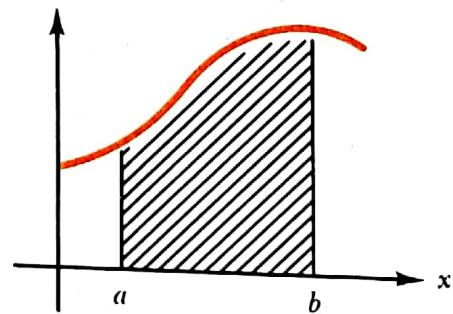
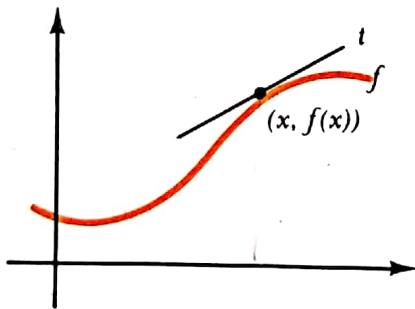


A.7 EL CONCEPTO DE LÍMITE

- 1 Hay dos problemas famosos a los cuales el cálculo infinitesimal debe gran parte de su desarrollo. El primero se refiere a la tangente a una curva y el segundo al área limitada por una curva. Para ser más explícitos, supongamos que se nos da una función f y un punto $(x, f(x))$ de la gráfica de f . La primera cuestión es: hallar la recta t , si es que existe, que sea tangente a la curva en el punto $(x, f(x))$.



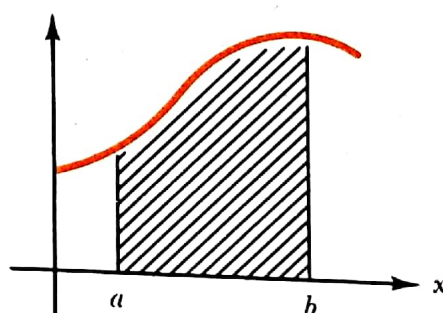
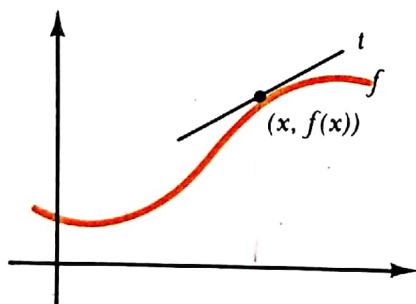
El segundo problema puede ser formulado también geoméricamente: Dada una función f , hallar el área comprendida entre la gráfica de f y el eje x , entre dos puntos dados a y b .

Según se verá en capítulos posteriores, las soluciones de estos problemas proceden ambas de la misma idea fundamental, la de límite. En consecuencia, nos proponemos en las secciones A.7 a A.10 presentar un estudio de este nuevo concepto —el *límite*.

- 2 En los veinte apartados siguientes vamos a presentar un estudio informal de las ideas principales que llevan al concepto de límite, y vamos a introducir la notación pertinente. Empezaremos con una pregunta: «Dada una función f y un número a , ¿cuál es el número que está cerca de $f(x)$ cuando x está cerca de a ?»
- 3 Si preguntáramos «¿Cuál es el valor de f cuando $x = a$?», la respuesta sería sencillamente _____ (cuando a pertenece al dominio de f).

A.7 EL CONCEPTO DE LÍMITE

- 1 Hay dos problemas famosos a los cuales el cálculo infinitesimal debe gran parte de su desarrollo. El primero se refiere a la tangente a una curva y el segundo al área limitada por una curva. Para ser más explícitos, supongamos que se nos da una función f y un punto $(x, f(x))$ de la gráfica de f . La primera cuestión es: hallar la recta t , si es que existe, que sea tangente a la curva en el punto $(x, f(x))$.



El segundo problema puede ser formulado también geoméricamente: Dada una función f , hallar el área comprendida entre la gráfica de f y el eje x , entre dos puntos dados a y b .

