2 + Bx_2y_2 + Cy_2^2 + Dx_2 + Ey_2 + F = 0; \text{ etc.} \end{aligned} \qquad (2)$$

Si los puntos dados no son de una misma recta, las tres primeras constantes, A, B y C no pueden ser simultáneamente nulas, pues entonces la ecuación (1) se reduciría a la de una recta.

Resolviendo el sistema (2) se determinan las constantes, y luego se sustituyen en (1).

De igual manera que se hizo para la circunferencia y la parábola, se puede, por medio de un determinante, establecer la ecuación de la cónica que se apoya en los 5 puntos dados.

Considérese el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2y_2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & x_4y_4 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & x_5y_5 & y_5^2 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix}$$

Este determinante se anula cuando se sustituyen las variables (x, y) por (x_1, y_1), puesto que resulta un determinante con dos renglones iguales que, como se ha dicho, tiene un valor nulo. Lo mismo sucede sustituyendo dichas variables por (x_2, y_2), etc. Luego, la ecuación $\Delta = 0$ representa una curva de segundo grado, que pasa por los 5 puntos dados.

Si, como se ha hecho para la circunferencia, se designan por M_1, M_2, etc., los *menores correspondientes* a los elementos del primer renglón, se puede escribir:

$$M_1x^2 - M_2xy + M_3y^2 - M_4x + M_5y - M_6 = 0. \qquad (3)$$

Sustituyendo el valor de cada uno de esos *menores* en (3), se obtiene la ecuación de la cónica.

104. Otro método para la obtención de la ecuación. Puede obtenerse la ecuación de una cónica siguiendo un procedimiento distinto.

Supónganse 5 puntos no alineados, M, N, P, Q y R, situados en un mismo plano (fig. 79). Trácense las rectas MN, NP, PQ, y QM, y desígnense por u_1, u_2, u_3 y u_4 los primeros miembros de las ecuaciones respectivas de esas rectas, ecuaciones escritas en forma general; se obtiene:

$$u_1u_3 + ku_2u_4 = 0, \qquad (1)$$

en que k es una constante que debe determinarse.

Cada uno de los productos u_1u_3, u_2u_4, es de segundo grado en (x, y), y representa, por tanto, una cónica que pasa por cada uno de los puntos de intersección de las 4 rectas. Pasa por M, pues sus coordenadas hacen $u_1 = 0$ y $u_4 = 0$, y cosa análoga sucede con las coordenadas de los puntos N, P y Q. Luego. estos puntos son de la cónica.

El quinto punto R sirve para calcular el valor de k y determinar la posición de la curva. Por la figura 79 se ve fácilmente que por los puntos M, N, P y Q puede hacerse pasar una infinidad de cónicas, pues variando la posición del punto R a R' se obtiene otra curva, o sea, variando la posición del quinto punto se puede tapizar completamente el plano de los cuatro primeros puntos; en otras palabras: el punto R precisa una de esas cónicas.

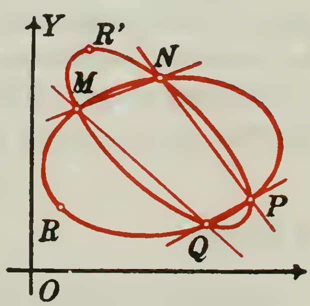


Fig. 79.

Para obtener la ecuación de una de las curvas, basta determinar el valor k, lo cual se consigue sustituyendo en (1) las variables (x, y) por las coordenadas del punto R.

Llevando después a (1) el valor calculado, se obtiene la ecuación buscada, como se hace ver a continuación.

105. Aplicación. Obtener la ecuación de la cónica que se apoya en los puntos $A(0,3)$, $B(2,1)$, $C(3,-3)$, $D(-1,-3)$ y $E(1,0)$.

$$\begin{array}{llll} \text{Ecuación de } AB, & \text{o sea} & u_1: & y + x - 3 = 0; \\ \quad ,, \quad ,, \ BC, & ,, & u_2: & y + 4x - 9 = 0; \\ \quad ,, \quad ,, \ CD, & ,, & u_3: & y + 3 = 0; \\ \quad ,, \quad ,, \ DA, & ,, & u_4: & y - 6x - 3 = 0. \end{array}$$

Luego, los productos que se han indicado, son:

$$u_1 u_3 + k u_2 u_4 = y^2 + xy + 3x - 9$$
$$+ k(y^2 - 2xy - 12y - 24x^2 + 42x + 27) = 0. \quad (2)$$

Las coordenadas de E satisfacen esta ecuación; luego:

$$-6 + 45k = 0;$$

de donde:
$$k = \frac{2}{15},$$

valor que, sustituído en (2) da, después de efectuadas las reducciones:

$$17y^2 + 11xy - 24y - 48x^2 + 129x - 81 = 0,$$

que es la ecuación de una hipérbola.

Si la cónica es una hipérbola o una elipse que tiene el eje focal paralelo a uno de los ejes cartesianos, bastan, como se ha dicho, 4 puntos de la curva para poder obtener su ecuación. Supóngase, en el ejemplo anterior, que sean los puntos A, B, C y D. La ecuación pedida carecerá del término en xy, y para que en (2) desaparezcan los dos términos de esta naturaleza que en ella figuran, es necesario y basta que

$$xy + k(-2xy) = 0,$$

o sea, que
$$k = \frac{1}{2}.$$

Sustituyendo este valor en (2) se obtiene, después de reducir:

$$24x^2 - 48x - 3y^2 + 12y - 9 = 0,$$

o sea:
$$\frac{8(x-1)^2}{7} - \frac{(y-2)^2}{7} = 1,$$

ecuación de la hipérbola que pasa por los puntos A, B, C y D y tiene su centro en el punto $(1, 2)$

EJERCICIO 14

Obténgase la ecuación de:

1. La circunferencia que se apoya en los puntos $A(3,6)$, $B(1,8)$, $C(-5,-2)$.

2. La parábola que se apoya en los puntos $A(-1,1)$, $B(2,3)$, $C(7,5)$ y tiene el eje de simetría paralelo a $X'X$.

3. Idem: $A(-6,-1)$, $B(-2,-1)$, $C(0,5)$, y tiene su eje de simetría paralelo a $Y'Y$.

4. La cónica que se apoya en los puntos $A(0,2)$, $B(2,1)$, $C(2,-2)$ y $D(3,0)$.

5. La elipse que se apoya en los puntos $M(0,2)$, $N(2,1)$, $P(2,-2)$, $Q(-2,-1)$ y tiene el eje focal paralelo a $Y'Y$.

6. La elipse que pasa por los puntos $P(-1,0)$, $Q(2,0)$, $R(3,1)$, $S(1,2)$ y tiene el eje focal paralelo a $X'X$.

7. La cónica que pasa por los puntos $A(2,3)$, $B(-1,2)$, $C(-3,1)$, $D(0,-4)$ y $E(1,1)$.

8. La cónica que se apoya en los puntos $A(-2,-3)$, $B(0,3)$, $C(1,0)$, $D(3,1)$ y $E(-4,-1)$.

4 ESTUDIO GENERAL DE LAS CONICAS

I. NATURALEZA DE LA CONICA

106. Ecuación general. La ecuación general de las cónicas es:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (1)$$

en que A, B, C, D, E y F son constantes.

Según se ha visto, si la ecuación es de una circunferencia, o los ejes de simetría de las tres cónicas restantes son paralelos a los ejes cartesianos, la ecuación carece del término en xy, y recíprocamente. En este caso, si:

1º $A = C$, la ecuación (1) representa una *circunferencia.*

2º $A = 0$, o bien $C = 0$, (1) es la ecuación de una *parábola.*

3º A y C son de igual signo, (1) es la ecuación de una *elipse.*

4º A y C son de signos contrarios, (1) es la ecuación de una *hipérbola.*

Resolviendo en y la ecuación (1), se obtiene:

$$y = -\frac{Bx+E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{(B^2-4AC)x^2+2(BE-2CD)x+E^2-4CF}.$$

La naturaleza de la curva depende del coeficiente que tiene el término x^2 en el radicando, o sea, depende del valor de $B^2 - 4AC$, magnitud llamada *discriminante* de la ecuación. Si:

1º $B^2 - 4AC = 0$, la cónica es del género *parábola;*

2º $B^2 - 4AC < 0$, la cónica es del género *elipse;*

3º $B^2 - 4AC > 0$, la cónica es del género *hipérbola,*

como se va a ver en seguida, considerando ecuaciones con coeficientes numéricos.

107. Casos de una parábola. 1º Sea la ecuación

$$4y^2 - 4xy - 14y + x^2 - 18x + 56 = 0.$$

En este caso,

$$B^2 - 4AC = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0.$$

Resolviendo en y la ecuación, se obtiene:

$$y = \frac{2x+7}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{100x - 175} = \frac{2x+7}{4} \pm \frac{5}{4}\sqrt{4x - 7}. \qquad (1)$$

Para que el valor de y sea real se necesita que el radicando sea positivo, o sea $x > \frac{7}{4}$. Esto equivale a decir que la curva se extiende indefinidamente desde un punto A, de abscisa $\frac{7}{4}$, hasta $x = \infty$ y que, por tanto, se trata de una *parábola.*

Por la expresión (1) se ve que el valor de y consta de dos partes: la que corresponde a $\frac{2x+7}{4}$ y la correspondiente a $\pm \frac{5}{4}\sqrt{4x-7}$.

Para construir el lugar de la ecuación dada, conviene trazar primero la recta $y = \frac{2x+7}{4}$, llamada diámetro, y llevar después, a partir de él, y perpendicularmente a $X'X$, de uno y otro lado de dicho diámetro, los valores que proporciona la expresión $\pm \frac{5}{4}\sqrt{4x-7}$, en que se hace variar x desde $\frac{7}{4}$ a ∞.

La tabulación da:

x	1.75	2	2.5	3	3.5	4
$\pm \frac{5}{4}\sqrt{4x-7}$	0	$\pm$ 1.25	$\pm$ 2.16	$\pm$ 2.79	$\pm$ 3.30	$\pm$ 3.75
Puntos	A	B, B'	C, C'	D, D'	E, E'	G, G'

Localizando estos puntos y uniéndolos, se obtiene la curva representada en la figura 80.

Por (1) se ve que en el caso de una parábola, el radicando que se obtiene al resolver en y la ecuación general de las cónicas, después de efectuar todas las reducciones posibles, es un binomio lineal.

Llámase *diámetro* de una cónica toda recta que biseca un sistema de cuerdas paralelas.

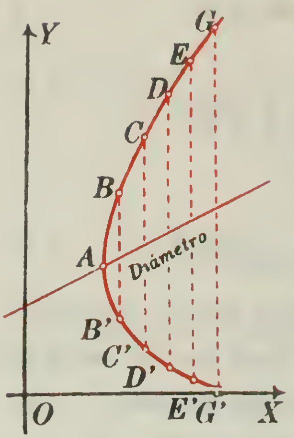


Fig. 80.

2º Sea la ecuación

$$y^2 + 4xy + y + 4x^2 + 2x - 6 = 0. \quad (2)$$

$$B^2 - 4AC = 4^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0.$$

Resolviendo en y la ecuación, se obtiene:

$$y = \frac{4x+1}{2} \pm \frac{5}{2};$$

de donde:

$$2x - y + 3 = 0,$$
$$2x - y + 2 = 0,$$

ecuaciones de dos rectas paralelas.

La ecuación (2) representa, pues, una parábola que ha degenerado en *dos rectas paralelas.*

3º Sea la ecuación $y^2 - 6xy + 4y + 9x^2 - 12x + 4 = 0.$

Procediendo como en los casos anteriores, se obtiene:

$$y = 3x - 2 \pm 0.$$

La parábola ha degenerado en *dos rectas que se confunden.*

4º Sea la ecuación $4y^2 - 4xy + 4y + x^2 - 2x + 6 = 0.$ (3)

Resolviendo como en los casos anteriores, se tiene:

$$y = \frac{x-1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-5}.$$

La ecuación (3) corresponde a la de una *parábola imaginaria.*

108. Casos de una elipse. 1º Sea la ecuación

$$5y^2 - 4xy - 22y + 8x^2 - 20x + 17 = 0.$$

En este caso,

$$B^2 - 4AC = (-4)^2 - 4 \times 8 \times 5 < 0$$

Resolviendo en y la ecuación, se obtiene:

$$y = \frac{2}{5}x + \frac{11}{5} \pm \frac{6}{5}\sqrt{-x^2 + 4x + 1}. \quad (1)$$

El valor de y comprende dos partes: la correspondiente a $\frac{2}{5}x + \frac{11}{5}$, y la que corresponde a $\pm\frac{6}{5}\sqrt{-x^2+4x+1}$. Para construir el lugar de la ecuación propuesta, conviene trazar primero la recta $\frac{2}{5}x+\frac{11}{5}$, diámetro de la curva, y llevar después, perpendicularmente al eje $X'X$, de uno y otro lado del diámetro, y a partir de él, los valores que proporciona la expresión

$$\pm\frac{6}{5}\sqrt{-x^2+4x+1}.$$

El radicando de (1) indica que se trata de una curva limitada en el sentido de las x. En efecto: por ser negativo el coeficiente del término cuadrático, el trinomio $-x^2+4x+1$ sólo es positivo para todo valor de x comprendido entre las raíces de $-x^2+4x+1=0$, o sea, para $-.23 < x < 4.23$. Por tanto, los valores que resulten para y sólo serán reales cuando x varíe de $-.23$ a 4.23; es decir, toda la curva está comprendida entre dos paralelas al eje $Y'Y$, trazadas por los puntos T', T de abscisas $-.23$ y 4.23 respectivamente; esas rectas son tangentes a la elipse en dichos puntos (fig. 81).

La curva es limitada también en el sentido de las yes, pues el trinomio radicando tiene máximo. Puede escribirse, en efecto:

$$-x^2+4x+1=-(x+.23)(x-4.23),$$

producto que resulta máximo cuando $-(x+.23)=x-4.23$. es decir, cuando $x=2$.

Sustituyendo x por 2 en el radicando, se obtiene: $\pm\frac{6}{5}\sqrt{-x^2+4x+1}=\pm 2.68$. Esto indica que el punto del lugar buscado que más dista del diámetro, está a 2.68 unidades de él; la curva está limitada, por tanto, en el sentido de las yes, entre dos paralelas al diámetro, tangentes a la curva en M y M' (fig. 81).

La tabulación es:

x	$-.23$	0	$.5$	1	2	3	3.5	4	4.23
$\pm\frac{6}{5}\sqrt{\ }$	0	± 1.20	± 1.99	± 2.40	± 2.68	± 2.40	± 1.99	± 1.20	0
Puntos	T'	D, D'	E, E'	G, G'	M, M'	H, H'	I, I'	J, J'	T

Localizando estos puntos y uniéndolos, se obtiene la *elipse* representada en la figura 81.

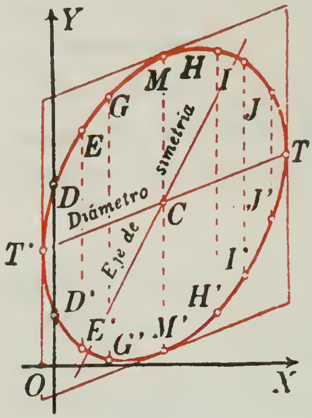


Fig. 81.

El punto del diámetro de abscisa igual al valor de x que hace máximo el radicando, es el centro de la curva; en este caso es $C(2, 3)$.

Por (1) se ve que, después de resolver en y la ecuación general de las cónicas y efectuadas todas las reducciones posibles, si se obtiene como radicando un trinomio cuadrático en que el coeficiente de x^2 es negativo y las raíces del trinomio, igualado a cero, son reales, la curva es una *elipse* comprendida entre dos paralelas al eje $Y'Y$, trazadas en los puntos de abscisa igual al valor de cada una de dichas raíces

2º Sea la ecuación $y^2 + 6xy - 2y + 10x^2 - 14x + 17 = 0$.

Resuélvase en y como en los casos anteriores; se obtiene:

$$y = -3x + 1 \pm \sqrt{-x^2 + 8x - 16} = -3x + 1 \pm (x - 4)\sqrt{-1}.$$

Esta ecuación sólo admite un par de valores reales, $x = 4$, $y = -11$, que la satisfacen; representa, por tanto, un punto, llamado *elipse punto*, o *elipse degenerada*.

3º Sea la ecuación $y^2 - 4xy - 2y + 5x^2 - 4x + 20 = 0$.

$$y = 2x + 1 \pm \sqrt{-x^2 + 8x - 19}.$$

Las raíces de $-x^2 + 8x - 19 = 0$ son complejas. El trinomio radicando es, por consiguiente, siempre negativo y el valor de y es imaginario.

En este caso la ecuación representa una *elipse imaginaria*.

109. Casos de una hipérbola. 1º Sea la ecuación

$$5y^2 - 12xy + 22y + 24x - 55 = 0.$$

En este caso.

$$B^2 - 4AC = (-12)^2 - 4 \times 0 \times 5 > 0.$$

Resolviendo la ecuación en y se obtiene:

$$y = \frac{6x - 11}{5} \pm \frac{6}{5}\sqrt{x^2 - 7x + 11}. \qquad (1)$$

El valor de y comprende dos partes: la correspondiente a $\frac{6x-11}{5}$ y la que corresponde a $\pm\frac{6}{5}\sqrt{x^2 - 7x + 11}$. Para construir el lugar de la ecuación dada, conviene trazar primero la recta $y = \frac{6x-11}{5}$, diámetro de la curva, y llevar después, perpendicularmente al eje $X'X$, de uno y otro lado del diámetro y a partir de él, los valores que proporciona la expresión

$$\frac{6}{5}\sqrt{x^2 - 7x + 11}.$$

El radicando de (1) indica que se trata de una curva que se extiende indefinidamente en dos direcciones opuestas. En efecto: por ser positivo el coeficiente del término cuadrático, el trinomio $x^2 - 7x + 11$ es positivo para todos los valores de x exteriores a las raíces de $x^2 - 7x + 11 = 0$, o sea, para $x < 2.382$ y $x > 4.618$. Por tanto, resultan valores reales para y, haciendo variar x de $-\infty$ a 2.382 y de 4.618 a $+\infty$. Esto indica que se trata de una curva que se extiende indefinidamente a la izquierda y a la derecha de dos paralelas a $Y'Y$ trazadas, respectivamente, por los puntos de abscisas 2.382 y 4.618 (fig. 82).

Tabulación:

x	0	1	2	2.382	4.618	5	6	7
$\pm\frac{6}{5}\sqrt{\ }$	$\pm$ 3.98	$\pm$ 2.68	$\pm$ 1.20	0	0	$\pm$ 1.20	$\pm$ 2.68	$\pm$ 3.98
Puntos	D, D'	E, E'	G, G'	M	N	P, P'	Q, Q'	R, R'

Localizando estos puntos y uniéndolos después, se obtiene la curva representada en la figura 82.

El punto del diámetro, de abscisa igual a la semisuma de las raíces del trinomio $x^2 - 7x + 11 = 0$ es el centro de la curva; en este caso es $\left(\frac{7}{2}, 2\right)$.

Por (1) se ve que si después de resolver en y la ecuación general de las cónicas y efectuadas todas las reducciones posibles, se obtiene como radicando un trinomio cuadrático en que el coeficiente de x^2 es positivo y las raíces del trinomio son reales y desiguales, la curva es una *hipérbola,* cuyas dos ramas se extienden indefinidamente a uno y otro lado de dos paralelas a $Y'Y$ trazadas por los puntos de abscisas respectivamente iguales a esas raíces.

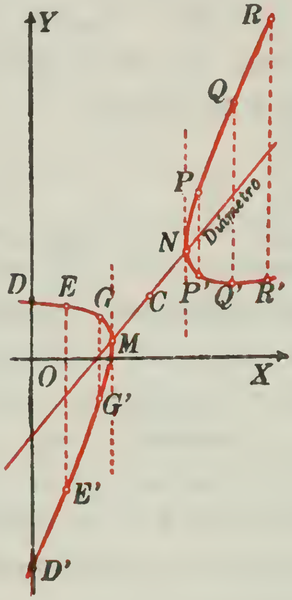


Fig. 82.

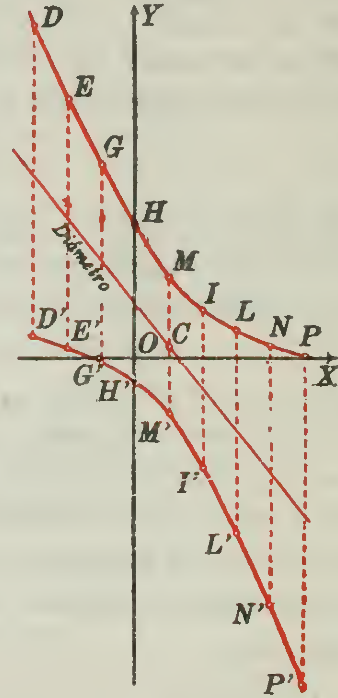


Fig. 83.

2º Sea la ecuación

$$6y^2 + 7xy - 22y + 2x^2 - 14x + 12 = 0.$$

Resolviéndola en y se obtiene:

$$y = \frac{-7x + 22}{12} \pm \frac{x + 14}{12}.$$

Tomando el signo $+$, resulta:

$$2y + x = 6,$$

y tomando el signo $-$, se tiene:

$$3y + 2x = 2.$$

En casos como éste, es decir, en que el trinomio radicando es cuadrado perfecto, y el coeficiente de x^2 es positivo, se tiene una *hipérbola degenerada.* Esta se ha convertido simplemente en dos rectas.

3º Sea la ecuación

$$16y^2 + 40xy - 56y + 7x^2 - 34x - 41 = 0.$$

Procediendo como en los casos anteriores, se obtiene:

$$y = \frac{-5x+7}{4} \pm \frac{3\sqrt{2}}{4}\sqrt{x^2 - 2x + 5}.$$

El coeficiente de x^2 del trinomio que figura como radicando es positivo y las raíces de éste son complejas. Por tanto, y es real para todo valor de x, y la curva no corta al diámetro que tiene por ecuación $y = \frac{-5x+7}{4}$.

El centro de la curva se halla en el diámetro, en el punto de abscisa $x = 1$, valor que hace mínimo al trinomio radicando: de donde: $C(1, .5)$.

Tabulando para hallar los puntos de la curva, se tiene:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\frac{3\sqrt{2}}{4}$	± 4.74	± 3.82	± 3	± 2.37	± 2.12	± 2.37	± 3	± 3.82	± 4.74
Puntos	D, D'	E, E'	G, G'	H, H'	M, M'	I, I'	L, L'	N, N	P, P'

Localizando esos puntos y uniéndolos ordenadamente, se obtiene la *hipérbola* representada en la figura 83.

110. Resumen. Si se conviene en designar por D el discriminante $B^2 - 4AC$, que se obtiene al resolver en y la ecuación general de las cónicas, y por N el número que llegue a figurar como término único en el radicando, se pueden compendiar los resultados a que se ha llegado al hacerse el estudio general de las cónicas, en el siguiente cuadro:

Disc.	Género de la curva	Radicando	Especie de la curva
$D < 0$	ELIPSE	Trinomio con raíces reales Trinomio con raíz doble Trin. con raíces complejas	Elipse real Elipse degenerada Elipse imaginaria
$D = 0$	PARÁBOLA	Binomio o monomio con un término en x	Parábola real
		Sin término en x:	Parábola que ha degenerado en:
		Si $N > 0$	2 rectas paralelas
		Si $N = 0$	2 rectas coincidentes
		Si $N < 0$	Parábola imaginaria
$D > 0$	HIPÉRBOLA	Trinomio con raíces reales	Hipérbola que corta al diámetro
		Trinomio con raíz doble	Hipérbola que ha degenerado en 2 rectas que se cortan
		Trin. con raíces complejas	Hipérbola que no corta al diámetro

EJERCICIO 15

Averígüese qué clase de curva es la representación cartesiana de cada ecuación, y en el caso de una elipse o de una hipérbola obténganse las coordenadas del centro.

1. $y^2 - 4xy + 2y + 4x^2 + 4x - 5 = 0.$
2. $4y^2 + 4xy - 14y + x^2 - 22x + 16 = 0.$
3. $5y^2 - 12xy + 22y + 24x - 55 = 0.$
4. $y^2 + 2xy - 2y + 2x^2 - 5x + 1 = 0.$
5. $4y^2 + 10xy + 7y - 6x^2 + 7x + 3 = 0.$
6. $5x^2 + 4xy + y^2 - 10x - 2y + 10 = 0.$
7. $4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y = 0.$
8. $4y^2 - 8xy + 4y + 5x^2 - 3x + 2 = 0.$
9. $y^2 - 2xy + 2x^2 - 2x + 4 = 0.$

10. $y^2 - 4xy + 6y + 2x^2 - 9x + 2 = 0.$

11. $4y^2 + 4xy - 4y + x^2 - 2x - 3 = 0.$

12. $y^2 - 2xy + 2y + 4x - 8 = 0.$

13. $y^2 - 4xy + 2y + 4x^2 - 4x + 4 = 0.$

14. $4y^2 - 2xy - 8y + x^2 + 4x + 4 = 0.$

15. $4y^2 - 8xy - 4y + 3x^2 + 6x - 4 = 0.$

16. $y^2 - 2xy + 6y + x^2 - 6x + 9 = 0.$

17. $3y^2 + 2xy - 16y + 3x^2 + 24 = 0.$

18. $2xy - x + 1 = 0.$

19. $2x^2 - xy - 6y^2 + 13x + 9y + 15 = 0.$

20. Demuéstrese que si en la ecuación general de las cónicas

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

$B \neq 0$ y $A = 0$, la curva es una hipérbola,

II. TRASLACION Y ROTACION DE LOS EJES

111. Traslación de los ejes. Conocida la ecuación de un lugar geométrico referida a un sistema de coordenadas, puede ocurrir, en ciertos casos, que se desee obtener la ecuación de ese mismo lugar, referida a otro sistema.

Sean OX, OY los ejes en el primer sistema, $O'(\alpha, \beta)$ el nuevo origen, y $O'X'$, $O'Y'$ los ejes en el segundo sistema.

Las coordenadas de P (fig. 84), en el primer sistema, son:

$$x = OM, \qquad y = MP;$$

y en el nuevo:

$$x' = O'N, \qquad y' = NP.$$

Se tiene:

$$x = AM + OA = x' + \alpha,$$
$$y = NP + AO' = y' + \beta.$$

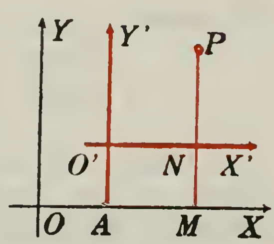


Fig. 84.

Por consiguiente, si se conoce la ecuación de una línea referida a cierto sistema de ejes, puede hallarse la ecuación de la misma línea referida a otro sistema de ejes paralelos a los primeros, reemplazando x por $x' + \alpha$, y y por $y' + \beta$ en la ecuación dada.

112. Aplicación. Dada la ecuación

$$4x^2 - 16x + 9y^2 + 18y = 11,$$

obtener la ecuación de la misma curva refiriéndola al punto $(2, -1)$, como nuevo origen.

Sustitúyanse x por $x' + 2$ y y por $y' - 1$; se obtiene:

$$4(x' + 2)^2 - 16(x' + 2) + 9(y' - 1)^2 + 18(y' - 1) = 11.$$

Redúzcase:

$$4x'^2 + 9y'^2 = 36;$$

o sea, suprimiendo los acentos:

$$4x^2 + 9y^2 = 36.$$

113. Rotación de los ejes. Se trata de cambiar la dirección de los ejes sin que cambie el origen.

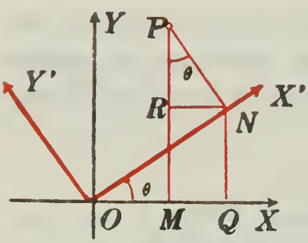


Fig. 85.

Sean θ el ángulo de (OX, OX'), (x, y) las coordenadas del punto P referidas al sistema de ejes OX, OY, y (x', y') las coordenadas del mismo punto referidas al sistema OX'. OY' (figura 85).

Las coordenadas de P en el nuevo sistema son:

$$x' = ON, \qquad y' = NP.$$

Se tiene:

$$x = OM = OQ - RN = x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta;$$
$$y = MP = QN + RP = x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta.$$

Por tanto, si se conoce la ecuación de una línea referida a un sistema de ejes, puede hallarse la ecuación de la misma línea referida a otro sistema de ejes tales que formen con los primeros un ángulo determinado θ, sustituyendo x y y, respectivamente, por $x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta$, y $x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta$, en la ecuación dada.

114. Aplicación. Dada la ecuación $x^2 - y^2 = 16$, obtener la ecuación de la misma curva, refiriéndola a otro sistema, cuyos ejes forman un ángulo de $45°$ con los primeros.

Sustitúyase x por $x' \cos 45° - y' \operatorname{sen} 45°$,
y por $x' \operatorname{sen} 45° + y' \cos 45°$.

Se obtiene:

$$(x' \cos 45° - y' \operatorname{sen} 45°)^2 - (x' \operatorname{sen} 45° + y' \cos 45°)^2 = 16.$$

Siendo $\cos 45° = \operatorname{sen} 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, resulta, sucesivamente:

$$\frac{1}{2}(x'^2 - 2x'y' + y'^2) - \frac{1}{2}(x'^2 + 2x'y' + y'^2) = 16,$$

$$2x'y' = -16,$$

$$x'y' = -8,$$

o, suprimiendo los acentos:

$$xy = -8.$$

115. Manera de hacer desaparecer el término en xy en la ecuación de las cónicas. Si en la ecuación general

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (1)$$

se reemplazan las coordenadas (x, y) por $x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta$, $x \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta$, respectivamente, y se desarrolla, sólo los tres primeros términos de (1) darán lugar a otros términos en $x'y'$, a saber:

$$-2Ax'y' \operatorname{sen}\theta \cos\theta - Bx'y' \operatorname{sen}^2\theta + Bx'y' \cos^2\theta + 2Cx'y' \operatorname{sen}\theta \cos\theta;$$

o sea, factorizando:

$$x'y'(C - A)2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta + x'y'B(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta). \qquad (2)$$

Teniendo presente que

$$2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta = \operatorname{sen} 2\theta,$$

$$\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = \cos 2\theta,$$

se obtiene, sustituyendo en (2) y poniendo $x'y'$ en factor común:

$$x'y'[(C - A) \operatorname{sen} 2\theta + B \cos 2\theta].$$

Para que este término se anule, basta que el factor

$$(C - A)\operatorname{sen} 2\theta + B\cos 2\theta$$

sea cero, es decir:

$$B\cos 2\theta = (A - C)\operatorname{sen} 2\theta;$$

de donde:
$$\tan 2\theta = \frac{B}{A-C}.$$

Para que en la ecuación (1) desaparezca el término en xy bastará, por tanto, hacer una rotación de ejes de un ángulo θ tal que la tangente del duplo de ese ángulo tenga el valor hallado.

Conocida $\tan 2\theta$, se determinan $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$, tomando 2θ menor que $180°$, y se hace la sustitución, según se ha dicho, y como se aclara a continuación.

116. Aplicaciones. Transformar las siguientes ecuaciones, haciendo desaparecer el término en xy.

1ª $x^2 - 2xy + y^2 - 8x - 8y + 32 = 0.$

Se tiene:

$$\tan 2\theta = \frac{-2}{1-1} = \infty; \text{ luego: } 2\theta = 90°; \ \theta = 45°.$$

Hágase la sustitución:

$$x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y');$$

$$y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y').$$

Resulta:

$$\begin{aligned}
x^2 &= \tfrac{1}{2}x'^2 - x'y' + \tfrac{1}{2}y'^2,\\
-2xy &= -x'^2 \qquad\quad + y'^2,\\
y^2 &= \tfrac{1}{2}x'^2 + x'y' + \tfrac{1}{2}y'^2,\\
-8x &= \qquad\qquad\qquad\qquad -4\sqrt{2}x' + 4\sqrt{2}y',\\
-8y &= \qquad\qquad\qquad\qquad -4\sqrt{2}x' - 4\sqrt{2}y',\\
+32 &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +32.
\end{aligned}$$

Sumando ordenadamente y reduciendo, se obtiene:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 8x - 8y + 32 = 2y'^2 - 8\sqrt{2}x' + 32 = 0;$$

o, dividiendo entre 2: $\qquad = y'^2 - 4\sqrt{2}x' - 16 = 0;$

o sea: $\qquad y'^2 = 4\sqrt{2}(x' - 2\sqrt{2}),$

que es la ecuación de una parábola de vértice $V(2\sqrt{2}, 0)$ y de foco $F(3\sqrt{2}, 0)$, (fig. 86).

Las coordenadas del vértice y del foco, en el sistema XOY, son:

$$x_v = y_v = OP = OV \cos 45°$$
$$= 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2;$$
$$x_F = y_F = OQ = OF \cos 45°$$
$$= 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3.$$

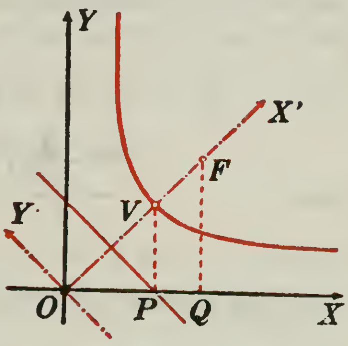


Fig. 86.

2ª $8x^2 - 4xy + 5y^2 - 20x - 22y + 17 = 0.$

Procediendo en forma análoga, se obtiene:

$$\tan 2\theta = \frac{-4}{8-5} = -\frac{4}{3}.$$

Falta determinar $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$. Para ello se necesita expresar primero $\tan\theta$ en función de $\tan 2\theta$, y luego deducir $\operatorname{sen}\theta$ y $\cos\theta$.

Se tiene: $$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = -\frac{4}{3};$$

de donde: $$2\tan^2\theta - 3\tan\theta - 2 = 0.$$

Resuélvase esta ecuación y tómese 2θ menor que $180°$, según se ha dicho; se obtiene:

$$\tan\theta = 2; \quad \text{por tanto:} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Hágase ahora la sustitución:

$$x = x'\frac{1}{\sqrt{5}} - y'\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - 2y');$$
$$y = x'\frac{2}{\sqrt{5}} + y'\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y').$$

La ecuación dada se transforma en la siguiente:

$$4x'^2 - \frac{64x'}{\sqrt{5}} + 9y'^2 + \frac{18y'}{\sqrt{5}} + 17 = 0,$$

en que el término independiente, 17, no ha cambiado de valor.

Para ver cuál es el lugar representado por la ecuación, aplíquense los principios estudiados, y se obtiene sucesivamente, después de suprimir los acentos:

$$4\left(x^2 - \frac{16x}{\sqrt{5}} + \frac{64}{5}\right) + 9\left(y^2 + \frac{2y}{\sqrt{5}} + \frac{1}{5}\right) = -17 + \frac{256}{5} + \frac{9}{5} = 36,$$

o sea:
$$\frac{\left(x - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2}{9} + \frac{\left(y + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}{4} = 1,$$

ecuación de una elipse en que $a = 3$, $b = 2$ y cuyo centro, referido a los nuevos ejes, OX', OY', es: $C\left(\frac{8}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, (fig. 87).

Las coordenadas del centro, en el sistema XOY son: $C(OH, HC)$.

Para referir las coordenadas del punto C, al sistema XOY, basta aplicar las fórmulas: $x = x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta$, etc. Se tiene:

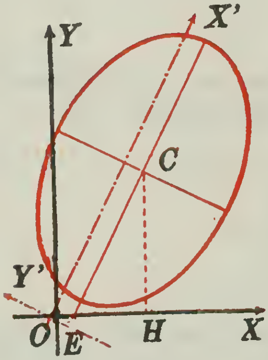


Fig. 87.

$$x_C = x_C' \cos\theta - y_C' \operatorname{sen}\theta,$$
$$x_C = x_C' \operatorname{sen}\theta + y_C' \cos\theta,$$

o sea: $x_C = \frac{8}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{2}{\sqrt{5}}$
$$= \frac{8}{5} + \frac{2}{5} = 2;$$
$$y_C = \frac{8}{\sqrt{5}} \times \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$= \frac{16}{5} - \frac{1}{5} = 3,$$

que son las coordenadas del centro de la elipse considerada en el Nº 88.

EJERCICIO 16

Transfórmense las ecuaciones siguientes, refiriéndolas a un sistema de ejes paralelos a los primeros, tomando O' como nuevo origen de coordenadas.

1. $2x + 3y + 2 = 0;$ $O'(3, -5)$.
2. $y^2 + 8y - 8x + 40 = 0;$ $O'(3, -4)$.
3. $x^2 - 10x + y^2 + 4y = 7;$ $O'(5, -2)$.
4. $4x^2 + 24x + 9y^2 - 36y + 36 = 0;$ $O'(-3, 2)$.
5. $5x^2 - 40x - 4y^2 - 8y + 56 = 0;$ $O'(4, -1)$.

Transfórmense las siguientes ecuaciones de modo que desaparezca el término en x en el Nº 6 y el término en y en el Nº 7:

6. $x^2 + 6x - 4y + 29 = 0.$

7. $y^2 - 4y - 6x - 2 = 0.$

Háganse desaparecer los términos de primer grado:

8. $3x^2 - 6x + 5y^2 + 20y + 8 = 0.$

9. $4x^2 + 24x - 9y^2 + 36y = 36.$

Transfórmense las siguientes ecuaciones, imprimiendo a los ejes una rotación de un ángulo positivo θ, según se indica, sin cambiar el origen:

10. $x^2 + y^2 = 25;$ $\qquad \theta = 45°.$

11. $x^2 - y^2 = 8;$ $\qquad \theta = 45°.$

12. $4xy - 3x^2 = 16;$ $\qquad \theta = \text{áng tan } 2.$

13. $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 16y + 23 = 0;$ $\qquad \theta = 45°.$

14. $5y^2 - 12xy + 22y + 24x - 55 = 0;$ $\qquad \theta = \text{áng tan } \frac{2}{3}.$

15. $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 36 = 0;$ $\qquad \theta = \text{áng tan } \left(-\frac{1}{2}\right).$

Transfórmense las ecuaciones siguientes en otras que carezcan del término en xy:

16. $xy = 4.$

17. $x^2 + 4xy + y^2 + 5 = 0.$

18. $4x^2 + 4xy + y^2 - 5x - 6y - 3 = 0.$

19. $2x^2 + 4xy + 2y^2 - 3x + y + \frac{3}{8} = 0.$

Transfórmense las siguientes ecuaciones en otras que carezcan del término en xy y de los términos de primer grado.

20. $17x^2 + 8xy + 2y^2 + 24\sqrt{17}x - 4\sqrt{17}y - \frac{274}{9} = 0.$

21. $x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 24x - 8\sqrt{3}y + 16\sqrt{3} = 0.$

22. Dada la ecuación $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}$, transfórmese dos veces: reduciéndola primero a la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

y luego a otra que no contenga el término en xy.

5

TANGENTES Y NORMALES A LAS CONICAS

I. TANGENTE Y NORMAL A LA CIRCUNFERENCIA

117. Pendiente de la tangente a la circunferencia.
1er *Procedimiento.* Sean $x^2 + y^2 = r^2$ la ecuación de una circunferencia, y $T(x_1, y_1)$ el punto de tangencia (fig. 88).

La pendiente m de la tangente y la del radio OT son recíprocas y de signos contrarios; por tanto:

$$m = -\frac{x_1}{y_1}.$$

2º *Procedimiento.* — El método que se ha seguido para obtener la pendiente de la tangente a la circunferencia en función de las coordenadas del punto de tangencia, tiene el inconveniente de no ser aplicable a una curva cualquiera.

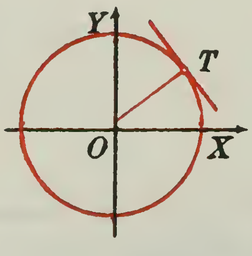


Fig. 88.

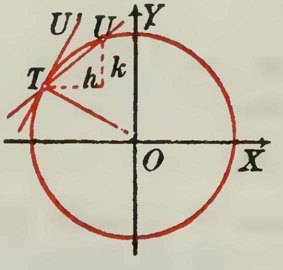


Fig. 89.

Hay otro, que se funda en la definición de la tangente a una curva, a saber: *tangente a una curva es el límite de las posiciones sucesivas de una secante, uno de cuyos puntos permanece fijo en la curva y el otro se acerca indefinidamente al primero hasta confundirse con él.*

Sean, como antes, $x^2 + y^2 = r^2$ la ecuación de una circunferencia, y $T(x_1, y_1)$ el punto de tangencia.

Considérese otro punto $U(x_1+h, y_1+k)$. La pendiente de la secante TU es $\frac{k}{h}$ (fig. 89).

Para expresar esta pendiente en función de x_1, y_1, h y k, basta considerar que U y T son de la circunferencia.

Se tiene:
$$(x_1+h)^2+(y_1+k)^2=r^2, \qquad (1)$$
$$x_1^2+y_1^2=r^2. \qquad (2)$$

Desarróllese (1) y luego réstesele (2); se obtiene:

$$2x_1h+h^2+2y_1k+k^2=0.$$

Divídase entre h y despéjese $\frac{k}{h}$:

$$\frac{k}{h}=-\frac{2x_1+h}{2y_1+k}.$$

Si U se acerca indefinidamente a T, la secante TU estará, en su posición límite, en TU'. Entonces h y k habrán tendido ambas a cero, y para tener la pendiente de la tangente bastará hacer tender h y k a cero en la expresión que representa la pendiente de la secante TU.

Se puede, por tanto, escribir:

$$m=\lim_{h,k\to 0}\frac{k}{h}=-\frac{2x_1}{2y_1}=-\frac{x_1}{y_1},$$

resultado idéntico al obtenido precedentemente.

118. Ecuación de la tangente a la circunferencia. Sean $x^2+y^2=r^2$ la circunferencia, y $T(x_1, y_1)$ el punto de tangencia.

La ecuación pedida es la de una recta de pendiente m y que se apoya en un punto. Su ecuación es de la forma

$$y-y_1=m(x-x_1).$$

Sustitúyase m por el valor hallado antes y dése forma entera:

$$y_1y-y_1^2=-x_1x+x_1^2,$$

o sea:
$$x_1x+y_1y=x_1^2+y_1^2. \qquad (1)$$

El punto T es de la circunferencia; luego, sus coordenadas satisfacen la ecuación; por tanto:

$$x_1^2+y_1^2=r^2.$$

Sustituyendo este valor en (1) se obtiene

$$x_1x + y_1y = r^2$$

como ecuación de la tangente a una circunferencia referida a su centro.

119. Normal. *La perpendicular a la tangente a una curva en el punto de tangencia, se llama normal.*

120. Ecuación de la normal a la circunferencia. La ecuación de la normal a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, en el punto $T(x_1, y_1)$, es, designando por m la pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1). \qquad (1)$$

Pero la pendiente de la normal y la de la tangente son recíprocas y de signos contrarios, debido a la perpendicularidad de las dos rectas; luego, la pendiente de la normal es:

$$m = \frac{y_1}{x_1}.$$

Sustitúyase este valor en (1) y redúzcase; se obtiene:

$$x_1y = y_1x.$$

No hay ordenada al origen; efectivamente, la normal a una circunferencia es un radio.

121. Ecuación de la tangente a una circunferencia cualquiera. Sea $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ la ecuación de una circunferencia de centro $C(\alpha, \beta)$, y $T(x_1, y_1)$ el punto de tangencia (fig. 90).

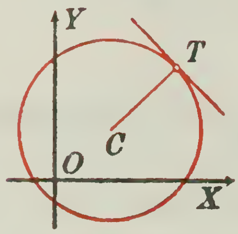


Fig. 90.

La pendiente de CT es:

$$\frac{y_1 - \beta}{x_1 - \alpha};$$

la pendiente m de la tangente en T es:

$$-\frac{x_1 - \alpha}{y_1 - \beta};$$

por tanto, la ecuación buscada es:

$$y - y_1 = -\frac{x_1 - \alpha}{y_1 - \beta}(x - x_1).$$

122. Ecuación de la tangente a una circunferencia, desde un punto exterior a la curva. Si se conocen las coordenadas de un punto exterior a una circunferencia, puede obtenerse la ecuación de la recta que pasa por ese punto y es tangente a la curva, determinando primeramente las coordenadas del punto de tangencia, como se indica a continuación.

Sean $x^2 + y^2 = r^2$ la ecuación de una circunferencia, $P(x_0, y_0)$ un punto exterior, y (x_1, y_1) las coordenadas del punto de tangencia T por determinar.

La ecuación de la tangente en T es:

$$x_1x + y_1y = r^2. \qquad (1)$$

Por ser P de la tangente, sus coordenadas satisfacen (1); por tanto:

$$x_0x_1 + y_0y_1 = r^2. \qquad (2)$$

Por ser T de la circunferencia, se tiene:

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2. \qquad (3)$$

Resolviendo el sistema de (2) y (3) quedan determinadas (x_1, y_1), y sustituyendo sus valores en (1), se obtiene la ecuación pedida.

123. Aplicación. Obténgase la ecuación de la recta que se apoya en $P(7, 11)$ y es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 34$.

Según se ha indicado, se forma el sistema

$$7x_1 + 11y_1 = 34, \qquad (1)$$

$$x_1^2 + y_1^2 = 34. \qquad (2)$$

De (1) se obtiene: $x_1 = \dfrac{-11y_1 + 34}{7}$.

Sustitúyase este valor en (2) y redúzcase:

$$170y_1^2 - 748y_1 - 510 = 0;$$

$$5y_1^2 - 22y_1 - 15 = 0. \qquad (3)$$

Resuélvase (3): $y_1 = \dfrac{11 \pm \sqrt{121 + 75}}{5} = \dfrac{11 \pm 14}{5}$;

de donde: $y_1' = 5$; $\qquad y_1'' = -\frac{3}{5}$;

$$x_1' = \frac{-55+34}{7} = -3; \qquad x_1'' = \frac{33+170}{35} = \frac{29}{5}.$$

Hay dos puntos de tangencia: $T(-3, 5)$ y $T'\left(\frac{29}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

En efecto, desde un punto exterior a una circunferencia, se le pueden trazar dos tangentes.

Llevando los valores de las coordenadas de T y T' a la ecuación $x_1x + y_1y = r^2$, se obtiene:

Ecuación de la tangente en T: $\quad 5y - 3x = 34.$

Ecuación de la tangente en T': $\quad 29x - 3y = 170.$

124. Subtangente. *La subtangente* ST *es el segmento limitado del pie de la ordenada del punto de tangencia a la intersección de la tangente con el eje de las abscisas* (fig. 91).

125. Subnormal. *La subnormal* SN *es el segmento limitado del pie de la ordenada del punto de tangencia a la intersección de la normal con el eje de las abscisas* (fig. 91).

Por convención: Si la subtangente está a la *derecha* del punto *S*, se considera *positiva* y *negativa*, si queda a la *izquierda*.

Igual cosa sucede con la subnormal.

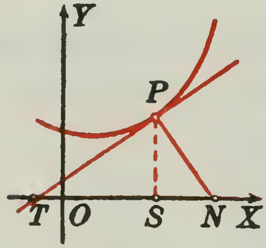


Fig. 91.

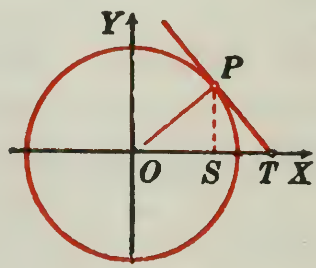


Fig. 92.

126. Subtangente y subnormal en la circunferencia. Sean $x^2 + y^2 = r^2$ la ecuación de la circunferencia, y $P(x_1, y_1)$ el punto de tangencia (fig. 92).

Subtangente: $\qquad ST = OT - OS. \qquad (1)$

Por ser el punto $T(x, 0)$ de la tangente, sus coordenadas satisfacen la ecuación

$$x_1x + y_1y = r^2;$$

por tanto: $$x = \frac{r^2}{x_1} = OT;$$

además, $$OS = x_1.$$

Sustitúyanse OT y OS en (1); se obtiene:

$$\text{Subtangente} = \frac{r^2}{x_1} - x_1 = \frac{r^2 - x_1^2}{x_1} = \frac{y_1^2}{x_1};$$

$$\text{Subnormal} \quad = OS = x_1.$$

Nota. Los resultados anteriores sólo son ciertos para una circunferencia referida a su centro; pero para el cálculo de la subtangente y de la subnormal pueden obtenerse fórmulas generales, es decir, aplicables a una circunferencia cualquiera, lo mismo que a una parábola, elipse, hipérbola, etc.

En los triángulos rectángulos PST y PSN (fig. 91), se tiene, respectivamente:

$$TS = SP \cot PTS = \frac{SP}{\tan PTS} = \frac{y_1}{m};$$

$$SN = SP \tan SPN = SP \times \tan PTS = my_1.$$

127. Ecuación de la tangente, dada la pendiente. Conocida la ecuación de una circunferencia, puede obtenerse la ecuación de la tangente si se conoce su pendiente.

EJEMPLO. Obténgase la ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 20$, dada la pendiente $m = 2$.

Sean (x_1, y_1) las coordenadas del punto de tangencia.

Se tiene: $$m = 2 = -\frac{x_1}{y_1}, \quad y_1 = -\frac{x_1}{2}; \qquad (1)$$

además: $$x_1^2 + y_1^2 = 20. \qquad (2)$$

La resolución del sistema de (1) y de (2) da:

$$x_1' = 4, \qquad x_1'' = -4;$$

de donde:

$$y_1' = -2, \qquad y_1'' = 2.$$

Hay dos puntos de tangencia: $T(4, -2)$ y $T'(-4, 2)$, (fig. 93).

Las ecuaciones son:

$$2x - y = 10; \qquad y - 2x = 10.$$

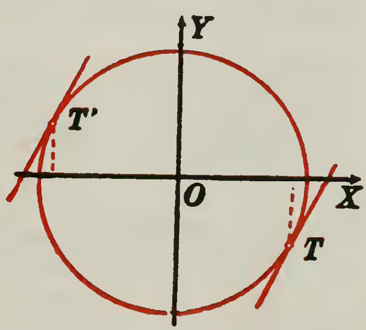


Fig. 93.

128. Observación. Puede llegarse al mismo resultado siguiendo otro procedimiento.

La ecuación de la recta de pendiente m y tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, es de la forma

$$y = mx + c, \qquad (1)$$

en que c es una constante por determinar.

Las coordenadas de $T(x_1, y_1)$ satisfacen simultáneamente la ecuación (1) y la de la circunferencia; se tiene:

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2; \qquad (2)$$

$$y_1 = mx_1 + c. \qquad (3)$$

Resuélvase el sistema de (2) y (3):

$$x_1 = -\frac{mc}{1+m^2} \pm \frac{1}{1+m^2}\sqrt{r^2(1+m^2) - c^2}.$$

Para que la recta sea tangente, se necesita y basta que x_1 tenga un solo valor, es decir, que el radicando sea cero, o sea:

$$c = \pm r\sqrt{1+m^2};$$

resultado que, sustituído en (1), da:

$$y = mx \pm r\sqrt{1+m^2},$$

ecuaciones de dos tangentes paralelas.

Sustitúyanse r^2 y m por los valores del ejemplo anterior; se obtiene: $y = 2x \pm 10.$

129. Aplicación. Obténgase la ecuación del lugar de los puntos desde donde se pueden trazar pares de tangentes perpendiculares entre sí, a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$.

Sea $M(x_0, y_0)$ un punto del lugar buscado.

La ecuación de la tangente de pendiente m a la circunferencia es, según lo visto, de la forma

$$y = mx + r\sqrt{1+m^2}; \qquad (1)$$

y la de la otra tangente, perpendicular a ésta, es:

$$y = -\frac{1}{m}x + \frac{r}{m}\sqrt{1+m^2};$$

o sea: $$my = -x + r\sqrt{1+m^2}. \qquad (2)$$

Por ser M de ambas tangentes, sus coordenadas satisfacen (1) y (2); por tanto:

$$y_0 = mx_0 + r\sqrt{1+m^2}; \qquad (3)$$

$$my_0 = -x_0 + r\sqrt{1+m^2}. \qquad (4)$$

Para que no figure la pendiente m, aíslese el radical en (3) y (4) y elévese al cuadrado:

$$y_0^2 - 2mx_0y_0 + m^2x_0^2 = r^2(1+m^2);$$

$$m^2y_0^2 + 2mx_0y_0 + x_0^2 = r^2(1+m^2).$$

Súmese: $(1+m^2)y_0^2 + (1+m^2)x_0^2 = 2r^2(1+m^2)$.

Divídanse ambos miembros entre $(1+m^2)$:

$$x_0^2 + y_0^2 = 2r^2,$$

o, suprimiendo los índices:

$$x^2 + y^2 = 2r^2.$$

Esta ecuación es la de una circunferencia, concéntrica con la primera, y de radio igual al lado del cuadrado inscrito en la circunferencia dada.

130. Longitud de la tangente. Sea PT la tangente trazada desde un punto exterior $P(x_1, y_1)$ a la circunferencia de centro $C(\alpha, \beta)$. Por el triángulo rectángulo CTP (fig. 94), se puede escribir:

$$\overline{PT}^2 = \overline{PC}^2 - \overline{CT}^2;$$

de donde: $PT = \sqrt{\overline{PC}^2 - \overline{CT}^2}$;

o sea: $PT = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - r^2}$.

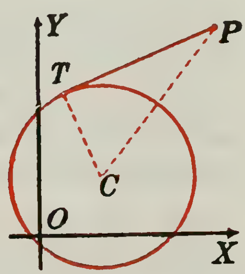


Fig. 94.

131. Potencia de un punto. Si desde un punto P se trazan varias secantes, el producto de cada una por su parte externa es constante e igual al cuadrado de la tangente trazada desde dicho punto P. *A este producto constante se llama potencia del punto* P *con respecto a la circunferencia.*

132. Eje radical de dos circunferencias. *Eje radical de dos circunferencias es el lugar de los puntos equipotenciales con respecto a esas circunferencias;* es decir, lugar desde cuyos puntos se pueden trazar a las circunferencias consideradas, dos tangentes iguales.

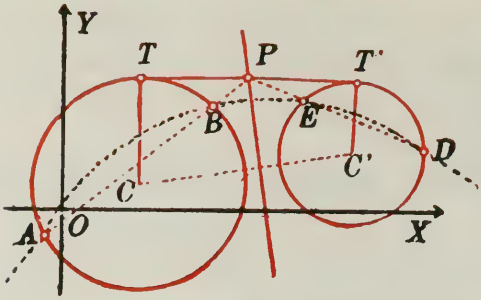


Fig. 95.

Sean $P(x, y)$ un punto del eje radical, $C(\alpha, \beta)$, $C'(\gamma, \delta)$ los centros de las circunferencias, a y b sus respectivos radios (fig. 95).

Si T y T' son los puntos de tangencia, se tiene:

$$\overline{PT}^2 = \overline{PT'}^2;$$

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - a^2 = (x - \gamma)^2 + (y - \delta)^2 - b^2.$$

Desarróllese y redúzcase:

$$-2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - a^2 = -2\gamma x - 2\delta y + \gamma^2 + \delta^2 - b^2;$$

$$2(\gamma - \alpha)x + 2(\delta - \beta)y = \gamma^2 + \delta^2 - \alpha^2 - \beta^2 + a^2 - b^2;$$

ecuación de primer grado con dos variables; luego, el eje radical es una recta.

La pendiente del eje radical es $-\frac{\gamma - \alpha}{\delta - \beta}$, y la de la recta que une los centros C y C' es $\frac{\delta - \beta}{\gamma - \alpha}$; síguese, por tanto, que el eje radical es perpendicular a la recta que une los centros.

Si dos circunferencias son tangentes exteriormente, la tangente común es el eje radical. Si dos circunferencias son secantes, la cuerda común es el eje radical.

133. Construcción geométrica. Para obtener el eje radical de dos circunferencias, córtense por una tercera. Trácense luego las cuerdas comunes a cada una de las dos primeras y a la circunferencia secante. El punto P de intersección pertenece al eje radical (fig. 95).

En efecto: $$PA \times PB = \overline{PT}^2;$$

$$PD \times PE = \overline{PT'}^2;$$

por tanto: $$PT^2 = PT'^2.$$

La perpendicular trazada desde el punto P a la recta de los centros, es el eje radical.

134. Centro radical. Sean $C(\alpha, \beta)$, $C'(\gamma, \delta)$, $C''(\varepsilon, \zeta)$ los centros de tres circunferencias, y

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-a^2=0, \qquad (1)$$
$$(x-\gamma)^2+(y-\delta)^2-b^2=0, \qquad (2)$$
$$(x-\varepsilon)^2+(y-\zeta)^2-c^2=0, \qquad (3)$$

sus respectivas ecuaciones.

Supóngase que el eje radical de (1) y de (2) corte al eje radical de (2) y de (3) en P (fig. 96).

Siendo así, las tangentes PT y PT', trazadas de P a (1) y (2) son iguales, y lo son también PT' y PT'' trazadas de P a (2) y (3).

Resulta, por tanto, que:

$$PT = PT' = PT'';$$

es decir, que el punto P pertenece al eje radical de (1) y (3).

El punto en que concurren los tres ejes radicales, se llama centro radical.

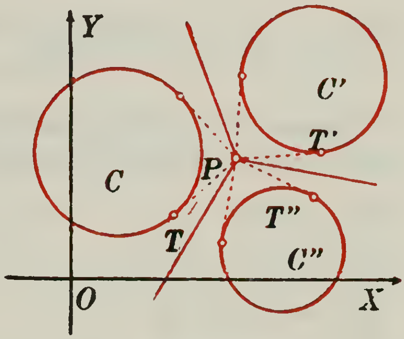


Fig. 96.

Nota. Si los centros de las tres circunferencias no están alineados, hay un solo punto equipotencial para las 3 curvas, perfectamente determinado.

Si los tres centros están alineados, los ejes radicales son paralelos.

Si varias circunferencias tienen una cuerda común, hay una infinidad de puntos equipotenciales.

EJERCICIO 17

Obténganse las ecuaciones de las tangentes y normales a las circunferencias siguientes, dado el punto de tangencia T:

1. $x^2+y^2=25$, $T(4, 3)$.	**4.** $x^2+y^2=20$, $T(4, -2)$.
2. $x^2+y^2=169$, $T(-12, 5)$.	**5.** $x^2+y^2=289$, $T(-8, 15)$.
3. $x^2+y^2=13$, $T(2, 3)$.	**6.** $x^2+y^2=74$, $T(-7, -5)$.

7. $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 7, \quad T(4, -7).$

8. $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 20, \quad T(3, -1).$

9. ¿Cuál es la longitud de la subtangente y de la subnormal en las circunferencias de los Nos 1, 2, 7 y 8 de este ejercicio?

10. Siguiendo un procedimiento análogo al del Nº 117, hágase ver que la pendiente de la tangente a la circunfer ncia

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2, \quad \text{es} \quad m = -\frac{x_1-\alpha}{y_1-\beta}.$$

11. Verifíquese que si $r = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$, la recta $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$.

12. ¿En qué punto es tangente a cada eje la circunferencia $x^2 - 8x + y^2 - 8y + 16 = 0$?

Obténganse las ecuaciones de las tangentes trazadas a las circunferencias siguientes, dado el punto P exterior a ellas:

13. $x^2 + y^2 = 25, \qquad P(7, 1).$

14. $x^2 + y^2 = 100, \qquad P(14, 2).$

15. $x^2 + y^2 = 34, \qquad P(-2, 8).$

16. $(x+1)^2 + (y+5)^2 = 40, \quad P(9, 5).$

17. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 34, \quad P(4, 7).$

Obtener la ecuación de la tangente a:

18 $x^2 + y^2 = 10$, y paralela a la recta $y = 3x + 1$.

19. $x^2 + y^2 = 5$, y perpendicular a la recta $2y + x = 7$.

20. $x^2 + y^2 = 4$, y paralela a $y - 2x + 3 = 0$.

21. $4(x^2 + y^2) = 5x$, y paralela a $x + y = 6$.

22. $x^2 + y^2 = 27$, y forma un ángulo de $60°$ con $X'X$.

23. $x^2 + y^2 = 6$, y perpendicular a la recta que se apoya en $(-2, 3)$ y $(7, 6)$.

24. En una circunferencia referida a su centro como origen, la subtangente es 7 y la subnormal es 4. Obténgase la ecuación de la circunferencia.

25. Obténgase la ecuación de la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, partiendo de la fórmula $y = mx + b$, sustituyendo m y b, $(b = OB)$, en función de (x_1, y_1), (fig. 97).

26. ¿Qué valor debe tener r para que la recta $y = 3x + 5$ resulte tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$?

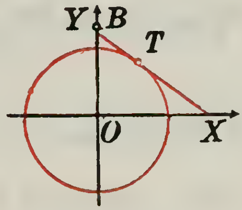


Fig. 97.

27. Dada la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, obténgase la ecuación de la tangente que forma con los ejes cartesianos un triángulo cuya área es r^2.

28. Verificar que si d es la distancia de un punto exterior al centro de una circunferencia, la potencia de ese punto es $d^2 - r^2$.

29. ¿Cuál es la potencia del punto $A(2, 7)$ con respecto a la circunferencia de centro $C(-6, 4)$ y radio igual a 5?

30. ¿Cuál es la longitud de la tangente trazada desde el punto $B(7, 5)$ a la circunferencia $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$?

Hállese el eje radical de las circunferencias:

31. $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 7$,
$x^2 + y^2 - 6x - 3y = 5$.

32. $(x - 7)^2 + (y - 3)^2 = 9$,
$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$.

Hállese el centro radical de:

33. $(x - 3)^2 + y^2 = 5$,
$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 7$,
$(x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 9$.

34. $(x - 5)^2 + (y - 7)^2 = 5$,
$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 1$,
$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$.

II. TANGENTE Y NORMAL A LA PARABOLA

135. Pendiente de la tangente. Sean $y^2 = 4px$ la ecuación de la parábola, y $T(x_1, y_1)$ el punto de tangencia (fig. 98).

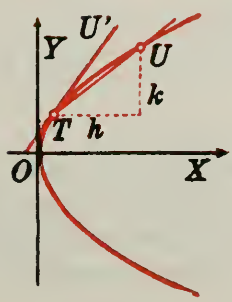


Fig. 98.

Considérese otro punto $U(x_1+h, y_1+k)$ de la curva. Por consideraciones análogas a las que se hicieron para determinar la pendiente de la tangente a la circunferencia, se tiene, para el caso de una parábola:

$$m = \lim_{h, k \to 0} \frac{k}{h}.$$

Siendo U y T de la parábola, puede escribirse:

$$(y_1 + k)^2 = 4p(x_1 + h); \qquad (1)$$

$$y_1^2 = 4px_1. \qquad (2)$$

Desarróllese (1) y luego résteseie (2); resulta:

$$2y_1k + k^2 = 4ph;$$

de donde:
$$m = \lim_{h,\,k \to 0} \frac{k}{h} = \frac{2p}{y_1}.$$

136. Ecuación de la tangente. La ecuación es de la forma

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

Sustitúyase m por el valor hallado:

$$y - y_1 = \frac{2p}{y_1}(x - x_1).$$

Désele forma entera, efectúese, sustitúyase y_1^2 por $4px_1$ y redúzcase; se obtiene:

$$\boldsymbol{yy_1 = 2p(x + x_1).}$$

137. Ecuación de la normal. La ecuación de la normal es también de la forma

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

La pendiente es:
$$m = -\frac{y_1}{2p};$$

por tanto:
$$\boldsymbol{y - y_1 = -\frac{y_1}{2p}(x - x_1)}$$

es la ecuación de la normal.

138. Intersección de la tangente con $X'X$ y trazado de la tangente. Sea $T(x, 0)$ el punto de la intersección de la tangente a la parábola con $X'X$ (fig. 99). Sus coordenadas satisfacen la ecuación

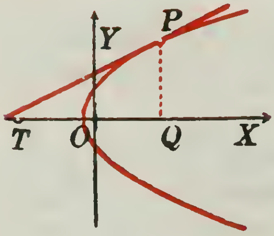


Fig. 99.

$$y_1y = 2p(x + x_1);$$

por tanto: $0 = 2p(x + x_1)$;

de donde: $x = -x_1$.

Se infiere que para trazar la tangente a la parábola, dado $P(x_1, y_1)$ como punto de tangencia, basta tomar una abscisa de signo contrario al de x_1, o sea, determinar $T(-x_1, 0)$ y unir este punto con el punto P.

139. Ecuación de la tangente a una parábola, desde un punto exterior a la curva. Si se conocen las coordenadas de un punto exterior a una parábola, pueden obtenerse las coordenadas del punto de tangencia determinado por la recta apoyada en aquel punto y tangente a la parábola.

Sean $y^2 = 4px$ la ecuación de la parábola, $P(x_0, y_0)$ un punto exterior y (x_1, y_1) las coordenadas del punto de tangencia T.

La ecuación de la tangente en T es:

$$y_1 y = 2p(x + x_1). \qquad (1)$$

Por ser T de la parábola y P de la tangente, se tiene, sucesivamente:

$$y_1^2 = 4px_1, \qquad (2)$$

$$y_0 y_1 = 2p(x_0 + x_1). \qquad (3)$$

Resolviendo el sistema de (2) y (3) se determinan x_1, y_1, y sustituyendo sus valores en (1), se obtiene la ecuación pedida.

140. Aplicación. Obténgase la ecuación de la recta apoyada en $P(-4, 1)$ y tangente a la parábola $y^2 = 6x$.

Según lo expuesto, se tiene, sucesivamente:

$$y_1^2 = 6x_1; \qquad (1)$$

$$y_1 = 3(-4 + x_1). \qquad (2)$$

Elévese (2) al cuadrado, sustitúyase y redúzcase:

$$3x_1^2 - 26x_1 + 48 = 0;$$

$$x_1 = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{3} = \frac{13 \pm 5}{3};$$

de donde:

$$x_1' = 6; \qquad x_1'' = \frac{8}{3};$$

$$y_1' = 6; \qquad y_1'' = -4.$$

Este resultado evidencia que hay dos puntos de tangencia: $T(6, 6)$, y $T'\left(\frac{8}{3}, -4\right)$.

Ecuación de la tangente en T: $2y = x + 6$;

" " " " " T': $3x + 4y = 12$.

141. Diámetro y ecuación. Según se ha dicho, *llámase diámetro de una cónica el lugar de los puntos medios de las cuerdas paralelas a una recta dada.*

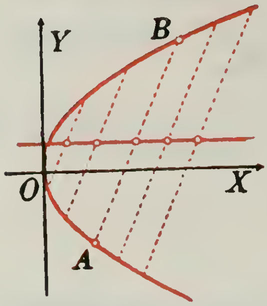


Fig. 100.

Sean $$y^2 = 4px \qquad (1)$$

la ecuación de una parábola, y

$$y = mx + b \qquad (2)$$

la ecuación de una cualquiera de las cuerdas paralelas, AB, por ejemplo (figura 100).

Resolviendo en y el sistema de (1) y (2) se obtienen las ordenadas y_1, y_2, de los extremos de una cuerda, y su semisuma proporciona la ordenada del punto medio.

Despéjese x en (1): $\quad x = \dfrac{y^2}{4p}$;

sustitúyase en (2): $\quad y = m\,\dfrac{y^2}{4p} + b$;

de donde: $\quad my^2 - 4py + 4pb = 0.$

La suma de las raíces de esta ecuación es $\dfrac{4p}{m}$. La ordenada del punto medio de una cuerda es, pues:

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{2p}{m}.$$

resultado independiente de b, es decir, cualquiera que sea la cuerda. Por tanto:

$$y = \frac{2p}{m}$$

es la ecuación del lugar de los puntos medios de las cuerdas paralelas a una dirección dada; es una paralela al eje de simetría de la parábola, pues $2p$ y m son constantes para una parábola dada y una pendiente determinada.

EJERCICIO 18

1. Hágase ver que para obtener la ecuación de la tangente a la parábola $x^2 = 4py$, basta intercambiar las x y las y en la ecuación $y_1 y = 2p(x + x_1)$.

Obténganse las ecuaciones de las tangentes y normales a las parábolas siguientes, dado el punto de tangencia T:

2. $y^2 = 9x$, $T(4, 6)$.
3. $y^2 = 8x$, $T(2, 4)$.
4. $y^2 = 2x$, $T(8, 4)$.
5. $x^2 = 8y$, $T(8, 8)$.

6. Haciendo consideraciones análogas a las que se han hecho en el Nº 135, obténgase $m = \dfrac{2p}{y - b}$ como pendiente de la tangente a la parábola $(y - b)^2 = 4p(x - a)$.

Hállense las ecuaciones de las tangentes y normales trazadas desde T a las parábolas siguientes:

7. $(y - 2)^2 = 8(x + 1)$, $T(7, 10)$.
8. $(y - 4)^2 = 4(x - 3)$, $T(7, 8)$.

9. Obténganse las coordenadas del punto de intersección de la normal a la parábola $y^2 = 4px$ trazada en $T(x_1, y_1)$ con el eje $X'X$. ¿Qué se deduce de este resultado?

10. Obténganse las ecuaciones de las tangentes y normales trazadas a la parábola $y^2 = 4px$ desde las extremidades del lado recto o ancho focal.

11. Hágase ver que el cuadrilátero que se forma con las tangentes y normales del problema anterior es un cuadrado.

12. Compruébese que $y = mx + \dfrac{p}{m}$ es la ecuación de la recta de pendiente m, tangente a la parábola $y^2 = 4px$.

Obténganse las ecuaciones de las tangentes trazadas a las parábolas siguientes, dado el punto P exterior a ellas:

13. $y^2 = 8x$, $P(8, 10)$.
14. $y^2 = 2x$, $P(10, 6)$.

Obténgase la ecuación de la tangente a:

15. $y^2 = 6x$, paralela a $4y = 3x + 20$.
16. $y^2 = 9x$, perpendicular a $2x + 3y = 11$.
17. Hágase ver que la directriz de la parábola $y^2 = 4px$ es el lugar de los puntos desde donde se pueden trazar, a esa curva, pares de tangentes perpendiculares entre sí.

18. Hágase ver que el área del triángulo formado por las tangentes trazadas desde los puntos $T\left(\frac{9}{2}, -6\right)$, $T'(2, 4)$, $T''(8, 8)$ a la parábola $y^2 = 8x$ es la mitad de la del triángulo determinado por los puntos de tangencia.

Hállese la ecuación del diámetro en las parábolas siguientes, según las condiciones que se indican.

19. $y^2 = 5x$; pendiente de las cuerdas $m = 3$.

20. $y^2 = 6x$; las cuerdas son perpendiculares a $3y = 2x + 5$.

21. $y^2 = 6(x + 1)$; las cuerdas son paralelas a $2y - 5x = 7$.

22. Obténgase la ecuación de la cuerda cuyo punto medio es $M(4, 2)$ en la parábola $y^2 = 6x$.

23. ¿Cuáles son las coordenadas del punto medio de la cuerda $3x + 4y = 5$ en la parábola $y^2 = 12x$?

III. TANGENTE Y NORMAL A LA ELIPSE

142. Pendiente de la tangente. Sean $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ la ecuación de una elipse, y $T(x_1, y_1)$ el punto de tangencia (fig. 101).