Según se verá en capítulos posteriores, las soluciones de estos problemas proceden ambas de la misma idea fundamental, la de límite. En consecuencia, nos proponemos en las secciones A.7 a A.10 presentar un estudio de este nuevo concepto —el *límite*.

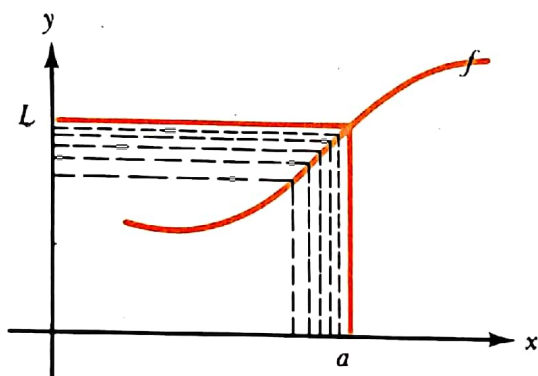
- 2 En los veinte apartados siguientes vamos a presentar un estudio informal de las ideas principales que llevan al concepto de límite, y vamos a introducir la notación pertinente. Empezaremos con una pregunta: «Dada una función f y un número a , ¿cuál es el número que está cerca de $f(x)$ cuando x está cerca de a ?»
- 3 Si preguntáramos «¿Cuál es el valor de f cuando $x = a$?», la respuesta sería sencillamente _____ (cuando a pertenece al dominio de f).

$f(a)$

- 4 En este punto, el lector se preguntará por qué no es « $f(a)$ » la respuesta a la pregunta del apartado 2. Esto quedará ahora claro con los ejemplos. Lo que aquí queremos destacar es que se trata de preguntas *distintas*. Una de las preguntas pide el valor de f cuando $x = a$. La pregunta del apartado 2 pide el número del cual $f(x)$ está _____, cuando x _____ a .

está cerca x está cerca de a

- 5 Todo el mundo sabe, por supuesto, lo que significa «cerca», pero observemos de todos modos el diagrama adjunto.



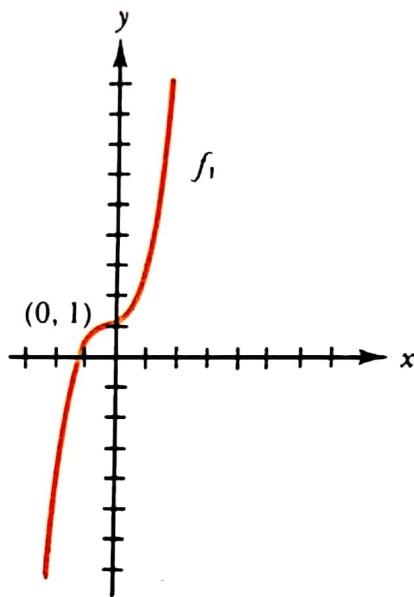
Cuanto más próximos al punto a estén los puntos del eje x , tanto más se aproximan los correspondientes valores funcionales a _____. (Parece también como si $f(a) =$ _____.)

 $L \quad f(a) = L$

- 6 Siguen aquí algunos ejemplos instructivos.
- 7 Sea f_1 dada mediante la fórmula $f_1(x) = x^3 + 1$ para todo x . Dibújese la gráfica de f_1 .

Véase el apartado 8.

- 8 Observando la gráfica, vemos que:
- (a) $f_1(x)$ está cerca de _____ cuando x está cerca de 0.
- (b) $f_1(0) =$ _____.



$f_1(x)$ está cerca de 1 $f_1(0) = 1$

9 Para mayor refuerzo de la afirmación « $f_1(x)$ está cerca de 1 cuando x está cerca de 0», podemos calcular algunos valores de $f_1(x)$. Completar la tabla siguiente.

x :	1	-1	0,5	-0,5	0,1	-0,1	0,01	-0,01
$f_1(x)$:	2	0	1,125					

Los valores de $f_1(x)$ son, ordenadamente,
0,875 1,001 0,999 1,000001 0,999999

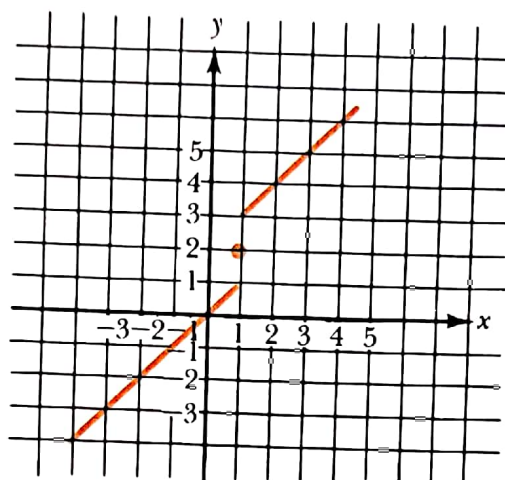
10 Introduzcamos ahora algunas complicaciones. Defínase f_2 mediante la fórmula

$$f_2(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Dibújese la gráfica de f_2 .

Véase el apartado 11.

11 Observando la gráfica vemos que: (a) $f_2(x)$ está cerca de 1 si x está cerca de 1 por el lado izquierdo. (b) $f_2(x)$ está cerca de 3 si x está cerca de 1 _____.
(c) $f_2(1) =$ _____.



por el lado derecho $f_2(1) = 2$

- 12 Completar la tabla siguiente que confirma aún más la idea de que $f_2(x)$ está cerca de 3 cuando x está cerca de 1 *por la derecha*.

x :	2	1,5	1,2	1,1	1,01	1,001	1,0001
$f_2(x)$:	4	3,5	3,2				

3,1 3,01 3,001 3,0001

- 13 *Pregunta:* Alrededor de los puntos en cuestión (0 para f_1 y 1 para f_2). ¿En qué difieren los comportamientos de f_1 y f_2 ?

Respuesta: En dos modos:

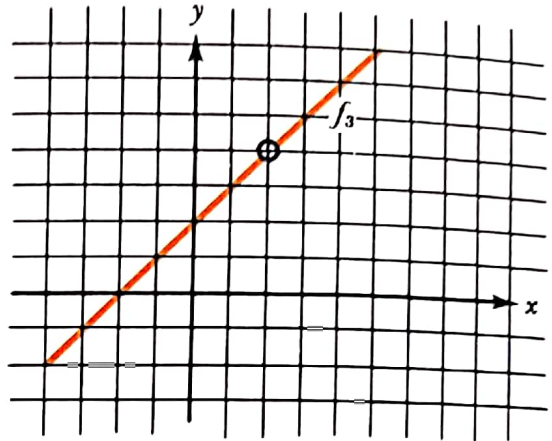
- (a) La cuestión de proximidad para f_2 tiene solamente una respuesta cuando nos restringimos al lado derecho (o izquierdo) de $x = 1$. Para f_1 , no importa el lado de $x = 0$ que consideremos.
- (b) En el caso de f_2 , vemos que $f_2(1) \neq 1$ ó 3, pero para f_1 tenemos que f_1 está cerca de _____ cuando x _____, y $f_1(0) =$ _____.

1 x está cerca de 0

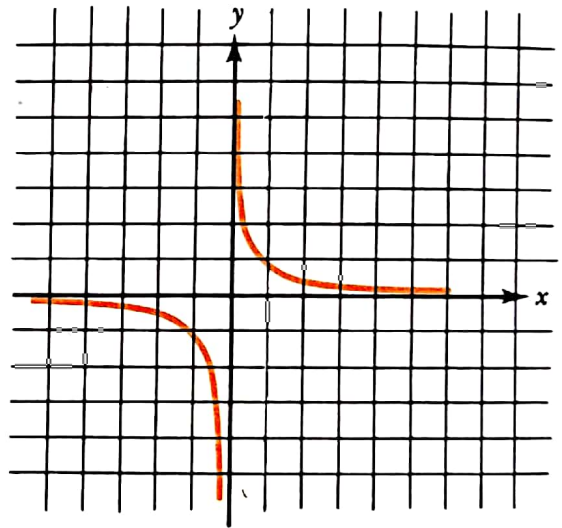
$f_1(0) = 1$

- 14 Siguen aquí algunos ejemplos más —cada uno de ellos con un aspecto nuevo—. *Inténtese* estudiar, tal como hemos hecho en los apartados anteriores, el comportamiento de la función cuando el punto x está cerca del punto en cuestión.