Considérese otro punto $U(x_1+h, y_1+k)$ de la curva. Por consideraciones análogas a las que se hicieron para obtener la pendiente de la tangente a la circunferencia y a la parábola, se tiene, también en el caso de una elipse:

$$m = \lim_{h,\, k \to 0} \frac{k}{h}.$$

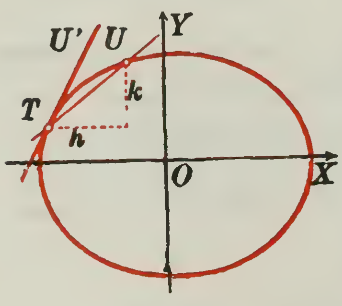


Fig. 101.

Por ser U y T de la elipse, puede escribirse:

$$a^2(y_1 + k)^2 + b^2(x_1 + h)^2 = a^2b^2; \quad (1)$$

$$a^2y_1^2 + b^2x_1^2 = a^2b^2. \quad (2)$$

Desarróllese (1) y réstesele (2); resulta:

$$2a^2y_1k + a^2k^2 + 2b^2x_1h + b^2h^2 = 0.$$

Divídase entre h y despéjese $\frac{k}{h}$:

$$\frac{k}{h} = -\frac{2b^2x_1 + b^2h}{2a^2y_1 + a^2k};$$

de donde:
$$m = \lim_{h,\,k \to 0} \frac{k}{h} = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

143. Ecuación de la tangente. Sustituyendo este último valor en la ecuación

$$y - y_1 = m(x - x_1),$$

se obtiene:
$$y - y_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1).$$

Désele forma entera, luego pásense los términos que contienen las variables al primer miembro y las constantes al segundo:

$$b^2x_1x + a^2y_1y = a^2y_1^2 + b^2x_1^2.$$

Sustitúyase $a^2y_1^2 + b^2x_1^2$ por a^2b^2, y luego divídase entre esta misma cantidad: se obtiene la ecuación pedida:

$$\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1.$$

144. Ecuación de la normal. La ecuación de la normal es también de la forma

$$y - y_1 = m(x - x_1);$$

y la pendiente:
$$m = \frac{a^2y_1}{b^2x_1};$$

por tanto:
$$y - y_1 = \frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1).$$

es la ecuación de la normal a la elipse.

145. Intersección de la tangente y normal con $X'X$. Sea $T(x, 0)$ el punto de intersección de la tangente a la elipse con $X'X$ (fig. 102).

Sus coordenadas satisfacen la ecuación de la tangente

$$\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1;$$

por tanto:
$$\frac{x_1x}{a^2} = 1;$$

de donde:
$$x = \frac{a^2}{x_1}.$$

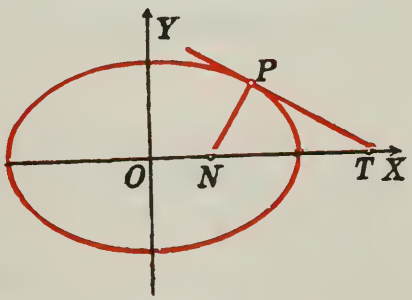


Fig. 102.

Sea ahora $N(x, 0)$ el punto de intersección de la normal a la elipse con $X'X$. Sus coordenadas satisfacen la ecuación de la normal

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1).$$

Sustitúyase y por 0; luego divídase entre y_1, y despéjese x; se obtiene:

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x_1 = \frac{c^2}{a^2} x_1;$$

$$x = c^2 x_1.$$

146. Círculo principal y trazado de la tangente. *Llámase círculo principal de una elipse el que tiene su centro en el centro de la curva y su diámetro es igual al eje focal.*

Si se consideran dos puntos correspondientes, es decir, de igual abscisa, situados uno en la elipse y otro en el círculo principal, y desde cada uno se traza una tangente a la curva correspondiente, las dos tangentes concurren en el mismo punto T del eje $X'X$ de abscisa $x = \frac{a^2}{x_1}$ (Nos 126 y 145).

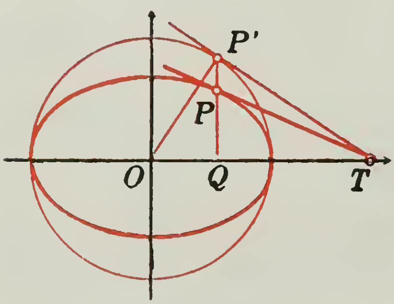


Fig. 103.

Dedúcese de esto un procedimiento para trazar una tangente a una elipse por un punto P de la curva. Descríbase el círculo principal de la elipse y determínese en él el punto P' correspondiente al de tangencia dado en la curva. La tangente al círculo principal en este punto cortará al eje $X'X$ en T. Unase T con P; la recta TP es la tangente pedida (fig. 103).

147. Ecuación de la tangente a una elipse, dada la pendiente. La ecuación de la recta de pendiente m y tangente a la elipse $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, es de la forma

$$y = mx + c, \qquad (1)$$

en que c es una constante por determinar

Si $T(x_1, y_1)$ es el punto de tangencia, sus coordenadas satisfacen (1) y la ecuación de la elipse, y se forma el sistema

$$a^2y_1^2 + b^2x_1^2 = a^2b^2, \qquad (2)$$

$$y_1 = mx_1 + c. \qquad (3)$$

e sistema se obtiene:

$$(b^2 + a^2m^2)x_1^2 + 2a^2cmx_1 + a^2c^2 - a^2b^2 = 0,$$

cuyas raíces son:

$$x = \frac{a^2cm}{b^2 + a^2m^2} \pm \frac{1}{b^2 + a^2m^2}\sqrt{a^2b^2(b^2 + a^2m^2 - c^2)}.$$

Para que la recta (1) sea tangente se necesita y basta que x_1 tenga un solo valor, es decir, que el radicando sea cero, lo cual da:

$$c = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}. \qquad (4)$$

El problema tiene las dos soluciones siguientes:

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}.$$

148. Aplicación. Obténgase la ecuación de la recta paralela a $12y = 5x + 58$, y tangente a la elipse $5x^2 + 8y^2 = 92$.

Sustitúyase en (4):

$$c = \pm\sqrt{\frac{92}{5} \times \frac{25}{144} + \frac{92}{8}} = \pm\frac{23}{6}.$$

Las ecuaciones pedidas son:

$$y = \frac{5}{12}x \pm \frac{23}{6},$$

o bien: $$12y = 5x \pm 46.$$

Nota. El procedimiento anterior es, tal vez, preferible a cualquier otro, pero se habría podido partir de la igualdad

$$m = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1} = \frac{5}{12},$$

y formar un sistema con esta ecuación y la de la elipse.

149. Ecuación de un diámetro. Sea obtener la ecuación del lugar de los puntos medios de las cuerdas de una elipse, paralelas a una recta dada.

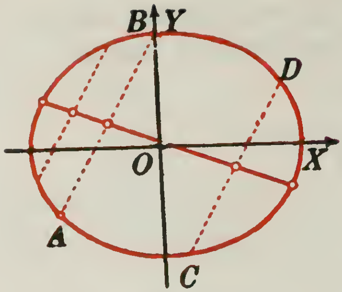


Fig. 104.

Sean

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \qquad (1)$$

la ecuación de una elipse,

$$y = mx + c' \qquad (2)$$

la de una cuerda AB de pendiente m,

$$y = mx + c'' \qquad (3)$$

la de una recta CD, paralela a la anterior (fig. 104).

Resolviendo el sistema de (1) y (2) se obtienen las coordenadas de los puntos de intersección A y B.

Para determinar las abscisas, elévese (2) al cuadrado, y sustitúyase en (1); resulta, después de poner en factor:

$$(a^2m^2 + b^2)x^2 + 2a^2mc'x + a^2c'^2 - a^2b^2 = 0.$$

Las raíces de esta ecuación son las abscisas de los puntos A y B, y la abscisa x' del punto medio es la semisuma de dichas raíces, o sea:

$$x' = -\frac{a^2mc'}{a^2m^2 + b^2}.$$

Para obtener las ordenadas de los mismos puntos, resuélvase en y el mismo sistema, despejando x en (2) y sustituyéndola en (1):

$$x = \frac{y - c'}{m};$$

$$(a^2m^2 + b^2)y^2 - 2b^2c'y + b^2c^2 - a^2b^2m^2 = 0;$$

ecuación cuyas raíces son las ordenadas de los extremos de la cuerda AB, y la ordenada y' del punto medio es la semisuma de las raíces, o sea:

$$y' = \frac{b^2c'}{a^2m^2 + b^2}.$$

Procediendo en forma análoga, considerando el sistema de (1) y (3), se obtienen, como valores de las coordenadas del punto medio de la cuerda CD:

$$x'' = -\frac{a^2mc''}{a^2m^2 + b^2}; \qquad y'' = \frac{b^2c''}{a^2m^2 + b^2}.$$

La ecuación de la recta que se apoya en los puntos medios de las dos cuerdas, o sea, en los puntos (x', y'), (x'', y''), es la del diámetro.

Efectuando las operaciones, se obtiene:

$$y = -\frac{b^2}{a^2 m} x.$$

Por esta ecuación se ve que todo diámetro de una elipse pasa por su centro.

Dividiendo el valor de y' entre el de x', se habría obtenido:

$$\frac{y'}{x'} = -\frac{b^2}{a^2 m},$$

o sea, después de suprimir los acentos:

$$y = -\frac{b^2}{a^2 m} x,$$

resultado idéntico al anteriormente obtenido.

150. Diámetros conjugados. *Cuando dos diámetros de una elipse son tales que cada uno contenga los puntos medios de las cuerdas paralelas al otro, se llaman diámetros conjugados.*

Si, en la ecuación del diámetro obtenida en el número que precede, la pendiente se iguala a m', o sea, se hace

$$m' = -\frac{b^2}{a^2 m},$$

m' es la pendiente del diámetro que biseca las cuerdas de pendiente m.

Si, en la igualdad anterior, se despeja m, se obtiene:

$$m = -\frac{b^2}{a^2 m'},$$

que es la pendiente del diámetro que biseca las cuerdas de pendiente m'. Los diámetros de pendientes m y m' son diámetros conjugados.

EJERCICIO 19

Obténganse las ecuaciones de las tangentes y normales a las siguientes elipses, dado el punto de tangencia T:

1. $4x^2 + 9y^2 = 72$, $\quad T(3, 2)$.
2. $16x^2 + 25y^2 = 400$, $\quad T\left(4, \frac{12}{5}\right)$.

3. $4x^2 + 9y^2 = 160, \qquad T(2, 4).$

4. $x^2 + 4y^2 = 61, \qquad T(5, -3).$

5. $\dfrac{(x-3)^2}{28} + \dfrac{(y-2)^2}{21} = 1, \qquad T(7, 5).$

Obténganse las ecuaciones de las tangentes, dado un punto P exterior.

6. $2x^2 + 3y^2 = 30, \qquad P(9, -4).$

7. $x^2 + 5y^2 = 36, \qquad P(-11, 8).$

8. Hállese la longitud de la subtangente y de la subnormal en la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

9. Una recta es tangente a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, y forma con $X'X$ un ángulo de $45°$. ¿Cuáles son las coordenadas del punto de tangencia?

Obténganse las ecuaciones de las tangentes a las siguientes elipses, en las condiciones que se indican:

10. $x^2 + 2y^2 = 34$, y paralela a la recta $2x + 3y = 25$.

11. $3x^2 + 4y^2 = 48$, y perpendicular a la recta $2x + y = 9$.

12. Hágase ver que la tangente a la elipse en el extremo del ancho focal o lado recto, pasa por el punto $(0, a)$.

13. Aprovechando la fórmula $y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ como ecuación de la tangente a una elipse, demuéstrese que el lugar de los puntos desde donde se pueden trazar pares de tangentes a la curva perpendiculares entre sí, es una circunferencia de mismo centro que la elipse y radio igual a la diagonal del rectángulo construído sobre los semiejes.

14. Por los extremos de los ejes de simetría de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, y por el punto $T(x_1, y_1)$ de la curva, se trazan tangentes. Compruébese que el producto de los segmentos de las tangentes comprendidos entre los extremos de un mismo eje y sus intersecciones con la tangente trazada por T, es b^2 o a^2, según que las tangentes se hayan trazado en A y A' o en B y B'.

15. Verifíquese que si $\dfrac{a^2}{m^2} + \dfrac{b^2}{n^2} = 1$, la recta $\dfrac{x}{m} + \dfrac{y}{n} = 1$ es tangente a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

16. Obténgase la ecuación del diámetro que en la elipse $3x^2 + 4y^2 = 12$ biseca las cuerdas paralelas a $4x + 3y + 2 = 0$.

17. Obténgase la ecuación del diámetro conjugado del diámetro considerado en la elipse del problema anterior.

18. Demuéstrese que las rectas $2x - y = 0$, $x + 3y = 0$, son diámetros conjugados en la elipse $2x^2 + 3y^2 = 4$.

19. El punto $A(4, 2)$ es uno de los extremos de un diámetro en la elipse $3x^2 + 5y^2 = 68$. Obténgase la ecuación de ese diámetro.

20. Dos diámetros conjugados en la elipse $16x^2 + 25y^2 = 400$ tienen como pendientes $\frac{4}{5}$ y $-\frac{4}{5}$. Calcúlese la longitud de cada uno de ellos.

21. Dada una elipse, determinar el centro, los ejes y los focos.

IV. TANGENTE Y NORMAL A LA HIPERBOLA

151. Pendiente de la tangente. Sean $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ la ecuación de una hipérbola y $T(x_1, y_1)$ el punto de tangencia (fig. 105).

Procediendo como se ha hecho para la elipse, se obtiene:

$$\frac{k}{h} = \frac{2b^2x_1 + b^2h}{2a^2y_1 + a^2k};$$

de donde:

$$m = \lim_{h,\,k \to 0} \frac{k}{h} = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}.$$

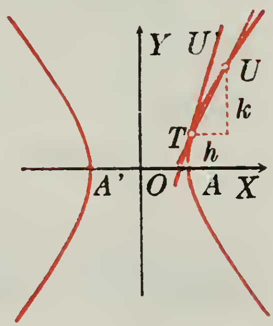


Fig. 105.

152. Ecuación de la tangente. Sustituyendo este último valor en la ecuación

$$y - y_1 = m(x - x_1),$$

se obtiene:
$$y - y_1 = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1);$$

o, dándole forma entera:

$$a^2y_1y - a^2y_1^2 = b^2x_1x - b^2x_1^2.$$

Pásense las constantes al primer miembro y las variables al segundo; luego sustitúyase $b^2x_1^2 - a^2y_1^2$ por a^2b^2 y divídase entre esta cantidad; se obtiene la ecuación pedida:

$$\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1.$$

153. Ecuación de la normal. La ecuación de la normal es también de la forma

$$y - y_1 = m(x - x_1);$$

la pendiente es: $$m = -\frac{a^2y_1}{b^2x_1}.$$

Sustituyendo este valor, se obtiene, como ecuación de la normal a la hipérbola:

$$y - y_1 = -\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1).$$

154. Intersección de la tangente y de la normal con $X'X$ Sea $T(x, 0)$ el punto de intersección de la tangente a la hipérbola con $X'X$ (fig. 106).

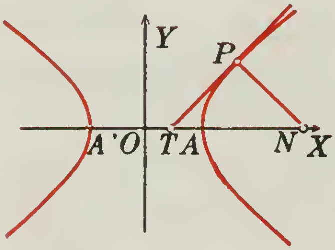


Fig. 106.

Las coordenadas de T satisfacen la ecuación de la tangente

$$\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1.$$

Sustitúyase y por cero, y luego despéjese x; se obtiene, sucesivamente:

$$\frac{x_1x}{a^2} = 1; \qquad x = \frac{a^2}{x_1}.$$

Sea $N(x, 0)$ la intersección de la normal con $X'X$. Las coordenadas de N satisfacen la ecuación de la normal

$$y - y_1 = -\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1).$$

Sustitúyase y por cero, divídase luego entre $-y_1$ y despéjese x:

$$x = \frac{a^2 + b^2}{a^2}x_1 = \frac{c^2}{a^2}x_1;$$

$$x = e^2x_1.$$

155. Círculo principal y trazado de la tangente. *Llámase círculo principal de una hipérbola el que tiene su centro en el centro de la curva y cuyo diámetro es igual al eje focal.*

Sean $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ la ecuación de una hipérbola y $P(x_1, y_1)$ el punto de tangencia (fig. 107).

La intersección de la tangente en P con el eje $X'X$ es $T\left(\frac{a^2}{x_1}, 0\right)$, (Nº 154).

Considérese el punto R del círculo principal, de abscisa $x_2 = \frac{a^2}{x_1}$. Trácese por él la tangente a la circunferencia. La intersección de esta tangente con $X'X$ es $Q\left(\frac{a^2}{x_2}, 0\right)$.

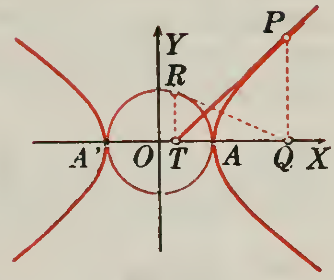


Fig. 107.

Sustitúyase x_2 por su valor; se obtiene, para la abscisa del punto Q, el valor $a^2 : \frac{a^2}{x_1} = x_1$, que es precisamente la abscisa del punto P.

Dedúcese de esto la siguiente construcción: proyéctese en $X'X$ el punto de tangencia P, y se obtiene el punto Q. Trácese QR tangente al círculo principal, y proyéctese R en $X'X$. La proyección determina el punto T; TP es la tangente buscada.

156. Ecuación de la tangente a la hipérbola, dada la pendiente. Procediendo en la misma forma que para la elipse, se obtiene que las ecuaciones de las tangentes de pendiente m son, en el caso de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$:

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}.$$

Como se ve, hay dos tangentes de pendiente m, tanto en el caso de una circunferencia como en el de una elipse. Pero, mientras que para estas dos curvas el problema es siempre posible, cualquiera que sea el valor de m, tratándose de una hipérbola, sólo hay solución si

$$a^2m^2 - b^2 \geqslant 0;$$

o sea, si

$$|m| \geqslant \frac{b}{a}.$$

157. Ecuación de un diámetro. Siguiendo el mismo procedimiento que en el Nº 149, se obtiene que la ecuación del diámetro que en la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ biseca las cuerdas de pendiente m, es:

$$y = \frac{b^2}{a^2m}x,$$

ecuación de una recta que pasa por el centro de la curva.

158. Diámetros conjugados. Al igual que en el caso de una elipse, *cuando dos diámetros de una hipérbola son tales que cada uno contenga los puntos medios de las cuerdas paralelas al otro, estos dos diámetros se llaman diámetros conjugados.*

Si, en la ecuación obtenida en el número precedente, se iguala la pendiente a m', o sea, se hace

$$m' = \frac{b^2}{a^2m},$$

m' es la pendiente del diámetro que biseca las cuerdas de pendiente m.

Si, en esta última igualdad, se despeja m, se obtiene:

$$m = \frac{b^2}{a^2m'},$$

que es la pendiente del diámetro que biseca las cuerdas de pendiente m'. Los diámetros de pendientes m y m' son diámetros conjugados.

EJERCICIO 20

Obténganse las ecuaciones de las tangentes y normales a las hipérbolas siguientes, dado el punto de tangencia T:

1. $x^2 - 3y^2 = 9$, $T(-6, 3)$. **3.** $2x^2 - 5y^2 = 30$, $T(5, -2)$.

2. $2x^2 - 3y^2 = 5$. $T(4, 3)$. **4.** $x^2 - 2y^2 = 7$, $T(5, -3)$.

Obténganse las ecuaciones de las tangentes, dado el punto P exterior:

5. $3x^2 - 4y^2 = 12$, $P(6, 5)$. **6.** $4x^2 - 5y^2 = 16$, $P(7, -10)$

7. Dada la hipérbola $(x + 5)^2 - 3(y - 3)^2 = 4$, obtener la ecuación de la tangente, dado el punto de tangencia $T(-9, 5)$.

8. Calcúlese la longitud de la subtangente y de la subnormal en la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, dado $T(x_1, y_1)$ como punto de tangencia.

9. ¿Para qué puntos son, en la hipérbola anterior, numéricamente iguales la subtangente y la subnormal?

10. Dada la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, en que $a > b$, y una recta de pendiente 1, obténganse las coordenadas del punto de tangencia. ¿Es posible el problema si $a < b$? ¿Qué sucede si $a = b$?

Obténganse las ecuaciones de las tangentes a las siguientes hipérbolas en las condiciones que se especifican:

11. $x^2 - 4y^2 = 9$, y paralela a la recta $5x - 8y = 32$.

12. $3x^2 - 5y^2 = 30$, y perpendicular a $y - x + 7 = 0$.

13. $9x^2 - 25y^2 = 225$, y paralela a una recta cuya pendiente es igual a 1.

14. Obténganse las ecuaciones de las rectas que son simultáneamente tangentes a la elipse $5x^2 + 9y^2 = 45$ y a la hipérbola $x^2 - y^2 = 16$.

15. Obténgase la ecuación de la tangente trazada a la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ en el extremo del lado recto que se encuentra en el primer cuadrante.

16. Una tangente a la hipérbola $x^2 - y^2 = 12$ es paralela a la recta $y - 2x = 7$. ¿Cuál es la longitud de la subnormal?

17. Demuéstrese que si $\frac{a^2}{m^2} - \frac{b^2}{n^2} = 1$, la recta $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ es tangente a la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

18. Obténgase la ecuación del diámetro que en la hipérbola $7x^2 - 24y^2 = 25$ biseca las cuerdas paralelas a la recta $y = 5x + 3$.

19. Obténgase la ecuación del diámetro conjugado del diámetro del problema anterior.

20. Obténgase la ecuación del diámetro que en la hipérbola $25x^2 - 16y^2 = 400$ es conjugado del diámetro $y = \frac{1}{3}x$.

21. ¿Qué ecuación tiene la cuerda que es bisecada por el punto de coordenadas $(4, 2)$ en la hipérbola $12x^2 - 9y^2 = 108$?

V. PROPIEDAD DE LAS TANGENTES A LAS CONICAS ASINTOTAS

159. Tangente a la parábola. Sean T el punto de tangencia, $I(-x_1, 0)$ la intersección de la tangente con $X'X$, y RD la directriz.

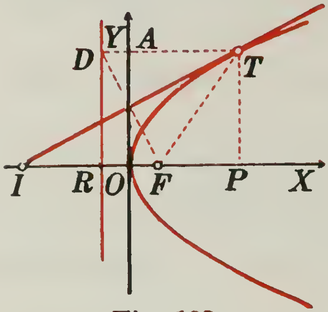


Fig. 108.

Trácense DT perpendicular a la directriz, PT perpendicular a $X'X$, y únase T con F (fig. 108).

Se tiene:

$$IF = IO + OF = x_1 + p;$$
$$DT = DA + AT = p + x_1;$$
$$FT = DT = x_1 + p;$$

luego, el triángulo IFT es isósceles y, por tanto:

$$\text{áng } TIF = \text{áng } ITF;$$

pero, $\quad \text{áng } TIF = \text{áng } ITD;$

por consiguiente: $\quad \text{áng } ITD = \text{áng } ITF.$

Luego, *la tangente a la parábola es bisectriz del ángulo formado por las rectas que marcan la distancia del punto de tangencia al foco y a la directriz.*

160. Tangente a la elipse. Sean $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ la ecuación de la elipse, $T(x_1, y_1)$ el punto de tangencia, $\rho' = F'T$, y $\rho = FT$ los radios vectores de dicho punto (fig. 109).

Se tiene:

$$\overline{F'T}^2 = \rho'^2 = (x_1 + c)^2 + y_1^2; \quad (1)$$
$$\overline{FT}^2 = \rho^2 = (x_1 - c)^2 + y_1^2. \quad (2)$$

Réstese (2) de (1):

$$\rho'^2 - \rho^2 = 4cx_1;$$

o sea:

$$(\rho' + \rho)(\rho' - \rho) = 4cx_1;$$

pero, $\quad \rho' + \rho = 2a; \quad (3)$

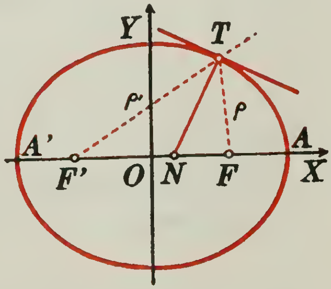


Fig. 109.

por tanto: $$\rho' - \rho = \frac{4cx_1}{\rho' + \rho} = \frac{2cx_1}{a} = 2ex_1. \qquad (4)$$

Súmense (3) y (4) y despéjese ρ':

$$\rho' = a + ex_1.$$

Réstese (4) de (3); se obtiene, despejando ρ:

$$\rho = a - ex_1.$$

La razón de los vectores es pues:

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{a + ex_1}{a - ex_1}.$$

Los segmentos $F'N$ y FN determinados por la normal TN son:

$$F'N = F'O + ON = c + e^2x_1 = ae + e^2x_1 = e(a + ex_1);$$
$$NF = OF - ON = c - e^2x_1 = ae - e^2x_1 = e(a - ex_1).$$

Por tanto, la razón de estos segmentos es:

$$\frac{F'N}{NF} = \frac{a + ex_1}{a - ex_1} = \frac{\rho'}{\rho}.$$

Por este resultado se ve que el lado $F'F$ del triángulo $F'TF$ queda dividido por la normal TN en segmentos proporcionales a los lados adyacentes $F'T$ y FT; luego, TN es bisectriz del ángulo $F'TF$ de los radios vectores del punto de tangencia, y ***la tangente es bisectriz del ángulo exterior de dichos vectores.***

161. Tangente a la hipérbola. Sean $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ la ecuación de la hipérbola, $\rho' = F'T$, $\rho = FT$ los vectores y $T(x_1, y_1)$ el punto de tangencia (figura 110).

Procediendo como para la elipse, se obtiene que la longitud de los vectores del punto de tangencia T es:

$$\rho' = ex_1 + a;$$
$$\rho = ex_1 - a;$$

y su razón:

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{ex_1 + a}{ex_1 - a}.$$

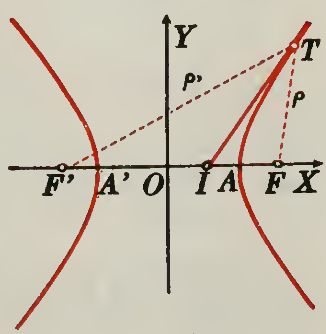


Fig. 110.

Los segmentos $F'I$, IF determinados por la tangente TI son:

$$F'I = F'O + OI = c + \frac{a^2}{x_1} = \frac{aex_1 + a^2}{x_1};$$

$$IF = OF - OI = c - \frac{a^2}{x_1} = \frac{aex_1 - a^2}{x_1}.$$

Luego, la razón de estos segmentos es:

$$\frac{F'I}{IF} = \frac{ex_1 + a}{ex_1 - a} = \frac{\rho'}{\rho}.$$

Por este resultado se ve que el lado $F'F$ del triángulo $F'TF$ queda dividido por la tangente TI en segmentos proporcionales a los lados adyacentes $F'T$ y FT; por tanto, *la tangente es bisectriz del ángulo de los radios vectores del punto de tangencia.*

162. Asíntota. *Si la distancia de un punto de una curva a una recta tiende a cero a medida que dicho punto se aleja indefinidamente de cierto punto fijo, esa recta se llama* **asíntota** *de la curva.*

Así, la distancia PM del punto M a la recta PQ (fig. 111) disminuye y tiende a cero a medida que ese punto se mueve en la dirección PQ. La recta PQ es *asíntota* de la curva C.

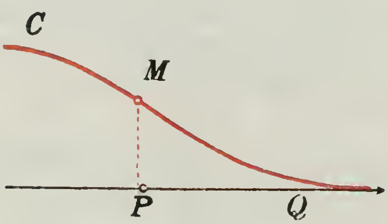


Fig. 111.

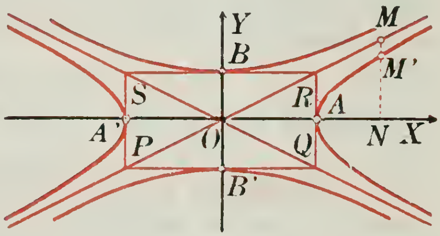


Fig. 112.

163. Asíntotas de la hipérbola. Sus ecuaciones. Sea la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Constrúyase el rectángulo de los ejes, o sea, el rectángulo $PQRS$ de dimensiones $2a$ y $2b$; trácense sus diagonales PR y QS y la ordenada NM del punto M de la diagonal PR (fig. 112).

Sea M' el punto en que NM corta a la hipérbola. Se va a demostrar que la distancia $M'M \rightarrow 0$ cuando $ON \rightarrow \infty$ y que, por tanto, la diagonal PR es asíntota de la hipérbola.

Desígnense por y, y' las ordenadas de los puntos M y M'. Se tiene:

$$M'M = NM - NM' = y - y'.$$

La ecuación de la diagonal PR es:

$$y = \frac{b}{a} x. \qquad (1)$$

Elévese al cuadrado: $y^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2$. (2)

El cuadrado de la ordenada y' del punto M', deducido de la ecuación de la hipérbola, es:

$$y'^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2 - b^2. \qquad (3)$$

Teniendo M y M' la misma abscisa, se obtiene, restando (3) de (2):

$$y^2 - y'^2 = b^2,$$

o sea: $$(y - y')(y + y') = b^2;$$

de donde: $$y - y' = \frac{b^2}{y + y'}.$$

El numerador de este quebrado es constante, y el denominador crece indefinidamente con x; resulta, entonces, que $M'M \rightarrow 0$ si $x \rightarrow \infty$; o sea, que la diagonal PR es tangente a la hipérbola en el infinito y es, por consiguiente, asíntota de la curva. Su ecuación es la (1).

La ecuación de la otra diagonal es:

$$y = -\frac{b}{a} x. \qquad (4)$$

Combinando la (1) y la (4), se obtiene:

$$y = \pm \frac{b}{a} x,$$

que son las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2.$$

164. Observaciones. 1ª Las asíntotas de la *hipérbola equilátera,* o sea, aquella en que $b = a$, tienen por ecuaciones $y = \pm x$.

2ª Dos *hipérbolas conjugadas* tienen las mismas asíntotas, porque es común a las dos el rectángulo de los ejes.

165. Ecuación de la hipérbola equilátera referida a sus asíntotas. Sea transformar la ecuación de la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = a^2$, refiriéndola a sus asíntotas como nuevo sistema de ejes cartesianos, o sea, el formado por las asíntotas $U'U$, $Z'Z$ (fig. 113).

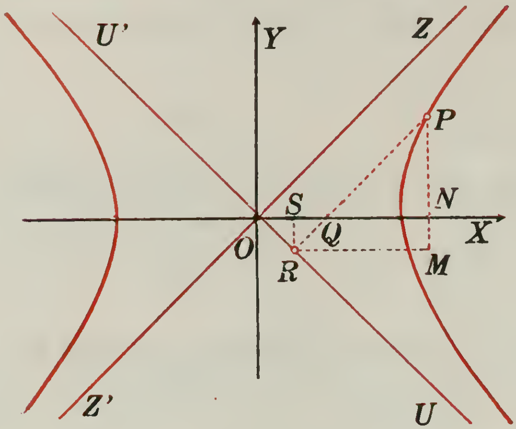


Fig. 113.

Bastará imprimir a los ejes $X'X$, $Y'Y$ una rotación de $(-45°)$, es decir, considerar u y z como coordenadas en el nuevo sistema, y aplicar las fórmulas:

$$x = u\cos(-45°) - z\operatorname{sen}(-45°);$$
$$y = u\operatorname{sen}(-45°) + z\cos(-45°).$$

Recordando que

$$\cos(-45°) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{sen}(-45°) = -\operatorname{sen} 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$

se tiene: $$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(u+z); \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(z-u).$$

Elevando el valor de x y el de y al cuadrado, y sustituyendo el resultado en la ecuación dada, se obtiene, después de reducir:

$$2uz = a^2; \quad uz = \frac{a^2}{2} = k,$$

que es la ecuación de la hipérbola equilátera, referida a sus asíntotas $U'U$ y $Z'Z$ como ejes coordenados.

Si se sustituyen u, z por x, y, resulta:

$$xy = k,$$

que es la ecuación de la hipérbola equilátera referida a sus asíntotas, es decir, que tiene los ejes $X'X$, $Y'Y$ por asíntotas.

166. Otro procedimiento. Puede llegarse al resultado anterior en la siguiente forma:

Considérese un punto cualquiera P de la curva (fig. 112). Sus coordenadas, en el sistema $X'X$, $Y'Y$, son:

$$x = ON; \quad y = NP;$$

y, en el sistema $U'U$, $Z'Z$:

$$u = OR; \quad z = RP.$$

Puede escribirse:

$$x = ON = OS + SQ + QN; \qquad (1)$$
$$OS = OR \cos 45° = u \cos 45°; \qquad (2)$$
$$SQ = RQ \cos 45°; \qquad (3)$$
$$QN = QP \cos 45°. \qquad (4)$$

Súmense (2), (3) y (4) y sustitúyase en (1):

$$x = u \cos 45° + (RQ + QP) \cos 45° = (u + z) \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}(u + z).$$

Análogamente:

$$y = NP = MP - MN; \qquad (5)$$
$$MP = RP \cos 45° = z \cos 45°;$$
$$MN = RS = OR \cos 45° = u \cos 45°;$$

valores que sustituídos en (5) dan:

$$y = (z - u) \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}(z - u).$$

Reemplazando los valores de x y de y en la ecuación $x^2 - y^2 = a^2$, se obtiene el resultado del número anterior.

167. Lemniscato de J. Bernoulli. Sean la hipérbola $x^2 - y^2 = a^2$, $T(x_1, y_1)$ un punto de la hipérbola, TM una tangente a esta curva y MO una perpendicular trazada a la tangente TM desde el origen O (fig. 114).

El lugar descrito por el punto M *al desplazarse el punto* T *en la curva, es el lemniscato de Bernoulli.*

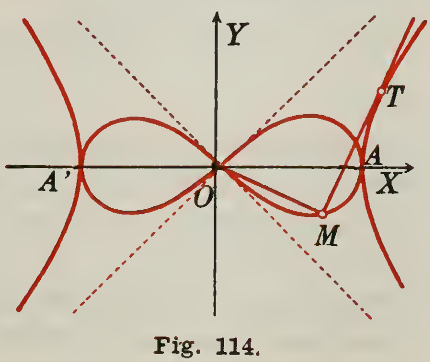


Fig. 114.

Para obtener su ecuación, puede procederse en la forma siguiente:

La ecuación de TM es:

$$x_1 x - y_1 y = a^2; \tag{1}$$

y la de OM:

$$x_1 y + y_1 x = 0; \tag{2}$$

además, por ser T de la hipérbola, se tiene:

$$x_1^2 - y_1^2 = a^2. \tag{3}$$

Para obtener la ecuación de la curva, basta expresar los valores de (x_1, y_1) en función de (x, y) y del parámetro a, y luego sustituirlos en (3).

Despejando y_1 en (1) y en (2) se obtiene, sucesivamente:

$$y_1 = \frac{x_1 x}{y} - \frac{a^2}{y}; \quad y_1 = -\frac{x_1}{x} y; \tag{4}$$

de donde, igualando:

$$\frac{x_1 x}{y} - \frac{a^2}{y} = -\frac{x_1}{x} y;$$

o sea:

$$\frac{x_1 x}{y} + \frac{x_1 y}{x} = \frac{a^2}{y};$$

$$x_1 \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{a^2}{y};$$

$$x_1 = \frac{a^2 x}{x^2 + y^2};$$

valor que sustituído en (4) da:

$$y_1 = -\frac{a^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Reemplazando estos valores en (3), se obtiene:

$$\frac{a^4 x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{a^4 y^2}{(x^2 + y^2)^2} = a^2;$$

o sea:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2),$$

que es la ecuación buscada.

La curva es cerrada y simétrica con respecto a ambos ejes; está toda comprendida dentro de los ángulos BOC y DOE formados por las asíntotas de la hipérbola equilátera.

Fue ideada por Jacobo Bernoulli (1654-1705) y por eso se denomina "lemniscato de Bernoulli".

168. Otra definición. *El lemniscato se define también como el lugar geométrico de los puntos tales que el producto de sus distancias a dos puntos fijos* F′ *y* F *es igual al cuadrado de la semidistancia entre esos dos puntos fijos.*

Para obtener la ecuación del lemniscato partiendo de esta definición, tómese como eje de las equis la recta que contiene los puntos F' y F y el punto medio del segmento $F'F$ como origen (figura 115).

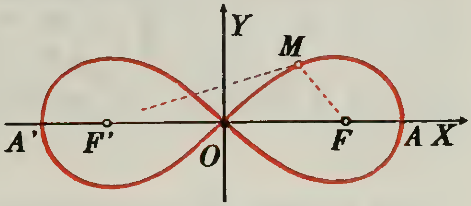


Fig. 115.

Sean $M(x, y)$ un punto móvil de la curva, y $F'F = 2c$.

Según la definición, se tiene:

$$F'M \times FM = \overline{OF}^2 = c^2;$$

o sea:
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} \times \sqrt{(x+c)^2+y^2} = c^2;$$
$$[(x-c)^2+y^2][(x+c)^2+y^2] = c^4;$$
$$(x^2+y^2)^2 + c^4 + 2c^2x^2 + 2c^2y^2 - 4c^2x^2 = c^4;$$
$$(x^2+y^2)^2 = 2c^2x^2 - 2c^2y^2 = 2c^2(x^2-y^2).$$

Haciendo
$$c = a\frac{\sqrt{2}}{2},$$

se obtiene, sustituyendo:

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2);$$

resultado idéntico al anteriormente obtenido.

169. Dirección de una curva. *La dirección de una curva, en uno cualquiera de sus puntos, es la de la tangente a dicha curva en el punto considerado.*

170. Angulo que forman dos líneas en su intersección. *Angulo entre una recta y una curva que se cortan, es el formado por dicha recta y la tangente a la curva en el punto de intersección.*

Angulo entre dos curvas es el formado por las tangentes a cada una de ellas en el punto en que se cortan.

Por tanto, para conocer el ángulo formado por dos líneas, basta calcular el ángulo formado por las tangentes a dichas líneas en el punto de intersección.

171. Ejemplo. ¿Qué ángulo forman la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $y = 2x - 12$ en su intersección?

Sean V el ángulo formado, m_1 la pendiente de la recta, y m_2 la de la tangente a la parábola en el punto de intersección.

Se tiene: $$\tan V = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}.$$

Para conocer las coordenadas del punto de intersección, háganse simultáneas las ecuaciones

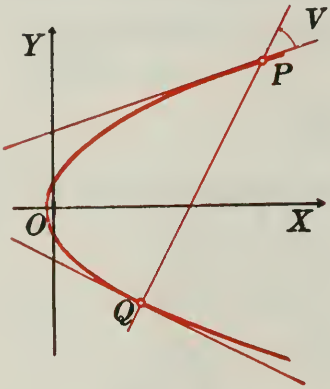


Fig. 116.

$$y^2 = 4x; \qquad (1)$$
$$y = 2x - 12. \qquad (2)$$

Elévese (2) al cuadrado, sustitúyase en (1) y redúzcase:

$$x^2 - 13x + 36 = 0.$$

Las raíces de esta ecuación son:

$$x_1 = 9; \qquad x_2 = 4;$$

de donde:

$$y_1 = 6; \qquad y_2 = -4.$$

Hay dos puntos de intersección: $P(9, 6)$, $Q(4, -4)$, (fig. 116).

La pendiente de la recta es: $m_1 = 2$.

La pendiente de la tangente a la parábola en P es:

$$m_2' = \frac{2p}{y_1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

y la de la tangente en Q es: $m_2'' = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$;

por tanto, se tiene, en el punto P:

$$\tan V = \frac{2 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{2}{3}} = 1; \qquad V = 45°;$$

en el punto Q:

$$\tan V = \frac{-\frac{1}{2} - 2}{1 - 1} = \infty; \qquad V = 90°.$$

172. Observación. *Elipse e hipérbola homofocales son aquellas que tienen los mismos focos.*

Una elipse y una hipérbola homofocales se cortan perpendicularmente. En efecto: la tangente a la hipérbola es bisectriz del ángulo interior formado por los radios vectores del punto de intersección, y esta misma recta es, a la vez, normal a la elipse trazada en el mismo punto. Luego, las dos tangentes son perpendiculares y, por consiguiente, lo son también las dos curvas.

EJERCICIO 21

1. Dada una parábola, determinar el vértice y el foco.

2. Dadas dos tangentes a la parábola y los puntos de contacto, determínense el vértice y el foco. (El punto de intersección de las tangentes está en el diámetro que biseca la cuerda que une los puntos de contacto).

3. Refiriéndose a la figura 108, demuéstrese que las rectas FD y TI se bisecan en el eje $Y'Y$.

4. ¿Cuáles son las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola $4x^2 - 9y^2 = 36$?

5. La ecuación de una hipérbola es $3x^2 - 4y^2 = 12$. Obténganse las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola conjugada.

6. Obténgase la ecuación de la hipérbola cuyas asíntotas tienen por ecuaciones $y = \pm \frac{3}{4} x$.

7. Obténgase la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto $P(-5, 4)$ y cuyas asíntotas tienen por ecuaciones $y = \pm \frac{4}{3} x$.

8. Calcúlese la distancia del foco F a las asíntotas de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.

9. La ecuación de una hipérbola referida a sus asíntotas es $xy = 9$. Calcúlese la longitud del eje focal y la excentricidad.

10. Hágase ver que la excentricidad de toda hipérbola equilátera es igual a $\sqrt{2}$.

11. ¿Qué clase de hipérbolas representan las fracciones $\frac{2}{x}$, $\frac{2}{x+1}$, $\frac{2}{x-1}$, $\frac{x+3}{x+1}$? Si se trazaran las curvas representativas a la misma escala, ¿qué tendrían de común?

12. ¿Cuáles son las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola $xy = 9$?

13. Demuéstrese que si desde un punto de la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ se traza una paralela a $X'X$, el área del rectángulo cuyas dimensiones son las distancias de dicho punto a aquellos en que la paralela corta a las asíntotas, es constante e igual al cuadrado del semieje focal.

14. En la misma hipérbola se traza una paralela a $Y'Y$. Demuéstrese que el área del rectángulo cuyas dimensiones son las distancias del punto de la curva a aquellos en que la paralela corta a las asíntotas, es igual al cuadrado del semieje no focal.

15. ¿Qué ángulos forman, en su intersección, la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ y la recta $2y = 11x - 25$?

16. Calcúlense los ángulos que, en su intersección, forman las líneas $y^2 = 8x$, $y + 2x = 8$.

17. ¿Qué ángulos forman en su intersección la circunferencia $x^2 + y^2 = 169$ y la parábola $12y^2 = 25x$?

18. Hágase ver que la elipse $9x^2 + 25y^2 = 225$, y la hipérbola $x^2 - y^2 = 8$ se cortan ortogonalmente.

19. ¿Se cortan ortogonalmente la elipse $7x^2 + 16y^2 = 112$ y la hipérbola $4x^2 - 5y^2 = 20$?

20. ¿Qué ángulo forman, en su intersección, las circunferencias $x^2 + y^2 = 29$, y $(x - 8)^2 + y^2 = 13$?

VI. ALGUNAS PROPIEDADES DE LA ELIPSE — SU AREA

173. Razón de una ordenada de la elipse a la correspondiente del círculo principal.

Sean
$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2, \qquad (1)$$
$$x^2 + y^2 = a^2, \qquad (2)$$

las ecuaciones respectivas de una elipse y de su círculo principal.

Sean y_e, y_c dos ordenadas, una de un punto de la elipse y la otra, la del punto correspondiente del círculo principal.

De (1) se obtiene: $y_e = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, (3)

y de (2): $y_c = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$. (4)

Divídase (3) entre (4); resulta: $\frac{y_e}{y_c} = \frac{b}{a}$;

es decir, las dos ordenadas consideradas son entre sí como el semieje no focal es al semieje focal.

174. La elipse como figura proyectada. Si una circunferencia se proyecta ortogonalmente en un plano que la corte según un diámetro, la proyección de la ordenada de un punto cualquiera de la circunferencia es igual a esa ordenada multiplicada por el coseno del ángulo plano del diedro formado por el plano de la circunferencia y el de proyección.

Si se conviene en designar por y_p la ordenada PM' de un punto M' en la figura proyectada, por y_c la ordenada PM de un punto M de la circunferencia y de misma abscisa que M', y por θ el ángulo plano del diedro, tal que $\cos\theta = \frac{b}{a}$, se tiene, tomando $A'A$ como eje de las abscisas, OB como eje de las ordenadas en la circunferencia, y OB', proyección de OB, como eje de las ordenadas en la figura proyectada (fig. 117):

$$PM' = PM \times \cos\theta;$$

o sea: $y_p = y_c \times \frac{b}{a}$;

de donde: $y_c = y_p \times \frac{a}{b}$, $y_c^2 = y_p^2 \times \frac{a^2}{b^2}$.

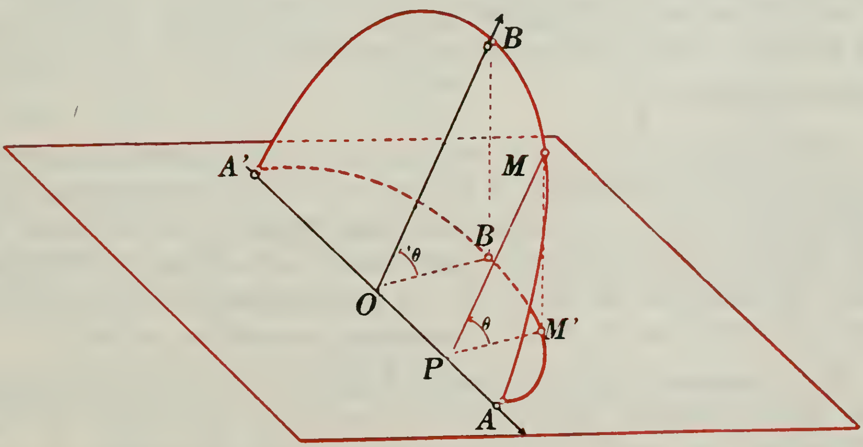


Fig. 117.

Sustituyendo este valor en $x_c^2 + y_c^2 = a^2$, y observando que las dos ordenadas, la que se proyecta y la proyectada, corresponden a una misma abscisa, se tiene:

$$x^2 + \frac{a^2}{b^2} y_p^2 = a^2;$$

es decir:

$$b^2x^2 + a^2y_p^2 = a^2b^2;$$

que es la ecuación de una elipse. Luego, la proyección ortogonal de una circunferencia es una elipse.

175. Area de la elipse. Supóngase dividido el eje focal $A'A$ (fig. 118) en un número cualquiera de partes, iguales o no entre sí, y sean M y N dos puntos divisorios. Trácense MQ y NR perpendiculares al eje $X'X$, y por los puntos P y R, las rectas PS y RT paralelas al mismo eje.

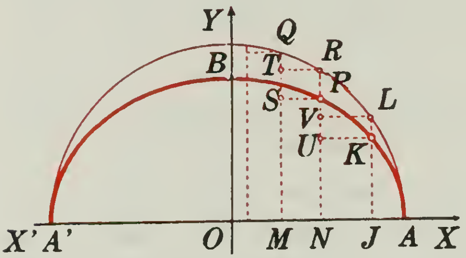


Fig. 118.

La razón de las superficies de los rectángulos $MNPS$ y $MNRT$ es:

$$\frac{MN \times NP}{MN \times NR} = \frac{y_e}{y_c} = \frac{b}{a}.$$

La razón de las superficies de dos rectángulos cualesquiera correspondientes, como $NJKU$, $NJLV$, es decir, de misma base y de alturas respectivamente iguales a la ordenada de un punto de la elipse y a la del punto de igual abscisa en el círculo principal, es también $\frac{b}{a}$.

Por el principio de que en una serie de razones iguales, la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes como cada antecedente es a su consecuente, se tiene que: la suma de las áreas de los rectángulos que tienen un vértice en la elipse es a la suma de las áreas de los rectángulos correspondientes con un vértice en el círculo principal, como b es a a.

Si se aumenta indefinidamente el número de puntos divisorios de $A'A$, aumenta también indefinidamente el número de rectángulos, y la suma de las áreas de aquellos que tienen un vértice en la elipse tiende a la semiárea de la elipse, así como la suma de las áreas de los que tienen un vértice en el círculo principal, tiende al semicírculo. Por consiguiente, por el principio antes citado, se puede escribir:

$$\frac{\text{área elipse}}{\text{área círculo}} = \frac{b}{a};$$

o sea:
$$\text{área elipse} = \pi a^2 \times \frac{b}{a} = \pi ab.$$

176. Observaciones. 1ª Se llegaría más rápidamente al mismo resultado considerando que el área de la superficie de la figura proyectada es igual a la de la figura que se proyecta, multiplicada por el coseno del ángulo de los dos planos; por tanto:

$$\text{área elipse} = \pi a^2 \times \cos\theta = \pi a^2 \times \frac{b}{a} = \pi ab.$$

2ª El área de la elipse es media geométrica entre la del círculo principal y la del círculo menor, es decir, del círculo de radio b.

En efecto: $\pi a^2 \times \pi b^2 = \pi^2 a^2 b^2$; y $\sqrt{\pi^2 a^2 b^2} = \pi ab$.

177. Otra construcción de la elipse por puntos. El resultado obtenido en el Nº 173 puede aprovecharse para otra construcción de la elipse por puntos, como se explica en seguida.

Trácense dos circunferencias concéntricas de radios a y b (fig. 119), y varios radios OA, OB, OC, OD, etc. Por los puntos E, F, G, H,..., en que dichos radios cortan al círculo menor, trácense paralelas al eje $X'X$, y por A, B, C, D,..., perpendiculares al mismo eje. Las intersecciones M, N, P,..., son puntos de la elipse.

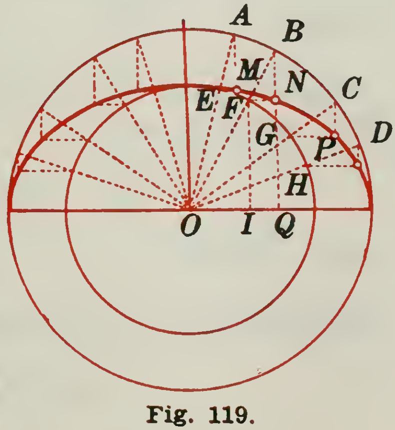


Fig. 119.

En efecto: por la semejanza de los triángulos OIF y OQB, se tiene:

$$\frac{IF}{QB} = \frac{OF}{OB} = \frac{b}{a}.$$

de donde, sustituyendo IF por su igual QN:

$$\frac{QN}{QB} = \frac{OF}{OB} = \frac{b}{a};$$

por tanto, el punto N es de la elipse.

Este resultado evidencia que si se reducen en la misma proporción las ordenadas de los puntos de una circunferencia, se obtiene una elipse.

Análogamente, si todas las ordenadas de los puntos de una circunferencia se aumentan en una misma proporción, se obtiene también una elipse.

178. Construcción de una elipse por trazo continuo. Un punto fijo de un segmento de recta móvil cuyos extremos se apoyan constantemente en dos rectas perpendiculares entre sí, describe una elipse.

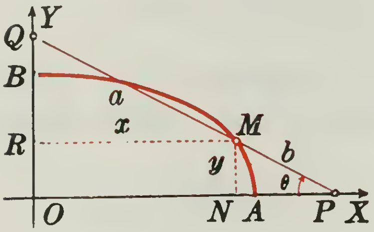


Fig. 120.

Sean PQ la recta móvil y $M(x, y)$ un punto fijo del segmento (fig. 120).

Sean además $MQ = a$, $MP = b$, $OP = p$, $OQ = q$.

Por ser el triángulo QRM semejante al triángulo QOP, se tiene:

$$\frac{RM}{MQ} = \frac{OP}{PQ};$$

o sea:

$$\frac{x}{a} = \frac{p}{a+b}. \qquad (1)$$

Análogamente, por la semejanza de los triángulos MNP y QOP, se puede escribir:

$$\frac{NM}{PM} = \frac{OQ}{PQ};$$

o sea:

$$\frac{y}{b} = \frac{q}{a+b}. \qquad (2)$$

Elévense (1) y (2) al cuadrado y súmense; se obtiene:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{p^2 + q^2}{(a+b)^2} = 1;$$

porque $(a+b)^2 = p^2 + q^2$. Luego, el lugar de los puntos M es una elipse en la cual la suma constante de los semiejes es el segmento de la recta móvil.

El compás elíptico está basado en esta propiedad.

179. Observaciones. 1ª Puede llegarse más rápidamente al mismo resultado, como se ve a continuación.

Sea $\theta = \text{áng}\, OPQ = \text{áng}\, RMQ$ (fig. 120).

Se tiene:

$$x = MQ \cos\theta = a\cos\theta; \qquad (1)$$
$$y = PM \operatorname{sen}\theta = b \operatorname{sen}\theta. \qquad (2)$$

Elévense (1) y (2) al cuadrado:

$$x^2 = a^2\cos^2\theta;$$
$$y^2 = b^2\operatorname{sen}^2\theta.$$

Despéjense las dos razones trigonométricas, y súmense:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1.$$

Las ecuaciones (1) y (2) se llaman *ecuaciones paramétricas* de la elipse. De ellas se habla en el capítulo siguiente.

2ª Si el punto M está en la prolongación del segmento, describe también una elipse.

Sean: $PM = a$, $QM = b$, $OP = p$, $OQ = q$ (fig. 121).

Compárese cada uno de los triángulos QNM y PSM con el triángulo POQ. Se tiene:

$$\frac{SM}{PM} = \frac{OQ}{PQ};$$
$$\frac{NM}{QM} = \frac{PO}{PQ};$$

o sea:

$$\frac{x}{a} = \frac{q}{a-b}; \qquad (3)$$
$$\frac{y}{b} = \frac{p}{a-b}. \qquad (4)$$

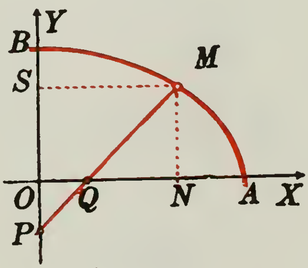


Fig. 121.

Elévense (3) y (4) al cuadrado, súmense y simplifíquese; se obtiene:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{q^2+p^2}{(a-b)^2} = 1.$$

EJERCICIO 22

1. La ecuación del círculo principal de una elipse es $x^2 + y^2 = 100$, y su diámetro menor es la mitad del mayor. Desde el punto $P(14, 2)$ se traza una tangente a la circunferencia en un punto del primer cuadrante, y por el punto de la elipse, correspondiente al de tangencia en la circunferencia, se traza una tangente a la elipse. ¿Cuál es la ecuación de la tangente a la elipse?

2. ¿Cuál es el área de la elipse $16x^2 + 25y^2 = 400$?

3. Exprésese en millones de km² el área de la órbita terrestre, considerándola como elipse de semieje mayor igual a 150 millones de km y de $\frac{1}{60}$ de excentricidad.

4. La ecuación de una circunferencia es $x^2 + y^2 = 40$. El plano de esa curva forma, con el de la elipse por ella proyectada, un diedro cuyo ángulo plano θ es tal que $\theta = \text{áng cos } \frac{1}{2}$. ¿Cuál es la ecuación de la elipse?

5. Trácese una circunferencia de radio 4 cm y dibújense después dos elipses cuyas ordenadas sean: 1º los $\frac{2}{3}$ de las ordenadas correspondientes de la circunferencia; 2º el doble de esas mismas ordenadas.

6. Dibújese la elipse que describe el punto P de un segmento AB de 7 cm de largo, cuyos extremos resbalan sobre dos rectas perpendiculares, sabiendo que P dista 4 cm de A. ¿Cuál es la ecuación de la elipse?

ECUACIONES PARAMETRICAS 6

180. Definición. Para trazar una curva por puntos, partiendo de su ecuación en coordenadas cartesianas, se comienza por expresar una de las variables en función de la otra.

En algunos casos conviene expresar las coordenadas de los puntos de una curva en función de una tercera variable, más bien que una en función de la otra. *Esa tercera variable se llama parámetro, y las ecuaciones que conectan las coordenadas con el parámetro se llaman ecuaciones paramétricas.*

Según se ha dicho,

$$x = a \cos \theta, \qquad y = b \operatorname{sen} \theta,$$

son las ecuaciones paramétricas de la elipse. Por ellas se ve que el valor de cada una de las coordenadas de un punto de la curva se obtiene independientemente de la otra, y sólo depende del parámetro θ.

181. Ecuaciones paramétricas de la circunferencia. Sea la circunferencia de centro O y radio a. Sean además $M(x, y)$ un punto de la curva y $\theta =$ áng XOM (fig. 122).

Se tiene, como ecuaciones paramétricas:

$$x = a \cos \theta;$$
$$y = a \operatorname{sen} \theta.$$

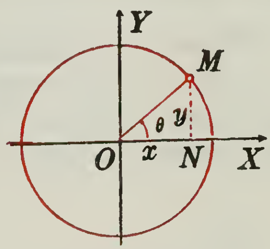


Fig. 122.

182. Cicloide. Ecuaciones paramétricas. *Cicloide es la curva descrita por un punto fijo de una circunferencia que rueda, sin resbalar, a lo largo de una recta fija* (fig. 123).

Tómese como eje de las equis la recta fija OX sobre la cual se hace rodar la circunferencia de centro C y radio r, y sea M el punto fijo que describe la curva.

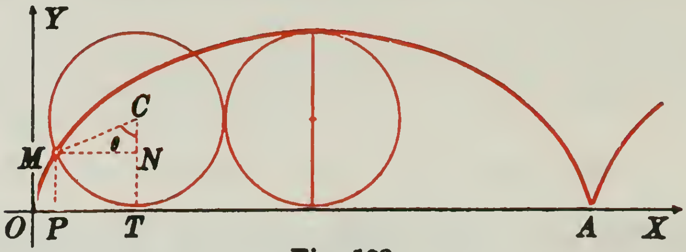


Fig. 123.

En el momento en que comienza a rodar la circunferencia, el punto M coincide en el origen con T, punto de contacto de la circunferencia con OX. Cuando M y T lleguen a A, cada punto habrá hecho un recorrido igual a $2\pi r$, es decir, en todo instante genérico, la distancia OT es igual al arco TM. Teniendo presente que cuando la medida del ángulo se da en radianes, el arco es igual al radio multiplicado por el número que mide el ángulo, se puede escribir:

$$x = OP = OT - MN = r\theta - r \operatorname{sen} \theta;$$
$$y = PM = TC - NC = r - r \cos \theta;$$

de donde:

$$x = r(\theta - \operatorname{sen} \theta); \qquad (1)$$
$$y = r(1 - \cos \theta); \qquad (2)$$

que son las ecuaciones paramétricas de la cicloide.

Nota. Si el punto fijo que genera la cicloide, en vez de estar en la periferia del disco que rueda, está en el interior, genera una *cicloide reducida* o *acortada* (fig. 124) y, si está en la prolongación del radio, una *cicloide alargada* (fig. 125).

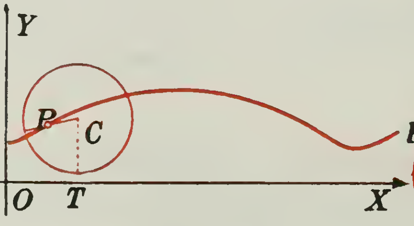


Fig. 124.

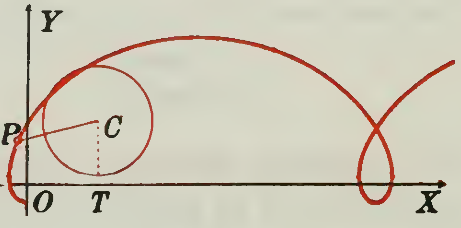


Fig. 125.

Estas dos curvas se designan con el nombre global de *trocoides.*

Para construir la cicloide por puntos, valiéndose de las ecuaciones que se acaban de obtener, dése al radio r un valor determinado, 2 por ejemplo, y tabúlese:

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	...
x	0	.046	.146	.362	1.14	...
y	0	.268	.586	1	2	...
Puntos	O	A	B	D	E	...

Represéntense los puntos A, B, D, E,... y únanse consecutivamente; resulta una curva como la de la figura 123.

183. Ecuación cartesiana de la cicloide. Para que en la ecuación buscada figuren las variables (x, y), es decir, desaparezca el parámetro θ, basta expresar θ y $\operatorname{sen}\theta$ en función de r, y, y luego sustituir en (1).

Por la figura 123 se tiene:

$$\cos\theta = \frac{CN}{CM} = \frac{r-y}{r};$$

de donde:

$$\theta = \text{áng}\cos\frac{r-y}{r}.$$

Además: $$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{1}{r}\sqrt{2ry-y^2};$$

por tanto: $$x = r\left(\text{áng}\cos\frac{r-y}{r} - \frac{1}{r}\sqrt{2ry-y^2}\right);$$

$$x = r\,\text{áng}\cos\frac{r-y}{r} - \sqrt{2ry-y^2};$$

que es la ecuación de la cicloide en coordenadas cartesianas.

Nota Se ve inmediatamente las ventajas que, con respecto a esta ecuación, ofrecen las ecuaciones paramétricas de la cicloide, si se quiere construir la curva por puntos.

184. Hipocicloide. Ecuaciones paramétricas. *La hipocicloide es la curva que describe un punto fijo de una circunferencia que rueda, sin resbalar, permaneciendo siempre tangente interiormente a otra circunferencia fija.*

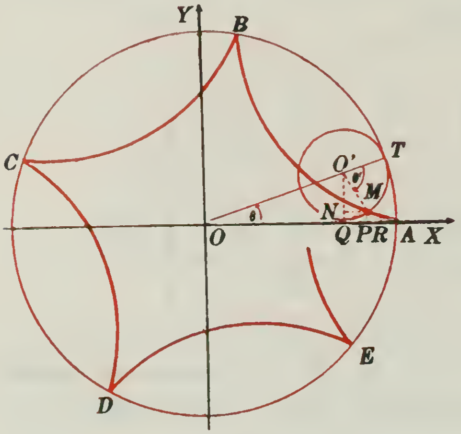


Fig. 126.

Sean a el radio de la circunferencia fija de centro O, b el radio de la circunferencia menor, de centro O', que rueda, permaneciendo siempre tangente interiormente a la circunferencia mayor, M el punto fijo de la circunferencia menor que describe la hipocicloide, y T el punto de tangencia (fig. 126).

En A coinciden M y T. Cuando M haya descrito la arcada AB, habrá girado 360°, y el punto T habrá recorrido el arco AB; o sea: $$\text{arco } AB = 2\pi b.$$

Por la figura se tiene, designando por φ el ángulo $O'MN$:

$$x = OP = OQ + NM = OO' \cos\theta + O'M \cos\varphi; \qquad (1)$$

$$y = PM = QO' - NO' = OO' \operatorname{sen}\theta - O'M \operatorname{sen}\varphi. \qquad (2)$$

Conviene expresar el ángulo φ en función de θ para que figure un parámetro solamente.

El ángulo θ' es exterior al triángulo $OO'R$; por tanto:

$$\theta' = \text{áng } O'OR + \text{áng } O'RO = \varphi + \theta;$$

o sea: $$\varphi = \theta' - \theta. \qquad (3)$$

Además, por la manera de ser generada la curva, el arco AT es igual al arco MT; de donde:

$$a\theta = b\theta', \quad \text{es decir:} \quad \theta' = \frac{a}{b}\theta;$$

valor que, sustituído en (3) da:

$$\varphi = \frac{a}{b}\theta - \theta = \frac{a-b}{b}\theta.$$

Sustitúyanse φ por este valor, OO' por $a-b$, $O'M$ por b, en (1) y (2); se obtiene:

$$x=(a-b)\cos\theta+b\cos\frac{a-b}{b}\theta;$$

$$y=(a-b)\operatorname{sen}\theta-b\operatorname{sen}\frac{a-b}{b}\theta;$$

que son las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide.

185. Astroide. Ecuaciones paramétricas. Si los radios de las circunferencias que intervienen en la generación de la hipocicloide son inconmensurables, la curva no vuelve a pasar por el punto inicial A. Pero, si los radios a y b son conmensurables, resulta una curva cerrada.

En el caso particular de que $b=\frac{1}{4}a$, *se obtiene una curva llamada astroide* (fig. 127).

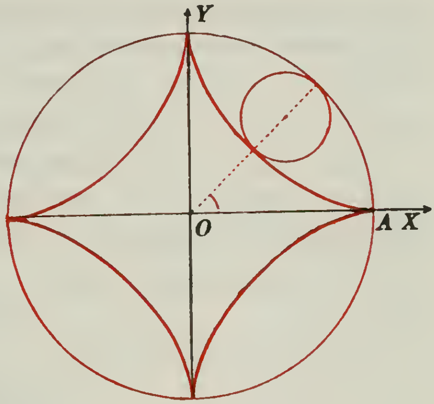


Fig. 127.

Las ecuaciones paramétricas de esta curva se deducen de las de la hipocicloide, sustituyendo b por $\frac{1}{4}a$:

$$x=\frac{a}{4}(3\cos\theta+\cos 3\theta);\quad (1)$$

$$y=\frac{a}{4}(3\operatorname{sen}\theta-\operatorname{sen}3\theta).\quad (2)$$

Sustitúyanse

$$\cos 3\theta \text{ por } 4\cos^3\theta-3\cos\theta,$$

$$\operatorname{sen}3\theta \text{ por } 3\operatorname{sen}\theta-4\operatorname{sen}^3\theta,$$

en (1) y (2), y redúzcase; se obtiene:

$$x=a\cos^3\theta;\qquad (3)$$

$$y=a\operatorname{sen}^3\theta;\qquad (4)$$

que son las ecuaciones paramétricas de la astroide.

186. Ecuación cartesiana de la astroide. Para obtener la ecuación cartesiana de esta curva, deduciéndola de sus ecuaciones paramétricas, puede procederse así:

Elévense (3) y (4) a la potencia $\frac{2}{3}$; resulta:

$$x^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cos^2 \theta ;$$
$$y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \operatorname{sen}^2 \theta .$$

Súmense miembro a miembro y sustitúyase $\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta$ por 1; se obtiene:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} ;$$

que es la ecuación cartesiana de la astroide.

La astroide es una curva tal, que la porción de tangente comprendida entre los ejes cartesianos, tiene una longitud constante.

187. Epicicloide. Ecuaciones paramétricas. *La epicicloide es la curva que describe un punto fijo de una circunferencia que rueda, sin resbalar, apoyándose en otra circunferencia fija, a la cual permanece siempre tangente exteriormente.*

Sean, como para la hipocicloide, a y b los radios de las circunferencias, O y O' sus centros, M el punto fijo que genera la curva, y T el punto de tangencia (fig. 128). Se tiene:

$$x = OP = OQ + NM = OO' \cos AOO' + O'M \cos O'MN$$
$$= OO' \cos AOO' - O'M \cos O'MR ; \quad (1)$$
$$y = PM = QO' - NO' = OO' \operatorname{sen} AOO' - O'M \operatorname{sen} O'MN$$
$$= OO' \operatorname{sen} AOO' - O'M \operatorname{sen} O'MR. \quad (2)$$

Designando por θ el ángulo AOO' y por θ' el ángulo $OO'M$, resulta que el ángulo $O'MR$ es igual a $\theta + \theta'$.

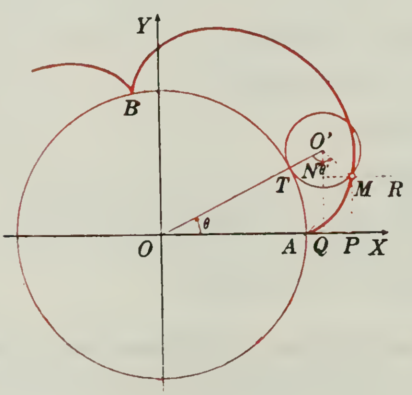


Fig. 128.

Para que en las ecuaciones paramétricas sólo figure el parámetro θ, considérese que, por el modo de ser generada la curva, el arco AT es igual al aco MT; por tanto:

$$b\theta' = a\theta ;$$
$$\theta' = \frac{a}{b}\theta ;$$
$$\theta + \theta' = \theta + \frac{a}{b}\theta = \frac{a+b}{b}\theta. \quad (3)$$

Sustituyendo OO' por $a+b$, $O'M$ por b y $O'MR$ por $\frac{a+b}{b}\theta$ de (3), se obtiene:

$$x = (a+b)\cos\theta - b\cos\frac{a+b}{b}\theta;$$

$$y = (a+b)\operatorname{sen}\theta - b\operatorname{sen}\frac{a+b}{b}\theta;$$

éstas son las ecuaciones paramétricas de la epicicloide.

EJERCICIO 23

1. Haciendo variar θ de 0 a 2π, constrúyase una arcada de cicloide, valiéndose de sus ecuaciones paramétricas.

2. Limitándose a una sola arcada de cicloide, ¿en qué intervalo crece la ordenada? ¿en cuál decrece? ¿tiene una arcada algún eje de simetría?

3. Notando que $PM = QN$ (fig. 129), y considerando el radio del círculo menor $= b$ y el del círculo principal $= a$, obténganse las ecuaciones paramétricas de la elipse.

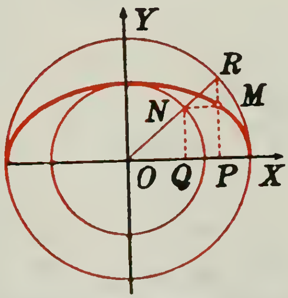


Fig. 129.

4. Constrúyase la astroide, partiendo de sus ecuaciones paramétricas.

5. Por la ecuación cartesiana de la astroide, hágase ver que es una curva doblemente simétrica, es decir, que lo es con respecto a $X'X$ y a $Y'Y$.

6. Transfórmese la ecuación de la astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ y obténgase $27a^2x^2y^2 = (a^2 - x^2 - y^2)^3$.

7

CORDENADAS POLARES

I. GENERALIDADES
ECUACION DE LA RECTA Y DE LAS CONICAS

188. Localización de un punto. Sea P un punto fijo de una recta PX, también fija (fig. 130).

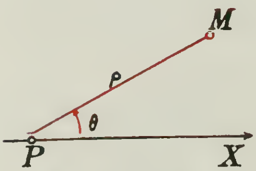


Fig. 130.

Un punto cualquiera M del plano que contiene PX, estará bien localizado si se conoce la distancia MP al punto fijo, y el ángulo XPM.

La recta fija PX y el punto fijo P forman un marco de referencia, como los ejes coordenados en el sistema cartesiano.

La recta PX *se llama eje polar y el punto* P, *polo.*

La distancia MP *y el ángulo* XPM *se denominan coordenadas polares del punto* M. MP *es el radio vector, y se designa muchas veces con* ρ; *el ángulo* XPM *se llama argumento, ángulo vectorial y también ángulo polar o de dirección, y suele designarse con* θ.

189. Notación. Para indicar que las coordenadas de un punto M son, por ejemplo, $\rho = 3$ y $\theta = \frac{\pi}{4}$, se escribe $M\left(3, \frac{\pi}{4}\right)$.

190. Signos de las coordenadas. Si el lado móvil del ángulo se mueve, a partir de la posición inicial PX, siguiendo la *dirección contraria* a la de las manecillas de un reloj, el ángulo generado es *positivo;* es *negativo* si se mueve en la *misma dirección* que las manecillas.