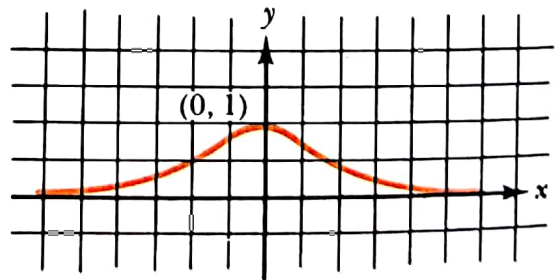
- (a) $f_3: f_3(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ para todo $x \neq 2$
 «cuando x está cerca de 2»



- (b) $f_4: f_4(x) = \frac{1}{x - 1}$ para todo $x \neq 1$
 «cuando x está cerca de 1»



- (c) $f_5: f_5(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ para todo x
 «cuando x se hace cada vez más grande»



- (a) Obsérvese primero que $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$ para todo $x \neq 2$. Vemos que $f_3(x)$ está cerca de 4 cuando x está cerca de 2, sin importar el lado (derecho o izquierdo) de 2 que consideremos. Finalmente, $f_3(x)$ está sin definir en $x = 2$.
- (b) $f_4(x)$ se hace cada vez más grande cuando x está cerca de 1 *por el lado*

derecho y $f_4(x)$ se hace grande negativamente cuando x está cerca de 1 por el lado izquierdo, $f_4(x)$ está sin definir en $x = 1$.

(c) $f_5(x)$ tiende hacia 0 cuando x toma valores grandes. (No existe aquí ningún punto en que calcular f_5 .)

Éstas han sido preguntas difíciles y el lector puede darse por satisfecho si sus respuestas expresan las mismas ideas anteriores.

15 Según hacen ver nuestros ejemplos, una función puede comportarse de muy diversas maneras cuando « x tiende hacia a ». Enfocando nuestra atención en f_3 , vemos que

« $f_3(x)$ está _____ cuando x está _____».

cerca de 4 cerca de 2

16 La función f_3 proporciona un ejemplo elegante del concepto de *límite*. A grandes rasgos, cuando una función f tiende hacia un número L al tender x hacia a , decimos,

«El límite de $f(x)$ cuando x tiende hacia a es L »,

y escribimos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. Claramente, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$ _____

$$\lim_{x \rightarrow 2} f_3(x) = 4$$

17 ¿Qué se puede afirmar de f_1 y f_2 ? Dígase si son verdaderos o falsos los siguientes enunciados, intentando razonar las respuestas.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = 1$ _____

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} f_2(x) = 2$ _____

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} f_2(x) = 1$ _____

(a) Verdad, $f_1(x)$ está cerca de 1 cuando x está cerca de 0.

(b) Falso, $f_2(x)$ no tiende hacia 2.

(c) Falso, $f_2(x)$ está cerca de 1 si x está cerca de 1 por la izquierda, pero no si x tiende hacia 1 por la derecha.

debemos distinguir entre *cerca por la izquierda* y *cerca por la derecha*. Escribiremos

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_1$ si $f(x)$ está cerca de L cuando x tiende hacia a por la izquierda de a .

$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_2$ si $f(x)$ está cerca de _____ cuando x tiende hacia a por la _____.