Si el vector es positivo, se toma en el lado móvil del ángulo, partiendo de P; si es negativo, se toma en la dirección contraria a la de dicho lado móvil.

Las figuras 131, 132, 133 y 134 dan la representación de los puntos $M(2, 30°)$, $N(3, -20°)$, $R(-3, 40°)$ y $S(-5, -25°)$.

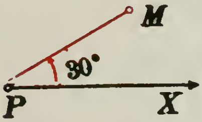


Fig. 131.

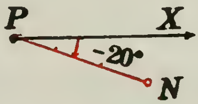


Fig. 132.

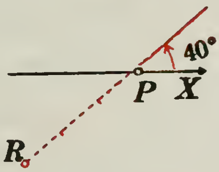


Fig. 133.

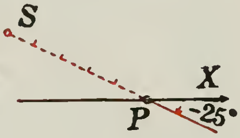


Fig. 134.

Cada par de valores de ρ y θ determina un punto, pero un mismo punto puede designarse por cuatro pares distintos de coordenadas. Así, el punto $M(2, 30°)$, puede designarse igualmente por $M(2, -330°)$, $M(-2, 210°)$, $M(-2, -150°)$, como se ve en las figuras 135, 136, 137 y 138.

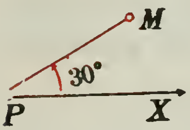


Fig. 135.

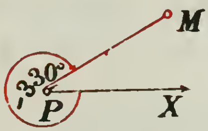


Fig. 136.

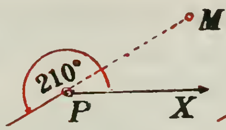


Fig. 137.

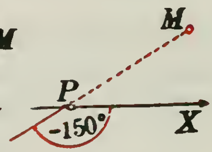


Fig. 138.

191. Simetría. Si las coordenadas de M y N (fig. 139), son (ρ, θ) y $(-\rho, \theta)$, esos puntos son *simétricos* con respecto al polo; el polo es *centro de simetría;* y si la ecuación polar de una línea no cambia al sustituir ρ por $-\rho$, el polo es centro de simetría de esa línea.

Si las coordenadas de M y M' (fig. 139) son (ρ, θ) y $(\rho, -\theta)$, el eje PX es perpendicular en el punto medio del segmento MM'. En este caso, M y M' son simétricos con respecto al eje polar, que es el *eje de simetría*. El eje polar es eje de simetría de una curva si la ecuación polar de ésta no cambia al sustituir el argumento θ por su simétrico $-\theta$.

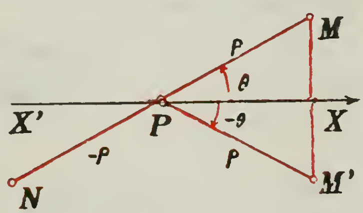


Fig. 139.

192. Relación entre coordenadas cartesianas y polares. Si el eje polar coincide con OX, y O es el polo (fig. 140), se tiene, llamando θ el ángulo XOM y ρ la distancia OM:

$$ON = OM \cos\theta; \quad \text{o sea:} \quad x = \rho\cos\theta;$$

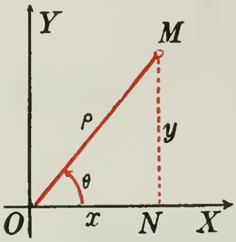


Fig. 140.

$$NM = OM \operatorname{sen}\theta;$$

o sea: $$y = \rho \operatorname{sen}\theta.$$

Inversamente: $$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\theta = \text{áng}\cos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\theta = \text{áng}\operatorname{sen}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\theta = \text{áng}\tan\frac{y}{x}.$$

Como aplicación, se dan en seguida la ecuación polar de la recta y las de las cónicas, considerando el polo en el origen y el eje polar coincidente con $X'X$.

193. Ecuación polar de la recta. Sea $y = mx + b$ la ecuación de una recta. Sustituyendo x y y por $\rho\cos\theta$, $\rho\operatorname{sen}\theta$, se obtiene, sucesivamente:

$$\rho\operatorname{sen}\theta = m\rho\cos\theta + b;$$

$$\rho(\operatorname{sen}\theta - m\cos\theta) = b;$$

de donde: $$\boldsymbol{\rho = \frac{b}{\operatorname{sen}\theta - m\cos\theta}}.$$

194. Ecuación polar de la circunferencia. Sea $x^2 + y^2 = r^2$ la circunferencia dada. Hágase la sustitución como en el caso anterior, y se obtiene:

$$\rho^2\operatorname{sen}^2\theta + \rho^2\cos^2\theta = r^2;$$

$$\rho^2(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) = r^2;$$

$$\rho^2 = r^2;$$

o sea: $$\boldsymbol{\rho = \pm r},$$

que es la ecuación pedida.

El doble signo indica que para todo valor de θ, el vector encuentra la circunferencia a una distancia r del polo, tanto en la dirección positiva como en la negativa.

195. Ecuación polar de la parábola. Sea $y^2 = 4px$ la ecuación dada. Se tiene, sustituyendo:

$$\rho^2 \operatorname{sen}^2 \theta = 4p\rho \cos \theta ;$$

o sea, dividiendo entre ρ y despejando:

$$\rho = \frac{4p \cos \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta}.$$

196. Ecuación polar de la elipse. Sea $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ la elipse. Sustituyendo como en los casos anteriores, se obtiene, sucesivamente:

$$b^2\rho^2 \cos^2 \theta + a^2\rho^2 \operatorname{sen}^2 \theta = a^2b^2 ;$$

$$\rho^2 (b^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta) = a^2b^2 \cdot$$

de donde:

$$\rho^2 = \frac{a^2b^2}{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}.$$

Divídanse ambos términos del quebrado entre a^2 y sustitúyase $\operatorname{sen}^2 \theta$ por $(1 - \cos^2 \theta)$:

$$\rho^2 = \frac{b^2}{\frac{b^2}{a^2} \cos^2 \theta + \frac{a^2}{a^2} (1 - \cos^2 \theta)} = \frac{b^2}{1 - \cos^2 \theta \, \frac{a^2 - b^2}{a^2}}.$$

Sustitúyase $a^2 - b^2$ por c^2 y $\frac{c^2}{a^2}$ por e^2; resulta:

$$\rho^2 = \frac{b^2}{1 - e^2 \cos^2 \theta}; \qquad \rho = \pm \frac{b}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta}}.$$

197. Ecuación polar de la hipérbola. Efectuando operaciones análogas con la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, se llega al siguiente resultado:

$$\rho^2 = \frac{b^2}{e^2 \cos^2 \theta - 1}; \qquad \rho = \pm \frac{b}{\sqrt{e^2 \cos^2 \theta - 1}}.$$

Nota. A continuación se expone cómo se obtienen la ecuación polar de la recta y las de las cónicas, sin establecer relación alguna entre las coordenadas cartesianas y las coordenadas polares.

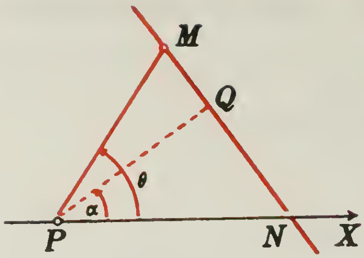


Fig. 141.

198. Ecuación polar de la recta Sean PX el eje polar y P el polo, NM una recta cualquiera, M un punto móvil de la recta, $PM = \rho$ y $PQ = p$ la longitud de la perpendicular PQ (fig. 141).

Designando por θ el ángulo variable XPM y por α el ángulo XPQ, se tiene:

$$PM = PQ \sec QPM$$
$$= PQ \sec(\theta - \alpha);$$

o sea:
$$\rho = p \sec(\theta - \alpha).$$

Si $\alpha = 90°$, la recta NM es paralela a PX, y su ecuación es:

$$\rho = p \sec(\theta - 90°)$$
$$= p \csc \theta.$$

Si $\alpha = 0°$, la recta NM es perpendicular a PX, y su ecuación es:

$$\rho = p \sec \theta.$$

199. Ecuación polar de la circunferencia. Sean $C(m, \gamma)$ y r el centro y el radio de la circunferencia; PX el eje polar, P el polo, M (ρ, θ) un punto móvil cualquiera de la circunferencia, $PC = m$, y γ el ángulo XPC (fig. 142).

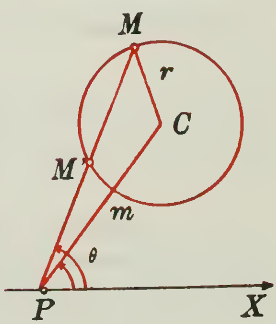


Fig. 142.

Por el triángulo PCM, se tiene:

$$r^2 = \rho^2 + m^2 - 2m\rho \cos(\theta - \gamma);$$
$$\rho^2 - 2m\rho \cos(\theta - \gamma) + m^2 - r^2 = 0.$$

Resolviendo en ρ, se obtiene:

$$\rho = m \cos(\theta - \gamma) \pm \sqrt{m^2 \cos^2(\theta - \gamma) + r^2 - m^2},$$

en que, para todo valor de θ que haga positivo el radicando, resultan 2 valores para ρ.

Si $\theta = \gamma$, $\qquad \rho = m \pm r.$

Si C está en PX y $\gamma = 0$, entonces la ecuación es:

$$\rho^2 - 2m\rho\cos\theta + m^2 - r^2 = 0;$$

$$\rho = m\cos\theta \pm \sqrt{m^2(\cos^2\theta - 1) + r^2}.$$

Si C está en PX y P en la circunferencia, $m = r$, y la ecuación toma la forma

$$\rho^2 - 2m\rho\cos\theta = 0;$$

$$\rho = 2m\cos\theta.$$

200. Ecuación polar de la parábola (polo en el foco). Sean FX el eje polar, F el foco y $M(\rho, \theta)$ un punto de la curva (fig. 143).

Se tiene:

$$MF = DM = \rho; \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} DM &= DS + SM \\ &= 2p + FM\cos\theta \\ &= 2p + \rho\cos\theta. \qquad (2) \end{aligned}$$

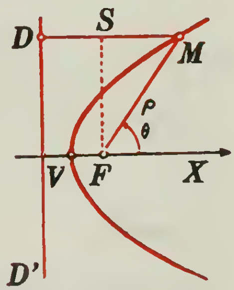


Fig. 143.

Sustituyendo (2) en (1), se obtiene, sucesivamente:

$$\rho = 2p + \rho\cos\theta;$$

$$\rho = \frac{2p}{1 - \cos\theta},$$

que es la ecuación buscada.

De su examen se infiere:

1º La curva es simétrica con respecto al eje polar, porque ρ adquiere valores iguales para valores simétricos de θ.

2º La curva es abierta, o sea, ρ puede ser ∞, lo cual sucede si $1 - \cos\theta = 0$, es decir, si $\theta = 0°$.

3º Si $\theta = 90°$, $\rho = 2p$, valor del semiancho focal, y si $\theta = 180°$, $\rho = p$, valor correspondiente al vértice V.

201. Ecuación polar de la elipse (polo en un foco). Sean F' el polo, $F'X$ el eje polar, $M(\rho, \theta)$ un punto móvil de la curva, $F'M = \rho$ y $FM = \rho'$ (fig. 144).

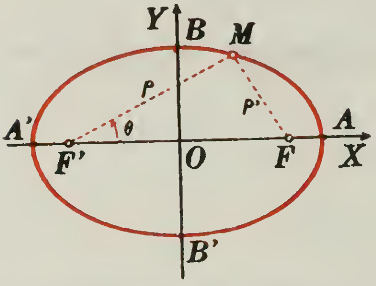


Fig. 144.

Por la propiedad de la curva, se tiene:

$$\rho + \rho' = 2a;$$
$$\rho' = 2a - \rho;$$
$$\rho'^2 = 4a^2 - 4a\rho + \rho^2. \quad (1)$$

El triángulo $F'FM$ permite escribir:

$$\rho'^2 = \rho^2 + 4c^2 - 2\rho\, 2c \cos\theta. \quad (2)$$

Igualando (1) y (2) se obtiene, sucesivamente:

$$4a^2 - 4a\rho + \rho^2 = \rho^2 + 4c^2 - 4c\rho\cos\theta;$$
$$a^2 - a\rho = c^2 - c\rho\cos\theta;$$
$$a^2 - c^2 = a\rho - c\rho\cos\theta.$$

Sustituyendo $a^2 - c^2$ por b^2 y c por ae, resulta:

$$b^2 = a\rho(1 - e\cos\theta);$$

de donde:

$$\rho = \frac{b^2 : a}{1 - e\cos\theta}.$$

Si, para simplificar la expresión, se sustituye el numerador por $2p$, se obtiene:

$$\rho = \frac{2p}{1 - e\cos\theta},$$

que es la ecuación polar de la elipse con polo en un foco.

Del examen de esta ecuación se deduce que:

1º La curva es simétrica con respecto al eje polar, porque el valor de ρ no cambia sustituyendo θ por $-\theta$.

2º ρ no puede ser infinito, o sea, la curva es cerrada. Para que ρ resultase infinito se necesitaría que el denominador fuera igual a cero, o sea, que

$$\cos\theta = \frac{1}{e} = \frac{a}{c} > 1,$$

lo cual es imposible.

3º Si $\theta = 0°$, $\rho = \dfrac{b^2 : a}{1 - c : a} = \dfrac{b^2}{a - c} = \dfrac{b^2(a + c)}{a^2 - c^2} = a + c$, es decir, el vector que corresponde al vértice A.

4º Si $\theta = 90°$, $\rho = \dfrac{b^2}{a}$, valor del semiancho focal.

5º Si $\theta = 180°$, $\rho = \dfrac{b^2 : a}{1 + c : a} = \dfrac{b^2}{a + c} = \dfrac{b^2(a - c)}{a^2 - c^2} = a - c$, o sea, el vector que corresponde al vértice A'.

202. Ecuación polar de la hipérbola (polo en un foco). Sean, como para la elipse, F' el polo, $F'X$ el eje polar, $M(\rho, \theta)$ un punto móvil de la curva, $F'M = \rho$ y $FM = \rho'$ (fig. 145).

Procediendo como para la elipse, se obtiene:

$$\rho - \rho' = 2a;$$
$$\rho' = \rho - 2a;$$
$$\rho'^2 = \rho^2 - 4a\rho + 4a^2. \qquad (1)$$

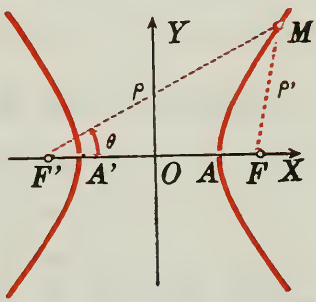


Fig. 145.

El triángulo $F'FM$ permite escribir:

$$\rho'^2 = \rho^2 + 4c^2 - 2\rho\, 2c \cos\theta. \quad (2)$$

Iguálense (1) y (2), redúzcase y simplifíquese; se obtiene:

$$\rho^2 - 4a\rho + 4a^2 = \rho^2 + 4c^2 - 4c\rho\cos\theta;$$
$$c\rho\cos\theta - a\rho = c^2 - a^2.$$

Sustitúyanse $c^2 - a^2$ por b^2, y c por ae; se obtiene:

$$a\rho(e\cos\theta - 1) = b^2;$$

por tanto:
$$\rho = \frac{b^2 : a}{e\cos\theta - 1}.$$

Reemplazando $b^2 : a$ por $2p$, se tiene:

$$\rho = \frac{2p}{e\cos\theta - 1},$$

que es la ecuación polar de la hipérbola, con polo en un foco.

Del examen de esta ecuación se deduce:

1º La curva es simétrica con respecto al eje polar.

2º La curva es abierta, o sea, ρ puede ser ∞, lo cual sucede si $e \cos \theta = 1$, es decir, si $\cos \theta = \frac{a}{c}$; en este caso el vector es asíntota de la hipérbola.

3º Si $\theta = 0°$, $\rho = \frac{b^2 : a}{e - 1} = \frac{b^2}{c - a} = \frac{b^2(c + a)}{c^2 - a^2} = c + a$; es decir, el vector que corresponde al vértice A.

4º Si $\theta = 90°$, $\rho = \frac{b^2}{a}$, valor del semiancho focal.

5º Si $\theta = 180°$, $\rho = \frac{b^2 : a}{-e - 1} = -\frac{b^2}{c + a} = -\frac{b^2(c - a)}{c^2 - a^2} = a - c$; o sea, el vector que corresponde al vértice A'.

Las 3 últimas ecuaciones pueden condensarse en la fórmula

$$\rho = \frac{2p}{1 - e \cos \theta}.$$

Efectivamente: si en ella se hace:

$e < 1$, se obtiene la ecuación de la elipse;

$e = 1$, se obtiene la ecuación de la parábola;

$e > 1$, se obtiene la ecuación de la hipérbola (la de la figura 145, pero con F como polo).

203. Problema inverso. Dada la ecuación de una curva en coordenadas polares, escribirla en el sistema cartesiano.

Sea la curva $$\rho = \frac{6}{2 - \cos \theta}.$$

Puede sustituirse desde luego ρ por $\sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos \theta$ por $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ y efectuar; pero, para evitar expresiones complicadas, conviene multiplicar antes ambos miembros por ρ; así se obtiene:

$$\rho^2 = \frac{6\rho}{2 - \frac{x}{\rho}} = \frac{6\rho}{\frac{2\rho - x}{\rho}} = \frac{6\rho^2}{2\rho - x}.$$

Divídanse ambos miembros entre ρ^2 y dése forma entera; resulta:

$$2\rho - x = 6.$$

Sustituyendo ρ en función de x y de y, se obtiene:

$$2\sqrt{x^2+y^2}-x=6;$$
$$2\sqrt{x^2+y^2}=6+x;$$
$$4x^2+4y^2=36+12x+x^2;$$
$$3x^2-12x+4y^2=36;$$
$$\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1,$$

que es la ecuación de una elipse, de centro $C(2,0)$, $a=4$ y $b=2\sqrt{3}$.

EJERCICIO 24

Escribir en 4 formas distintas las coordenadas de los puntos siguientes:

1. $M(2, 45°)$.
2. $N(3, -60°)$.
3. $R(-4, 30°)$.
4. $S(-5, -45°)$.

Obténgase, en coordenadas polares, la ecuación de:

5. La recta perpendicular al eje polar, a una distancia $PA=5$ unidades del polo.

6. La recta paralela al eje polar, a una distancia $PB=4$ unidades del eje.

7. La recta cuya distancia mínima al polo es 6 unidades, sabiendo que forma con el eje polar un ángulo de 30°.

8. La circunferencia de radio r, que tenga su centro en PX y pase por el polo P.

Obténgase la ecuación polar de las siguientes curvas:

9. Parábola, polo en el foco, dado $2p=4$.

10. Elipse, polo en el foco, dado $a=5$, $b=4$.

11. Hipérbola, polo en un foco, dado $a=2$, $b=5$.

12. Demuéstrese que en una parábola (polo en el foco), la cuerda que pasa por el foco y forma un ángulo de 45° con el eje polar, es el doble del ancho focal.

13. Desde un punto fijo de una circunferencia se trazan secantes, y en cada una se toma, fuera de la curva, una distancia doble de la parte de la secante encerrada en la circunferencia. ¿Qué curva se obtiene?

14. Un cometa describe una órbita parabólica, en la cual el Sol ocupa el foco. Sabiendo que cuando la recta que va del cometa al Sol forma con el eje de simetría de la curva un ángulo de 60°, el cometa dista 160 000 millones de km del Sol, ¿cuál es la ecuación polar de la parábola? ¿Cuál es la distancia mínima del cometa al Sol?

15. Suponiendo que $F'F$ (fig. 144), coincide con el eje $X'X$ y su punto medio es el origen de los ejes cartesianos, y considerando $M(x_1, y_1)$, obténgase la ecuación de la elipse en coordenadas polares, polo en F'', partiendo del valor $\rho' = a + ex_1$ a que se llegó en el Nº 160.

16. Misma pregunta con respecto a la hipérbola (fig. 145) partiendo del valor $\rho' = a + ex_1$, obtenido en el Nº 161.

Escribir las ecuaciones siguientes en coordenadas polares, tomando OX como eje polar, y O como polo.

17. $x^2 + y^2 = 16.$

18. $x^2 + y^2 = 12x.$

19. $x^2 + y^2 + 8x = 0.$

20. $x^2 - y^2 = 9.$

21. $xy = 2.$

22. $2x^2 + 3y^2 = 12.$

23. $3x^2 - 5y^2 = 6.$

24. $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2).$

Escribir las ecuaciones siguientes en coordenadas cartesianas, tomando el eje polar como eje de las abscisas, y el polo como origen.

25. $\rho \operatorname{sen} \theta = 2.$

26. $\rho \cos \theta = -3.$

27. $\rho = 4 \cos \theta.$

28. $\rho = 2 \operatorname{sen} 2\theta.$

29. $\rho = \dfrac{16 \cos \theta}{5 - \cos^2 \theta}.$

30. $\rho = \dfrac{4 \cos \theta}{1 - \cos^2 \theta}.$

31. $\rho = \dfrac{5}{3 \cos \theta - 2}.$

32. $\rho = \dfrac{8 \cos \theta}{3 - \cos^2 \theta}.$

II. GRAFICAS — ECUACION POLAR DE ALGUNAS CURVAS

204. Gráfica de una ecuación en coordenadas polares. Conocida la ecuación polar de un lugar geométrico, puede construirse la curva representativa. Para obtener la gráfica atribúyanse valores al ángulo θ, que se toma como variable independiente, y calcúlense los valores correspondientes de ρ, tabulando.

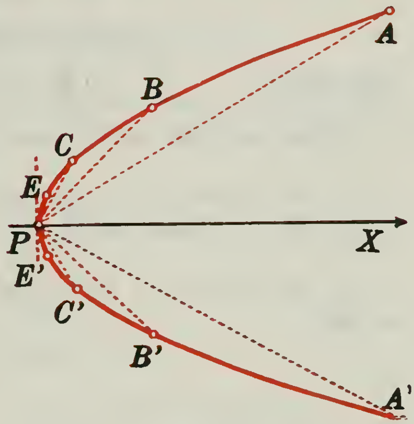


Fig. 146.

Sea, por ejemplo, la ecuación:

$$\rho = \frac{2 \cos \theta}{1 - \cos^2 \theta}.$$

θ	0	$\pm 30°$	$\pm 45°$	$\pm 60°$	$\pm 75°$	$\pm 90°$
ρ	∞	6.92	2.828	1.33	.55	0
Puntos		A, A'	B, B'	C, C'	E, E'	P

Unanse los puntos $A, B, C, E, P, E', C', B', A'$, y se obtiene la curva representada en la figura 146, que es una parábola.

Nota. — Si se dan más valores a θ, por ej., $\theta = \pm 120°$, se obtiene $\rho = -1.33$, coordenadas de los puntos C y C' ya localizados.

205. Obtención de algunas ecuaciones. 1º *El caracol de Pascal.* Con centro en una recta fija OX, descríbase una circunferencia de radio r, que pase por un punto fijo O. Trácese una secante móvil OP apoyada en O, y tómese, en dicha secante, de uno y otro lado del punto P, una longitud constante a, con lo cual se obtienen puntos análogos a M y M'. El lugar de los puntos M y M' se llama *caracol de Pascal* (fig. 147).

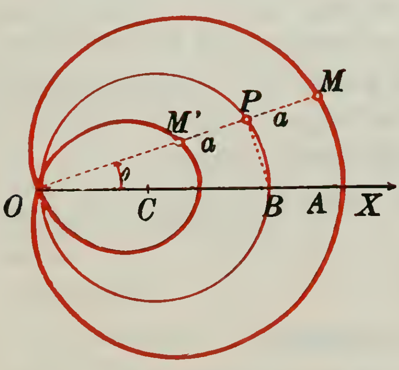


Fig. 147.

Su ecuación en coordenadas polares, si se toman OX como eje polar y el punto O como polo, es:

$$\rho = OP \pm a;$$

$$OP = OB \cos\theta = 2r \cos\theta;$$

por tanto: $$\rho = 2r \cos\theta \pm a.$$

Notas. — 1ª Si $a < 2r$, la forma de la curva es la de la fig. 147.

2ª Si $a = 2r$, la curva que se obtiene es la representada en la figura 148, y se llama *cardioide*.

3ª Si $a > 2r$, la forma de la curva es la representada en la figura 149.

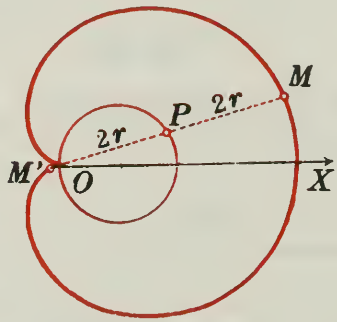


Fig. 148.

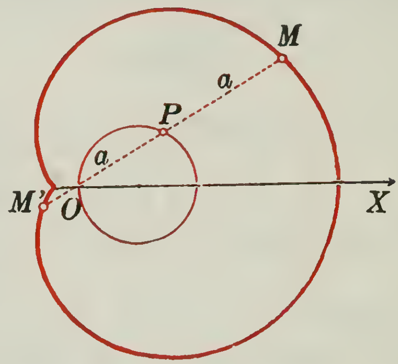


Fig. 149.

2º *La rosa de las cuatro ramas.* Trácense dos rectas perpendiculares, OX, OY (fig. 150). Hágase deslizar una recta de longitud constante $PQ = 2a$, de manera que el punto P se mueva siempre en OX y Q en OY. Trácense, desde el punto O, perpendiculares a la recta PQ: el lugar de los puntos M se llama *rosa de las cuatro ramas*.

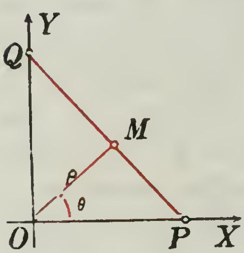


Fig. 150.

Tómense OX como eje polar y O como polo.

Se tiene:

$$\rho = OP \cos\theta;$$

$$OP = PQ \operatorname{sen}\theta = 2a \operatorname{sen}\theta;$$

de donde: $\rho = 2a \operatorname{sen} \theta \cos \theta$;

o sea, sustituyendo $2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$ por $\operatorname{sen} 2\theta$:

$$\rho = a \operatorname{sen} 2\theta,$$

que es la ecuación de la curva en coordenadas polares.

Para obtener la ecuación de esta curva en coordenadas cartesianas, sustitúyanse ρ, $\cos \theta$ y $\operatorname{sen} \theta$ por sus valores, y se obtiene:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2a \frac{xy}{x^2 + y^2};$$

$$(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = 2axy;$$

$$(x^2 + y^2)^3 = (2axy)^2.$$

Para construir la curva de las cuatro ramas, partiendo de su ecuación en coordenadas polares, tabúlese primero. Haciendo $a = 1$; se obtiene:

θ	15°	22.5°	30°	45°	60°	67.5°	75°	90°
ρ	.5	.707	.86	1	.86	.707	.5	0
θ	105°	112.5°	120°	135°	150°	157.5°	165°	180°
ρ	−.5	−.707	−.86	−1	−.86	−.707	−.5	0
θ	195°	202.5°	210°	225°	240°	247.5°	255°	270°
ρ	.5	.707	.86	1	.86	.707	.5	0
θ	285°	292.5°	300°	315°	330°	337.5°	345°	360°
ρ	−.5	−.707	−.86	−1	−.86	−.707	−.5	0

Haciendo variar θ entre 0° y 90°, se obtiene la rama del primer cuadrante. Si varía de 90° a 180°, resulta la rama del cuarto cuadrante; si varía de 180° a 270°, la rama que se obtiene es la del tercer cuadrante, y haciéndola variar de 270° a 360°, la rama que resulta es la del segundo cuadrante.

La curva es la representada en la figura 151.

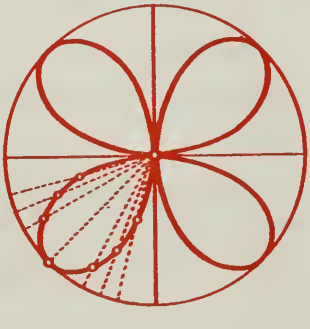


Fig. 151.

206. La espiral de Arquímedes. Considérese la ecuación

$$\rho = c\theta,$$

en que c es una constante arbitraria.

El lugar de la ecuación es el de los puntos tales que la variación del vector es directamente proporcional a la del ángulo vectorial correspondiente.

Suponiendo $c = \frac{1}{2}$, se obtiene, tabulando:

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
ρ	0	.26	.52	.79	1.04	1.3	1.57	1.8	2.1	2.37	2.6	2.86	3.14
Puntos	O	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L

Localícense los puntos A, B, C, etc., y únanse después consecutivamente. La curva que resulta se llama *espiral de Arquímedes,* y es la representada en la figura 152.

207. Observaciones. Por la tabulación se ve que la curva pasa por el polo, y que el radio vector aumenta indefinidamente con θ.

Si (ρ_1, θ_1) es un punto de la curva, y (ρ_2, θ_2) es otro punto tal que $\theta_2 = \theta_1 + 2\pi$, se tiene:

$$\rho_2 = c(\theta + 2\pi);$$
$$\rho_2 = c\theta_1 + 2c\pi.$$

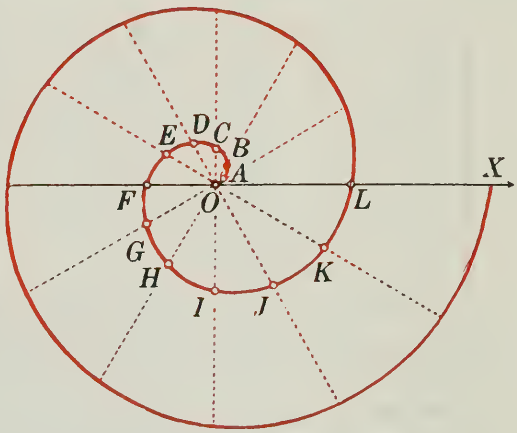


Fig. 152.

Pero, por la ecuación de la curva, $c\theta_1 = \rho_1$, y $2c\pi = OL$; por tanto:

$$\rho_2 = \rho_1 + OL;$$

es decir, la distancia entre dos puntos consecutivos en que la curva encuentra un mismo vector, es constante.

208. La espiral logarítmica. Considérese la ecuación

$$\log \rho = c\theta,$$

en que c es una constante arbitraria.

El lugar de la ecuación es el de los puntos tales que la variación del logaritmo del vector es directamente proporcional a la del ángulo vectorial correspondiente.

Si $c = 1$ y la base de los logaritmos es cierto número a, la ecuación dada se puede escribir:

$$\rho = a^{\theta}.$$

Suponiendo $a = 2$, se obtiene, tabulando:

θ	$-\infty$	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...	∞
ρ	0	...	.125	.25	.5	1	2	4	8	...	∞
Puntos	O	...	A	B	C	D	E	F	G	...	

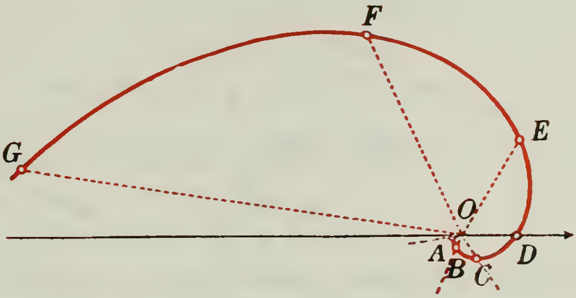


Fig. 153.

Localícense los puntos A, B, C, etc., tomando los valores de θ en unidades cíclicas o radianes $(1 = 57.3°)$ y únanse después consecutivamente los puntos obtenidos; resulta la curva llamada *espiral logarítmica,* que es la representada en la figura 153.

EJERCICIO 25

Constrúyanse las curvas cuyas ecuaciones son:

1. $\rho = 4\cos(\theta - 10°)$.
2. $\rho = 6\cos(\theta + 10°)$.
3. $\rho = 2\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}$.
4. $\rho = 4\cos\frac{\theta}{3}$.
5. $\rho = \pm 2\sqrt{\cos 2\theta}$.
6. $\rho = 3 + \cos 5\theta$.
7. $\rho = \dfrac{10\cos\theta}{3 - \cos^2\theta}$.
8. $\rho = 2\cos 3\theta$.

9. $\rho = 4 \operatorname{sen} 3\theta$.

10. $\rho = 2 \operatorname{sen} 4\theta$.

11. $\rho = 3(1 + \cos 2\theta)$.

12. $\rho = 4 + 2 \operatorname{sen} \frac{3\theta}{2}$.

III ALGUNAS CURVAS NOTABLES

209. La bruja. Sea una circunferencia de radio a, tangente a $X'X$ y centro en $Y'Y$. Trácense AN tangente a la circunferencia, y la secante OS que corta AN en N. Trácense, luego, SM paralela a $X'X$ y NM paralela a $Y'Y$. El lugar de las intersecciones de las dos paralelas se llama *bruja* (figura 154).

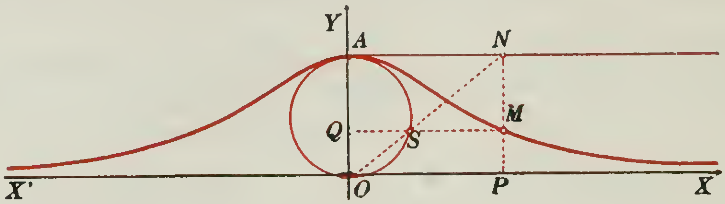


Fig. 154.

Para obtener su ecuación puede procederse así:

Sean (x, y) las coordenadas del punto M. Dada la semejanza de los triángulos OQS y OAN, se puede escribir:

$$\frac{OQ}{QS} = \frac{OA}{AN}. \qquad (1)$$

Pero, $OQ = PM = y$; $QS = \sqrt{OQ \times QA} = \sqrt{y(2a - y)}$;
$OA = 2a$; $AN = OP = x$.

Sustituyendo en (1), resulta:

$$\frac{y}{\sqrt{y(2a - y)}} = \frac{2a}{x};$$

o sea:

$$x^2 y = 4a^2(2a - y).$$

Efectuando el producto indicado y despejando y, se obtiene:

$$y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2},$$

que es la ecuación buscada.

Del examen de esta ecuación se deduce:

1º La curva es simétrica con respecto a $Y'Y$, pues no cambia la ecuación sustituyendo x por $-x$.

2º La ordenada es siempre positiva; luego la curva está toda en el primer y segundo cuadrantes.

3º La ordenada tiende a cero cuando x tiende a infinito, es decir, el eje $X'X$ es asíntota de la curva.

4º La curva está comprendida entre las rectas $y = 0$, $y = 2a$.

Nota. — Esta curva fué ideada por Guido Grandi (1671-1742) y ordinariamente, pero con error, es atribuída a María G. Agnesi (1718-1799). Tal error se debe a que esta matemática trató de esta curva en sus "Instituciones Analíticas" (Milán, 1748).

210. La cisoide. Trácense la circunferencia de radio a, y centro $C(a, 0)$, y en el extremo del diámetro OA, la tangente AT a la circunferencia (fig. 155).

Por el origen trácese la secante OS, y sobre ésta tómese $OM = NS$.

El lugar de los puntos M es la curva llamada *cisoide*.

Para obtener la ecuación de esta curva en coordenadas cartesianas, considérense los triángulos iguales OPM y NBS, y los triángulos semejantes OPM y OQN.

Puede escribirse:

$$OP = NB; \quad \frac{PM}{OP} = \frac{QN}{OQ}. \qquad (1)$$

Pero, $PM = y$; $\quad OP = x$;

$$QN = \sqrt{OQ \times QA} = \sqrt{(2a-x)x}.$$

Sustituyendo estos valores en (1), se obtiene: $\dfrac{y}{x} = \dfrac{\sqrt{(2a-x)x}}{2a-x}.$

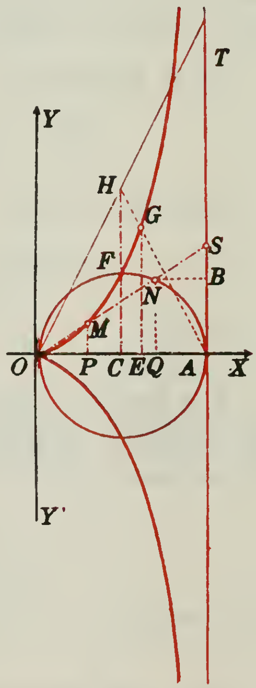


Fig. 155.

Elévese al cuadrado y despéjese y^2; resulta:

$$y^2 = \frac{x^3}{2a-x}, \qquad (2)$$

que es la ecuación buscada.

Examinando esta ecuación puede observarse que:

1º La curva es simétrica con respecto a $X'X$, pues la ecuación no cambia sustituyendo y por $-y$.

2º Toda la curva está comprendida entre las rectas $x=0$, $x=2a$.

3º La curva tiene como asíntota la recta $x=2a$.

Nota. Esta curva fue ideada por el matemático griego Diocles para resolver el problema de la duplicación del cubo, es decir, para obtener, gráficamente, la arista de un cubo cuyo volumen resulte doble del volumen de otro cubo dado.

Para ver cómo de la ecuación de la curva se obtiene la solución del problema, prolónguese CF en una longitud FH igual al radio, y únase H con A. Por el punto G en que la recta AH corta la cisoide, trácese EG perpendicular a OX.

De la semejanza de los triángulos ACH y AEG, se deduce:

$$\frac{EG}{EA}=\frac{CH}{CA}=2, \qquad \text{o sea:} \qquad EG=2EA.$$

Por (2) se tiene:

$$\overline{EG}^2=\frac{\overline{OE}^3}{EA}=\frac{\overline{OE}^3}{\frac{1}{2}\,\overline{EG}};$$

es decir:

$$\overline{EG}^3=2\overline{OE}^3.$$

Por tanto, si a es la arista de un cubo dado y se quiere que a' lo sea de otro de volumen doble, constrúyase una cuarta proporcional entre OE, EG y a:

$$\frac{a'}{a}=\frac{EG}{OE}; \qquad \frac{a'^3}{a^3}=\frac{\overline{EG}^3}{\overline{OE}^3}=2;$$

de donde:

$$a'^3=2a^3.$$

211. La concoide. Sean O un punto fijo, exterior a una recta fija AR. Por O trácense secantes como OS y tómense sobre cada secante, y de uno y otro lado de AR, longitudes $SM=SM'$, iguales a una constante c (fig. 156). El lugar de los puntos M y M' se llama *concoide*.

Para obtener la ecuación de la curva en coordenadas cartesianas, trácense OX paralela a AR y OY perpendicular a esa misma recta.

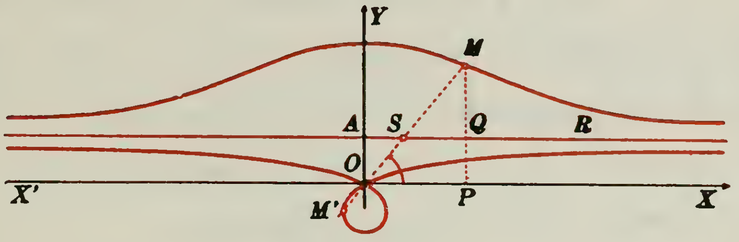


Fig. 156.

Por la semejanza de los triángulos OPM y SQM, se tiene:

$$\frac{PM}{QM} = \frac{OM}{SM}. \qquad (1)$$

Designando por a la distancia OA y notando que

$$OM = \sqrt{\overline{OP}^2 + \overline{PM}^2} = \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$QM = PM - PQ = y - a,$$

se obtiene, sustituyendo en (1):

$$\frac{y}{y-a} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{c};$$

o sea, elevando al cuadrado y dando forma entera:

$$(x^2 + y^2)(y - a)^2 = c^2y^2,$$

que es la ecuación buscada.

Hubiérase podido determinar primero la ecuación de la curva en coordenadas polares, y deducir luego de ella la ecuación en coordenadas cartesianas.

Se tiene, en efecto:

$$\rho = OS \pm SM; \qquad (2)$$
$$OS = OA \csc \theta = a \csc \theta;$$
$$SM = c.$$

Sustituyendo en (2): $\rho = a \csc \theta \pm c.$

Reemplazando ρ por $\sqrt{x^2 + y^2}$ y $\csc \theta$ por $\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y}$, se obtiene sucesivamente:

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{a\sqrt{x^2+y^2}}{y} \pm c;$$
$$(x^2+y^2)(y-a)^2 = c^2y^2.$$

Por esta ecuación se puede observar que:

1º La concoide es una curva simétrica con respecto al eje $Y'Y$.

2º Está toda comprendida entre las rectas $y=a$, $y=-a$.

3º La recta AR es asíntota de la curva.

212. Forma de la curva. Si $c > a$, la curva tiene un bucle o lazo debajo del punto O, como se ve en la figura 156.

Si $c = a$, el bucle se reduce a un punto, y la forma de la curva es la de la figura 157.

Si $c < a$, las dos ramas de la curva quedan arriba del eje $X'X$, y la forma de la curva es la representada en la figura 158.

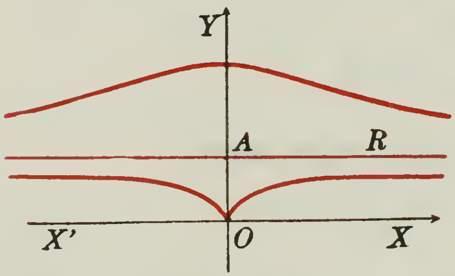


Fig. 157.

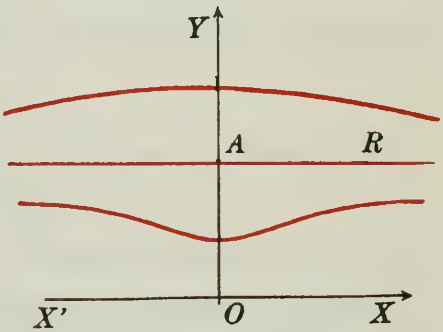


Fig. 158.

Nota. Esta curva fué ideada por el matemático griego Nicomedes para resolver gráficamente el problema de la trisección del ángulo.

Para ver cómo, mediante la concoide, se logra dividir en 3 partes iguales un ángulo cualquiera, XOS por ej., tómese el vértice O como polo y por un punto cualquiera P del lado OS trácese AR perpendicular a OX. Tomando AR como base y con un segmento c, de longitud igual a $2OP$, descríbase la concoide (fig. 159); trácese PQ paralela a OX y únase Q con O.

El ángulo XOQ es la tercera parte del ángulo dado.

En efecto: si M es el punto medio de la hipotenusa del triángulo NPQ, se tiene: $NM = PM = MQ = OP$;

luego, cada uno de los triángulos PMQ y OPM es isósceles; por tanto:

$$\text{áng } QPM = \text{áng } MQP;$$
$$\text{áng } POM = \text{áng } OMP = 2 \text{ áng } MQP.$$

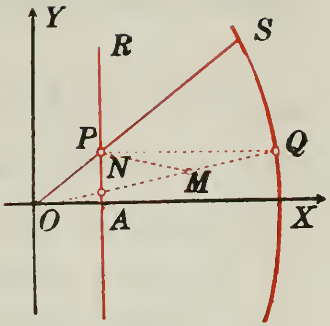


Fig. 159.

Pero, $\text{áng } QOX = \text{áng } MQP$;

luego: $\text{áng } POM + \text{áng } QOX = 2 \text{ áng } MQP + \text{áng } MQP$;

o sea: $$\text{áng } XOS = 3 \text{ áng } XOQ.$$

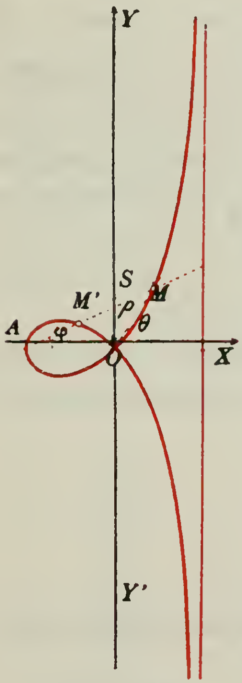


Fig. 160.

213. Estrofoide. Dada una recta indefinida OY y un punto fijo A situado a una distancia a de la recta, se traza la secante AS y en ella se toman los segmentos SM y SM', iguales a la distancia SO.

El lugar de los puntos M se llama *estrofoide* (fig. 160).

Para obtener la ecuación de la curva en coordenadas polares, tómense el punto O como polo y la recta AO como eje polar.

Designando por ρ y θ las coordenadas de M y por φ el ángulo OAM, y aplicando el teorema de los senos en el triángulo AOM, se tiene:

$$\frac{\rho}{a} = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen}(\theta - \varphi)};$$

$$\rho = \frac{a \operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen}(\theta - \varphi)}. \qquad (1)$$

Por ser isósceles el triángulo SOM, resulta:

$$\text{áng } SMO = \text{áng } SOM;$$

$$\theta - \varphi = \frac{\pi}{2} - \theta;$$

$$\varphi = 2\theta - \frac{\pi}{2};$$

de donde, sustituyendo en (1):

$$\rho = \frac{a \operatorname{sen}\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(-\theta + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{-a \cos 2\theta}{\cos \theta},$$

que es la ecuación buscada.

Del examen de esta ecuación se infiere que:

1º La curva es simétrica con respecto al eje polar.

2º El vector crece indefinidamente con θ y se hace infinito para $\theta = \frac{\pi}{2}$.

3º Si $\theta = 0$, $\rho = -a$: es el valor del vector correspondiente al punto A de la curva.

4º El vector se anula para $\theta = \frac{\pi}{4}$: se tiene el punto O; resulta, por tanto, que el lado móvil del ángulo $\frac{\pi}{4}$ es tangente a la curva en el polo.

Para obtener la ecuación de la curva en coordenadas cartesianas, se hacen sustituciones análogas a las que se han hecho con otras curvas. Puede escribirse:

$$\rho = -a \frac{\frac{x^2}{\rho^2} - \frac{y^2}{\rho^2}}{\frac{x}{\rho}} = -a \frac{x^2 - y^2}{x\rho};$$

o sea, dando forma entera y reemplazando ρ^2 por $x^2 + y^2$:

$$x(x^2 + y^2) = a(y^2 - x^2).$$

Resolviendo en y se obtiene:

$$y = \pm x \sqrt{\frac{a + x}{a - x}},$$

que es la ecuación de la estrofoide en coordenadas rectangulares.

Por ella se puede observar que:

1º La curva es simétrica con respecto al eje OX.

2º El valor de y es real si $|x| \leqq a$, es decir, la curva está comprendida entre las rectas $x = \pm a$.

3º Para $x = a$, $y = \pm \infty$, lo cual indica que la recta $x = a$ es asíntota de la curva.

SEGUNDA PARTE

GEOMETRIA ANALITICA DE TRES DIMENSIONES 1

GENERALIDADES

214. Ejes. Planos. Octantes. Considérese un triedro trirectangular, formado por los planos XOY, XOZ, YOZ (fig. 161).

Las aristas OX, OY, OZ, *según las cuales se cortan los planos, son los ejes coordenados; el vértice* O *es el origen o cero, y las caras del triedro son los planos coordenados, que constituyen un marco de referencia.*

Si cada arista se supone prolongada más allá del vértice, se determinan 7 triedros trirectangulares más que, junto con el triedro primeramente considerado, dan 8 *octantes* (fig. 162).

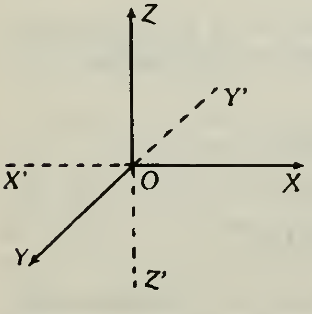


Fig. 161.

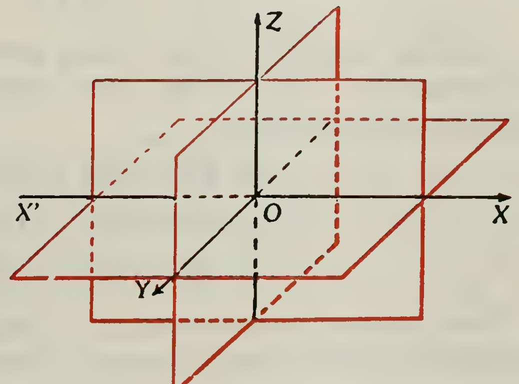


Fig. 162.

215. Localización de un punto. Un punto material, un foco eléctrico, por ejemplo, queda bien localizado en un cuarto si se conocen sus distancias al piso, a una pared lateral y a la pared frontal.

Análogamente, un punto P del espacio queda bien localizado, con respecto a tres planos, si se conocen sus distancias a cada uno de los tres planos de referencia (fig. 163).

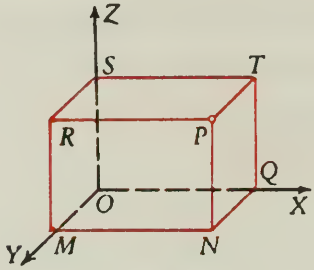


Fig. 163.

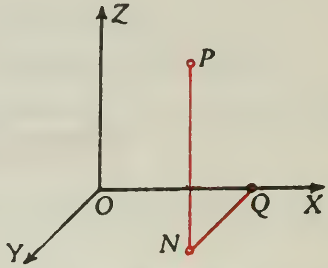


Fig. 164.

Abscisa de un punto P *es su distancia al plano* YOZ, *y se designa por* x:

$$x = RP.$$

Ordenada de un punto P *es su distancia al plano* XOZ, *y se designa por* y:

$$y = TP.$$

Cota de un punto P *es su distancia al plano* XOY, *y se designa por* z:

$$z = NP.$$

Dada la igualdad de las aristas paralelas se ve, por el paralelepípedo de la fig. 163, que cada coordenada puede escribirse de las siguientes maneras:

$$x = RP = MN = OQ = ST;$$
$$y = TP = QN = QM = SR;$$
$$z = NP = MR = OS = QT.$$

Para señalar las coordenadas de un punto P, bájese la perpendicular PN, y luego trácese NQ paralela a OY (fig. 164).

Se tiene: $x = OQ$; $y = QN$; $z = NP$.

Cada una de las coordenadas del origen es cero.

216. Signos de las coordenadas. Considérese prolongado indefinidamente cada uno de los planos coordenados (fig. 161).

Por convención:

1º Toda abscisa a la derecha del plano YOZ, o sea, *toda abscisa tomada en la dirección* OX *es positiva, y negativa si se toma en la dirección* OX′.

2º Toda ordenada al frente del plano XOZ, o sea, *toda ordenada tomada en la dirección* OY *es positiva, y negativa si se toma en la dirección* OY′.

3º Toda cota arriba de XOY, o sea, *toda cota tomada en la dirección* OZ *es positiva, y negativa si se toma en la dirección* OZ′.

217. Designación y representación de un punto. Para designar un punto P cuyas coordenadas sean, por ejemplo, $x = 3$, $y = 2$, $z = 6$, se escribe: $P(3, 2, 6)$.

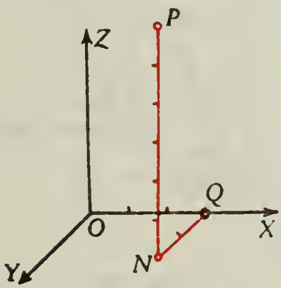


Fig. 165.

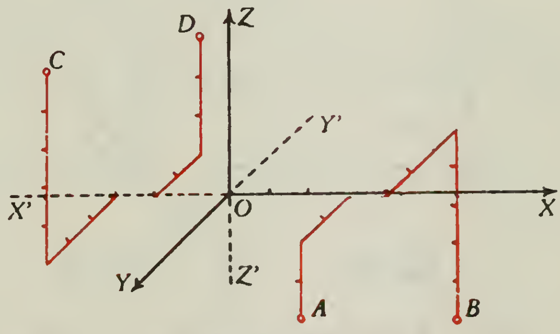


Fig. 166.

Para representar ese punto P, llévense sobre OX, a partir de O, 3 unidades arbitrarias, y se obtiene así un punto Q; trácese QN paralela al eje OY, y llévense sobre QN, partiendo de Q, 2 de las mismas unidades anteriormente escogidas, con lo cual se obtiene el punto N; trácese por N la recta NP paralela a OZ y llévense sobre ella, desde N, 6 unidades iguales a las anteriores; queda así localizado el punto P que se quería representar (fig. 165).

En la figura 166 se han localizado los puntos $A(3, 2, -2)$, $B(4, -3, -5)$, $C(-3, 3, 5)$ y $D(-2, -2, 3)$.

218. Los planos coordenados como lugares geométricos. El plano YOZ es el lugar geométrico de los puntos de abscisa cero; el plano XOZ es el lugar de los puntos de ordenada cero, y el plano XOY lo es de los puntos de cota cero.

219. Otros sistemas de coordenadas. Un punto P del espacio puede localizarse de otras maneras, como, por ejemplo:

1º Si se da la distancia ρ de un punto cualquiera P al origen (fig. 167), el ángulo φ formado por OP y OZ, y el ángulo θ que forma el eje OX con la recta ON, proyección de OP sobre el plano XOY, queda localizado el punto P en el espacio; ρ, θ, φ, son las *coordenadas esféricas* de P, llamadas también *coordenadas polares*.

2º El mismo punto P quedará perfectamente localizado si se conocen $ON = r$, el ángulo θ y $NP = z$; r, θ, z, se llaman *coordenadas cilíndricas* del punto P.

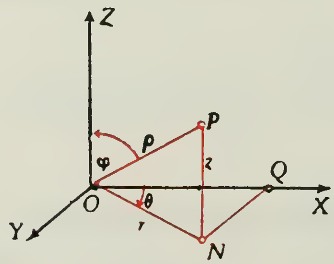


Fig. 167.

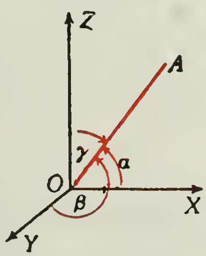


Fig. 168.

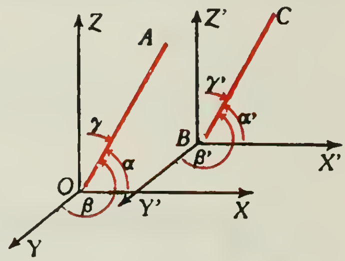


Fig. 169.

220. Angulos y dirección de una recta. La dirección de una recta queda determinada si se conoce el ángulo que forma con cada uno de los ejes.

Sean α, β, γ, los ángulos que la recta OA (fig. 168) forma respectivamente con OX, OY, OZ; α, β, γ son los *ángulos directores* de la recta OA y de cualquier otra recta paralela a OA.

Para conocer los ángulos directores de una recta BC (fig. 169) que no pasa por el origen, trácese OA paralela a dicha recta: los ángulos directores buscados son los formados por OA con los ejes coordenados; o bien, trácense, por el punto B (fig. 169) las rectas BX', BY', BZ' paralelas a los ejes coordenados: los ángulos formados por BC con BX', BY', BZ', son los ángulos directores de la recta BC.

221. Cosenos directores. Los cosenos de los ángulos directores, o sea, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, son los *cosenos directores* de la recta.

222. Proyección de un segmento sobre los ejes. Sean $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ dos puntos que determinan el segmento AB. Trácense, por A y B, dos planos paralelos al plano YOZ, o sea, las rectas AP y BQ paralelas al eje OZ, y PM y QN paralelas al eje OY (fig. 170).

La proyección de AB sobre el eje OX es MN. Luego:

$$MN = ON - OM = x_2 - x_1.$$

Análogamente, para conocer la proyección de AB sobre OY y OZ, basta trazar, por cada uno de los puntos A y B, planos respectivamente paralelos a XOZ y a XOY.

Al construir estos diferentes planos se forma un paralelepípedo rectángulo, una de cuyas diagonales es el segmento AB (fig. 171).

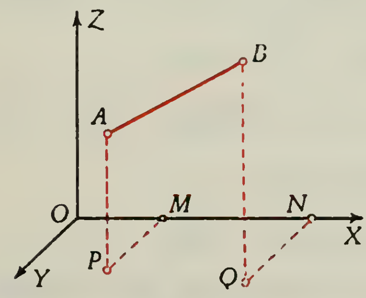


Fig. 170.

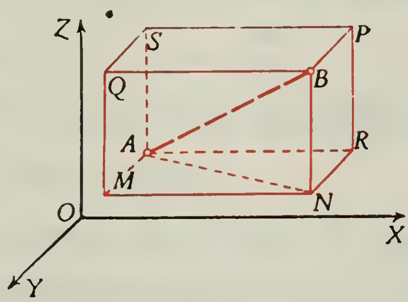


Fig. 171.

Las tres dimensiones de este sólido son las proyecciones de AB sobre cada eje; así:

$$\text{proy. } AB \text{ sobre } OX = AR = QB = x_2 - x_1;$$
$$\text{proy. } AB \text{ sobre } OY = AM = PB = y_2 - y_1;$$
$$\text{proy. } AB \text{ sobre } OZ = AS = NB = z_2 - z_1.$$

223. Longitud de cada proyección. Se tiene, según la fig. 171:

$$AR = AB \cos\alpha;$$
$$AM = AB \cos\beta;$$
$$AS = AB \cos\gamma.$$

Por estos resultados se ve que la proyección del segmento AB es, para cada eje, igual al producto de dicho segmento por el coseno del ángulo que forma con la dirección positiva del eje sobre el cual se proyecta.

224. Suma de los cuadrados de los cosenos directores. Por los triángulos rectángulos ANB y ARN (fig. 171), se tiene:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AN}^2 + \overline{NB}^2;$$
$$\overline{AB}^2 = \overline{AR}^2 + \overline{RN}^2 + \overline{NB}^2;$$

o, lo que es lo mismo:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AR}^2 + \overline{AM}^2 + \overline{AS}^2.$$

Divídase entre $\overline{AB}^2$:

$$\frac{\overline{AR}^2}{\overline{AB}^2} + \frac{\overline{AM}^2}{\overline{AB}^2} + \frac{\overline{AS}^2}{\overline{AB}^2} = 1. \qquad (1)$$

De las igualdades obtenidas en el número anterior se deduce:

$$\frac{AR}{AB} = \cos\alpha; \qquad \frac{AM}{AB} = \cos\beta; \qquad \frac{AS}{AB} = \cos\gamma.$$

Sustitúyanse estos valores en (1), y se obtiene:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Así, si: $\cos\alpha = \frac{20}{21}$, $\cos\beta = \frac{5}{21}$, $\cos\gamma = \frac{4}{21}$,

α, β, γ, son los ángulos directores de cierta recta AB, porque:

$$\left(\frac{20}{21}\right)^2 + \left(\frac{5}{21}\right)^2 + \left(\frac{4}{21}\right)^2 = \frac{441}{441} = 1.$$

225. Aplicación. Los cosenos directores de una recta AB son proporcionales a los números 9, 2, 6. Hállese el valor de cada coseno.

Debe tenerse: $\dfrac{9}{\cos\alpha} = \dfrac{2}{\cos\beta} = \dfrac{6}{\cos\gamma}.$

Elévese al cuadrado cada razón. Aplicando un principio muy conocido de las proporciones, se tiene:

$$\frac{81}{\cos^2\alpha} = \frac{4}{\cos^2\beta} = \frac{36}{\cos^2\gamma} = \frac{81+4+36}{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma} = 121.$$

Iguálese, separadamente, cada razón a 121, despéjese el cuadrado del coseno y luego extráigase la raíz cuadrada; se obtiene:

$$\cos\alpha = \frac{9}{11}; \qquad \cos\beta = \frac{2}{11}; \qquad \cos\gamma = \frac{6}{11}.$$

226. Distancia entre dos puntos. Sean $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ dos puntos dados por sus coordenadas. Según se ha visto en el número 224,

$$\overline{AB}^2 = \overline{AR}^2 + \overline{RN}^2 + \overline{NB}^2.$$

Sustitúyanse AR, RN y NB por los valores hallados en el Nº 222; resulta:

$$\overline{AB}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

227. Distancia de un punto al origen. Si uno de los puntos dados es el origen, la distancia de éste al punto $A(x_1, y_1, z_1)$ es:

$$OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

228. Aplicaciones. 1ª ¿Cuál es la distancia del origen al punto $A(8, 9, 12)$?

$$OA = \sqrt{8^2 + 9^2 + 12^2} = \sqrt{289} = 17.$$

2ª ¿Cuál es la distancia del punto $M(4, 4, 0)$ al punto $N(16, 19, -16)$?

$$MN = \sqrt{(16-4)^2 + (19-4)^2 + (-16-0)^2};$$

$$MN = \sqrt{144 + 225 + 256} = \sqrt{625} = 25.$$

229. Coordenadas del punto medio de un segmento. Sea el segmento determinado por los puntos $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$.

Por la figura 172 se tiene, llamando (x_M, y_M, z_M) las coordenadas del punto medio del segmento:

En el trapecio rectángulo $AA'B'B$,

$$M'M = \frac{A'A + B'B}{2}, \quad \text{o sea,} \quad z_M = \frac{z_1 + z_2}{2},$$

y en el trapecio rectángulo $PA'B'R$,

$$QM' = \frac{PA' + RB'}{2}, \quad \text{o sea,} \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Proyectando el segmento AB sobre otro eje, se obtendría, en forma análoga:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Por estos resultados se ve que, en el espacio, lo mismo que en un plano, una coordenada del punto medio de un segmento de recta es igual a la semisuma de las coordenadas de mismo nombre de los extremos.

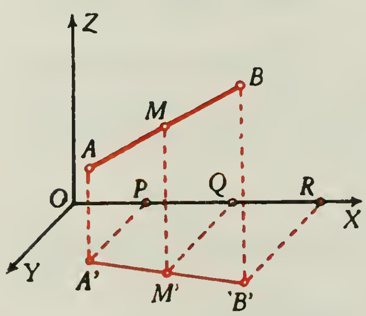


Fig. 172.

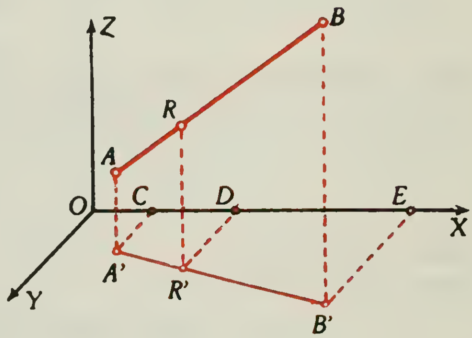


Fig. 173.

230. Coordenadas del punto que divide un segmento en una razón dada. Sean $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ los extremos del segmento (fig. 173), y R el punto que divide AB en partes tales que se tenga:

$$\frac{AR}{AB} = r.$$

Proyéctese ortogonalmente el segmento AB sobre el plano XOY. Las proyecciones CD y CE de AR y de AB sobre el eje OX, son respectivamente proporcionales a esos segmentos y se tiene, por tanto:

$$\frac{AR}{AB} = \frac{CD}{CE} = r. \qquad (1)$$

Pero $\qquad CD = x_R - x_1, \quad$ y $\quad CE = x_2 - x_1.$

Sustituyendo CD y CE por sus valores en (1) se obtiene, después de dar forma entera y despejar:

$$x_R = x_1 + r(x_2 - x_1).$$

Proyectando el segmento AB sobre los planos YOZ y XOZ se obtiene, sucesivamente:

$$y_R = y_1 + r(y_2 - y_1); \quad z_R = z_1 + r(z_2 - z_1).$$

Como se ve, el valor de cada coordenada del punto R queda expresado en función de r y de las coordenadas de mismo nombre de los extremos del segmento.

231. Proyecciones de un contorno poligonal cerrado. Sea el contorno poligonal $ABCDA$ (fig. 174), formado por segmentos situados en el mismo plano que el eje de proyección PQ, o en planos diferentes.

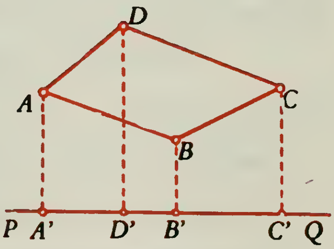


Fig. 174.

Sean A', B', C', D', las proyecciones de los puntos A, B, C, D.

Se tiene:

$$\text{proy.}\, AB + \text{proy.}\, BC = A'B' + B'C' = A'C';$$
$$\text{proy.}\, CD + \text{proy.}\, DA = C'D' + D'A' = C'A';$$

por tanto:

$$\text{proy.}\, AB + \text{proy.}\, BC + \text{proy.}\, CD + \text{proy.}\, DA = A'C' + C'A' = 0.$$

De este resultado se infiere que: *la suma de las proyecciones de los segmentos que forman un contorno poligonal cerrado es igual a cero.*

Por la misma figura 174 se ve que la proyección del segmento que une el extremo del penúltimo segmento con el principio del primero, o sea, la proyección del segmento de cierre, es igual a la suma de las proyecciones de los segmentos restantes, es decir:

$$\text{proy. } DA = D'A' = A'B' + B'C' + C'D'.$$

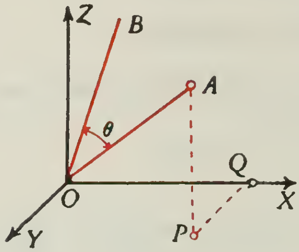


Fig. 175.

232. Angulo de dos rectas.

Sean OA y OB dos segmentos que forman el ángulo θ (fig. 175), α_1, β_1, γ_1, los ángulos directores de OA y α_2, β_2, γ_2, los de OB.

Señálense las coordenadas del punto A y proyéctese el contorno $OQPAO$ sobre OB.

Se tiene, considerando AO como resultante o línea de cierre:

$$\text{proy. } AO = \text{proy. } OQ + \text{proy. } QP + \text{proy. } PA. \qquad (1)$$

Recordando que la proyección de un segmento es igual al producto de ese segmento por el coseno del ángulo formado por él con el eje de proyección, se puede escribir:

$$OA \cos\theta = OQ \cos\alpha_2 + QP \cos\beta_2 + PA \cos\gamma_2; \qquad (2)$$

$$OQ = OA \cos\alpha_1; \quad QP = OA \cos\beta_1; \quad \text{y} \quad PA = OA \cos\gamma_1. \qquad (3)$$

Sustitúyase (3) en (2) y luego divídase entre OA; se obtiene:

$$\cos\theta = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2.$$

Si las 2 rectas son perpendiculares,

$$\theta = 90^\circ \quad \text{y} \quad \cos\theta = 0;$$

entonces, la igualdad anterior se reduce a:

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 = 0,$$

que expresa la condición para que dos rectas sean perpendiculares.

EJERCICIO 26

1. Localícense los puntos $A(3, 2, 5)$, $B(-3, 4, 7)$, $C(2, -3, -4)$, $D(-4, 3, -2)$, $E(-2, -4, 5)$.

2. Los cosenos directores de una recta son proporcionales a los números 8, 9, 12. ¿Qué ángulo forma la recta con cada uno de los ejes coordenados?

3. Una recta forma con OX un ángulo de 60° y con OY uno de 30°. ¿Qué ángulo forma con OZ?

4. Las proyecciones de un segmento MN sobre OX, OY, OZ son, respectivamente, 22, 14, 7. ¿Cuál es la longitud del segmento?

5. ¿Pueden ser los cosenos directores de cierta recta AB los números $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{8}{9}$? ¿Y los números $\frac{3}{13}$, $\frac{4}{13}$, $\frac{12}{13}$?

6. Dos de los cosenos directores de una recta son $\frac{12}{17}$ y $\frac{8}{17}$ ¿Cuánto vale el tercer coseno?

7. Como caso particular de $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, hágase ver que la suma de los cuadrados del seno y del coseno de un mismo ángulo es 1.

8. ¿Cuál es la distancia del punto $A(14, 3, 4)$ al punto $B(26, 18, 20)$?

9. Hállense los cosenos directores de un segmento igualmente inclinado con respecto a cada uno de los ejes coordenados.

10. Los cosenos directores de una recta son proporcionales a los números 12, 3 y 4. ¿Cuál es el valor de cada coseno?

11. Calcúlese el ángulo formado por las rectas cuyos cosenos directores son proporcionales, respectivamente, a 2, 3, 4 y a 3, 4, 5.

12. ¿Son perpendiculares las rectas cuyos cosenos directores son proporcionales a $5, -3, 1$ y a $3, 2, -9$?

13. Dados los puntos $A(4, 2, 5)$ y $B(9, 7, 15)$, calcúlense las coordenadas del punto R que divide el segmento AB en la razón de 2 a 5.

14. Demuéstrese que dos puntos $A(a, b, c)$ y $B(a, c, b)$ de igual abscisa y tales que la ordenada y la cota del primero sean respectivamente iguales a la cota y a la ordenada del segundo, son simétricos con respecto a la bisectriz del ángulo formado por las rectas que unen el origen con cada uno de aquellos puntos.

15. Hállense los cosenos directores de la bisectriz del ángulo que forman las rectas OM y ON, dados $M(8, 9, 12)$ y $N(8, 12, 9)$.

16. Hállense los cosenos directores de la bisectriz del ángulo formado por las rectas que unen el origen con los puntos $A(3, 4, 12)$ y $B(3, 22, 6)$.

17. ¿Cuánto dista del origen el punto $D(8, 24, 27)$? ¿Cuál es el valor de cada coseno director del segmento OD?

18. ¿Son de la superficie de la esfera de centro $C(3, 4, 2)$ los puntos $P(6, 10, 24)$, $Q(0, -2, -20)$, $R(9, 7, 24)$ y $S(25, -2, 5)$?

19. Hágase ver que el triángulo de vértices $A(3, 7, 5)$, $B(9, -9, 21)$ y $C(6, 13, 27)$ es isósceles.

20. ¿Es equilátero el triángulo cuyos vértices son $A(3, 1, 2)$, $B(2, 3, 1)$ y $C(1, 2, 3)$?

21. Las aristas *AB, AD, AG* del paralelepípedo rectángulo de la figura 176, son paralelas a los ejes coordenados. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos *B, C, D, E,* dados $A(3, 4, 5)$ y $x_C = 25$, $y_B = 11$, $z_G = 7$? ¿Cuánto mide la diagonal AE y cuánto valen sus cosenos directores?

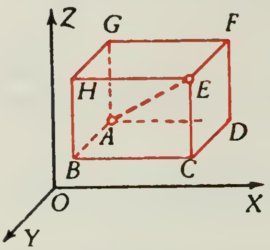


Fig. 176.

22. ¿Cuáles son las coordenadas del punto medio del segmento que une el punto $A(3, 7, 14)$ con el punto $B(11, 19, 40)$?

23. ¿Qué ángulo forma la recta que se apoya en los puntos $A(3, 4, 6)$ y $B(5, 7, 12)$ con la recta que se apoya en $C(7, 9, 14)$ y $D(5, 3, 5)$?

24. Dados los vértices $Q(x_1, y_1, z_1)$, $M(x_2, y_2, z_2)$ $N(x_3, y_3, z_3)$, $P(x_4, y_4, z_4)$ del tetraedro *QMNP,* únanse los puntos medios de dos aristas no situadas en una misma cara, y demuéstrese que concurren en el mismo punto *I,* de coordenadas

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}, \quad \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}, \quad \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4}.$$

2

EL PLANO

233. Ecuación del plano en posiciones especiales. La ecuación $z = 0$, representa el plano XOY, y la ecuación $z = c$ (constante) representa el lugar de los puntos de cota constante, es decir, un plano paralelo al plano XOY.

Análogamente:

$y = 0$, representa el plano XOZ,
$y = c$, un plano paralelo al XOZ;

$x = 0$, representa el plano YOZ,
$x = c$, un plano paralelo al YOZ.