L_2 por la derecha de a

19 Dígase si son verdad o si son falsos los siguientes enunciados acerca de f_1 , f_2 y f_3 .

(a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f_2(x) = 1$ _____

(b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f_2(x) = 3$ _____

(c) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f_3(x) = 4$ _____

(d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(x) = 1$ _____

(e) $\lim_{x \rightarrow 1} f_2(x) = 2$ _____

(a) verdad

(b) verdad

(c) verdad. Obsérvese que f_3 satisface el enunciado *más fuerte* $\lim_{x \rightarrow 2} f_3(x) = 4$, de modo que claramente satisface el de arriba.

(d) verdad

(e) falso.

$$(d) \lim_{x \rightarrow -x} f_5(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$-\infty$ 0

Siguen aquí algunas cuestiones acerca de la notación acabada de introducir.

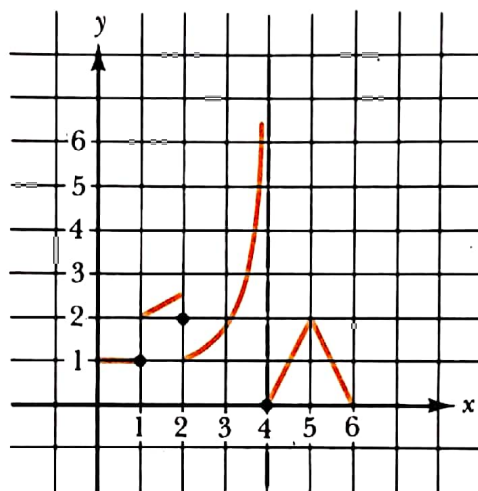
21 Sea f definida por la gráfica de la derecha. La observación de la gráfica responde a las siguientes cuestiones:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$



$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \quad (c) \text{ No existe}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 \quad (d) \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$$

Y aquí siguen otras cuestiones más:

$$(e) \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \underline{\hspace{2cm}} \quad (g) \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \underline{\hspace{2cm}} \quad (h) \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = +\infty \quad (g) \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 2$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 2 \quad (h) \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 2$$

22 Simplificando las cosas en exceso, nos permitimos decir que el cálculo infinitesimal está edificado sobre unos pocos teoremas acerca de límites. Debido a esto y a nuestro deseo de dar un fundamento firme a nuestros razonamientos, deberemos sustituir el estudio intuitivo de los límites por argumentos formales ba-

sados en definiciones exactas. Nuestro primer objetivo es, por supuesto, dejar bien claro lo que han de significar palabras tales como «cerca de», «tender hacia», etc. Empezamos trayendo a nuestra memoria a un viejo conocido, el intervalo abierto, del cual haremos uso para definir un nuevo concepto conocido por *entorno*.

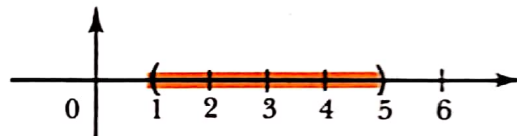
- 23** •A.7.23• **DEFINICIÓN.** Si a es un número real cualquiera y r es un número positivo, definimos el *entorno de radio r con centro a* como el intervalo abierto $(a - r, a + r)$.

Utilizamos el símbolo $N_r(a)$ para designar a este conjunto. Así $N_s(b) =$ _____.

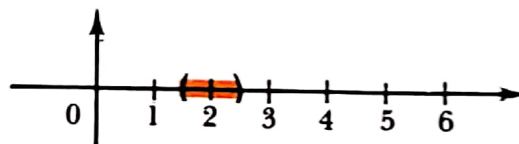
$$N_s(b) = (b - s, b + s)$$

- 24** Son útiles los siguientes diagramas.