234. Ecuación de un plano apoyado en un eje. Considérese la ecuación homogénea

$$3y = 2x. \qquad (1)$$

En el plano XOY representa la recta AB que pasa por el origen (fig. 177). Si por un punto cualquiera P de AB se traza PQ paralela a OZ, la abscisa y la ordenada de todo punto de PQ son las mismas que las de P y satisfacen, por tanto, la ecuación (1).

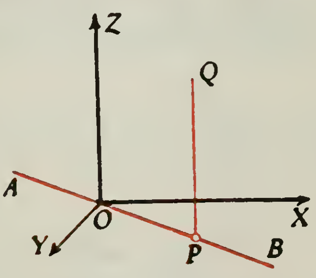


Fig. 177.

Si la recta PQ se desliza sobre AB como directriz, permaneciendo siempre paralela a OZ, las coordenadas de cada punto de PQ seguirán satisfaciendo la ecuación (1). Pero, al moverse la recta PQ en la condición expresada, genera un plano perpendicular a XOY y apoyado en el eje OZ. Luego (1) es la ecuación de un plano perpendicular a XOY y apoyado en OZ.

Análogamente, la ecuación

$$ay + bz = 0$$

representa un plano que se apoya en OX y es perpendicular al plano YOZ, y

$$ax + bz = 0$$

representa un plano que se apoya en OY y es perpendicular al plano XOZ.

235. Ecuación de un plano paralelo a un eje. Sea la ecuación

$$3y = 2x + 6. \qquad (2)$$

En el plano XOY representa una recta. Haciendo consideraciones análogas a las del número anterior, se demuestra que (2) representa, en el espacio, un plano perpendicular a XOY y paralelo al eje OZ.

Análogamente, la ecuación

$$ax + bz + c = 0$$

representa un plano perpendicular al plano XOZ y paralelo al eje OY, y

$$ay + bz + c = 0$$

representa un plano perpendicular al plano YOZ y paralelo al eje OX.

236. Ecuación normal de un plano cualquiera. En su posición general, un plano corta a los tres ejes (fig. 178).

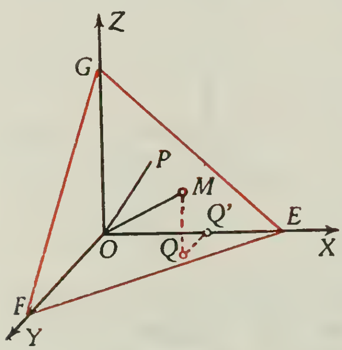


Fig. 178.

Sean

$a = OE =$ abscisa al origen;
$b = OF =$ ordenada al origen;
$c = OG =$ cota al origen;

$OP = p$, distancia del plano al origen;

α, β, γ, los ángulos directores de OP, y $M(x, y, z)$ un punto móvil del plano cuya ecuación se está buscando.

Indíquense las coordenadas de M y considérese el contorno poligonal cerrado $OQ'QMO$, tomando MO como resultante o línea de cierre. Proyectando el contorno sobre OP, se tiene:

$$\text{proy. } OQ' + \text{proy. } Q'Q + \text{proy. } QM = \text{proy. } MO. \qquad (1)$$

$$\begin{aligned}
\text{proy. } OQ' &= OQ' \cos\alpha = x\cos\alpha;\\
\text{proy. } Q'Q &= Q'Q \cos\beta = y\cos\beta;\\
\text{proy. } QM &= QM \cos\gamma = z\cos\gamma;\\
\text{proy. } MO &= OP = p, \ (MP \text{ es perpendicular a } OP).
\end{aligned}$$

Sustituyendo en (1) los valores de las proyecciones, resulta:

$$\boldsymbol{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p},$$

que es la *ecuación normal* del plano, dada en función de α, β, γ, y p.

237. Ecuación del plano en su forma general. Si en la ecuación

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p \qquad (1)$$

se multiplican ambos miembros por una constante k, y los productos

$$k\cos\alpha, \quad k\cos\beta, \quad k\cos\gamma, \quad kp$$

se representan por A, B, C, $-D$, la ecuación (1) se escribe

$$\boldsymbol{Ax + By + Cz + D = 0}, \qquad (2)$$

que es la ecuación del plano en *forma general.*

Los coeficientes A, B, C, son proporcionales a los cosenos directores de los ángulos que la perpendicular trazada del origen al plano forma con los ejes coordenados.

Para pasar de la ecuación (2) a la (1), debe dividirse cada coeficiente de la (2) entre una constante K por determinar, tal que se tenga:

$$\frac{A}{K} = \cos\alpha; \quad \frac{B}{K} = \cos\beta; \quad \frac{C}{K} = \cos\gamma. \qquad (3)$$

Elévese cada razón de (3) al cuadrado y súmese ordenadamente; se obtiene:

$$\frac{A^2 + B^2 + C^2}{K^2} = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1;$$

de donde: $$K = \pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

El signo de esta constante es contrario al que tiene D en la ecuación (2).

238. Aplicación. Dada la ecuación $12x + 4y + 3z - 39 = 0$, escribirla en forma normal.

Divídase cada término entre $K = \pm\sqrt{12^2 + 4^2 + 3^2} = 13$;

se obtiene: $$\frac{12}{13}x + \frac{4}{13}y + \frac{3}{13}z = 3.$$

Siendo positivo cada uno de los cosenos directores, la perpendicular trazada del origen al plano forma con cada eje un ángulo agudo, y la longitud de la perpendicular es 3.

239. Determinación de las coordenadas al origen. Todo punto del eje OX tiene ordenada y cota iguales a cero; todo punto del eje OY tiene abscisa y cota nulas, y todo punto del eje OZ tiene abscisa y ordenada nulas. Luego, dada la ecuación de un plano en la forma

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

para calcular la abscisa al origen, o abscisa del punto en que el plano corta al eje $X'X$, bastará hacer $y = z = 0$. Así se obtiene:

$$x = -\frac{D}{A} = a = \text{abscisa al origen.}$$

Análogamente, para conocer la ordenada al origen, hágase $x = z = 0$:

$$y = -\frac{D}{B} = b = \text{ordenada al origen.}$$

Por último, haciendo $x = y = 0$:

$$= -\frac{D}{C} = c = \text{cota al origen.}$$

240. Trazas de un plano en cada plano coordenado. Dada la ecuación de un plano en la forma

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (1)$$

si se quiere conocer la intersección del plano XOY con (1), o traza de (1) en el plano horizontal, bastará hacer $z = 0$, por ser XOY el lugar de los puntos de cota nula. Haciéndolo se obtiene:

$$Ax + By + D = 0;$$

es decir, la traza de (1) en XOY es una recta.

Análogamente, la traza de (1) en el plano XOZ es:

$$Ax + Cz + D = 0;$$

y en el plano YOZ:

$$By + Cz + D = 0.$$

241. Ecuación del plano en forma simétrica. Conocidas las coordenadas al origen de un plano, puede obtenerse la ecuación de ese plano.

La ecuación de un plano, en su forma general, es:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Dividiendo entre $-D$ se obtiene, sucesivamente:

$$\frac{A}{-D}x + \frac{B}{-D}y + \frac{C}{-D}z = 1;$$

o sea:

$$\frac{x}{\frac{-D}{A}} + \frac{y}{\frac{-D}{B}} + \frac{z}{\frac{-D}{C}} = 1.$$

Sustituyendo los denominadores por los valores hallados en el Nº 239, se obtiene:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

que es la ecuación del plano en su *forma simétrica,* o ecuación en función de a, b, c.

242. Ecuación de un plano apoyado en un punto y perpendicular a una recta. Sean $P(x_1, y_1, z_1)$ el punto dado, y $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ los cosenos directores de la recta.

La ecuación del plano, en forma normal, es:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p. \qquad (1)$$

Por ser P del plano, sus coordenadas satisfacen (1), y se tiene:

$$x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma = p. \qquad (2)$$

Réstese (2) de (1); se obtiene, como ecuación:

$$(x - x_1)\cos\alpha + (y - y_1)\cos\beta + (z - z_1)\cos\gamma = 0.$$

243. Ecuación del plano apoyado en tres puntos. Tres puntos bastan para determinar un plano; luego, conocidos tres puntos por sus coordenadas, puede obtenerse la ecuación del plano que se apoya en ellos.

Sea obtener la ecuación del plano que se apoya en

$$M(x_1, y_1, z_1), \quad N(x_2, y_2, z_2) \quad \text{y} \quad P(x_3, y_3, z_3).$$

La ecuación pedida puede escribirse en la forma

$$Ax + By + Cz + D = 0;$$

o sea:

$$\frac{A}{D}x + \frac{B}{D}y + \frac{C}{D}z + 1 = 0;$$

o, designando por r, s, t los coeficientes respectivos de x, y, z:

$$rx + sy + tz + 1 = 0. \qquad (1)$$

Sustituyendo las variables (x, y, z) por las coordenadas de los puntos dados, se forma el siguiente sistema:

$$rx_1 + sy_1 + tz_1 + 1 = 0;$$
$$rx_2 + sy_2 + tz_2 + 1 = 0;$$
$$rx_3 + sy_3 + tz_3 + 1 = 0;$$

en que las incógnitas son r, s, t.

Llevando a (1) los valores de r, s, t, que se calculan resolviendo el sistema considerado, se obtiene la ecuación pedida.

244. Aplicación. Obtener la ecuación del plano que se apoya en los puntos $M(3, 2, 5)$, $N(6, 3, 7)$, $P(4, 5, 8)$.

Se forma el sistema

$$3r + 2s + 5t + 1 = 0;$$
$$6r + 3s + 7t + 1 = 0;$$
$$4r + 5s + 8t + 1 = 0.$$

La resolución de este sistema da:

$$r = \frac{3}{17}; \quad s = \frac{7}{17}; \quad t = -\frac{8}{17}.$$

Sustitúyanse estos valores en (1) y dése forma entera; se obtiene:

$$3x + 7y - 8z + 17 = 0.$$

Puede expresarse la ecuación del plano que se apoya en 3 puntos, por medio de un determinante de cuarto orden. Sea, en efecto:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Este determinante se anula cuando se sustituyen las variables (x, y, z) por (x_1, y_1, z_1), puesto que resulta un determinante con 2 renglones iguales que, como ya se sabe, tiene un valor nulo. Lo mismo sucede al sustituir las variables por (x_2, y_2, z_2) y por (x_3, y_3, z_3). Infiérese que la ecuación $\Delta = 0$, que es una ecuación de primer grado con 3 variables, representa un plano que se apoya en los 3 puntos dados. Luego, la ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

o, introduciendo los menores correspondientes a los elementos del primer renglón:

$$M_x x - M_y y + M_z z - M_1 1 = 0. \qquad (2)$$

Si las variables (x, y, z) se sustituyen sucesivamente por $(3, 2, 5)$, $(6, 3, 7)$ y $(4, 5, 8)$ y se calculan los valores de los menores correspondientes a x, y, z, 1, se obtiene:

$$M_x = -3, \quad M_y = 7, \quad M_z = 8, \quad M_1 = 17.$$

Reemplazando estos valores en (2), resulta:

$$-3x - 7y + 8z - 17 = 0,$$

o sea:
$$3x + 7y - 8z + 17 = 0,$$

resultado idéntico al anteriormente obtenido.

245. Paralelismo. Si dos planos son paralelos, las normales bajadas a ellos desde el origen se confunden y tienen, por tanto, los mismos cosenos directores, y sólo difieren por su longitud. Luego, para que dos planos sean paralelos se necesita que los coeficientes de las variables sean iguales en las dos ecuaciones, o puedan volverse iguales multiplicándolos por una constante. En otros términos, los planos

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$
$$A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

son paralelos si

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}, \quad \text{y} \quad D \neq D'.$$

En efecto, si α, β, γ son los ángulos directores de una normal, se tiene, para el primer plano:

$$\cos\alpha = \frac{A}{K}, \quad \cos\beta = \frac{B}{K}, \quad \cos\gamma = \frac{C}{K};$$

y para el segundo:

$$\cos\alpha = \frac{A'}{K'}, \quad \cos\beta = \frac{B'}{K'}, \quad \cos\gamma = \frac{C'}{K'};$$

de donde: $$\frac{A}{K} = \frac{A'}{K'}, \quad \frac{B}{K} = \frac{B'}{K'}, \quad \frac{C}{K} = \frac{C'}{K'};$$

o sea: $$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}.$$

Así, los planos $$6x + 4y + 2z = 56,$$
$$9x + 6y + 3z = 84,$$
son paralelos.

246. Distancia de un punto a un plano.

Sean $$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p,$$

la ecuación de un plano, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ un punto exterior a él y d la distancia del punto P al plano.

Supóngase otro plano, paralelo al anterior, apoyado en P. La ecuación de este plano es:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p + d.$$

Por ser el punto P_1 del plano, se tiene:

$$x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma = p + d;$$

de donde: $$d = x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma - p. \qquad (1)$$

Por tanto: para obtener la distancia de un punto a un plano, iguálese a cero la ecuación del plano y luego sustitúyanse, en el primer miembro, las variables (x, y, z) por las coordenadas del punto dado.

Teniendo presente que

$$\cos\alpha = \frac{A}{K}, \quad \cos\beta = \frac{B}{K}, \quad \cos\gamma = \frac{C}{K}, \quad p = -\frac{D}{K};$$

y que $K = \pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, el resultado (1) se escribe también:

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad (2)$$

en que debe tomarse, para el radical, el signo que haga positivo el numerador.

247. Observación. Es útil, en vista de ciertas aplicaciones, expresar la distancia de un punto a un plano, introduciendo un determinante de cuarto orden, como se indica a continuación.

Si el plano se apoya en los puntos $M(x_2, y_2, z_2)$, $N(x_3, y_3, z_3)$, $R(x_4, y_4, z_4)$, su ecuación es, según se dijo:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Luego, para obtener el numerador de (2) bastará, según se acaba de indicar, sustituir las variables (x, y, z) por las coordenadas del punto dado; resulta, por tanto, que la distancia buscada puede escribirse en la forma siguiente:

$$d = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (3)$$

248. Aplicación. ¿Cuál es la distancia del punto $P(3, 5, 7)$ al plano $6x + 9y + 2z = 22$?

Divídase cada término de la ecuación entre

$$K = \sqrt{6^2 + 9^2 + 2^2} = 11;$$

resulta:
$$\frac{6}{11}x + \frac{9}{11}y + \frac{2}{11}z = 2,$$

en que
$$\cos\alpha = \frac{6}{11}, \quad \cos\beta = \frac{9}{11}, \quad \cos\gamma = \frac{2}{11}.$$

Sustitúyanse las variables por las coordenadas de P, y se obtiene:

$$d = \frac{18}{11} + \frac{45}{11} + \frac{14}{11} - 2 = 5.$$

249. Coordenadas del punto de intersección de 3 planos. Para calcular las coordenadas del punto de intersección de 3 planos cuyas ecuaciones respectivas son:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 &= 0, \end{aligned}$$

basta resolver el sistema de estas 3 ecuaciones de primer grado. Los valores de x, y, z son las coordenadas del punto común a los 3 planos.

El valor de cada incógnita, como se sabe, se expresa por un quebrado cuyo denominador es el determinante Δ del sistema, tal que

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

Si $\Delta \neq 0$, el sistema tiene una solución única, bien definida: los 3 planos dados tienen un punto de intersección, y sólo uno.

Si $\Delta = 0$, como sucede si 2 de los 3 planos son paralelos, o los 3 son paralelos entre sí, los 3 planos no tienen ningún punto común.

Si los 3 planos pasan por una misma recta o se confunden, hay una infinidad de soluciones.

250. Condición para que 4 planos pasen por un mismo punto. Para que el plano

$$A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \qquad (1)$$

pase por el punto de intersección de los 3 planos considerados en el Nº 249, se necesita y basta que las coordenadas de dicho punto de intersección satisfagan la ecuación dada.

Las coordenadas del punto de intersección de los planos considerados son, designando por Δ el determinante del sistema:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -D_1 & B_1 & C_1 \\ -D_2 & B_2 & C_2 \\ -D_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\Delta}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & -D_1 & C_1 \\ A_2 & -D_2 & C_2 \\ A_3 & -D_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\Delta}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & -D_2 \\ A_3 & B_3 & -D_3 \end{vmatrix}}{\Delta}.$$

El numerador de x, el de y y el de z pueden escribirse, sucesivamente:

$$-\begin{vmatrix} B_1 & C_1 & D_1 \\ B_2 & C_2 & D_2 \\ B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix}; \qquad \begin{vmatrix} A_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix}; \qquad -\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix}.$$

Reemplazando estos valores en (1), sustituyendo Δ por su valor, dando forma entera, y multiplicando por -1, se obtiene:

$$A_4 \times \begin{vmatrix} B_1 & C_1 & D_1 \\ B_2 & C_2 & D_2 \\ B_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix} - B_4 \times \begin{vmatrix} A_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & C_3 & D_3 \end{vmatrix} + C_4 \times \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix} - D_4 \times \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0;$$

resultado que se expresa por medio del determinante

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Luego, la condición para que 4 planos pasen por un mismo punto es que el determinante de cuarto orden que se forma con los parámetros, sea nulo.

251. Volumen de un tetraedro. Sea calcular el volumen del tetraedro $QMNP$, cuyos vértices tienen, respectivamente, como coordenadas (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4) (fig. 179).

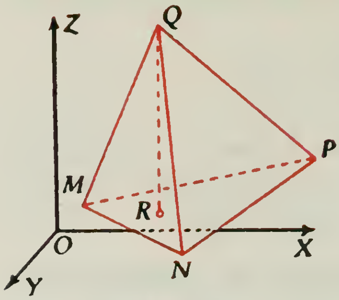


Fig. 179.

Si RQ es la altura relativa a la cara MNP, se tiene, designando por S el área de la superficie de la base MNP:

$$V = \frac{1}{3} S \times RQ. \qquad (1)$$

Según el Nº 246, la longitud de la altura del tetraedro es:

$$RQ = \frac{\Delta}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}; \qquad (2)$$

es que Δ representa el determinante que figura como numerador en el quebrado que expresa la distancia.

Los valores correspondientes a A, B, C se pueden obtener de la ecuación del plano que se apoya en los puntos M, N, P, o sea, de

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix};$$

y son los siguientes:

$$A = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \\ y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}; \quad B = \begin{vmatrix} x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}; \quad C = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

El valor de A es igual al duplo del área de la superficie de la proyección ortogonal de la base MNP sobre el plano XOY; el valor de B es el duplo del área de la proyección del triángulo MNP sobre el plano XOZ, y el de C es, a su vez, el duplo del área de la proyección de la base del tetraedro sobre el plano YOZ, o sea, designando por S_x, S_y, S_z esas áreas:

$$A = 2S_x; \quad B = 2S_y; \quad C = 2S_z. \qquad (3)$$

Pero, como el área de una figura proyectada es igual a la de la figura proyectante multiplicada por el coseno del ángulo plano del diedro que forma esa figura con el plano de proyección, se tiene, conviniendo en designar por S el área de la superficie del triángulo MNP y por α, β y γ los ángulos planos de los diedros nombrados:

$$A = 2S\cos\alpha, \qquad B = 2S\cos\beta, \qquad C = 2S\cos\gamma;$$

por tanto:

$$A^2 + B^2 + C^2 = 4S^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma).$$

Como α, β, γ pueden considerarse como los ángulos directores de una recta de dirección normal al plano MNP, se tiene:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1;$$

luego:

$$A^2 + B^2 + C^2 = 4S^2;$$

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = 2S;$$

por consiguiente:

$$RQ = \frac{\Delta}{2S}.$$

Llevando este valor a (1) y sustituyendo Δ por su valor, se obtiene, después de simplificar:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (4)$$

Restando de cada elemento de los 3 primeros renglones el elemento correspondiente del cuarto, el volumen queda expresado por el siguiente determinante de tercer orden:

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{vmatrix}.$$

El valor del determinante que figura en la fórmula obtenida para el volumen del tetraedro, representa el volumen correspondiente al de un paralelepípedo que tuviera por base un paralelogramo de lados NM y NP, por aristas concurrentes en un mismo vértice las aristas MN, NQ y NP del tetraedro dado, y por altura, la altura de dicho tetraedro.

EJERCICIO 27

1. ¿Cuáles son las coordenadas de I, intersección de una perpendicular a XOY en $P(7, 3, 0)$ con el plano perpendicular a OZ en el punto de cota 8?

2. ¿Cuál es el lugar de los puntos de cota 3? ¿de ordenada 6? ¿de abscisa -4?

Dígase qué representan, en el espacio, las ecuaciones siguientes:

3. $3x + 4y = 0$.
4. $3x + 7z = 0$.
5. $7y + 9z = 0$.
6. $2x + 3y = 6$.
7. $7x - 2z = 6$.
8. $9y - 7z = 11$.

9. ¿Cuáles son los cosenos directores de la recta que une el origen con el punto común a los 3 planos

$$x + y + z = 5,$$
$$3x + y + 2z = 11,$$
$$2x + 5y + 3z = 15?$$

10. La ecuación de un plano es: $8x - 9y + 12z = 85$. ¿Cuánto dista del origen?

Obténgase la ecuación del plano: Nº 11 a 17 inclusive.

11. Perpendicular a la recta OP, en $P(7, 14, 22)$.

12. Que se apoya en los puntos $E(2, 7, 3)$, $F(8, 5, 4)$, $G(3, 4, 9)$.

13. Que dista 23 unidades del origen y es perpendicular a la recta de cosenos directores proporcionales a los números 22, 6, 3.

14. Que determina en OX, OY, OZ segmentos iguales, respectivamente, a 5, 7, 3.

15. Paralelo al plano $6x - 3y + z = 9$, y que pasa por el origen.

16. Que dista 5 unidades del origen, sabiendo que los cosenos directores de una recta normal a ese plano, son proporcionales a los números 2, 3, 6.

17. Que es paralelo al plano $22x + 3y + 6z = 5$, y pasa por el punto $P(8, 5, 14)$.

18. ¿Son paralelos los planos $18x + 6y + 12z = 24$ y $3x + y + 2z = 7$?

19. ¿Son paralelos los planos $6x+2y+3z=4$ y $4x+y+2z=16$?

20. Dados los planos $8x+4y+z=18$ y $6x+9y+2z=22$, dígase qué ángulo forman.

21. ¿Cuál es la distancia del plano $2x-2y+z=12$, al punto $M(7, 5, 9)$?

22. ¿Cuáles son las trazas del plano $\frac{x}{5}+\frac{y}{9}+\frac{z}{4}=1$ en cada plano coordenado?

23. Dada la ecuación del plano $8x+9y+12z-34=0$, redúzcase a forma normal.

24. Redúzcase a forma simétrica la ecuación del plano $6x+2y-5z=30$.

25. Obténgase la ecuación del plano EFG en forma simétrica, considerando que siendo PO normal al plano, lo es a las rectas PE, PF y PG (fig. 180).

(Escríbase que la ecuación del plano, en forma normal, es:

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma;$$

luego búsquese $\cos\alpha$, etc., y sustitúyase).

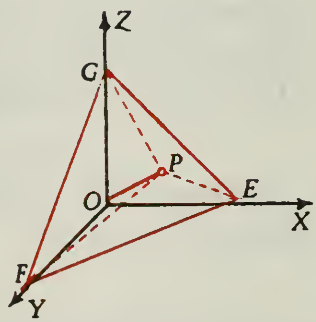


Fig. 180.

3

LA RECTA

252. La recta. Una ecuación de primer grado con una, dos o tres variables, representa un plano, y dos de estas ecuaciones, consideradas como simultáneas, representan una recta, intersección de los planos dados.

Así, el eje OX, intersección del plano XOZ con el plano XOY tiene por ecuaciones

$$y = 0, \quad z = 0.$$

Análogamente, el eje OY, intersección de YOZ con XOY, tiene por ecuaciones

$$x = 0, \quad z = 0;$$

y el eje OZ, intersección de XOZ con YOZ,

$$x = 0, \quad y = 0.$$

253. Ecuaciones de una paralela a un eje. La ecuación de un plano paralelo a YOZ es $x = x_0$ y la de un plano paralelo a XOZ es $y = y_0$; las dos ecuaciones simultáneas

$$x = x_0, \quad y = y_0,$$

representan una paralela al eje OZ.

Análogamente,

$$x = x_0, \quad z = z_0,$$

representan una recta paralela al eje OY, y

$$y = y_0, \quad z = z_0,$$

una paralela a OX.

254. Ecuaciones de una recta contenida en un plano. La recta $y = 3x - 2$, es la intersección del plano apoyado en esa recta y paralelo a OZ, con el plano XOY.

En general, la recta determinada por la intersección de un plano coordenado con otro plano paralelo a uno de los ejes, tiene por ecuaciones

$$y = mx + b, \qquad z = 0,$$
$$z = nx + c, \qquad y = 0,$$
$$y = rz + d, \qquad x = 0.$$

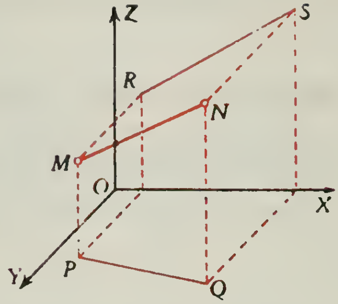


Fig. 181.

255. Ecuaciones de una recta en el espacio. La recta MN (fig. 181) puede considerarse como la intersección del plano vertical QPM que se apoya en ella, con el plano NMR, perpendicular al plano XOZ, que contiene a esa misma recta MN.

La ecuación del plano QPM es de la forma

$$y = mx + b,$$

y la del segundo plano, NMR, es:

$$z = nx + c.$$

Las ecuaciones de la recta MN son, por tanto, las del sistema

$$y = mx + b,$$
$$z = nx + c.$$

256. Ecuaciones de una recta apoyada en el origen. Sean $M(x, y, z)$ un punto de la recta OM, y α, β, γ, sus ángulos directores (figura 182).

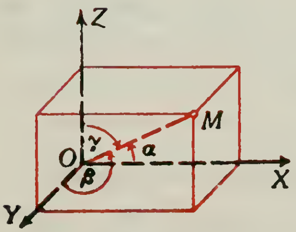


Fig. 182.

Constrúyase un paralelepípedo rectángulo, tal que la diagonal OM tenga por ángulos directores α, β, γ, y tres aristas concurrentes coincidan con los ejes coordenados.

Sea $OM = d$. Se tiene:

$$\frac{x}{d} = \cos\alpha\,; \qquad \frac{y}{d} = \cos\beta\,; \qquad \frac{z}{d} = \cos\gamma.$$

Eliminando d, queda:

$$\frac{x}{\cos\alpha} = \frac{y}{\cos\beta} = \frac{z}{\cos\gamma},$$

que es la ecuación pedida.

Por tanto, las coordenadas de un punto cualquiera de la recta son proporcionales a sus respectivos cosenos directores.

Los valores de estos cosenos son (Nº 237):

$$\cos\alpha = \frac{A}{K}, \qquad \cos\beta = \frac{B}{K}, \qquad \cos\gamma = \frac{C}{K}.$$

Sustituyendo cada coseno por su valor, y dividiendo cada razón entre K, la ecuación anterior se escribe:

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C}.$$

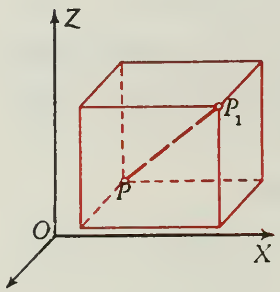


Fig. 183.

257. Ecuaciones de una recta, dada su dirección y uno de sus puntos. Sean $P_1(x_1, y_1, z_1)$ el punto dado, α, β, γ, los ángulos directores de OP_1, y $P(x, y, z)$ un punto móvil de la recta (fig. 183).

Constrúyase un paralelepípedo rectángulo, tal que PP_1 sea una de sus diagonales. Se tiene:

$$x - x_1 = P_1P\cos\alpha; \quad y - y_1 = P_1P\cos\beta; \quad z - z_1 = P_1P\cos\gamma.$$

Elimínese P_1P y se obtiene:

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma},$$

$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C},$$

que son las ecuaciones simétricas de la recta apoyada en $P(x_1, y_1, z_1)$ y de cosenos directores proporcionales a A, B, C.

258. Ecuaciones de la recta que se apoya en dos puntos. Sean $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ los puntos dados (fig. 184).

La ecuación de la recta que se apoya en P_1 es:

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma}. \qquad (1)$$

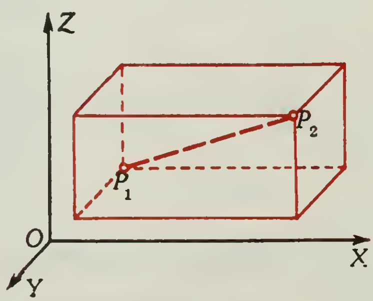


Fig. 184.

Por ser P_2 de la recta, sus coordenadas satisfacen (1); por tanto:

$$\frac{x_2 - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y_2 - y_1}{\cos\beta} = \frac{z_2 - z_1}{\cos\gamma}. \qquad (2)$$

Designando por K el valor de cada razón de (1) y por K' el de cada razón de (2), se obtiene, sucesivamente:

$$x - x_1 = K\cos\alpha; \quad y - y_1 = K\cos\beta; \quad z - z_1 = K\cos\gamma; \qquad (3)$$

$$x_2 - x_1 = K'\cos\alpha; \quad y_2 - y_1 = K'\cos\beta; \quad z_2 - z_1 = K'\cos\gamma; \qquad (4)$$

de donde, dividiendo ordenadamente (3) entre (4):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$

que es la ecuación pedida.

259. Aplicaciones. 1ª Obtener la ecuación de la recta que se apoya en $P(5, 3, 7)$, dados $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos\beta = \frac{2}{3}$ y $\cos\gamma = \frac{2}{3}$.

$$\frac{x - 5}{1:3} = \frac{y - 3}{2:3} = \frac{z - 7}{2:3};$$

o, multiplicando por 3, y dando forma entera:

$$2x - 10 = y - 3 = z - 7.$$

De $2x - 10 = y - 3$, se obtiene:

$$y = 2x - 7,$$

ecuación del plano perpendicular a XOY, y apoyado en la recta

$$y = 2x - 7;$$

y de

$$2x - 10 = z - 7,$$

se deduce:

$$z = 2x - 3,$$

ecuación del plano perpendicular a XOZ y apoyado en la recta $z = 2x - 3$.

2ª Obtener las ecuaciones simétricas de la recta dada por las ecuaciones

$$x + 2y + 3z = 5 \quad \text{y} \quad 2x - 2y - z = -3.$$

Las ecuaciones pedidas han de ser de la forma

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha} = \frac{y - y_1}{\cos\beta} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma}.$$

Puesto que la proporción formada por las dos primeras razones carece de z, y en la que se forma con la primera y la tercera falta y, elimínense sucesivamente esas dos variables, y en cada caso despéjese x, como se expone a continuación.

Eliminando z, se tiene:

$$7x - 4y = -4, \quad \text{de donde:} \quad x = \frac{y-1}{7:4}.$$

Elimínese y:

$$3x + 2z = 2, \quad \text{de donde:} \quad x = \frac{z-1}{-3:2}.$$

Iguálese:
$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-1}{7:4} = \frac{z-1}{-3:2}$$

Dividiendo cada quebrado entre 4, se obtiene, en último término:

$$\frac{x-0}{4} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-1}{-6},$$

que son las ecuaciones simétricas de la recta, de cosenos directores proporcionales a los números 4, 7, y -6.

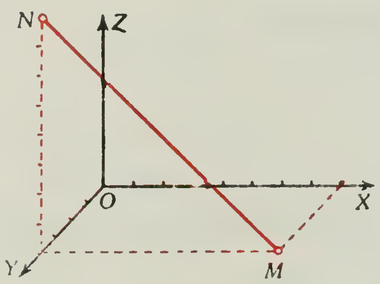


Fig. 185.

3ª Obtener la ecuación de la recta que se apoya en los puntos (3, 4, 5) y (5, 4, 3). Dígase cuáles son las trazas de la recta sobre cada plano y en qué punto corta a cada uno.

Las ecuaciones de la recta son:

$$\frac{x-3}{5-3} = \frac{y-4}{0} = \frac{z-5}{3-5};$$

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{0} = \frac{z-5}{-2}.$$

Igualando la primera con la segunda, se obtiene:

$$y = 4; \qquad (1)$$

y de la igualación de la primera con la tercera:

$$x + z = 8. \qquad (2)$$

La ecuación (1) indica que la recta se halla en un plano paralelo al XOZ; por tanto: la traza de la recta en el plano XOY es:

$$y = 4;$$

y en el plano YOZ: $\quad y = 4.$

La traza en el plano XOZ es:

$$x + z = 8.$$

Para obtener las coordenadas del punto en que corta al plano XOY, iguálese z a cero en (2); se obtiene: $M(8, 4, 0)$. Para tener las coordenadas del punto en que corta al plano YOZ, hágase $x = 0$ en la misma ecuación (2), y se obtiene: $N(0, 4, 8)$.

La recta es la representada en la figura 185.

EJERCICIO 28

Dígase qué línea es la representada por las ecuaciones siguientes:

1. $x = 2, \quad y = -3.$

2. $x = 3, \quad z = 4.$

3. $y = 5, \quad z = -6.$

4. $y = 0, \quad x = -2.$

Obténgase la ecuación de la recta en las condiciones que se indican:

5. Pasa por el origen y sus cosenos directores son proporcionales a 4, 6, 12.

6. Se apoya en el punto $P(-4, 5, 7)$ y sus cosenos directores son proporcionales a los números 8, 9, 12.

7. Se apoya en los puntos $P_1(3, 7, -3)$, $P_2(5, 1, 6)$. ¿Cuáles son sus cosenos directores?

8. Se apoya en el punto $M(-2, 3, -1)$ y es paralela a la recta determinada por la intersección del plano $x = -2z - 1$, con $y = 3z + 4$.

9. Se apoya en los puntos $P_1(3, -5, 0)$, $P_2(7, 1, 3)$ y $P_3(11, 7, 6)$.

10. Se apoya en los puntos $(2, 4, 1)$ y $(4, 2, 1)$. Dígase cuáles son sus trazas en cada uno de los planos coordenados, y en qué punto los corta.

11. Pasa por el punto $P(2, 3, 4)$ y está igualmente inclinada con respecto a cada uno de los ejes cartesianos.

12. ¿Son de la misma recta los puntos $A(4, 6, 2)$, $B(2, 4, 6)$, $C(1, 3, 8)$?

Obténganse las ecuaciones simétricas de las rectas:

13. $2x + 3y - 2z = 3, \quad x - 2y + z = 5.$

14. $3x + 4y - 3z = 1, \quad x - 2y + z = -2.$

15. ¿Son de la recta dada por las ecuaciones $2x + 3y - 2z = 3$, $x - 2y + z = 5$, los puntos $A(3, -1, 0)$, $B(4, 3, 7)$ y $C(2, -5, -7)$? Obténganse 3 puntos más de la recta.

16. ¿Cómo se pueden hallar las ecuaciones de las rectas determinadas por el plano $3x - 2y + 4z = 3$, en los tres planos coordenados?

17. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos en que la recta cuyas ecuaciones son $3x + 2y - z = 1$, $x - 3y + 2z = 15$, corta a los planos coordenados? ¿Corta a alguno de los ejes?

4

SUPERFICIES

260. Definición y ecuación de una superficie cilíndrica. *Superficie cilíndrica es la generada por una recta que se apoya constantemente en una línea fija, llamada directriz, y que en todas sus posiciones sucesivas se conserva paralela a una recta dada.*

Considérese la ecuación

$$x^2 + y^2 = r^2, \qquad (1)$$

que, en el plano XOY, representa una circunferencia de centro O (fig. 186).

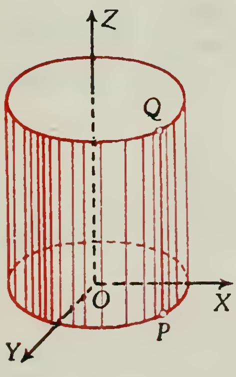


Fig. 186.

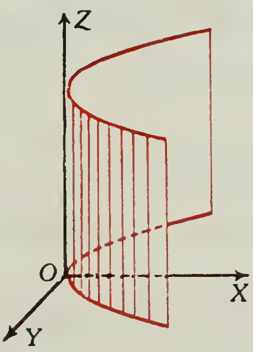


Fig. 187.

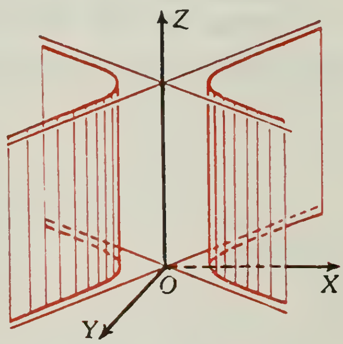


Fig. 188.

Si por un punto cualquiera P de esa circunferencia se traza la recta PQ paralela al eje OZ, la abscisa y la ordenada de cualquier punto de PQ son las mismas que las de P y satisfacen, por tanto, la ecuación (1).

Si PQ se desliza sobre la circunferencia, permaneciendo constantemente paralela al eje OZ, la abscisa y la ordenada de cada punto de PQ seguirán satisfaciendo (1). Pero al moverse PQ en la condición indicada, genera una superficie cilíndrica perpendicular al plano XOY; luego (1) es, en el espacio, la ecuación de la superficie lateral de un cilindro circular recto cuyo eje es OZ (fig. 186).

Análogamente, $y^2 = 4px$ representa, en el plano XOY, una parábola, y en el espacio, la superficie lateral de un cilindro parabólico (fig. 187).

Así también, $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, ecuación de una hipérbola en el plano XOY, representa, en el espacio, la superficie lateral de un cilindro recto hiperbólico (fig. 188).

261. Definición y ecuación de una superficie cónica. *Superficie cónica es la generada por una recta, llamada generatriz, que se apoya en un punto fijo y en una línea fija que es la directriz.*

Sean $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, la ecuación de la directriz, O el punto fijo en que se apoyan las generatrices, c la distancia del plano de la directriz al vértice O del cono, y $M(x, y, z)$ un punto de la superficie cónica.

Trácese por M un plano paralelo a XOY (fig. 189). La intersección de este plano con la superficie cónica es una elipse que tiene por semidiámetros las rectas $C'M$ y $C'M'$; su ecuación es, por tanto:

$$\frac{x^2}{\overline{C'M}^2} + \frac{y^2}{\overline{C'M'}^2} = 1. \qquad (1)$$

Por la semejanza de los triángulos rectángulos OCA y $OC'M$, se tiene:

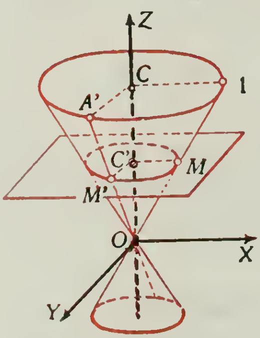


Fig. 189.

$$\frac{C'M}{CA} = \frac{OC'}{OC}, \quad \text{o sea:} \quad \frac{C'M}{a} = \frac{z}{c};$$

de donde:

$$C'M = a\,\frac{z}{c}; \qquad (2)$$

y por la semejanza de OCA' y $OC'M'$:

$$\frac{C'M'}{CA'} = \frac{OC'}{OC}, \quad \text{o sea:} \quad \frac{C'M'}{b} = \frac{z}{c};$$

de donde:

$$C'M' = b\,\frac{z}{c}; \qquad (3)$$

Sustitúyanse (2) y (3) en (1); resulta:

$$\frac{x^2}{a^2\,\frac{z^2}{c^2}} + \frac{y^2}{b^2\,\frac{z^2}{c^2}} = 1.$$

Multiplicando ambos miembros por $\frac{z^2}{c^2}$, se obtiene, como ecuación de una superficie cónica que tiene por directriz una elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

262. Observaciones. 1ª El origen es un punto del lugar geométrico.

2ª Las trazas determinadas en la superficie por planos paralelos a XOY son elipses semejantes, cuyos semiejes aumentan constante e indefinidamente con z.

3ª La superficie es simétrica con respecto a cada uno de los planos coordenados, pues si se sustituyen x por $-x$, y por $-y$, y z por $-z$, la ecuación no cambia de forma.

4ª Toda ecuación homogénea de segundo grado representa una superficie cónica.

5ª Si $b = a$, se obtiene $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, que es la ecuación de la superficie lateral de un cono circular.

6ª $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 0$, es la ecuación de la superficie lateral de un cono circular recto, cuyo eje coincide con OX, y $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, es la ecuación de un cono recto, cuyo eje coincide con OY.

263. Definición y ecuación de una superficie esférica. *La superficie de la esfera es el lugar de los puntos que equidistan de un punto interior, que es el centro de la esfera.*

Sean O el centro de la esfera y $P(x, y, z)$ un punto cualquiera de la superficie.

Se tiene: $\quad OP = r.$

Pero, $\quad \overline{OP}^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2;$

luego, la ecuación de la superficie de una esfera cuyo centro está en el origen es:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2. \qquad (1)$$

Si el centro está en $C(a, b, c)$, la ecuación de la superficie es:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2. \qquad (2)$$

Las superficies (1) y (2) son simétricas con respecto a los planos coordenados, pues estas ecuaciones no cambian si en ellas se sustituyen x por $-x$, y por $-y$, y z por $-z$.

Si $z=0$, la ecuación (1) se reduce a $x^2+y^2=r^2$, ecuación de una circunferencia referida a su centro como origen en el plano XOY.

Si $z=k$, la ecuación (1) se reduce a:

$$x^2+y^2=r^2-k^2, \qquad (3)$$

que es la ecuación de una circunferencia de radio $=\sqrt{r^2-k^2}$, con centro en OZ, y determinada por la intersección de la esfera con el plano $z=k$.

Esta circunferencia es real si $|k| \lesseqgtr r$.

Pueden hacerse consideraciones análogas con planos trazados paralelamente a los planos XOZ y YOZ.

264. Elipsoide de revolución. *Elipsoide de revolución es el sólido que genera la superficie limitada por una semielipse al girar alrededor de uno de los ejes coordenados.*

Sea la elipse de diámetros $A'A=2a$ y $B'B=2c$, en el plano XOZ (fig. 190). Al girar el plano de la semielipse BAB' alrededor de OZ, genera un elipsoide, y cada punto del arco BAB' describe una circunferencia o paralelo en la superficie del sólido.

La ecuación de la superficie del elipsoide así generado es:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (1)$$

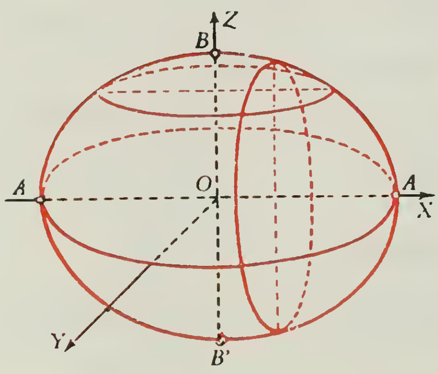


Fig. 190.

Si $x=k$, constante, se tiene la ecuación de un plano paralelo al XOY.

La ecuación de la intersección de $z=k$ con (1) es:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1-\frac{k^2}{c^2}=\frac{c^2-k^2}{c^2};$$

o sea:

$$x^2+y^2=\frac{a^2}{c^2}(c^2-k^2),$$

que es la ecuación de una circunferencia cuyo centro está en OZ y de radio $= \frac{a}{c}\sqrt{c^2 - k^2}$.

Si $|k| < c$, la circunferencia es real; si $|k| = c$, el radio es nulo, y se tienen dos circunferencias nulas o dos puntos, que son B y B'.

Si se sustituyen x por $-x$, y por $-y$, y z por $-z$, la ecuación (1) no cambia de forma; luego, la superficie del elipsoide es simétrica con respecto a cada uno de los planos coordenados.

265. Observaciones. 1ª Si la semielipse considerada gira alrededor de OX, la ecuación de la superficie del elipsoide generado es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

en la cual toda sección paralela al plano YOZ es una circunferencia cuyo centro está en OX.

2ª Si la parte de plano limitada por la semielipse que tiene por ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, gira alrededor de OY, genera un elipsoide cuya superficie tiene por ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$, en la cual toda sección paralela al plano XOZ es una circunferencia cuyo centro está en OY.

266. Elipsoide de tres ejes. Según se ha visto, si se reducen proporcionalmente las ordenadas de una circunferencia se obtiene una elipse.

Análogamente, si en una esfera se reducen en la misma proporción todas las ordenadas y todas las cotas, se obtiene un elipsoide; y cada punto de la superficie del sólido tiene la misma abscisa que el correspondiente de la superficie de la esfera.

Sea la ecuación de la esfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2. \qquad (1)$$

Sean y y y' dos ordenadas correspondientes en el elipsoide y en la esfera, tales que se tenga:

$$y = y'k = y'\frac{b}{a}, \quad \text{o sea:} \quad y' = y\frac{a}{b}; \qquad (2)$$

sean también z y z' dos cotas correspondientes en el elipsoide y en la esfera, tales que se tenga:

$$z = z'k' = z'\frac{c}{a}, \quad \text{o sea:} \quad z' = z\frac{a}{c}. \qquad (3)$$

Elévense (2) y (3) al cuadrado y sustitúyanse en (1); se obtiene, suprimiendo los índices:

$$x^2 + y^2\frac{a^2}{b^2} + z^2\frac{a^2}{c^2} = a^2.$$

Dividiendo entre a^2 los dos miembros de esta ecuación, resulta la de la superficie del elipsoide de tres ejes, o elipsoide de diámetros escalenos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

La intersección de la superficie de este sólido con un plano paralelo a uno de los planos coordenados, es una elipse.

267. Paraboloide de revolución. *Paraboloide de revolución es el sólido generado por la rotación de la superficie limitada por una parábola que gira alrededor de su eje de simetría* (fig. 191).

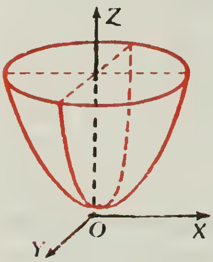


Fig. 191.

La ecuación de la superficie del paraboloide de revolución con eje de rotación en OZ y vértice en O, es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = cz. \qquad (1)$$

Si en (1) se hace $y = 0$, queda:

$$x^2 = a^2cz,$$

ecuación de una parábola referida a su vértice, y que está situada en el plano XOZ.

Si $z = 0$, resulta: $x^2 + y^2 = 0$; de donde: $x = 0$, $y = 0$; son las coordenadas del origen.

Si $z = k$, la intersección de este plano con la superficie (1) tiene por ecuación

$$x^2 + y^2 = a^2ck;$$

que es la ecuación de una circunferencia de radio $= a\sqrt{ck}$ y centro en el eje OZ.

Análogamente,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = cy,$$

es la ecuación de la superficie de un paraboloide de revolución de vértice O, cuyo eje de rotación es OY;

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = cx,$$

es la ecuación de la superficie de un paraboloide de revolución de vértice O, cuyo eje de rotación es OX.

268. Paraboloide elíptico. Si en la ecuación (1) del Nº anterior se reducen proporcionalmente las ordenadas de manera que la razón de proporcionalidad sea $\frac{a}{b}$, esa ecuación toma la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz, \qquad (1)$$

que es la ecuación de la superficie de un paraboloide elíptico de vértice O (figura 192).

Si $z = k$, la intersección de este plano con la superficie (1) tiene por ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = ck, \qquad (2)$$

elipse cuyos semiejes son $a\sqrt{ck}$ y $b\sqrt{ck}$.

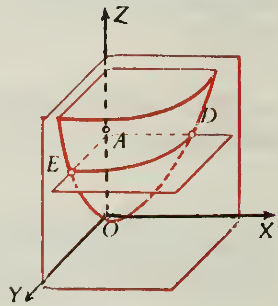


Fig. 192.

Este paraboloide elíptico puede considerarse como generado por una elipse variable, cuyo centro está siempre en OZ y cuyo plano es paralelo a XOY.

La curva DE es un cuarto de la elipse cuyo plano genera el paraboloide, y su ecuación es la (2).

Los semiejes a y b varían proporcionalmente a $\sqrt{k}$. Esto equivale a decir que los puntos D y E describen, cada uno por su parte, la mitad de una parábola de vértice O y que tiene OZ por eje de simetría.

269. Observaciones. 1ª Si los centros de las elipses análogas a las consideradas en el caso anterior están en OY y el vértice en O, la ecuación de la superficie del paraboloide elíptico es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = by.$$

2ª Si los centros están en OX y O es el vértice, la ecuación de la superficie del paraboloide es:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = ax.$$

270. Hiperboloides de revolución. *Si la superficie limitada por cada una de las dos ramas de una hipérbola gira alrededor del eje focal de la curva, o bien alrededor de una recta perpendicular a dicho eje focal en el centro de la curva, se genera un hiperboloide: en el primer caso un hiperboloide de dos hojas o mantos, y en el segundo un hiperboloide de una hoja o manto.*

Los dos mantos de que consta el primer hiperboloide (fig. 193) tienen sus concavidades en direcciones opuestas; el de una hoja consta de una sola pieza (fig. 194), que va ensanchándose, a manera de bocina, a partir del vértice de la hipérbola generadora.

271. Hiperboloide de dos hojas o hiperboloide doble. La ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1, \qquad (1)$$

es la de la superficie del hiperboloide de revolución de dos hojas. cuyo eje de rotación es OX (fig. 193).

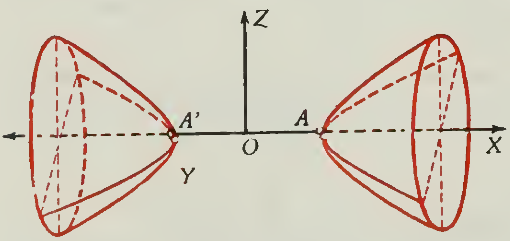


Fig. 193.

Si $z = 0$, se obtiene:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

ecuación de la hipérbola generatriz, en el plano XOY.

Si $y = 0$, resulta:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

ecuación de la misma generatriz, pero en el plano XOZ.

La ecuación de la intersección de la superficie del hiperboloide con el plano $x = k$, es:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = \frac{k^2}{a^2} - 1 = \frac{k^2 - a^2}{a^2},$$

que es una circunferencia de radio $= \frac{b}{a}\sqrt{k^2 - a^2}$. Esta circunferencia es real si $|k| > a$, y crece indefinidamente con k.

Si $k = a$, la circunferencia es un punto; y si $|k| < a$, es una circunferencia imaginaria, es decir, no hay intersección de la superficie del hiperboloide con el plano considerado.

272. Hiperboloide elíptico de dos hojas. Si todas las cotas se reducen proporcionalmente, de manera que sea $\frac{b}{c}$ el coeficiente de proporcionalidad, de la ecuación (1) del número anterior, se obtiene la de la superficie del hiperboloide elíptico de dos hojas:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (1)$$

La intersección de esta superficie con el plano $x = k$, siempre que sea $|k| > a$, es la elipse

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{k^2 - a^2}{a^2}.$$

La superficie (1) se puede considerar generada por una elipse variable cuyo centro está siempre en el eje OX y cuyo plano es paralelo a YOZ.

Considerando sucesivamente OY y OZ como ejes de rotación o como lugares de los centros de las elipses, se obtienen hiperboloides de revolución o elípticos análogos a los que se acaban de estudiar.

273. Hiperboloide de una hoja de revolución. La superficie limitada por la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

del plano XOZ genera, al girar alrededor del eje OZ, el hiperboloide de revolución simple o de una hoja (fig. 194), cuya superficie tiene por ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (1)$$

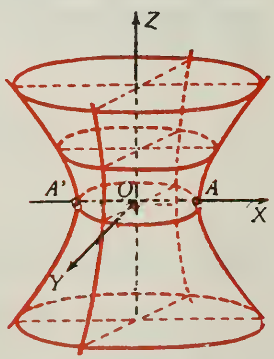


Fig. 194.

Si se sustituyen x por $-x$, y por $-y$, y z por $-z$, la ecuación (1) no cambia de forma; luego, el origen es centro de simetría de la superficie, y ésta es simétrica con respecto a los planos coordenados.

Si $z = k$, la intersección de este plano con la superficie (1) es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2} = \frac{c^2 + k^2}{c^2},$$

circunferencia siempre real, de radio igual a $\frac{a}{c}\sqrt{c^2 + k^2}$ y cuyo centro está en OX.

Si $k = 0$, esa circunferencia es mínima y se halla en el plano XOY; se llama *garganta del hiperboloide.*

274. Hiperboloide elíptico de una hoja. Si todas las ordenadas de los puntos de la superficie (1) del número anterior se reducen proporcionalmente, y $\frac{a}{b}$ es la constante de proporcionalidad, se obtiene la ecuación de la superficie del hiperboloide elíptico de una hoja, o hiperboloide simple:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (1)$$

La intersección de (1) con el plano $z = k$, es una elipse, siempre real, cuya ecuación es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2 + k^2}{c^2}$$

Si $k = 0$, se obtiene la elipse mínima, que es la *garganta del hiperboloide*. Para todo valor de $k \neq 0$, se obtiene otra elipse, que aumenta indefinidamente con el valor absoluto de k.

La intersección de (1) con el plano $y = 0$, es una hipérbola cuya ecuación es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Si en (1) se hace $y = \pm b$, se obtiene:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0;$$

o sea: $$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 0,$$

ecuaciones de dos rectas, de pendientes simétricas, en cada uno de los planos $y = b$, $y = -b$.

La intersección de (1) con el plano $x = 0$, es también una hipérbola, cuya ecuación es:

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Si los ejes OY y OX se consideran sucesivamente como ejes de rotación o como lugares de los centros de las elipses, se tienen hiperboloides de revolución o elípticos análogos a los que se acaban de estudiar.

De las consideraciones hechas acerca de los hiperboloides se infiere, como resumen, que son sólidos limitados por superficies cuyas secciones planas, hechas paralelamente a los planos coordenados, son circunferencias, elipses o hipérbolas.

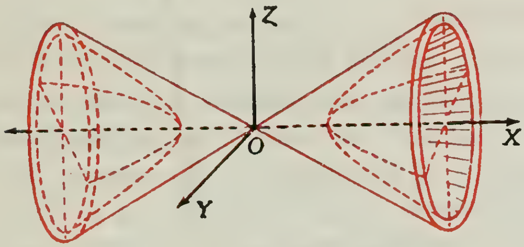


Fig. 195.

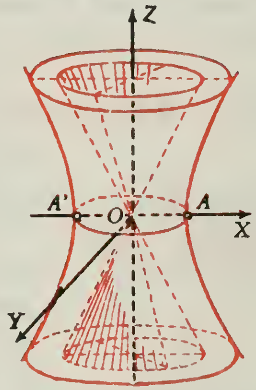


Fig. 196.

275. Cono asintótico. *Si la superficie limitada por las asíntotas gira alrededor del eje focal de la curva, o bien alrededor de una recta que pase por el centro de la curva y perpendicularmente a dicho eje, se genera un cono, llamado cono asintótico.* En el primer caso envuelve los dos mantos del hiperboloide (fig. 195), y en el segundo, el cono es envuelto por el hiperboloide de un manto (fig. 196).

El cono cuya superficie tiene por ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

es asintótico del hiperboloide de dos hojas cuya superficie tiene por ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Análogamente, el cono limitado por la superficie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

es asintótico del hiperboloide elíptico de una hoja limitado por la superficie

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

En cada caso, la ecuación del hiperboloide y la de su cono asintótico difieren en una constante; no pueden, por tanto, tener puntos comunes a una distancia finita del origen. Puede decirse que la superficie del cono es tangente a la del hiperboloide en el infinito, y que el cono asintótico y el hiperboloide se relacionan como las asíntotas y la hipérbola correspondientes.

276. Hiperboloides conjugados. *Si las superficies limitadas por cada una de las dos ramas de una hipérbola y por las que limitan las dos ramas de la conjugada, giran alrededor de una recta que pasa por el centro de las dos curvas perpendicularmente al eje focal de una de ellas, se generan dos hiperboloides conjugados: uno de dos mantos y otro de uno* (fig. 197).

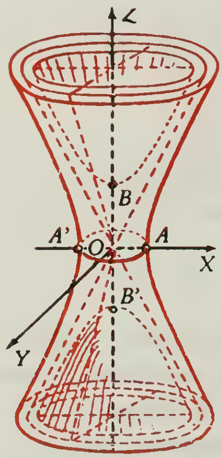


Fig. 197.

Las ecuaciones respectivas de las superficies de estos dos hiperboloides de revolución, en que el eje de rotación es OZ, son:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}-1=0,$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}+1=0.$$

Estos dos hiperboloides tienen el mismo cono asintótico, cuya superficie tiene como ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{b^2}=0.$$

277. Paraboloide hiperbólico. Supóngase fija la parábola AOA'. Considérese la parábola móvil BAB', cuyo vértice recorre la parábola fija y cuyo plano se conserva siempre paralelo a YOZ. El sólido generado por la parábola BAB' se llama *paraboloide hiperbólico* (fig. 198).

La ecuación de la superficie de este cuerpo es:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=cz \qquad (1)$$

La intersección del plano $z = k$ con la superficie (1), tiene como ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = ck;$$

es una hipérbola cuyos semiejes son $a\sqrt{ck}$ y $b\sqrt{ck}$; es decir, toda sección paralela al plano XOY es una hipérbola.

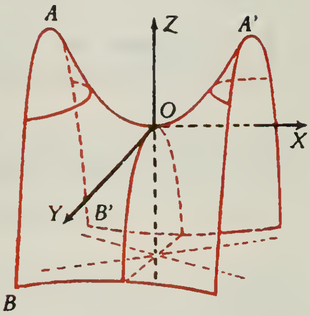


Fig. 198.

Si $z = 0$, resulta:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0:$$

o sea: $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = 0;$

ecuaciones de dos rectas de pendientes simétricas y que pasan por el origen.

Si $x = k$, la ecuación (1) se reduce a:

$$-\frac{b^2}{y^2} = cz - \frac{k^2}{a^2},$$

que es la ecuación de una parábola que se extiende indefinidamente en la región de las z negativas. Es decir, toda sección paralela al plano YOZ es una parábola, sea k diferente de cero o no.

EJERCICIO 29

Obtener la ecuación de la superficie esférica en las condiciones siguientes: Nº 1 a 5 inclusive.

1. Centro en el origen y pasa por el punto $P(22, 6, 3)$.

2. Centro en $C(4, 1, -2)$ y pasa por $Q(13, 7, 0)$.

3. Centro en el origen y tangente al plano $x = 5$.

4. Centro en $C(2, 5, 4)$ y tangente al plano YOZ.

5. Pasa por los puntos $A(8, 3, 13)$, $B(1, 3, 4)$, $C(5, -1, 4)$ y $D(5, 6, -3)$.

6. Dado $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y + 6z - 52 = 0$, ecuación de una superficie esférica, obténganse las coordenadas del centro y el valor del radio.

7. Calcúlese el radio de la circunferencia que en la esfera $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-4) = 25$ determina el plano $3x+2y+6z = 6$.

8. Calcúlese el radio de la circunferencia determinada por la intersección de las esferas cuyas ecuaciones respectivas son:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 24, \qquad (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 9.$$

Dígase a qué sólidos corresponden, en el espacio, las ecuaciones siguientes:

9. $x^2 + y^2 = 4$.
10. $x^2 + z^2 = 16$.
11. $y^2 + z^2 = 25$.
12. $x^2 + y^2 = 6x$.
13. $x^2 + z^2 + 8x = 0$.
14. $3x^2 + 4y^2 = 12y$.
15. $y^2 = 4x$.
16. $x^2 = 6z$.
17. $z^2 = 8y$.

Obténgase la ecuación de la superficie del sólido generado por la rotación de la figura que se indique, dado el eje de rotación: Nº 18 a 21 inclusive.

18. Parábola $x^2 = 2z$, alrededor del eje OZ.

19. Parábola $y^2 = -4x$, alrededor del eje OX.

20. Elipse $9x^2 + 4z^2 = 36$, alrededor del eje OZ; ídem alrededor de OX.

21. Hipérbola $4x^2 - 3z^2 = 12$, alrededor de OZ; ídem de OX

22. Obténgase la ecuación de la línea que limita la intersección de la esfera generada por $x^2 + z^2 = 25$ con el elipsoide que genera la elipse $9x^2 + 4z^2 = 36$ al girar alrededor de OZ.

23. Obténgase la ecuación de la superficie cónica generada por la rotación de la recta que se apoya en el punto $V(4, 0, 0)$ y tiene por directriz la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ situada en el plano $z = 8$.

En los ejercicios siguientes, dígase: 1º La superficie que representa la ecuación. 2º Las trazas de la superficie, o intersección de ella en cada plano coordenado. 3º La intersección con el plano o planos que se indiquen.

24. $x^2 - 8x + y^2 + z^2 = 0$; $z = 3$.

25. $x^2 = 4yz$; $z = 1$; $z = 5$.

26. $3y^2 + 4z^2 = 12$; $y = 1$.

27. $3x^2 + 4y^2 = 12z$; $z = 4$.

28. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} - \frac{z^2}{12} = 1$; $z = 4$.

¿Tiene trazas en el plano YOZ la superficie representada por esta ecuación?

29. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} - \frac{z^2}{12} = 1$; $x = 4$; $y = 3$; $z = 6$. ¿Qué se obtiene haciendo $x = 2$?

30. $y^2 = 2xz$; $z = 4$; $z = k$; $x = k$. Dibújese la figura.

31. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 4z$; $x = 0$; $y = 2$; $z = \frac{9}{4}$.

32. ¿Qué clase de línea es común a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, y al elipsoide $9x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$?

5 TRANSFORMACIONES DE COORDENADAS

Transformación de coordenadas. El problema de la transformación de coordenadas, que se introduce en la geometría de tres dimensiones como en la geometría plana, es el siguiente: *dados dos sistemas de ejes coordenados, expresar las coordenadas de un punto cualquiera, referido al primer sistema, en función de las coordenadas del mismo punto, con respecto al segundo sistema.*

Comprende varios casos, de los cuales sólo se van a considerar los siguientes:

1º Cambio de origen, sin cambiar la dirección de los ejes:

2º Cambio en la dirección de los ejes, sin cambiar el origen.

279. Traslación de los ejes. Sean O el origen y OX, OY, OZ los ejes en el primer sistema; $O'(a, b, c)$ el nuevo origen y $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ las direcciones positivas de los ejes en el segundo sistema, en el cual $O'X'$, $O'Y'$, $O'Z'$ son respectivamente paralelos a OX, OY y OZ (fig. 199).

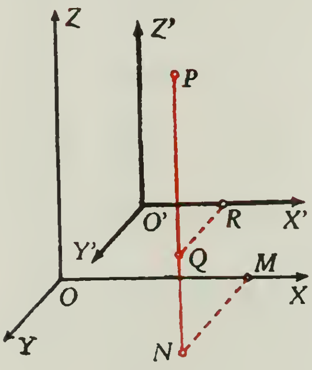


Fig. 199.

Las coordenadas de un punto P, en el primer sistema, son:

$$x = OM, \quad y = MN, \quad z = NP:$$

y, en el nuevo sistema:

$$x' = O'R, \quad y' = RQ, \quad z' = QP.$$

Notando que la abscisa x es igual a la del nuevo origen aumentada en la abscisa $x' = O'R$, se tiene:

$$x = a + x'.$$

Análogamente:

$$y = b + y', \quad z = c + z'.$$

Luego, si se conoce la ecuación de una recta o de una superficie referida a cierto sistema de ejes, puede hallarse la ecuación correspondiente, referida a otro sistema de ejes paralelos a los primeros, reemplazando, en la ecuación dada,

$$x \text{ por } x' + a, \quad y \text{ por } y' + b, \quad z \text{ por } z' + c.$$

280. Aplicación. La ecuación de la superficie de una esfera es $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 8z = 5$. Obténgase la ecuación de la misma superficie, refiriéndola al punto $O'(3, -1, 4)$ como nuevo origen.

Sustituyendo x por $x' + 3$, y por $y' - 1$, z por $z' + 4$, se obtiene:

$$(x' + 3)^2 + (y' - 1)^2 + (z' + 4)^2 - 6(x' + 3) + 2(y' - 1) - 8(z' + 4) = 5.$$

Desarrollando y reduciendo, resulta:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 81;$$

o sea, suprimiendo los acentos:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 81,$$

ecuación de la superficie de una esfera de radio 9 y centro en el origen.

281. Rotación de los ejes. Sean OX, OY, OZ, OX' OY', OZ' las direcciones positivas de dos sistemas de ejes, ambos rectangulares y de mismo origen, y P un punto cualquiera, de coordenadas (x, y, z) referidas al primer sistema, y (x', y', z') con respecto al segundo sistema de ejes (fig. 200).

Señálense las coordenadas del punto P en cada sistema y únase dicho punto con el origen. Se forman así los dos contornos $ONMPO$ y $ON'M'PO$.

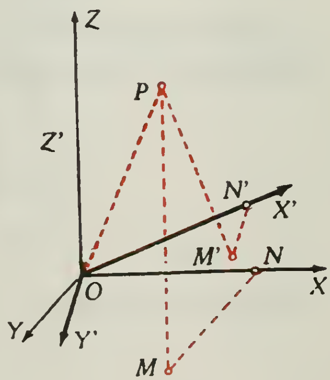


Fig. 200.

Si, en cada contorno, se considera el segmento PO como resultante o línea de cierre, se tiene, suponiendo un mismo eje de proyección:

$$\text{pr. } ON + \text{pr. } NM + \text{pr. } MP = \text{pr. } ON' + \text{pr. } N'M' + \text{pr. } M'P.$$

Designando por α_1, α_2, α_3 los ángulos que OX' forma, respectivamente con OX, OY y OZ; por β_1, β_2, β_3, y por γ_1, γ_2, γ_3 los ángulos que OY' y OZ' forman, cada uno respectivamente, con los ejes primitivos OX, OY y OZ, se obtiene, proyectando los dos contornos considerados sucesivamente sobre cada uno de los ejes OX, OY, OZ:

$$x = ON' \cos\alpha_1 + N'M' \cos\beta_1 + M'P \cos\gamma_1;$$

o sea: $$x = x' \cos\alpha_1 + y' \cos\beta_1 + z' \cos\gamma_1;$$

y, en forma análoga:

$$y = x' \cos\alpha_2 + y' \cos\beta_2 + z' \cos\gamma_2;$$
$$z = x' \cos\alpha_3 + y' \cos\beta_3 + z' \cos\gamma_3.$$

Sustituyendo los cosenos de los ángulos que OX' forma con los primitivos ejes por λ_1, λ_2, λ_3, y los 6 cosenos restantes por μ_1, μ_2, μ_3; ν_1, ν_2, ν_3, se obtiene:

$$x = x'\lambda_1 + y'\mu_1 + z'\nu_1;$$
$$y = x'\lambda_2 + y'\mu_2 + z'\nu_2;$$
$$z = x'\lambda_3 + y'\mu_3 + z'\nu_3.$$

Estas son las fórmulas de transformación para pasar del primer sistema al segundo.

282. Aplicación. La ecuación de una superficie, referida a un sistema de ejes rectangulares, es:

$$2x^2 - y^2 - 4xy + xz - 2yz = 0.$$

Conservando el mismo origen, referirla a otro sistema de ejes, definidos por las siguientes relaciones:

$$\lambda_1 = \frac{1}{3} \quad \lambda_2 = \frac{2}{3} \quad \lambda_3 = -\frac{2}{3};$$
$$\mu_1 = \frac{1}{3} \quad \mu_2 = \frac{2}{3} \quad \mu_3 = \quad \frac{2}{3};$$
$$\nu_1 = \frac{2}{7} \quad \nu_2 = \frac{6}{7} \quad \nu_3 = \quad \frac{3}{7},$$

Según lo expuesto, la sustitución que debe hacerse es:

$$x = \frac{1}{3}x' - \frac{1}{3}y' + \frac{2}{7}z';$$
$$y = \frac{2}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{6}{7}z';$$
$$z = -\frac{2}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{3}{7}z'$$

Haciendo la sustitución y efectuando las operaciones, se obtiene:

$$x^2 + y^2 + \frac{477}{98} z^2 + 2xy + \frac{135}{28} xz + \frac{177}{28} yz + 45 = 0.$$

EJERCICIO 30

1. ¿Dónde debe situarse el origen para que desaparezcan los términos de primer grado en la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 4z = 33?$$

2. ¿Qué valor debe darse a a, b, c, para que al hacerse la sustitución

$$x = a + x', \quad y = b + y', \quad z = c + z',$$

en la ecuación $\quad x^2 - 2y^2 + z^2 + 2x - 3y + z = 0,$

desaparezcan los términos de primer grado?

3. La ecuación de un elipsoide es

$$25x^2 + 22y^2 + 16z^2 - 20xy - 4xz + 16yz - 26x - 40y - 44z + 44 = 0.$$

¿Cómo se transforma si se toma como nuevo origen el punto $O'(1, 1, 1)$?

4. Dada la ecuación

$$25x^2 + 22y^2 + 16z^2 - 20xy - 4xz + 16yz = 11.$$

imprímase a los ejes una rotación tal que se tenga:

$$\lambda_1 = \mu_1 = \nu_1 = \frac{1}{3};$$

$$\lambda_2 = \mu_2 = \nu_2 = \frac{2}{3};$$

$$\lambda_3 = \mu_3 = \nu_3 = -\frac{2}{3},$$

¿Cuál es la ecuación que se obtiene?

INDICE ANALITICO

(Las referencias se hacen a los números del texto y a las páginas del bosquejo histórico).

Se terminó la impresión de este libro
el día 7 de febrero de 1983,
en los talleres de la Editorial Progreso, S.A.
Sabina 275, Del. Cuauhtémoc 06400 México, D.F.
Tiro 25,000 ejemplares, más sobrantes para reposición.

LIBROS DE MATEMATICAS de la Editorial Progreso, S.A.

Serie Anfossi y Flores Meyer

CURSO DE ALGEBRA
- CURSO DE ALGEBRA, Maestro

CURSO DE TRIGONOMETRIA RECTILINEA
- CURSO DE TRIGONOMETRIA RECTILINEA, Maestro

TABLAS DE LOGARITMOS Y ANTILOGARITMOS
GEOMETRIA ANALITICA
- GEOMETRIA ANALITICA, Respuestas
- GEOMETRIA ANALITICA, Soluciones a los problemas

CURSO DE CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL
- CURSO DE CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL, Soluciones

TABLAS DE LOGARITMOS Y FUNCIONES NATURALES

Serie Lizárraga - Flores Meyer - Vázquez

MATEMATICAS I BACHILLERATO
MATEMATICAS II BACHILLERATO
MATEMATICAS III BACHILLERATO
MATEMATICAS IV BACHILLERATO

Serie Flores Meyer y González Cabrera

MATEMATICAS 1° Educación Dinámica
MATEMATICAS 2° Educación Dinámica
MATEMATICAS 3° Educación Dinámica

Serie Flores Meyer - Fautsch

TEMAS SELECTOS DE MATEMATICAS
CALCULO BASICO

Serie Preciado Toral

MATEMATICAS 1er. curso
- MATEMATICAS 1er. curso, Maestro

MATEMATICAS 2o. curso
- MATEMATICAS 2o. curso, Maestro

MATEMATICAS 3er. curso
- MATEMATICAS 3er. curso, Maestro

Varios:

CURSO DE COSMOGRAFIA, por Gallo y Anfossi
CURSO DE GEOMETRIA, por F. Landaverde
- CURSO DE GEOMETRIA, Clave para el Maestro