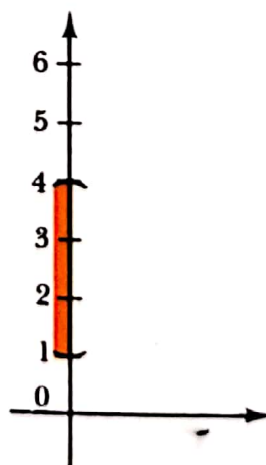
- (a) $N_2(3)$



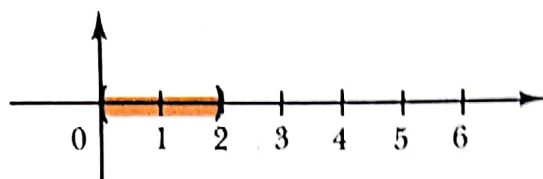
- (b) $N_{1/2}(2)$



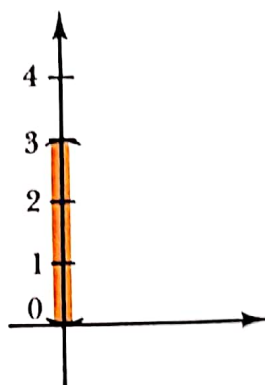
- (c) $N_{3/2}(\frac{5}{8})$



(d)



(e)

(d) $N_1(1)$ (e) $N_{3/2}(3/2)$

Nota: Por el contexto estará claro cómo conviene *representar* un entorno.

5 Con la notación generadora de conjuntos, podemos escribir varias formas equivalentes para un entorno, a saber:

(a) $N_r(a) = \{x \mid a - r < x < \quad\quad\quad\}$

(b) $N_r(a) = \{x \mid -r < (x - a) < \quad\quad\quad\}$

(c) $N_r(a) = \{x \mid |x - a| < \quad\quad\quad\}$

(a) $N_r(a) = \{x \mid a - r < x < a + r\}$

(b) $N_r(a) = \{x \mid -r < (x - a) < r\}$

(c) $N_r(a) = \{x \mid |x - a| < r\}$

26 Considérese el entorno $N_r(c)$: Sabemos que t es el _____, c el _____, y que la longitud total del entorno es _____.

radio centro $2t$

27 Ahora si $x \in N_{1/10}(2)$, podemos decir entonces que la distancia entre x y 2 es

menor que _____. Recíprocamente, si un número x está más cerca de 2 que $\frac{1}{10}$, entonces $x \in$ _____

$$\frac{1}{10} \quad x \in N_{1/10}(2)$$

28 Dicho de otro modo, los puntos de $N_r(a)$ son exactamente los puntos que están a una distancia de _____.

a menor que r

29 De este modo identificamos «estar cerca de a » con «estar en un entorno de a ». Por ejemplo, si $r_1 < r_2$, tenemos que _____ \subset _____.

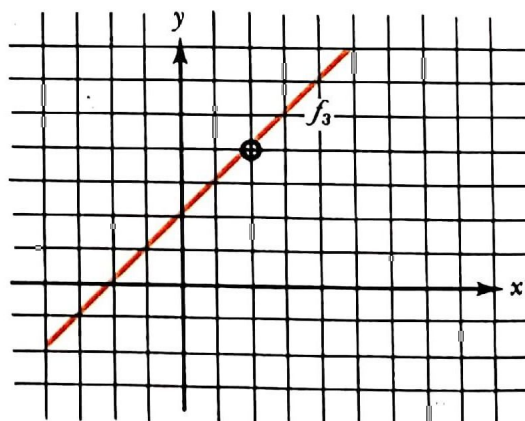
$$N_{r_1}(a) \subset N_{r_2}(a)$$

30 Ahora que sabemos de entornos, continuemos preguntando otra cuestión. Considérese la función f_3 (véase apartado 14) que describimos a continuación:

$$f_3(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \text{ para todo } x \neq 2$$

Convinimos en que

$$\lim_{x \rightarrow 2} f_3(x) = \underline{\hspace{2cm}}$$

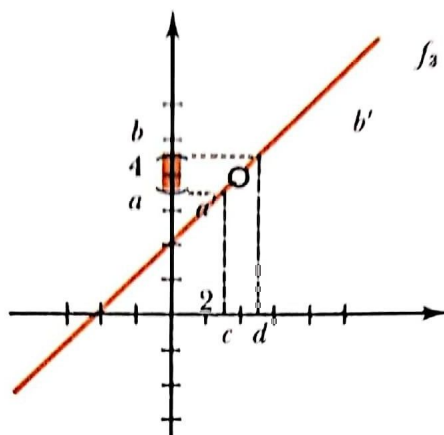


La pregunta es: «¿Para qué x se cumple que $f_3(x) \in N_{1/2}(4)$?»

$$\lim_{x \rightarrow 2} f_3(x) = 4$$

31 Se ve mejor la respuesta geoméricamente:

- Trácese $N_{1/2}(4)$ sobre el eje y .
- Trácese las líneas de puntos desde los extremos a y b del entorno hasta la gráfica.
- Trácese perpendiculares (líneas de trazos) desde los puntos a' y b' , en que las líneas de puntos cortan a la gráfica, hasta el eje x .



(d) Estas líneas de trazos delimitan un intervalo sobre el eje x (c, d) y podemos calcular fácilmente c y d : Observando la gráfica, tenemos:

$$f_3(c) = a \quad \text{y} \quad f_3(d) = \underline{\hspace{2cm}}$$

Por lo tanto, al ser $f_3(x) = x + 2$ para $x \neq 2$, podemos poner

$$\begin{array}{rcl} c + 2 = a & & d + 2 = \underline{\hspace{2cm}} \\ c + 2 = 4 - \frac{1}{2} & & d + 2 = \underline{\hspace{2cm}} \\ c = 4 - \frac{1}{2} - 2 & & d = \underline{\hspace{2cm}} \\ c = \frac{3}{2} & & d = \underline{\hspace{2cm}} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f_3(d) & = & b \\ d + 2 & = & b \\ d + 2 & = & 4 + \frac{1}{2} \\ d & = & 4 + \frac{1}{2} - 2 \\ d & = & \frac{5}{2} \end{array}$$

32 Al ser ahora f_3 una función creciente, podemos contestar a la pregunta: «¿Para qué x se cumple que $f_3(x) \in N_{1/2}(4)$?»

Respuesta: _____

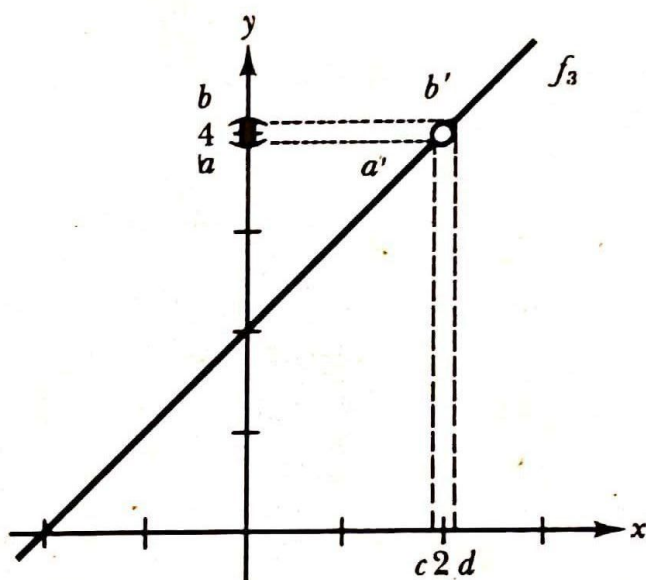
Todos los $x \in N_{1/2}(2)$ (o $x \in (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$) excepto $x = 2$.

Adviértase: Debemos excluir $x = 2$ ya que f_3 no está definida en $x = 2$.

33 Para la misma función f_3 , contéstese la pregunta: «¿Para qué valores de x se cumple que $f_3(x) \in N_{1/10}(4)$?»

- (a) Hágase un buen dibujo ilustrativo de la situación igual que se hizo en el apartado 31.
- (b) Hállense los extremos del entorno sobre el eje x .
- (c) La respuesta a la pregunta es
-

(a)



$$(b) f_3(c) = a = 4 - \frac{1}{10}$$

$$c + 2 = 4 - \frac{1}{10}$$

$$c = 1 \frac{9}{10}$$

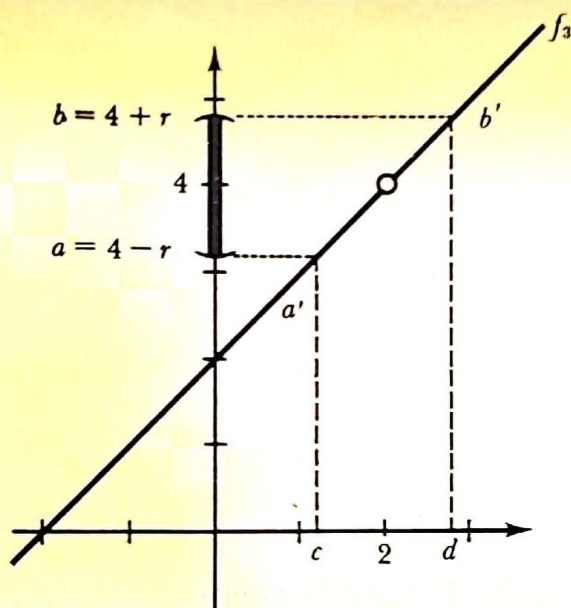
$$f_3(d) = b = 4 + \frac{1}{10}$$

$$d + 2 = 4 + \frac{1}{10}$$

$$d = 2 \frac{1}{10}$$

(c) todo $x \in N_{1/10}(2)$ excepto $x = 2$.

(a)



$$(b) f_3(c) = 4 - r \quad f_3(d) = 4 + r$$

$$2 + c = 4 - r \quad 2 + d = 4 + r$$

$$c = 2 - r \quad d = 2 + r$$

(c) todo $x \in N_r(2)$ excepto $x = 2$.

35 Utilizando el resultado del apartado 34, podemos dar las respuestas a (a) y (b) sin efectuar ningún cálculo.

(a) ¿Para qué valores de x se cumple que $f_3(x) \in N_{1/100}(4)$?

(b) ¿Para qué valores de x se cumple que $f_3(x) \in N_{1/\pi}(4)$?

(a) todo $x \in N_{1/100}(2)$ excepto $x = 2$

(b) todo $x \in N_{1/\pi}(2)$ excepto $x = 2$

36 Notación: En lo que sigue llamaremos *entorno reducido* al conjunto de «todos los $x \in N_r(a)$ excepto $x = a$ » y lo denotaremos sencillamente por $N_r^*(a)$. Con esta notación podemos escribir, por el apartado 34, $f_3(x) \in N_r(4)$ siempre que x _____.

$$x \in N_r^*(2)$$

37 Como segundo ejemplo, consideremos f_1 (véase apartado 7). Recuerdese que:

$$f_1(x) = x^3 + 1 \text{ para todo } x$$

x	-5	-4	-3	-2.5	2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	1.6	1.7	1.8
y	-0.1429	-0.167	-0.2	-0.222	-0.25	-0.286	-0.333	-0.4	-0.5	-0.667	-1	-2	-2.5	-3.333	-5

1.7	1.8	1.9	2	2.01	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	3	4	5
-3.333	-5	-10	100	10	5	3.333	2.5	2	1	0.5	0.333	

$$y = \frac{1}{x-2}$$

$$-5 \leq x \leq 5$$

$$x \cdot y - 2y - 1 = 0$$

$$(x-2) \cdot y = 1$$

- $x = -5 \Rightarrow y = \frac{1}{(-5)-2} = -\frac{1}{7} = -0.1429$
- $x = -4 \Rightarrow y = \frac{1}{(-4)-2} = -\frac{1}{6} = -0.167$
- $x = -3 \Rightarrow y = \frac{1}{(-3)-2} = -\frac{1}{5} = -0.2$
- $x = -2.5 \Rightarrow y = \frac{1}{(-2.5)-2} = -\frac{1}{4.5} = -0.222$

